УДК 517.518.43

О МНОЖЕСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА–ДЖАФАРЛИ [1]

Т. Д. Козловская (Москва, Россия)

tdkozl2018@mail.ru

Доказывается теорема: объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы.

Ключевые слова: группа целых p-адических чисел, нуль-мерная группа, характеры групп, система Виленкина–Джафарли, U_r-множества.

ON SETS OF RELATIVE UNIQUENESS FOR THE VILENKIN–DZHAFARLI SYSTEM[1]

T. D. Kozlovskaya (Moscow, Russia)

tdkozl2018@mail.ru

We prove a theorem: the union of countable many closed U_r-sets ($r > 2$) for the Vilenkin–Dzhafarli system is again U_r-set for this system.

Keywords: group of p-adic intergers, zero-dimensional group, characters of a group, Vilenkin–Dzhafarli system, U_r-sets.

Группа $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел (p — простое число) определяется следующим образом. Элементами этой группы являются последовательности

$$g = (x_0, x_1, ..., x_n, ...),$$

где x_n может принимать значения $0, 1, ..., p-1$. Топология задается подгруппами

$$G_n = \{g \in \mathbb{Z}_p,\ x_j = 0 \text{ для } j = 0, 1, ..., n-1\}.$$

$$\mathbb{Z}_p = G_0 \supset G_1 \supset ... G_n \supset ... \ .$$

Если $a = (a_0, ..., a_n, ...)$, $b = (b_0, ..., b_n, ...)$, $a^{(k)}, b^{(k)}$ — последовательности финитных элементов — «срезок» элементов a и b соответственно, то будем считать

$$a \dot{+} b \equiv \lim_{k \to \infty} (a^{(k)} + b^{(k)}),$$

где предел понимается в смысле сходимости в топологическом пространстве $\mathbb{Z}_p$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

Множество $G = \mathbb{Z}_p$ с введённой топологией и операцией сложения является компактной коммутативной нуль-мерной топологической группой.

Смежные классы группы G по подгруппе G_n будем обозначать K_j^n, $j = 0, 1, ..., p^n - 1$.

Группу характеров Γ для группы $\mathbb{Z}_p$ образует так называемая система Виленкина-Джафарли.

$$\gamma_n(g) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=0}^{s} \frac{t_k}{p^{k+1}} \sum_{j=0}^{s} x_j p^j\right).$$

Здесь $n = \sum\limits_{k=0}^{s} t_k p^k, \quad 0 \le t_k \le p - 1.$

Система Виленкина–Джафарли является ортонормированной (см. [1]).

Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k \tag{1}$$

— ряд по системе Γ.

Множество E в области определения системы функций называется *множеством единственности*, или U*-множеством*, для этой системы, если из сходимости к нулю всюду вне E ряда по этой системе вытекает, что все его коэффициенты равны нулю. Если в определении множества единственности наложить на коэффициенты ряда a_n условие $a_n \in l^r$ $(1 \le r < \infty)$, то получим определение U_r*-множества*.

В работе [2] было доказано, что объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств $(r > 2)$ для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы.

В настоящей работе аналогичный результат доказан для системы Виленкина–Джафарли:

Теорема 1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств $(r > 2)$ для системы Джафарли является U_r-множеством для этой системы.*

Доказательство предваряет несколько лемм. В их доказательстве используем интегральное представление для частичных сумм ряда Фурье функции $f \in L(G)$ по системе характеров компактной нуль-мерной коммутативной группы G (см. [1]):

$$S_n(f; g) = \int\limits_G f(g \dot{-} u) D_n(u) d\mu(u), \tag{2}$$

μ — мера Хаара на группе G, $D_n(u)$ — ядро Дирихле для этой системы.

Используем также оценку ядра $D_n(g)$ для системы Виленкина–Джафарли (см. [1]):

$$D_{p^s}(g) = \begin{cases} p^s, \text{если}\, g \in G_s; \\ 0, \text{если}\, g \in \mathbb{Z}_p \setminus G_s. \end{cases} \tag{3}$$

Нам понадобится также некоторый аналог теоремы Валле-Пуссена, доказанный в работе [3] (теорема 4.2). Приведем частный случай этой теоремы.

