УДК 517.5

О НЕРАВЕНСТВАХ РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ[1]

М. А. Комаров (Владимир, Россия)
kami9@yandex.ru

В работе получены неравенства разных метрик типа Джексона–Никольского для наипростейших дробей (логарифмических производных многочленов) и их производных на произвольных областях комплексной плоскости. Также получены новые неравенства разных метрик для таких функций на сегментах действительной оси.

Ключевые слова: логарифмическая производная многочлена, наипростейшая дробь, неравенства Джексона–Никольского.

ON INEQUALITIES BETWEEN DIFFERENT METRICS FOR SIMPLEST FRACTIONS[1]

M. A. Komarov (Vladimir, Russia)
kami9@yandex.ru

We obtain the Jackson–Nikolskii type inequalities between different metrics for simplest fractions (i.e., for the logarithmic derivatives of polynomials) and their derivatives on an arbitrary domains of the complex plane. We also obtain some new inequalities between different metrics for such functions on a segments of the real axis.

Keywords: logarithmic derivative of a polynomial, simplest fraction, Jackson–Nikolskii inequalities.

Введение

Наипростейшей дробью (НД) порядка n, $n = 1, 2, \ldots$, называется рациональная функция вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z, z_k \in \mathbb{C},$$

т.е. логарифмическая производная многочлена с нулями к точках z_k. Задача построения неравенств разных метрик, хорошо известная для случая полиномов по классическим работам Д. Джексона, С. М. Никольского и других авторов, в последнее время активно исследуется для случая рациональных функций и, в том числе, для НД и их производных (см. статьи [1–5] и библиографию в них). Большинство полученных результатов такого рода для НД относится к случаю окружностей и прямых и их сегментов. При этом, в отличие от случая многочленов, оценки для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00312 мол а).

[1]The work is done with the financial support of RFBR (project № 18-31-00312 mol a).

НД как правило нелинейны относительно сравниваемых норм, могут не зависеть от длины сегмента либо от порядка НД и иметь другие особенности [1,2]. Некоторые авторы получали оценки L_p-норм НД посредством специальных сумм, явно зависящих от полюсов НД (см., например, [3,4]).

В данной работе мы впервые исследуем неравенства разных метрик для НД и их производных на произвольных областях E комплексной плоскости, а также получим новые неравенства в случае сегментов действительной оси. Основной метод состоит в применении известных оценок сверху [6–8] меры пересечения множества E с множеством тех точек, в которых модуль $|\rho_n(z)|$ больше заданного числа $\delta > 0$.

1. Основные результаты

Далее для произвольной НД ρ_n полагаем

$$\|\rho_n\| := \|\rho_n\|_{L^\infty[-1,1]}, \qquad \|\rho_n\|_p := \|\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (1 < p \le \infty).$$

2. Неравенства разных метрик на отрезке

С помощью результатов работы [7] получается следующая

Теорема 1. *Пусть все полюсы $z_1, \ldots, z_n$ НД ρ_n принадлежат верхнему единичному полукругу $D^+ = \{z : |z| \le 1, \ \mathrm{Im}\, z \ge 0\}$. Тогда при $0 < q < p \le \infty$ и $n \ge 35e\|\rho_n\|$*

$$\|\rho_n\|_{L^p[-1,1]} \le \|\rho_n\|_{L^q[-1,1]} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Отметим, что до настоящего времени для отрезка была известна лишь следующая точная по порядку оценка [1, теорема 4]: *если НД ρ_n вещественнозначна, то при $r > 0$ и достаточно больших n*

$$\|\rho_n\| \le 2 \cdot 32^{1/r} \cdot n^{2/r} \|\rho_n\|_{L^r[-1,1]}.$$

В отличие от этой, оценка (1) (очевидно, также точная по порядку) содержит множитель, не зависящий от n.

3. Неравенства разных метрик в областях

С помощью результатов работы [6], восходящих к методу покрытий А. Картана, получается следующая

Теорема 2. *Для любой ограниченной либо неограниченной области $E \subset \mathbb{C}$ и любой НД $\rho_n(z)$ при $p > 2$*

$$\|\rho_n\|^p_{L^p(E)} \le 16\pi n^2 \frac{p}{p-2} \|\rho_n\|^{p-2}_{L^\infty(E)}. \tag{2}$$

Оценка точна по порядку величины n, что показывает

Пример 1. Пусть $\rho(z) = n/z$, $E = \mathbb{C} \backslash \{|z| \le \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$). Тогда

$$\|\rho\|^p_{L^p(E)} = \frac{2\pi n^p}{(p-2)\varepsilon^{p-2}} = \frac{2\pi n^2}{p-2}\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{p-2} = \frac{2\pi n^2}{p-2}\|\rho\|^{p-2}_{L^\infty(E)}.$$

Аналогично, при помощи оценок [6], но уже для произвольного $p > 1$, получается обобщение теоремы 2 на производные $\rho_n^{(s)}(z)$ любого порядка.

