УДК 517.95

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Приводятся доказательства полученных ранее результатов в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом и закрепленными концами при минимальных требованиях на начальные данные.

Ключевые слова: волновое уравнение, закрепленные концы, классическое решение.

ON THE MIXED PROBLEM FOR NON-HOMOGENEOUS WAVE EQUATION

V. V. Kornev, A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

The proofs are given of the results derived earlier in the mixed problem for non-homogeneous wave equation with a summable potential and fixed end points is derived in the form of the series under minimal conditions on initial data.

Keywords: wave equation, fixed end points, classic solution.

В данной работе приводятся доказательства теорем из [1].

Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x,t \in Q = [0,1] \times [0,T], \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \qquad (2)$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L(Q)$. В дальнейшем считаем, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены на $[-1,1]$ нечетным образом, а затем 2 — периодически на всю ось, $q(x)$ продолжена четным образом на $[-1,1]$ и 2 — периодически на всю ось.

Под решением (1), (2) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (2), у которой $u'_t(x,t)$ и $u'_x(x,t)$ абсолютно непрерывны по t и x соответственно и которая удовлетворяет (1) почти всюду. Через Π обозначим множество суммируемых в Q функций $f(x,t)$, нечетных и 2 — периодических по $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right), \quad u_2(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau,$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\tau,$$

где "волна"означает, что функция $\widetilde{g}(\eta,\tau)$ — нечетная и 2 — периодическая по $\eta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{g}(\eta,\tau) = g(\eta,\tau)$ при $\eta,\tau \in Q$.

Лемма 1. *Если $u(x,t)$ — решение задачи (1), (2) при $q(x) = 0$, то*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t),$$

причем $u_1(x,t)$ — решение (1), (2) при $q(x) = \psi(x) = f(x,t) = 0$, $u_2(x,t)$ – решение при $q(x) = \varphi(x) = f(x,t) = 0$, $u_3(x,t)$ — решение при $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$.

Справедливость этой леммы следует из результатов работы [2].

Лемма 2. *Пусть $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$, $f(x,t) \in L(Q)$, почти при каждом x $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t и $f'_t(x,t) \in L(Q)$. Тогда $u_3(x,t)$ — решение задачи (1), (2).*

Эта лемма совпадает с теоремой 3 из [2].

Теорема 1. *Если решение задачи* (1), (2) *существует, то оно является решением уравнения*

$$u(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\eta)\widetilde{u}(\eta,\tau)d\eta = F(x,t), \tag{3}$$

где $F(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$.

Справедливость этой теоремы вытекает непосредственно из лемм 1, 2.

Введем в рассмотрение оператор $B : C(Q) \to C(Q)$, действующий по формуле

$$Bv = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\eta)v(\eta,\tau)d\eta,$$

где непрерывная в Q функция $v(x,t)$ продолжена соответствующим образом и в интеграле рассматривается как $v(x,t) \in \Pi$.

Уравнение (3) запишем в виде

$$u(x,t) = Bu + F(x,t). \tag{4}$$

Теорема 2. *При $F(x,t) \in C(Q)$ уравнение* (4) *имеет единственное непрерывное решение, которое определяется формулой*

$$u(x,t) = F(x,t) + BF + B^2F + \dots . \tag{5}$$

Доказательство. Из оценок, полученных в лемме 16 в работе [2], следует, что B является линейным ограниченным оператором, причем некоторая его степень является сжимающим оператором в $C(Q)$ (отсюда следует единственность решения уравнения (4)), и ряд (5) сходится абсолютно и равномерно в Q. Обозначим его сумму $w(x,t)$. Тогда

$$w(x,t) = F(x,t) + BF + B^2F + \ldots = F(x,t)+$$

$$+B\left(F(x,t) + BF + B^2F + \ldots\right) = F(x,t) + Bw.$$

Следовательно, $w(x,t)$ — решение (4).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Предположим, что* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ *— абсолютно непрерывны,* $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда задача* (1), (2) *имеет решение, которое определяется по формуле* (5).

Доказательство. Непосредственная проверка, а также лемма 2, показывают, что при сделанных предположениях функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ имеют тот же смысл, что и в лемме 1. Следовательно $F(x,t)$ есть решение задачи (1), (2) при $q(x) = 0$. Обозначим сумму ряда (5) как $w(x,t)$. По теореме 2 справедливо тождество

$$w(x,t) \equiv F(x,t) + Bw. \tag{6}$$

По лемме 2 функция Bw является решением задачи (1), (2) при $q(x) = 0$, $f(x,t) = -q(x)w(x,t)$ и нулевых краевых и начальных условиях. Следовательно, почти всюду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right) w(x,t) = f(x,t) - q(x)w(x,t),$$

и выполняются условия $w(0,t) = w(1,t) = 0$, $w(x,0) = \varphi(x)$, $w'_t(x,0) = = \psi(x)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения // Понтрягинские чтения – XXIX : материалы международн. конф., посвящ. 90-летию В. И. Ильина (Москва, 2–6 мая 2018). М. : Изд-во МАКС-Пресс, 2018. С. 132–133.

[2] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300, DOI: https://doi.org/10.1134/s004446691902009/