УДК 517.53

ОЦЕНКА МОДУЛЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ[1]

Е. Г. Компанеец, В. В. Старков (Петрозаводск, Россия)
g_ek@inbox.ru, vstarv@list.ru

Получена точная оценка производных высших порядков для произвольных комплексных многочленов, улучшающая ранее известные оценки.

Ключевые слова: многочлен, производная, неравенство, дифференциальный оператор.

ESTIMATE OF HIGHER ORDER DERIVATIVES FOR POLYNOMIALS[1]

E. G. Kompaneets, V. V. Starkov (Petrozavodsk, Russia)
g_ek@inbox.ru, vstarv@list.ru

We obtain a sharp upper estimate for higher order derivatives of arbitrary complex polynomials. The estimate improves known results in this direction.

Keywords: polynomial, derivative, inequality, differential operator.

Обозначим $\mathcal{P}_n$ множество всех многочленов степени, не превосходящей $n \in \mathbb{N}$.

В 1887 Д.И. Менделеев [1, § 86] поставил следующую проблему: для многочлена f, $\deg f = 2$, удовлетворяющего условию $|f(x)| \le M$ для $x \in [a; b]$, оценить $|f'(x)|$ для $x \in [a; b]$. В книге В.И. Смирнова и Н.А. Лебедева [2, с. 340] эта проблема сформулирована в более общем виде и названа **проблемой Менделеева**: *пусть $B \subset \mathbb{C}$ — компакт, $f(z)$ — многочлен, $\deg f = n \ge 1$, удовлетворяющий условию $|f(z)| \le M$ для $z \in B$. Дать наилучшую оценку $|f'(z)|$ для $z \in B$.*

Для вещественных многочленов и компакта $B = [a; b]$ проблему Менделеева решил А.А. Марков.

Теорема А [3]. *Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(x)| \le M$ для $x \in [a; b]$. Тогда*

$$|f'(x)| \le \frac{2n^2 M}{b-a}.$$

Равенство достигается только для функций

$$f(x) = \pm M T_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right),$$

где $T_n = \cos(n \arccos x)$ — многочлены Чебышева.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01229).
[1]This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01229.

В.А. Марков в 1892 получил аналогичный результат для производной k-го порядка вещественных многочленов, $1 \leq k \leq n$.

Обозначим $\mathbb{D}$ единичный круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. В.И. Смирнов решил проблему Менделеева для комплексных многочленов и компакта $B = \partial\mathbb{D}$.

Теорема B [4]. *Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(z)| \leq M$ на $\partial\mathbb{D}$. Тогда на $\partial\mathbb{D}$*

$$|f'(z)| \leq Mn.$$

Равенство достигается только для функции $f(z) = e^{i\gamma}z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Теорему B можно переформулировать следующим образом:

Теорема B′. *Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(z)| \leq |Mz^n|$ на $\partial\mathbb{D}$. Тогда*

$$|f'(z)| \leq |(Mz^n)'| \quad \text{на } \partial\mathbb{D}.$$

Равенство достигается только для функции $f(z) = e^{i\gamma}z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

С.Н. Бернштейн обобщил Теорему B′, заменив многочлен Mz^n на произвольный многочлен F, $\deg F = n$. А именно, он получил следующий результат:

Теорема C [5]. *Пусть f и F — многочлены, удовлетворяющие условиям*

$$(*)\begin{cases} 1)\ \deg f \leq \deg F = n, \\ 2)\ \text{нули многочлена } F \text{ лежат в } \overline{\mathbb{D}}, \\ 3)\ |f(z)| \leq |F(z)| \text{ на } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Тогда

$$|f'(z)| \leq |F'(z)| \quad \text{для } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}.$$

Для $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ равенство реализуется тогда и только тогда, когда $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Теорема C показывает, что при выполнении условий $(*)$ оператор дифференцирования сохраняет неравенства между многочленами: если на $\partial\mathbb{D}$ имеет место неравенство $|f(z)| \leq |F(z)|$ для самих многочленов f и F, то на $\partial\mathbb{D}$ аналогичное неравенство верно и для их производных.