Теорема 3. *Для любой ограниченной либо неограниченной области $E \subset \mathbb{C}$, любой НД $\rho_n(z)$, $p > r := 2/(s+1)$ и $s = 1, 2, \ldots$*

$$\|\rho_n^{(s)}\|^p_{L^p(E)} \le \frac{4\pi p}{p-r}(s! A_{s,n})^r \cdot \|\rho_n^{(s)}\|^{p-r}_{L^\infty(E)}, \tag{3}$$

где $r \le 1$, $A_{1,n} = n \ln(en)$, $A_{s,n} = \big((s+1)n^{(s+1)/2} - 2n\big)/(s-1)$ $(s \ge 2)$.

Отметим, что при $s = 1$ множитель в (3) равен $4\pi n \ln(en) p/(p-1)$, а при $s \ge 2$ он оценивается сверху величиной $A(p,s)n$.

4. Неравенства разных метрик на сегментах оси $\mathbb{R}$

Константу в (3) удаётся уточнить в случае оценок на сегментах прямой.

Теорема 4. *Для любого ограниченного либо неограниченного сегмента $E \subseteq \mathbb{R}$, любой НД $\rho_n(z)$, $p > r := 1/(s+1)$ и $s = 1, 2, \ldots$*

$$\|\rho_n^{(s)}\|^p_{L^p(E)} \le \frac{4p}{p-r}(s! B_{s,n})^r \cdot \|\rho_n^{(s)}\|^{p-r}_{L^\infty(E)}, \tag{4}$$

где $r < 1$, $B_{s,n} = \big((s+1)n^{s+1} - n\big)/s < (rs)^{-1} n^{1/r}$.

Далее, с помощью весьма простого технического приёма мы заметно уточняем константу в теореме 4.5 из [5] (неравенство разных метрик для НД на всей прямой $\mathbb{R}$). А именно, верна

Теорема 5. *Для любой НД $\rho_n(z)$ и любых $1 < q < p \le \infty$*

$$\|\rho_n\|_p \le 2^{1-q'/p'} \left(\frac{m_q}{\pi}\right)^{q'\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} (1+h_q)^{q'(p-q)/p} \|\rho_n\|_q^{q'/p'},$$

где m_q — *натуральное число из промежутка* $[q/2, q/2+1)$,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}, \qquad h_q=\begin{cases}\tan(\pi/2q), & 1<q\le 2,\\ \cot(\pi/2q), & 2\le q<\infty.\end{cases}$$

При любом конечном p эта оценка точнее результата [5], где величина $1+h_q\ge 2$ возводится в степень $q'(p-1)/p$, большую, чем $q'(p-q)/p$.

В заключение скажем, что известные оценки меры множества тех $x\in\mathbb{R}$, где $|\rho_n(x)|>\delta$ $(\delta>0)$, обобщаются на случай сумм вида

$$f_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-z_k}, \qquad z_k, p_k\in\mathbb{C} \tag{5}$$

(некоторые обобщения см., например, в [8, Sec. 7.2]). Отсюда получается

Теорема 6. *Для любых комплексных* z_k *и* $p_k=\alpha_k+i\beta_k$, *любого ограниченного либо неограниченного сегмента* $E\subseteq\mathbb{R}$ *и любого* $p>1$

$$\|f_n\|^p_{L^p(E)}\le 16\nu(f_n)\frac{p}{p-1}\|f_n\|^{p-1}_{L^\infty(E)}, \qquad \nu(f_n):=\sum|\alpha_k|+\sum|\beta_k|.$$

Оценку нельзя значительно улучшить, что показывает

Пример 2. Для $f_n(z)=\rho(z)=n/z$ и $E=E_0=[\varepsilon,+\infty)$ $(\varepsilon>0)$

$$\|\rho\|^p_{L^p(E_0)}=\frac{n^p\varepsilon^{1-p}}{p-1}=\frac{n(n/\varepsilon)^{p-1}}{p-1}=\frac{\nu(\rho)\|\rho\|^{p-1}_{L^\infty(E_0)}}{p-1}.$$

Теоремы 2 и 3 (соответственно, теоремы 4 и 6) остаются в силе для произвольного множества $E\subset\mathbb{C}$ $(E\subset\mathbb{R})$, локально измеримого по плоской (линейной) мере Лебега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Данченко В. И., Додонов А. Е.* Оценки L_p-норм наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 9–19.

[2] *Danchenko V. I., Danchenko D. Ya.* Nikolskii type inequalities for simple partial fractions // Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской международной конференции (Петрозаводск, 29 июня – 5 июля 2014 г.). Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 33–37.

[3] *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. С. 123–140.

[4] *Каюмов И. Р.* Интегральные оценки наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 33–45.

[5] *Chunaev P. V., Danchenko V. I.* Quadrature formulas with variable nodes and Jackson–Nikolskii inequalities for rational functions // J. Approx. Theory. 2018. Vol. 228. P. 1–20.

[6] *Macintyre A. J., Fuchs W. H. J.* Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 162–168.

[7] *Говоров Н. В., Лапенко Ю. П.* Оценки снизу модуля логарифмической производной многочлена // Матем. заметки. 1978. Т. 23. С. 527–535.

[8] *Borwein P., Erdélyi T.* Polynomials and Polynomial Inequalities. N. Y. : Springer-Verlag, 1995.