УДК 517.5

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РАНГАХ УСТОЙЧИВЫХ МАТРИЦ

Б. В. Коноплев (Саратов, Россия)
borikon@bk.ru

Обобщенным рангом (функцией ранга) матрицы A называется $\mathrm{rank}(A, k)$, равный минимальному рангу матрицы, получаемой из A изменением не более k ее элементов. Для произвольных матриц дается верхняя оценка $\mathrm{rank}(A, k)$. В случае устойчивых матриц установлены неулучшаемая гладкая нижняя оценка и точная формула для $\mathrm{rank}(A, k)$.

Ключевые слова: матрица, ранг, Л Г. Валиант, устойчивая матрица, обобщенный ранг (функция ранга) матрицы, верхняя и нижняя оценка.

ON GENERALIZED RANKS OF RIGID MATRICES

B. V. Konoplev (Saratov, Russia)
borikon@bk.ru

Minimal rank of a matrix obtained from a given matrix A by changing of less than k entries is called its generalized rank (rank function): $\mathrm{rank}(A, k)$. For arbitrary matrices an upper bound of $\mathrm{rank}(A, k)$ is given. In the case of rigid matrices, an unimprovable smooth lower bound and a precise formula for $\mathrm{rank}(A, k)$ are set.

Keywords: matrix, rank, L. G. Valiant, igid matrix, generalized rank (rank function) of a matrix, upper and lower bound.

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n \times n$, $n \geq 2$ над некоторым полем F. Под $\mathrm{rank}(A)$ будем понимать ранг этой матрицы в традиционном смысле. Ранг нулевой матрицы считаем равным нулю. Плотностью матрицы A назовем $\mathrm{dens}(A) = |\,\mathrm{supp}(A)|$, то есть количество ее ненулевых элементов.

В 1977 году Л. Г. Валиант [1] ввел понятие функции устойчивости (жесткости) матрицы от аргумента r, определяемое как минимальное число изменений элементов матрицы A, необходимое для получения матрицы ранга не выше r:

$$\mathrm{rig}(A, r) = \min_B \{\mathrm{dens}(B) \;\big|\; \mathrm{rank}(A - B) \leq r\},$$

где B пробегает все матрицы размера $n \times n$, а r изменяется от 0 до n.

Нетрудно видеть, что дискретная функция $\mathrm{rig}(A, r)$ невозрастающая для всех матриц A.

Как отметил Валиант, для всех значений r выполняется неравенство

$$\mathrm{rig}(A, r) \leq (n - r)^2.$$

Он же доказал существование над каждым бесконечным полем при любом n матриц, достигающих при всех r максимальной устойчивости $(n - r)^2$. Будем называть такие матрицы *устойчивыми*. Значения их функции устойчивости при возрастании r образуют регрессию ряда из квадратов: 0, 1, 4, 9, ..., n^2.

С. Ф. Лукомский сообщил нам о задаче, предложенной В. Н. Темляковым в сентябре 2018 года на международной конференции «High-Dimensional Approximation and Discretization»:

Определение 1. *Обобщенным рангом (функцией ранга) произвольной матрицы A при каждом $0 \le k \le n^2$ называется*

$$\operatorname{rank}(A,k) = \min_B \{\operatorname{rank}(A-B) \bigm| \operatorname{dens}(B) \le k\}.$$

Задача. Построить в явном виде устойчивые матрицы, для которых

$$\operatorname{rank}(A, n^{1+\delta}) \ge \delta n, \quad 0 \le \delta \le 1. \tag{1}$$

Покажем, что для произвольных матриц A условие (1) может выполняться лишь отчасти при росте δ от 0 до некоторого значения; затем неравенство меняется в противоположную сторону.

Изучим, как изменяется обобщенный ранг матрицы с ростом k от 0 до n^2.

Рассмотрим

$$\operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A,r)).$$

Сравнивая определение функции устойчивости и определение 1, получаем оценку

$$\operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A,r)) \le r, \quad 0 \le r \le n. \tag{2}$$

Можно показать, что дискретная функция $\operatorname{rank}(A,k)$ невозрастающая; поэтому (2) приводит к неравенствам

$$\operatorname{rank}(A, (n-r)^2) \le \operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A,r)) \le r$$

и

$$\operatorname{rank}(A, r^2) \le \operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A, n-r)) \le n-r, \quad 0 \le r \le n. \tag{3}$$

Оценка (3) означает, что график функции $\operatorname{rank}(A,k)$ расположен не выше графика ступенчатой функции $n - [\sqrt{k}]$. Отсюда для любой матрицы A справедлива верхняя оценка

$$\operatorname{rank}(A,k) \le n - [\sqrt{k}], \quad 0 \le k \le n^2.$$

Теперь обратимся к неравенству (1). Обозначим $k = n^{1+\delta}$, тогда

$$\delta = \log_n \frac{k}{n}, \quad n\delta = \log_n \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

При $\delta = 0$ правая часть (1) равна 0, и неравенство очевидно выполняется. Затем правая часть (1) растет до своего наибольшего значения n при $\delta = 1$, где неравенство очевидно не выполняется, так как левая часть равна 0. На этом пути логарифмическая кривая роста правой части (1) пересекает ступенчатый график, и неравенство перестает выполняться.

Для устойчивой матрицы $\mathrm{rig}(A, r) = (n - r)^2$, причем для любых матриц B с $\mathrm{dens}(B) \le (n - r)^2$ будет $\mathrm{rank}(A - B) \ge r$, так как, если бы ранг понижался до $r_0 < r$, то вместо положенных $(n - r_0)^2$ изменений он достигался бы за меньшее их число $\le (n - r)^2$, что противоречит устойчивости A. Откуда, используя (3),

$$\begin{gathered}\mathrm{rank}(A, \mathrm{rig}(A, r)) = \mathrm{rank}(A, (n - r)^2) = \\ = \min_B \{\mathrm{rank}(A - B) \,\big|\, \mathrm{dens}(B) \le (n - r)^2\} \ge r, \\ \mathrm{rank}(A, r^2) = \mathrm{rank}(A, \mathrm{rig}(A, n - r)) = n - r.\end{gathered} \tag{4}$$

Из (4) следует, что для устойчивой матрицы A точки графика дискретной функции $\mathrm{rank}(A, k)$ при k от 0 до n^2 лежат на графике вышеупомянутой ступенчатой функции $n - [\sqrt{k}]$, что приводит к точной формуле

$$\mathrm{rank}(A, k) = n - [\sqrt{k}], \quad 0 \le k \le n^2,$$

Можно показать, что для любой матрицы A справедливо

$$\mathrm{rig}(A, \mathrm{rank}(A, k)) \le k, \quad 0 \le k \le n^2,$$

Следовательно, для устойчивых матриц имеет место гладкая нижняя оценка

$$n - \sqrt{k} \le \mathrm{rank}(A, k), \quad 0 \le k \le n^2 \tag{5}$$

Эта оценка неулучшаема, так как для $k = r^2$ имеет место равенство.

Для неустойчивых матриц оценка (5) не верна.

При $k = n^{1+\delta}$ оценка (5) для устойчивых матриц приобретает вид

$$\mathrm{rank}(A, n^{1+\delta}) \ge n - n^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Valiant L. G.* Graph-theoretic arguments in low-level complexity // Mathematical Foundations of Computer Science 1977 (MFCS 1977). Lecture Notes in Computer Science. Vol. 53. Berlin, Heidelberg : Springer, 1977. P. 162–177. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-08353-7_135.