УДК 517.518.126

# О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ НА СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ХЕНСТОКА – КУРЦВЕЙЛЯ

**С. Н. Копылов (Москва, Россия)**
ksergei16@yandex.ru

Рассматриваются свойства интеграла Хенстока–Курцвейля при наложении ограничений на масштабную функцию. Представлено доказательство утверждения о связи классов интегрируемых функций и классов масштабных функций в ряде частных случаев.

*Ключевые слова:* теория функций, теория интегрирования, интеграл Хенстока–Курцвейля.

# ABOUT EFFECT OF GAUGE FUNCTIONS ON PROPERTIES OF THE HENSTOCK – KURZWEIL INTEGRAL

**S. N. Kopylov (Moscow, Russia)**
ksergei16@yandex.ru

Investigation of the Henstock–Kurzweil integral properties with a gauge under imposed restrictions is given. The statement about connection between classes of integrable functions and classes of gauges is proved in a number of particular cases

*Keywords:* real analysis,theory of integration, gauge integral.

Одним из обобщений интеграла Лебега на отрезке является интеграл Хенстока–Курцвейля. Его конструкция схожа с конструкцией интеграла Римана, однако определение использует понятия масштабной функции и $\delta$-разбиения. Необходимое и достаточное условие интегрируемости в смысле Хенстока–Курцвейля [1] определяет класс интегрируемых функций. Ограничив выбор масштабных функций, можно получить сужение интеграла Хенстока–Курцвейля на более узкий класс функций. Данная работа представляет собой исследование свойств интеграла Хенстока–Курцвейля при некоторых ограничениях на класс масштабных функций.

**Определение 1.** Пусть $[a, b]$ — отрезок, а $\delta(x)$ — положительная функция, определенная на нем. Система $\tau = \{(\xi_i, \Delta_i)\}_{i=1}^n$ называется *$\delta$-разбиением Хенстока*, если выполняются следующие условия:

1. $\xi_i \in \Delta_i \subset \big(\xi_i - \delta(\xi_i),\ \xi_i + \delta(\xi_i)\big)$ для всех $i = 1, \dots, n$
2. $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ - система неперекрывающихся отрезков
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i = [a, b]$

Существование такого разбиения немедленно следует из леммы Гейне–Бореля о конечном покрытии. Функцию $\delta(x)$ обычно называют масштабом.

**Определение 2.** *Интеграл Хенстока–Курцвейля.* Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нём в смысле Хенстока–Курцвейля со значением $I$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta(x) > 0$, что для любого $\delta$-разбиения $\tau = \{(\xi_i, \Delta_i)\}_{i=1}^{n}$ выполняется следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i| - I \right| < \varepsilon.$$

Пишут $(\mathcal{H}) \int\limits_a^b f(x)\, dx = I$.

В определении выше ничего не сказано о выборе масштабных функций. Тем не менее, если ограничиться выбором масштабных функций только лишь из одного класса, то можно получить сужение интеграла Хенстока–Курцвейля. Например, ограничившись выбором только лишь непрерывных масштабных функций, класс интегрируемых функций будет совпадать с таким для интеграла Римана. Из работы Пфеффера [2] следует, что ограничившись выбором полунепрерывных сверху масштабных функций, класс интегрируемых функций не изменится. Следующая теорема относится к тому же направлению исследований.

**Теорема 1.** *Для любого фиксированного $1 \le p \le \infty$, ограничившись в выборе масштабных функций $\delta(x)$ такими функциями, что $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a, b])$, получим конструкцию интеграла, класс интегрируемых функций которого целиком лежит в $L_p([a, b])$.*

Вопрос о том, совпадает ли упомянутый класс интегрируемых функций с $L_p([a, b]$ остаётся открытым в случае $1 \le p < \infty$. В случае $p = \infty$ вопрос разрешается отрицательно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Лукашенко Т. П., Скворцов В.А., Солодов А.П.* Обобщённые интегралы. М. : Книжный дом «Либроком», 2011. 280 с.

[2] *Pfeffer W. F.* A note on the generalized Riemann integal // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103, № 4,. C. 1161–1166.