УДК 517.5

СВОЙСТВО ФАТУ ДЛЯ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЕДИНИЦ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Г. А. Карагулян (Ереван, Армения),
И. Н. Катковская (Минск, Беларусь),
В. Г. Кротов (Минск, Беларусь),
М. Х. Сафарян (Ереван, Армения)
g.karagulyan@gmail.com, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой. Приводятся условия на ядра $\varphi_t : X \times X \to \mathbb{R}$, $t \in (0, 1]$, интегральных операторов, при которых они образуют аппроксимативную единицу. Основные утверждения описывают свойство Фату (сходимость почти всюду вдоль некоторого семейства областей подхода к границе $X \times (0, 1]$) для таких операторов.

Ключевые слова: аппроксимативные единицы, метрические пространства смерой, свойство Фату.

FATOU PROPERTY FOR APPROXIMATIONS OF IDENTITY ON METRIC MEASURE SPACES

G. A. Karagulyan (Erevan, Armenia),
I. N. Katkovskaya (Minsk, Belarus),
V. G. Krotov (Minsk, Belarus),
M. H. Safaryan (Erevan, Armenia)
g.karagulyan@gmail.com, krotov@bsu.by

Let (X, d, μ) be a metric measure space. The conditions on the kernels of $\varphi_t : X \times X \to \mathbb{R}$, $t \in (0, 1]$, integral operators for which they form an approximative unit are given. The main statements describe the Fatou property (convergence almost everywhere along some family areas of approach to the boundary $X \times (0, 1]$) for such operators.

Keywords: approximations of identity, Metric measure spaces, Fatou property.

Пусть X — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ, причем мера каждого шара $B \subset X$ положительна и конечна. Будем использовать обозначения

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

для открытого шара с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$,

$$f_B = \fint_B f \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$.

Для $p \in [1, \infty]$ используем стандартное обозначение

$$\|f\|_{L^p(X)} = \|f\|_p := \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \|f\|_\infty := \inf\{A : \mu\{|f| > A\} = 0\}, \quad p = \infty.$$

$L^p(X)$ означает множество (классов эквивалентности) измеримых функций, для которых эта величина конечна.

Мы будем предполагать, что выполнено условие удвоения: существует такое число $a_\mu > 0$, что

$$\mu(B(x, 2r)) \le a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad r > 0. \tag{1}$$

Кроме того, нам понадобится следующее условие на меру μ: существуют постоянные $C_1, C_2 > 1$

$$\mu(B(x, C_1 r)) \ge C_2 \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \ r > 0, \tag{2}$$

которое не представляется очень ограничительным.

Запись $A \lesssim B$ всегда будет означать, что $A \le cB$, где c — некоторая положительная постоянная, зависящая, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны.

Мы рассматриваем семейства интегральных операторов

$$\Phi_t f(x) = \int\limits_X \varphi_t(x, z) f(z) \, d\mu(z),$$

где ядра $\varphi_t : X \times X \to \mathbb{R}$, $t > 0$, образуют аппроксимативную единицу, то есть удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi_t \in L^\infty(X \times X)$,

$$\int\limits_X \varphi_t(x, z) \, d\mu(z) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in X, \ t > 0,$$

2) для любого $\delta > 0$

$$\sup_{d(x,y) > \delta} \varphi_t^*(x, y) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0,$$

где

$$\varphi_t^*(x, y) := \sup\{|\varphi_t(x, z)| : d(x, y) \le d(x, z)\},$$

3) $C_\varphi := \sup\limits_{t \in (0,1)} \sup\limits_{x \in X} \|\varphi_t^*(x, \cdot)\|_{L^1(X)} < \infty.$

Пусть задана функция $\lambda : (0,1] \to (0,1]$, $\lambda(+0) = 0$, порождающая области подхода к «границе» абстрактного полупространства $X \times (0,1]$

$$D_\lambda(x) = \{(y,t) \in X \times (0,1] : d(x,y) < \lambda(t)\}, \quad x \in X.$$

