УДК 517.518.34

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КМА НА ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

Н. Е. Комиссарова (Саратов, Россия)
nataliyakomissarov@yandex.ru

В данной работе мы построим нестационарный кратно масштабный анализ и всплесковый ортонормированный базис на произвольной локально компактной нуль-мерной группе с произвольной образующей последовательностью, т. е. в случае, когда порядки смежных классов — различные простые числа. В данном случае НКМА порождается последовательностью функций, а всплесковый базис — последовательностью всплеск-функций.

Ключевые слова: нульмерные группы, кратно масштабный анализ, всплесковые базисы.

NON-STATIONARY MRA ON LOCALLY COMPACT ZERO-DIMENSIONAL GROUPS WITH ARBITRARY GENERATION SEQUENCE

N. E. Komissarova (Saratov, Russia)
nataliyakomissarov@yandex.ru

We construct non-stationary multiresolution analysis and orthonormal wavelet basis for locally compact zero-dimensional group with arbitrary generation sequence. In this case MRA is generated by the sequence of refinable functions and wavelet basis — by the sequence of wavelet functions.

Keywords: zero dimensional group, multiresolution analisys, wavelet basis.

1. Локально компактные группы, топология, характеры

В работе [1] была рассмотрена задача построения ортогональных всплесковых базисов на произвольных локально компактных нульмерных группах, для которых порядки смежных классов совпадают и равны некоторому простому числу. Рассмотрим несколько более общую ситуацию, когда порядки смежных классов могут быть различными.

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная абелева группа, топология в которой задана счётной системой открытых подгрупп:

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \dots,$$

таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = 0$ (0-нулевой элемент группы G).

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \dots \ .$$

Так как каждая группа G_n компактна, то каждая фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n — её порядок. Можно считать, что p_n — простые числа.

Определим далее числа $(\mathbf{m}_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ следующим образом:

$$\mathbf{m}_0 = 1,\ \mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n \cdot p_n\ .$$

Ясно, что при $n \geq 1$ $\mathbf{m}_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$, $\mathbf{m}_{-n} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}\dots p_{-n}}$. На каждом смежном классе $G_n \dot{+} g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n \dot{+} g) = \mu G_n = 1/\mathbf{m}_n$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$.

При каждом $N \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n\, (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причём в этой сумме слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n g_n\ (a_n = \overline{0, p_n - 1}, a_n \neq 0).$$

Систему элементов (g_n) будем называть базисной.

Пусть далее X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения, $G_n^{\perp}$ — аннулятор группы G_n, т. е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.
Каждый аннулятор $G_n^{\perp}$ есть группа относительно умножения, $G_n^{\perp}$ образуют возрастающую последовательность:

$$\dots \subset G_{-n}^{\perp} \subset \dots \subset G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \dots \subset G_n^{\perp} \subset \dots,$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = X,\ \ \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = 1,$$

причём фактор-группа $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$ имеет порядок p_n. $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы $G_n^{\perp}$.

Обозначим

$$H_n = \left\{ q \in G : q = \sum_{j=N}^{n-1} a_j g_j, N \in \mathbb{Z}, a_j = \overline{0, p_n - 1} \right\}.$$

2. Нестационарный кратно масштабный анализ на локально компактной нуль-мерной группе

Определение. Нестационарным кратно масштабным анализом(НКМА) будем называть совокупность замкнутых подпространств $V_j \subset L_2(G)$, для которых справедливы следующие аксиомы:

A1. $V_j \subset V_{j+1}$.

A2. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(G)$.

A3. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = 0$.

A4. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдутся функции $\varphi_j^{(n)}(x); j = \overline{1, k_n}$, и множества H_n такие, что система $\left(\varphi_j^{(n)}(x \dot{-} h);\ j = \overline{1, k_n},\ h \in H_n\right)$ образует ортонормированный базис в V_n.

Для построения кратно масштабного анализа выберем функции $\varphi^{(n)}_{j_n, j_{n+1}} \in L_2(G)$ следующим образом.

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n)}_{j_n,0} &= \sqrt{m_{n+1}}\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_n g_n}(x),\ j_n = \overline{0, p_n - 2},\\
\varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}} &= \sqrt{m_{n+2}}\,\mathbf{1}_{G_{n+2}\dot{+}j_{n+1}g_{n+1}\dot{+}(p_n-1)g_n}(x),\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1},\\
supp\,\varphi^{(n)}_{j_n,j_{n+1}} &\subset G_n,
\end{aligned}$$

и положим

$$V_n = \overline{\operatorname{span}\left\{\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x \dot{-} h_n), \varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x \dot{-} h_n)\right\}},$$
$$j_n = \overline{0, p_n - 2},\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1} - 1},\ h_n \in H_n\,.$$

Теорема 1. *Совокупность подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ образует НКМА.*

3. Всплесковые базисы

Основным свойством КМА является возможность на их основе строить базисы всплесков [2]. Опишем конструкцию пространств всплесков.

Пусть $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — НКМА с масштабирующей последовательностью $\left(\varphi^{(n)}_{j_n,0},\ \varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}\right)$. Обозначим W_n — ортогональное дополнение к V_n в пространстве V_{n+1}, т. е. $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ и $V_n \perp W_n$. Причём

1. $W_n \perp W_m, n \neq m$;

2. $L_2(G) = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$.

Определим пространства W_n следующим образом. Сначала определим функции

$$\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}} \cdot r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n)\, \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x),$$
$$\alpha_{n+1} = \overline{1, p_{n+1}-1},\ j_n = \overline{0, p_n - 2},\ h_n \in H_n,$$

$$\psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+2}} \cdot r_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(x \dot{-} (p_{n+1}-1) g_{n+1} \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \cdot$$
$$\cdot\, \mathbf{1}_{G_{n+2} \dot{+} (p_{n+1}-1) g_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x),$$
$$\alpha_{n+2} = \overline{1, p_{n+2}-1},\ j_n = \overline{0, p_n - 1},\ h_n \in H_n,$$

$$W_n = \overline{\operatorname{span}\left\{\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right\}}.$$

Получим последовательность подпространств $(W_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 2. *Функции* $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right), j_n = \overline{0, p_n - 1}, h_n \in H_n, \alpha_{n+1} = \overline{1, p_{n+1}-1}$, $\alpha_{n+2} = \overline{1, p_{n+2}-1}$ *образуют ортонормированную последовательность.*

Итак, функции $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right)$ образуют ортонормированную систему, а значит и ортонормированный базис в W_n. В силу $L_2(G) = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$ последовательность $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x), n \in \mathbb{Z}\right)$ — ортонормированный базис в $L_2(G)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ и всплесковые базисы на нульмерных группах // Матем.сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.

[2] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2006. 616 с.