Теорема A. *Пусть частичные суммы* $S_{p^n} = \sum\limits_{k=0}^{p^n-1} a_k\gamma_k$ *ряда* (1) *почти всюду на* G *сходятся к суммируемой функции* f, *и выполнены условия*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \varlimsup_{n\to\infty} |S_{p^n}(g)| < +\infty$$

всюду, кроме счетного множества. Тогда ряд (1) *является рядом Фурье функции* f *по системе* Γ.

Лемма 1. *Пусть* $2 \le r < \infty$, *измеримое множество* $E \subset \mathbb{Z}_p$ *и является* U_r*-множеством для системы характеров группы* $\mathbb{Z}_p$. *Тогда мера Хаара множества* E *равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что $\mu(E) > 0$. Зафиксируем число ε: $0 < \varepsilon < \mu(E)$. Множество CE можно покрыть объединением D счетного множества смежных классов K_j^n так, что $\mu(CE) < \mu(D) < \mu(CE) + \varepsilon$. Тогда $\mu(CD) > \mu(E) - \varepsilon > 0$. Получим замкнутое множество $F = CD \subset E$, $\mu(F) > 0$.

Построим нетривиальный ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l\gamma_l$ по рассматриваемой системе характеров Γ с коэффициентами из l^r, сходящийся к нулю всюду вне множества E. Характеристическая функция χ_F замкнутого множества F принадлежит $L_2(G)$; поэтому ее коэффициенты Фурье по системе Γ $c_l(\chi) \in l^2 \subset l^r$, $r > 2$, и $c_0 = \mu(F) > 0$. Пусть $g \in CF$. Тогда существует смежный класс $K^{n_0} \subset CF$ такой, что $g \in K^{n_0}$; ясно, что для всех $n > n_0$ элемент g входит в некоторый смежный класс K^n.

Согласно (2), (3) имеем

$$S_{p^n}(\chi_F; g) = \int\limits_G \chi_F(g \dot- u) D_{p^n}(u) d\mu(u) = p^n \int\limits_{G_n} \chi_F(g \dot- u) d\mu(u).$$

Так как $g \in K^n$, $u \in G_n$, то и $g \dot- u \in K^n$; значит, $\chi_F(g \dot- u) = \chi_F(g) = 0$, и $S_{p^n}(\chi_F; g) = 0$ для всех $n \ge n_0$, всех $g \in CF$.

Итак, подпоследовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l(\chi)\gamma_l \ S_{p^n}(\chi, g)$$

сходится к нулю в любой точке открытого множества CF. Согласно [4] (теорема 3.4) из этого следует, что рассматриваемый ряд сходится к нулю на CF.

Нуль-рядом Виленкина–Джафарли назовем всякий нетривиальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k(g)$, сходящийся почти всюду на $\mathbb{Z}_p$ к нулю.

Пусть $S_n(g)$ — последовательность частичных сумм нуль-ряда. Множество элементов группы $\mathbb{Z}_p$, где нуль-ряд не сходится к нулю, будем называть *ядром нуль-ряда.* Множество элементов, где

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(g)| = +\infty,$$

будем называть *приведенным ядром нуль-ряда.*

Порцией $\delta(E)$ множества $E \subset G$ назовём множество $E \bigcap K^n$, где K^n — некоторый смежный класс группы G по подгруппе G_n.

Лемма 2. *Пусть $\delta(B)$ — непустая порция ядра B нуль-ряда Виленкина–Джафарли, N — приведенное ядро этого нуль-ряда. Существует другой нуль-ряд Виленкина–Джафарли, для которого соответственно ядром и приведенным ядром являются порции $\delta(B)$ и $\delta(N)$ ядра и приведенного ядра исходного нуль-ряда.*

Доказательство. Пусть рассматриваемая порция ядра B нуль-ряда есть пересечение ядра B и смежного класса K^n. Характеристическая функция любого смежного класса может быть представлена как полином по системе характеров Г. Согласно теореме локализации для нульмерных групп (см. теорему 3.2 из [4]) формальное произведение

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l\gamma_l \tag{4}$$

этого полинома и данного нуль-ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\gamma_i$ равномерно сходится к нулю вне K^n и равномерно равносходится с данным нуль-рядом на K^n. Значит, ряд (4) сходится к нулю почти всюду на $G = \mathbb{Z}_p$, но не всюду: в точках множества $\delta(B)$ ряд (4) не сходится к нулю. Итак, ряд (4) — нуль-ряд; из теоремы локализации ясно, что $\delta(B)$ и $\delta(N)$ — его ядро B_1 и приведенное ядро N_1 соответственно.

