УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ КРЕСТАМ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев (Нур-Султан, Казахстан; Екатеринбург, Россия)
akishev_g@mail.ru

В докладе рассматривается пространство Лоренца периодических функций многих переменных. Доказаны неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов с номерами гармоник из ступенчатых гиперболичских крестов в пространстве Лоренца.

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрический полином, гиперболический крест.

THE INEQUALITY FOR TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS BY HYPERBOLIC CROSSES IN LORENTZ SPACE[1]

G. Akishev (Nur-Sultan, Kazakhstan)
akishev_g@mail.ru

The talk consider the Lorentz space of periodic functions of many variables. Inequalities of different metrics for trigonometric polynomials with harmonic numbers from step hyperbolic crosses in Lorentz space are proved.

Keywords: Lorentz space, trigonometric polynomial, hyperbolic cross.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j \le 1;\ j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют 2π- период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

конечна, где $f^*(y)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$, $0 < p < \infty, 0 < \tau < \infty$ (см. [1], с. 216).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

[1] This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University

В случае $1 \leqslant \tau = p < \infty$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$. В дальнейшем $\|f\|_\infty = \max\limits_{\bar{x}\in\mathbb{T}^m}|f(\bar{x})|$ – норма в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{T}^m)$.

Для данного вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$,$\gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant \gamma_m$ рассмотрим множество $Q_n^{(\bar{\gamma})} = \cup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s})$ — ступенчатый гиперболический крест.

Рассмотрим тригонометрический полином по ступенчатому гиперболическому кресту (см. [2])

$$T_{n,\bar{\gamma}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{(\bar{\gamma})}} b_{\bar{k}} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$.

Для кратного тригонометрического полинома

$$T_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\overline{k}} e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle},$$

С. М. Никольский [3] доказал следующее неравенство

$$\|T_{\bar{n}}\|_q \leqslant 2^m \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p-1/q} \|T_{\bar{n}}\|_p, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty.$$

В данное время имеются различные обобщения этого неравенства Джексона–Никольского и тесно связанного с ним неравенства Бернштейна для полиномов об оценке нормы производной полинома через норму заданного пространства (см. например [4]– [8] и библиографии в них). Одним из обобщений является распространение неравенства Джексона — Никольского на пространства Лоренца [6]– [8]. Для тригонометрического полинома одной переменной T_n в пространстве Лоренца Л. А. Шерстнева [6] доказала точное по порядку неравенство

$$\|T_n\|_{p,\tau_2} \leqslant C(\log(n+1))^{1/\tau_2-1/\tau_1}\|T_n\|_{p,\tau_1},$$

для $0 < \tau_2 < \tau_1 < \infty,\ 1 < p < \infty$. В [8] доказан следующий многомерный вариант этого неравенства

$$\|T_{\bar{n}}\|_{p,\tau_2} \leqslant C\Big(\log\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/\tau_2-1/\tau_1}\|T_{\bar{n}}\|_{p,\tau_1}$$

при $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$, $1 < p < \infty$. Точность этого неравенства доказано в [9].

В 2018 году во время доклада автора на школе-конференции С. Б. Стечкина (г. Кыштым, Россия) профессор Арестов В.В. задал вопрос: какой вид будет иметь это неравенство для полиномов с номерами гармоник в множествах отличных от m– мерных параллелепипедов?

В докладе дается ответ на этот вопрос для тригонометрических полиномов по ступенчатым гиперболическим крестам.

Неравенство разных метрик в пространстве Лебега для тригонометрических полиномов с номерами гармоник из гиперболичских крестов доказаны в [2]. В частности, для тригонометрических полиномов по ступенчатым гиперболическим крестам из теоремы 2.3 [2] следует, что

$$\sup_{T_{n,\gamma}\neq 0} \frac{\|T_{n,\gamma}\|_q}{\|T_{n,\gamma}\|_p} \asymp 2^{n(1/p-1/q)} \tag{1}$$

при $1 \leqslant p < q < \infty$. В случае $0 < p < 1$ доказано в [7].

Здесь и в дальнейшем запись $A_n \asymp B_n$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 независящие от $n \in \mathbb{N}$ такие, что $C_1 A_n \leqslant B_n \leq C_2 A_n$.

Известно , что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ если $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$ (см. [1], с. 217).

Доказаны неравенства разных метрик в пространстве Лоренца для полиномов $T_{n,\gamma}$ при различных соотношениях между параметрами p, q, τ_1, τ_2.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$. Тогда выполняется соотношение*

$$\sup_{T_{n,\bar\gamma}\neq 0} \frac{\|T_{n,\bar\gamma}\|_\infty}{\|T_{n,\bar\gamma}\|_{p,\tau}} \asymp 2^{\frac{n}{p}} n^{(m-1)(1-\frac{1}{\tau})}.$$

Теорема 2. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1$. Если $2 < \tau_1 < \infty$, то выполняется соотношение*

$$\sup_{T_{n,\bar\gamma}\neq 0} \frac{\|T_{n,\bar\gamma}\|_{q,\tau_2}}{\|T_{n,\bar\gamma}\|_{p,\tau_1}} \asymp 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Если $\tau_1 \leqslant 2$, то выполняются неравенства

$$C_1 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \leqslant \sup_{T_{n,\bar\gamma}\neq 0} \frac{\|T_{n,\bar\gamma}\|_{q,\tau_2}}{\|T_{n,\bar\gamma}\|_{p,\tau_1}} \leqslant C_2 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}.$$

Теорема 3. *Если* $1 < p < q \leqslant 2$, $1 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 2$ *или* $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1 \leqslant 2 < \tau_2 < \infty$ *или* $2 < p < q < \infty$, $2 < \tau_1 \leqslant \tau_2 < \infty$, *то*

$$\sup_{T_{n,\bar{\gamma}} \neq 0} \frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{q,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \asymp 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1$. *Если* $2 < \tau_1 < \infty$, *то*

$$\sup_{T_{n,\bar{\gamma}} \neq 0} \frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \asymp n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Если $\tau_1 \leqslant 2$, *то выполняются неравенства*

$$C_2 n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \leqslant \sup_{T_{n,\bar{\gamma}} \neq 0} \frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \leqslant C_1 n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}.$$

Отметим, что при $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ из теоремы 3 следует (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 332 с.

[2] *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИ АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

[3] *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИ АН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.

[4] *Иванов В. И.* Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Тр. МИ АН СССР. 1980. Т. 145. С. 79–110.

[5] *Арестов В. В., Глазырина П. Ю.* Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.

[6] *Шерстнева Л. А.* Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1984. № 4. С. 75–79.

[7] *Temlyakov V. N., Tikhonov S.* Remez–type and Nikol'skii–type inequalities: general relations and the hiperbolic cross polynomials// Constr. Approx. 2017. Vol. 46, № 3. P. 593–615.

[8] *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21.

[9] *Акишев Г.* О точности неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 9–20.