Еще одним оператором такого типа является оператор В. И. Смирнова $S_\alpha[f] = zf'(z) - n\alpha f(z)$, где α принадлежит множеству $\Omega_{|z|}$—образу круга $\{t \in \mathbb{C} : |t| < |z|\}$ под действием функции $\psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$.

Теорема D [2, гл.V, § 1, с. 356]. *Пусть f и F — многочлены, удовлетворяющие условиям $(*)$. Тогда для $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$*

$$|S_\alpha[f](z)| \leq |S_\alpha[F](z)| \tag{1}$$

для всех $\alpha \in \overline{\Omega_{|z|}}$.

Для $\alpha \in \Omega_{|z|}$ *в (1) реализуется равенство в точке* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *тогда и только тогда, когда* $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Дальнейшим исследованиям операторов, сохраняющих неравенства между многочленами, посвящено большое количество работ, см., например, работы [6] – [10] и их библиографию.

Для многочлена $g(z)$ и $r > 0$ обозначим $M(r, g) = \max\limits_{|z|=r} |g(z)|$.

С помощью неравенства В.И. Смирнова (1) для $f \in \mathcal{P}_n$ мы получили точные оценки для $|f^{(k)}(z)|$, $1 \le k \le n$, в терминах $|f(z)|$ и $M(r, f)$.

Теорема 1 [10]. *Пусть* $f \in \mathcal{P}_n$, $r > 0$ *и* $1 \le k \le n$. *Тогда для* $|z| \ge r$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{n!}{(n-k)!(r+|z|)^k} \cdot \left[|f(z)| + M(r,f) \frac{|z|^{n-k}}{r^{n-k}} \left(\left(\frac{|z|}{r} + 1 \right)^k - \frac{|z|^k}{r^k} \right) \right].$$

Равенство достигается для $f(z) = z^n$.

Следствие 1 [10]. *Для* $f \in \mathcal{P}_n$, $r > 0$ *и* $1 \le k \le n$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{n!}{(n-k)! 2^k r^k} \left[|f(z)| + M(r,f)(2^k - 1) \right], \quad |z| = r.$$

Равенство достигается для $f(z) = z^n$.

Замечание. *В частном случае* $r = 1$ *Следствие 1 улучшает следующее неравенство Бернштейна [11, с. 169]: для* $f \in \mathcal{P}_n$ *и* $1 \le k \le n$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{n!}{(n-k)!} M(1, f), \quad |z| = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Менделеев Д. И.* Исследование водных растворов по удельному весу. С. - Петербург : Тип. В. Демакова, 1887.

[2] *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1964. 440 с.

[3] *Марков А. А.* Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Изв. АН. 1889. Т. 62. С. 1–24.

[4] *Smirnoff V. I.* Sur quelques polynomes aux propriétés extrémales // Зап. Харьк. Матем. о-ва. 1928. Т. 4, № 2. С. 67–72.

[5] *Bernstein S.,* Sur la limitation des dérivées des polynomes // C.R. Acad. Sci. 1930. Vol. 190. P. 338–341.

[6] *Rahman Q. I., Schmeisser G.* Analytic theory of polynomials. N. Y. : Oxford Univ. Press, 2002.

[7] *Wali S. L., Shah W. M., Liman A.* Inequalities concerning B-operators // Probl. Anal. Issues Anal. 2016. Vol. 5(23), № 1. P. 55–72. DOI: https://doi.org/10.15393/j3.art.2016.3250

[8] *Ганенкова Е. Г., Старков В. В.* Преобразование Мебиуса и неравенство В. И. Смирнова для многочленов // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 228–239. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11858

[9] *Ganenkova E. G., Starkov V. V.* Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials // J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 476, № 2. P. 696–714. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.006

[10] *Kompaneets E. G., Starkov V. V.* Generalization of the Smirnov operator and differential inequalities // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, № 12. P. 2043–2051.

[11] *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1937. 209 с.