Лемма 3. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является несчетным множеством.*

Доказательство. Предположим, что приведенное ядро нуль-ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \gamma_k$ счетное. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_{p^n}(g)| < +\infty$$

всюду, кроме счетного множества. Кроме того, $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$ (для этого достаточно сходимости ряда хотя бы в одной точке $g \in G$). Таким образом, применима теорема А с $f = 0$. Значит, $c_k = 0$ для всех k, что невозможно, так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \gamma_k$ является нуль-рядом.

Лемма 4. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является множеством второй категории на себе.*

Доказательство. Пусть N — приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли:

$$N = \{g \in \mathbb{Z}_p : \overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(g)| = +\infty\}.$$

Согласно лемме 3 N — несчетное множество. Так как функции $S_n(g) = \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_k(g)$ непрерывны, множества

$$N_k = \{g \in \mathbb{Z}_p : |S_n(g)| > k \,\text{для некоторого}\, n\}$$

являются открытыми. Ясно, что $N = \bigcap_k N_k$, т.е. N типа G_δ. Известно, что несчетное множество типа G_δ является множеством второй категории на себе (см., например, [5, с. 548]).

Лемма 5. *Пусть B — ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли. Существует замкнутое множество P, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

Доказательство. Пусть N — приведенное ядро рассматриваемого нуль-ряда, P — множество всех его точек конденсации. Поскольку N несчетно, то P замкнуто. Предположим, что определяемая некоторым смежным классом K^n из открытого множества CP порция $\delta(B)$ непустая. Используя леммы 2 и 3 получаем, что $\delta(B)$ содержит несчетное множество $\delta(N)$. Но множество $N \setminus P$ не более чем счетно. Из полученного противоречия вытекает, что $B \subset P$.

Пусть теперь $\delta(P)$ — любая непустая порция множества P. Так как любая точка P есть точка конденсации приведенного ядра N, то $\delta(N)$ непусто, а тогда и $\delta(B)$ непусто.

Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых U_r-множеств для системы Виленкина–Джафарли, $2 < r < \infty$, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Согласно лемме 1 имеем $\mu(E_j) = 0$ $(j = 1, 2, ...)$. Предположим, что существует нетривиальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k, \quad a_k \in l^r, \tag{5}$$

сходящийся к нулю всюду вне E.

Хотя бы одно множество E_{j_0} плотно на некоторой порции $\delta(P)$, где P — замкнутое множество из леммы 5. Действительно, если бы это было неверно, то $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность нигде не плотных на P множеств, а E — множество первой категории на P; значит, приведенное ядро N нуль-ряда (5) и подавно первой категории на P и на себе. Получили противоречие с леммой 4.

Итак, замкнутое множество E_{j_0} плотно на некоторой порции $\delta(P)$, а потому содержит $\delta(P)$. Согласно лемме 5 имеем $\delta(B) \subset \delta(P)$ где $\delta(B)$ — соответствующая порция ядра B нуль-ряда (5). Множество $\delta(B)$ является U_r-множеством как подмножество U_r-множества E_{j_0}.

С другой стороны, согласно лемме 2 порция $\delta(B)$ является ядром нового нуль-ряда (4). Теперь ряд (4) является формальным произведением исходного нуль-ряда (5) и полинома по системе Виленкина–Джафарли с коэффициентами b_n (характеристической функции χ_{K^n}). Коэффициенты ряда (4) имеют вид

$$c_l = \sum_{n=0}^{m} b_n a_{k(l,n)},$$

где индекс $k(l,n)$ определяется равенством $\gamma_l \gamma_n^{-1} = \gamma_{k(l,n)}$ (см. [4]). При этом $c_l \in l^r$ как линейная комбинация последовательностей из l^r. Итак, множество $\delta(B)$ как ядро нуль-ряда с коэффициентами из l^r является и M_r-множеством.

Полученное противоречие доказывает, что E — U_r-множество для системы функций Виленкина–Джафарли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981.

[2] *Козловская Т. Д.* Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вестн. МГТУ «Станкин». 2012. № 1 (18). С. 85–88.

[3] *Skvortsov V. A., Tulone F.* Kurzweil–Henstock type integral on zero-dimensional group and some of its applications // Czechoslovak Math. J. 2008. Vol. 58. P. 1167–1183.

[4] *Skvortsov V. A.* On M_0-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional group // Tatra Mt. Math. Publ. 2014. Vol. 62. P. 165–174.

[5] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I М. : Мир, 1965.