УДК 517.518.82

СУММЫ ТИПА РЭЛЕЯ ДЛЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ[1]

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Изучается уравнение вида

$$a\,z\,J_\nu'(z)\,+\,b\,J_\nu(z)=0,\qquad z\in\mathbb{C},$$

с параметрами ν, a, $b\in\mathbb{C}$, $|a|+|b|>0$, и функцией Бесселя $J_\nu(z)$. Доказана серия специальных суммационных соотношений, действующих для корней уравнения при различных сочетаниях параметров. Полученные результаты согласуются с теорией классических сумм Рэлея, вычисляемых по нулям функции Бесселя. Подобные уравнения возникают в спектральной задаче с наклонной производной для оператора Лапласа.

Ключевые слова: задача с наклонной производной, оператор Лапласа, функции Бесселя, нули функций Бесселя, суммы типа Рэлея.

SUMS OF RAYLEIGH TYPE FOR THE ROOTS OF THE EQUATION ASSOCIATED WITH THE SPECTRAL PROBLEM[1]

A. B. Kostin, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

We study equation of the form

$$a\,z\,J_\nu'(z)\,+\,b\,J_\nu(z)=0,\qquad z\in\mathbb{C},$$

with parameters ν, a, $b\in\mathbb{C}$, $|a|+|b|>0$, and the Bessel function $J_\nu(z)$. A series of special summation relations is proved that are valid for the roots of the equation for various combinations of parameters. The results are consistent with the theory of classical Rayleigh sums calculated from the zeros of the Bessel function. Similar equations arise in the spectral problem with an oblique derivative for the Laplace operator.

Keywords: oblique derivative problem, Laplace operator, Bessel functions, zeros of Bessel functions, sums of Rayleigh type.

В работе [1] изучался вопрос о расположении на комплексной плоскости собственных значений $\lambda=\mu^2$ следующей спектральной задачи для оператора Лапласа в круге:

$$\Delta w+\mu^2 w=0 \ \text{ в } \ D=\big\{(x,\,y)\mid x^2+y^2<1\big\}\,,\ \ \frac{\partial w}{\partial \ell}=0 \ \text{ на } \ \partial D. \qquad (1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\mu^2\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр, ℓ — направление, составляющее фиксированный угол $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ с внешней нормалью n к ∂D. Наш интерес к этой тематике был стимулирован

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).
[1]The article is done with the financial support of RFBR(project № 18-01-00236).

известной статьей [2], в которой доказано отсутствие свойства базисности в $L_2(D)$ у системы корневых функций задачи (1). В [2] (см. также [1]) показано, что все собственные значения спектральной задачи (1) описываются корнями уравнений вида

$$\mu\, J_n'(\mu)\cos\alpha + i\, n\, J_n(\mu)\sin\alpha \;=\; 0, \tag{2}$$

с параметрами $n\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ и функцией Бесселя $J_n(\mu)$ переменной $\mu\in\mathbb{C}$.

Если $0<|\alpha|<\pi/2$, то из общей теории целых функций и результатов работы [1] вытекает, что при фиксированном $n\neq 0$ уравнение (2) имеет бесконечное счетное множество нетривиальных корней. Все они являются простыми, не попадают на действительную и мнимую оси, располагаясь симметрично относительно точки $\mu=0$.

В докладе будут представлены результаты о вычислении сумм четных степеней обратных величин нетривиальных корней уравнения вида (2) и его естественного обобщения. Для описания характера этих результатов введем четную целую функцию экспоненциального типа

$$L(\mu;n,\alpha)\equiv\frac{\mu\, J_n'(\mu)\cos\alpha + i\, n\, J_n(\mu)\sin\alpha}{(\mu/2)^n},\quad \mu\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

При $\mu\neq 0$ уравнение (2) равносильно уравнению $L(\mu;n,\alpha)=0$ с совпадением кратностей корней. Функция (3) имеет бесконечное счетное множество корней. Обозначим это множество через $\{\pm\mu_{n,k}(\alpha)\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\mu_{n,k}(\alpha)$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re}\mu>0$, упорядочены по возрастанию модулей, и $\mu_{n,k}(\alpha)\to\infty$ при $k\to\infty$. Очевидная цепочка соотношений

$$L(\mu;n,\alpha)=0\Leftrightarrow L(\overline{\mu};n,-\alpha)=0\Leftrightarrow L(\overline{\mu};-n,\alpha)=0\Leftrightarrow L(\mu;-n,-\alpha)=0$$