Предел функции, заданной на $X \times (0,1]$, вдоль области $D_\lambda(x)$ будем обозначать $D_\lambda(x) - \lim$. Введем еще максимальный оператор Фату, соответствующий этим областям

$$\mathcal{N}_\lambda u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in D_\lambda(x)\}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2). *Тогда если функция* λ *такова, что*

$$C_\lambda := \sup_{x \in X} \|\varphi_t^*(x,\cdot)\|_{L^\infty(X)}\, \mu(B(x,\lambda(t))) < \infty. \tag{3}$$

Тогда

$$\mu\left(\{\mathcal{N}_\lambda(\Phi_t f) > A\}\right) \lesssim \frac{C_\lambda}{A} \|f\|_{L^1(X)}, \quad A > 0,\ f \in L^1(X).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2). *Тогда если функция* λ *удовлетворяет условию* (3), *то для любой функции* $f \in L^1(X)$

$$D_\lambda(x) - \lim \Phi_t f = f(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in X.$$

Теорему 2 можно уточнить следующим образом. Будем говорить, что $x \in X$ является точкой Лебега функции $f \in L^1(X)$, если

$$\lim_{t \to +0} \fint_{B(x,t)} |f(y) - f(x)|\, d\mu(y) = 0.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1), (2) *и функция* λ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда для любой функции* $f \in L^1(X)$ *соотношение*

$$D_\lambda(x) - \lim \Phi_t f = f(x)$$

выполнено в каждой точке Лебега $x \in X$.

В силу условия удвоения для любой функции $f \in L^1(X)$ почти все точки $x \in X$ являются точками Лебега [1, §2.7] (для этого еще необходима плотность непрерывных функций в $L^1(X)$), что обеспечивается регулярностью меры μ).

Утверждения типа теорем 1–3 для «радиальной» и «некасательной» сходимости хорошо известны для аппроксимативных единиц на $\mathbb{R}^n$ вида $f * \varphi_t$, где $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$ (см., например, [2, глава 3, §2]).

В случае $X = [-\pi, \pi]$ подобные утверждения были получены в [3] для ядер сверточного вида $\varphi_t(x-y)$. Они содержали как следствие 1) некасательное граничное поведение интегралов Пуассона в круге и 2) касательное (с логарифмическим порядком касания) граничное поведение для свертки с корнем квадратным из этого ядра, которое изучались ранее в [4] и [5]).

Результаты из [4] и [5]) были перенесены на пространства однородного типа в [6] и [7]. В частности в [7] в качестве иллюстрирующих примеров рассматривались операторы, ядрами которых были нормированные степени многомерных ядер Пуассона:

$$p(x,\theta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\theta|^n}, \quad |x|<1,\ |\theta|=1$$

для единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см, например, [8, глава 2, §1]) и

$$p(z,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}} \quad |z|<1,\ |\zeta|=1$$

(инвариантное ядро Пуассона) для единичного шара в $\mathbb{C}^n$ (см, например, [9, глава 3, §3]).

Указанные работы и послужили поводом для нашей заметки — в них рассматривались ядра конкретного вида или структуры. Мы же хотели выделить те общие свойства ядер, которые позволяют рассматривать интегральные операторы с этими ядрами как аппроксимативные единицы с различным граничным поведением, не обязательно «некасательным».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. Berlin : Springer-Verlag. 2001. 140 p.

[2] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир. 342 с.

[3] *Karagulyan G. A., Safaryan M. H.* On Generalizations of Fatou's Theorem for the Integrals with General Kernels // J. Geom. Anal. 2014. Vol. 25. № 3. P. 1459–1475.

[4] *Sjögren P.* Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique // Lect. Notes in Math. 1984. Vl. 1096. P. 544–548.

[5] *Ronning J.-O.* Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Math. Scand. 1997. Vol. 81. P. 219–235.

[6] *Катковская И. Н., Кротов В. Г.* О касательном граничном поведении потенциалов // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 1997. Т. 2. С. 63–72.

[7] *Катковская И. Н., Кротов В. Г.* Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона // Матем. заметки. 2004. Т.75, № 4. С. 580–591.

[8] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 331 с.

[9] *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М. : Мир, 1984. 455 с.