УДК 517.5

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ[1]

О. А. Кривошеева (Уфа, Россия)
kriolesya2006@yandex.ru

В работе изучается проблема фундаментального принципа для инвариантного подпространства аналитических функций в неограниченной выпуклой области. Получен критерий того, когда каждую функцию из замкнутого подпространства инвариантного относительно оператора дифференцирования можно представить рядом экспоненциальных мономов.

Ключевые слова: Инвариантное подпространство, фундаментальный принцип, неограниченная область.

FUNDAMENTAL PRINCIPLE IN INVARIANT SUBSPACE IN UNBOUNDED DOMAIN[1]

O. A. Krivosheeva (Ufa, Russia)
kriolesya2006@yandex.ru

In the paper fundamental principle problems for invariant subspace of analytic functions in a unbounded convex domain are studied. A criterion for every function from closed subspace and invariant with respect to the differentiation operator may be represented by series of exponential monomials is obtained.

Keywords: invariant subspace, fundamental principle, unbounded domain.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$.

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset D$, и $W \subset H(D)$ — нетривиальное ($W \neq \{0\}, H(D)$) замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования. Спектр этого оператора в подпространстве W является не более чем счетным множеством $\{\lambda_k\}$ ([1], гл.II, §7). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W. Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием $W(\Lambda, D)$ (в пространстве $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. В этой связи отметим, что проблема спектрального синтеза в случае одной переменной полностью решена в работах [1] и [2]. Если D — неограниченная выпуклая область, то всегда верно равенство $W = W(\Lambda, D)$ ([5], теорема 8.2).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00029).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-31-00029).)

Следующим шагом на пути к представлению всех функций из $W(\Lambda, D)$ является решение проблемы фундаментального принципа. Первым результатом в рамках этой проблемы является фундаментальный принцип Л. Эйлера для пространств решений линейных однородных дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами. Любое такое решение записывается в виде конечной суммы $\sum z^n \exp(\lambda_k z)$, где λ_k — корни характеристического многочлена с кратностью n_k и n меняется в пределах от 0 до $n_k - 1$. В случае, когда спектр подпространства W бесконечен, задача представления значительно усложняется. Идеальным вариантом представления функции $g \in W$, безусловно, является ряд

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \tag{1}$$

равномерно сходящийся на компактных подмножествах плоскости. Если каждая $g \in W$ представляется рядом (1), то говорят, что в W имеет место фундаментальный принцип.

Отметим, что в случае, когда D — ограниченная область, проблема фундаментального принципа полностью решена. При этом был получен критерий справедливости фундаментального принципа в $W(\Lambda, D)$, который формулируется в терминах простых геометрических характеристик: индекса конденсации (его определим ниже), угловой плотности последовательности Λ и длины дуги границы области D.

Также был получен критерий справедливости фундаментального принципа в случае всей плоскости. Критерий формулируется только при помощи индекса конденсации.

Все указанные выше результаты, касающиеся решения проблемы фундаментального принципа, были получены автором совместно с А. С. Кривошеевым. С ними можно ознакомится в работах [3–7].

Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\{\bar{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j})|\}_{j=1}^{\infty}$ ($\bar{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной окружности $S(0,1)$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi) = \sup_{z \in D} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

— ее опорная функция. Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : h(\varphi, D) = +\infty\}.$$

Если D — ограниченная область, то $J(D)=\emptyset$. В случае неограниченной области возможны следующие ситуации: 1) $J(D)=S(0,1)$, т.е. $D=\mathbb{C}$, 2) D — полуплоскость $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})<a\}$ и $J(D)=S(0,1)\setminus\{e^{i\varphi}\}$, 3) D — полоса $\{z\in\mathbb{C}:b<\operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})<a\}$ и $J(D)=S(0,1)\setminus\{e^{i\varphi},e^{i\varphi+\pi}\}$, 4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π.

Пусть $n(r,\Lambda)$ — число точек λ_k с учетом их кратностей n_k, которые попадают в круг $B(0,r)$. Верхней плотностью последовательности Λ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Также, следуя работе [3], положим

$$q_\Lambda(z,w,\delta)=\prod_{\lambda_k\in B(w,\delta|w|)}\left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k},$$

$$q_\Lambda^k(z,\delta)=\prod_{\lambda_m\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),m\neq k}\left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m}.$$

Модуль функции $q_\Lambda(z,w,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k\in B(w,\delta|w|)$ около точки z. Если $B(w,\delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k ($\lambda_m\neq\lambda_k$), считаем, что $q_\Lambda(z,w,\delta)\equiv 1$. Величина $\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от точек $\lambda_k\in B(w,\delta|w|)$ до точки z. Положим

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|}.$$

Величина S_Λ называется индексом конденсации (А.С. Кривошеева). Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева.

Следующий результат распространяет решение проблемы фундаментального принципа в случае всей плоскости на произвольные неограниченные области.

Теорема. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ *имеет конечную верхнюю плотность* $\bar{n}(\Lambda)$, D *— неограниченная выпуклая область. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) каждая функция $g\in W(\Lambda,D)$ *представляется рядом (1) во всей плоскости;*

2) $\Xi(\Lambda)\subset J(D)$, $S_\Lambda>-\infty$.

Замечание. Если $\bar{n}(\Lambda) < \infty$, то по теореме Абеля для рядов экспоненциальных мономов (см. [8]) из сходимости ряда (1) во всей плоскости следует его абсолютная сходимость и равномерная сходимость на компактах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Красичков-Терновский И. Ф.* Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях // Докл. АН СССР. — 1971 Т. 197, № 1. С. 29–31.

[2] *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972 Т. 87(129), № 4. С. 459–489.

[3] *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. матем. 2004 Т. 68, № 2. С. 71–136.

[4] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 12. С. 49–104.

[5] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 684–697.

[6] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве целых функций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 2. С. 132–195.

[7] *Кривошеева О. А.* Ряды экспоненциальных многочленов: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 2018. 174 с.

[8] *Кривошеева О. А.* Область сходимости рядов экспоненциальных мономов // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 2. С. 43–56.