позволяет ограничиться изучением корней $\mu\in\mathbb{C}$ уравнения

$$L(\mu;n,\alpha)=0,\qquad n\in\mathbb{N},\quad \alpha\in[0,\pi/2]. \tag{4}$$

В ходе нашего исследования корней уравнения (4) (см. [1]) были получены явные формулы для сумм специальной структуры, содержащих корни $\mu_{n,k}(\alpha)$. В частности, найдено соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_{n,k}^2(\alpha)}=\frac{n+2\cos^2\alpha}{4n(n+1)}-i\,\frac{\sin 2\alpha}{4n(n+1)}=\frac{n+1+e^{-2\alpha i}}{4n(n+1)}, \tag{5}$$

выполненное для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in[0,\pi/2]$. При $\alpha=\pi/2$ формула (5) дает выражение

$$\sigma^{(2)}(n)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{j_{n,k}^2}=\frac{1}{4(n+1)}$$

для первой из классических *сумм Рэлея* (см. [3–5])

$$\sigma^{(2m)}(n) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,k}^{2m}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

где $j_{n,k}$ — положительные корни функции Бесселя $J_n(\mu)$. При $\alpha = 0$ формула (5) также хорошо известна (см. [6–8]) и принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{j'}_{n,k}^{2}} = \frac{n+2}{4n(n+1)},$$

где $j'_{n,k}$ — положительные корни производной $J'_n(\mu)$ функции Бесселя.

В процессе получения основных суммационных соотношений вида (5) авторы обнаружили большое количество работ [3–12] на близкую тему. В цитированных исследованиях представлен ряд формул для сумм натуральных (четных) степеней обратных величин корней уравнения типа (4), но, как правило, без явного описания области изменения параметров в формулах и без обоснования ряда ключевых моментов вывода. На наш взгляд, в изложении этих вопросов наиболее последовательны П. Л. Капица [7] и Н. Н. Мейман [8], рассмотревшие уравнения

$$J_\nu(z) = 0, \quad \nu > -1, \tag{6}$$

$$z\,J'_\nu(z) - H\,J_\nu(z) = 0, \quad \nu + 1/2 \geqslant 0, \quad H \geqslant 0. \tag{7}$$

В (6), (7) даны ограничения на параметры из работы [7]. Эти ограничения гарантируют вещественность корней и сходимость интегралов в методе Капицы. В статье [8], написанной под несомненным влиянием [7], но содержащей новый подход, относительно параметров сказано лишь, что ν отлично от целого отрицательного числа, и можно считать $\nu \neq H$. При этом не ясно, допускаются ли в формулах из [8] комплексные значения ν и H. В других известных нам работах на эту тему анализ и описание допустимых значений параметров или отсутствуют или проведены не достаточно полно. Отметим также, что уравнение (6) с произвольным комплексным ν изучалось в классическом трактате [4, гл. 15]. Там обосновано существование бесконечного счётного множества корней, показано, что все корни лежат в некоторой горизонтальной полосе, и приведены выражения для сумм Рэлея $\sigma^{(2m)}(\nu)$ при $m = 1, 2, 3, 4, 5$, но без указания ограничений на параметр ν.

Указанные обстоятельства дают повод рассмотреть обобщение уравнения (2) в виде

$$azJ'_\nu(z) + bJ_\nu(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

с параметрами ν, a, $b \in \mathbb{C}$ такими, что $|a| + |b| > 0$.

Корни $z \neq 0$ уравнения (8) будем называть *нетривиальными*.

Зафиксируем произвольные ν, a, $b \in \mathbb{C}$, $|a| + |b| > 0$. Нетривиальные корни уравнения (8) расположены в некоторой горизонтальной полосе на плоскости $\mathbb{C}$ симметрично относительно точки $z = 0$. Обозначим эти корни $\pm\mu_{\nu,k}(a,b) \equiv \pm\mu_{\nu,k}$, $k \in \mathbb{N}$, где $\mu_{\nu,k}$ — корни (8), лежащие в $\{\operatorname{Re} z > 0\} \cup \{\operatorname{Re} z = 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ и занумерованные в порядке возрастания модуля. Тогда $\mu_{\nu,k} \to \infty$, $\operatorname{Re}\mu_{\nu,k} \to +\infty$ при $k \to \infty$. По аналогии с классическими суммами Рэлея [3] определим *суммы типа Рэлея*

$$\eta^{(r)}(\nu, a, b) \equiv \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(\pm\mu_{\nu,k}(a,b))^r}, \qquad r \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Введём целую четную функцию

$$L(z) = L(z; \nu, a, b) \equiv \frac{azJ'_\nu(z) + bJ_\nu(z)}{(z/2)^\nu}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

нули которой совпадают с нетривиальными корнями уравнения (8). Показатель сходимости последовательности корней функции $L(z)$ равен единице. Поэтому ряд (9) в общем случае сходится абсолютно лишь при $r > 1$. При всех нечетных $r = 2m - 1$ сумма $\eta^{(2m-1)}(\nu; a, b)$ ряда (9) равна нулю, а при четных $r = 2m$ имеем формулу

$$\eta^{(2m)}(\nu, a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{\nu,k}^{2m}(a,b)}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Для всех значений $m \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ справедливы рекуррентные формулы Меймана (ср. с [8]; см. также [5])

$$\sigma^{(2m+2)}(\nu) = \frac{1}{m+\nu+1} \sum_{p=1}^{m} \sigma^{(2p)}(\nu)\, \sigma^{(2m+2-2p)}(\nu), \tag{10}$$

где $\sigma^{(2)}(\nu) = 1/(4(\nu+1))$. Мы выводим аналогичные соотношения

$$\eta^{(2)}(\nu, a, b) = \frac{a}{2(a\nu+b)} - \frac{a\nu-b}{a\nu+b}\, \sigma^{(2)}(\nu) \equiv \frac{a\nu+b+2a}{4(\nu+1)(a\nu+b)},$$

$$\eta^{(2m+2)}(\nu, a, b) = \frac{2a}{a\nu+b} \sum_{p=1}^{m} \sigma^{(2p)}(\nu)\, \eta^{(2m+2-2p)}(\nu, a, b) - \frac{a\nu-b}{a\nu+b}\, \sigma^{(2m+2)}(\nu),$$

справедливые для $m \in \mathbb{N}$ при всех значениях ν, a, $b \in \mathbb{C}$ таких, что $a\nu + b \neq 0$ и $\nu \notin \{-1, -2, \ldots\}$. Случаи $a\nu + b = 0$, $\nu \in \{-1, -2, \ldots\}$ рассматриваются отдельно. Используя новые соотношения и (10), находим, например,

$$\eta^{(6)}(\nu, a, b) = \frac{2a^2(\nu+1)(5a\nu+8a+3b)+(a\nu+b+2a)^3}{2^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)(a\nu+b)^3},$$

где $c = a\nu + b + 2a$; ν, a, $b \in \mathbb{C}$, $a\nu + b \neq 0$, $\nu \notin \{-1, -2, \ldots\}$.

Получены также рекуррентные формулы для сумм $\eta^{(2m)}(\nu, a, b)$ через такие же суммы, но более низких порядков.

Приведем еще формулу для специальной двойной суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,m}^2 - \mu_{n,k}^2(\alpha)} = \frac{n+2+i\,n\,\operatorname{tg}\alpha}{8(n+1)}.$$

При $\alpha = 0$ формула записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,m}^2 - j_{n,k}'^2} = \frac{n+2}{8(n+1)}$$

и авторам в литературе не встречалась.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* On complex roots of an equation arising in the oblique derivative problem // IOP Conf. Series: Journal of Physics : Conf. Series, 2017. Vol. 788. P. 1–7. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/788/1/012052

[2] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифференциальные уравнения, 1994. Т. 30, № 1. С. 128–143.

[3] *Rayleigh* Note on the Numerical Calculation of the Roots of Fluctuating Functions // Proc. London Math. Soc. 1874. Vol. 5. P. 119–124.

[4] *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Наука, 1949.

[5] *Kishore N.* The Rayleigh Function // Proc. London Math. Soc., 1963. Vol. 14. P. 527–533.

[6] *Lamb H.* Note on the Induction of Electric Currents in a Cylinder placed across the Lines of Magnetic Force // Proc. London Math. Soc., 1884. Vol. 15. P. 270–274.

[7] *Капица П. Л.* Вычисление сумм отрицательных четных степеней корней Бесселевых функций // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 4. С. 561–564.

[8] *Мейман Н. Н.* О рекуррентных формулах для степенных сумм нулей Бесселевых функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 2. С. 190–193.

[9] *Керимов М. К.* Функция Рэлея теория и методы вычисления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39, № 12. С. 1962–2006.

[10] *Kerimov M. K.* Overview of some new results concerning the theory and applications of the Rayleigh special function // Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, № 9. P. 1454–1507.

[11] *Kishore N.* A Class of Formulas for the Rayleigh Function // Duke Math. J. 1967. Vol. 34, № 3. P. 573–579.

[12] *Muldoon M. E., Raza A.* Convolution Formulas for Functions of Rayleigh Type // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 9327–9330.