УДК 517.54

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМУМОВ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ И ОБОБЩЁННЫХ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ[1]

А. В. Казанцев, М. И. Киндер (Казань, Россия)
avkazantsev63@gmail.com, mkinder@rambler.ru

Установлены новые условия единственности критической точки конформного радиуса. Исследуется проблема существования критических точек для новых конструкций обобщённых приведенных модулей.

Ключевые слова: конформный радиус, обобщенный приведенный модуль.

PROPERTIES OF EXTREMA OF CONFORMAL RADII AND GENERALIZED REDUCED MODULI[1]

A. V. Kazantsev, M. I. Kinder (Kazan, Russia)
avkazantsev63@gmail.com, mkinder@rambler.ru

New conditions for the uniqueness of the critical point of the conformal radius are established. We study the problem of the existence of critical points for new constructions of generalized reduced moduli.

Keywords: generalized reduced modulus, conformal radius.

Единственность критической точки конформного радиуса

Через H обозначим класс функций, голоморфных в $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, через H^∞ — пространство функций $F \in H$, ограниченных в D; $\|F\|_\infty = \sup_{\zeta \in D} |F(\zeta)|$ — норма элемента $F \in H^\infty$. Справедлива

Теорема 1. *Голоморфная в D функция $f(\zeta) = \zeta + \ldots$, удовлетворяющая условию*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le 2, \quad \zeta \in D, \tag{1}$$

имеет единственную (не обязательно нулевую) критическую точку конформного радиуса

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\,|f'(\zeta)| \tag{2}$$

в круге D. Постоянная 2 в (1) неулучшаема; одновременное нарушение условия (1) и единственности критической точки функции h_{f_b}

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

[1]This work was funded by the subsidy of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan, Grant 18-41-160017.

при движении вдоль лучей Хорнича $f_b(\zeta) = \int_0^\zeta f'(t)^b\,dt$ *с ростом* b*, где* $||\, f''/f'\,||_\infty = 1$*, происходит только в случае функции* $f(\zeta) = \int_0^\zeta e^{t^2/2}\,dt$ *и её вращений.*

Пусть A — подкласс H, состоящий из функций f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, H_0 — класс функций $f \in A$, локально однолистных в D. Регулярный класс Гахова G_1 состоит из всех функций $f \in H_0$, для которых уравнение Гахова

$$f''(\zeta)\,/\,f'(\zeta) = 2\,\overline{\zeta}\,/\,(1 - |\,\zeta\,|^2), \tag{3}$$

имеет единственный корень в D, являющийся максимумом функции (2).

Рассмотрим отображение $P : H_0 \to H : f \mapsto F = f''\,/\,f'$. Пусть $\Delta = \{\, F \in H^\infty : ||\, F\,||_\infty \le 2\,\}$ и $C = P(G_1) \cap H^\infty$; через $Fr_{H^\infty}C$ обозначается граница множества C в пространстве H^∞. Теорема 1 означает выполнение неулучшаемого включения $\Delta \subset P(G_1)$. Использование погружения $P_{H^\infty} : P^{-1}(H^\infty) \to H^\infty$ позволяет усилить утверждение о неулучшаемости из теоремы 1. Справедлива

Теорема 2. *Имеет место соотношение*

$$\Delta \cap Fr_{H^\infty}C = \{\, F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta : |\,\varepsilon\,| = 1\}\,.$$

Рассмотрим теперь другой подход к неулучшаемости условия единственности (1). Пусть k_f — число критических точек функции (2), лежащих в D. Если $X \subset H_0$, то $\tilde{X}$ определяется как подкласс всех функций f из X с нулевым корнем уравнения (3), т.е. с условием $f''(0) = 0$. При выполнении последнего неравенство (1) можно записать в виде подчиненности

$$f''(\zeta)\,/\,f'(\zeta) \prec F(\zeta) = 2\zeta, \quad \zeta \in D. \tag{4}$$

Из результатов [1] следует, в частности, такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция* $f \in \tilde{H}_0$ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда* $f \in \tilde{G}_1$. *Кроме того, имеет место эффект Новикова–Хохлова, заключающийся в том, что мажоранту единственности,* $F(D) = 2D$*, нельзя звездообразно расширить. Это значит, что если голоморфная в* D *функция* H *с* $H'(0) \ne 0$ *удовлетворяет условию* $H\,/\,H'(0) \in S^*$ *и если* $F(D) \subsetneqq H(D)$*, то существует функция* $g \in \tilde{H}_0$ *с* $g''\,/\,g' \prec H$ *в* D *и* $k_g > 1$.

Обобщённые приведенные модули

Пусть D — конечносвязная ограниченная плоская область, и пусть $F(w, w_0) = (w - w_0)f(w, w_0)$, $f(w_0, w_0) \ne 0$, — функция, отображающая D на каноническую область в виде единичного круга с центром в начале координат и с разрезами предписанной формы: круговыми концентрическими дугами, радиальными разрезами, а также их различными комбинациями.

Обобщенным приведенным модулем области D относительно заданной канонической области называется функция

$$M(w) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\, f(w,w)\,|.$$

Конформным радиусом области D в точке w будем называть функцию

$$R(w) = \exp\left(2\pi M(w)\right).$$

Критические точки обобщённого приведённого модуля, очевидно, совпадают с критическими точками конформного радиуса области D и являются корнями уравнения

$$\partial M(w)/\partial w = 0. \tag{5}$$

В этой части статьи мы приводим результаты, связанные с исследованием критических точек обобщённых приведённых модулей двусвязных областей относительно различных канонических областей.

Круг с круговым концентрическим разрезом

Если в качестве канонической области выбран единичный круг с круговыми концентрическими разрезами, то количество критических точек функции $M = M(w)$ не меньше порядка связности области D [2].

В качестве примера найдём обобщённый приведённый модуль кольца $E_q = \{\, w \,|\, q < |\, w\,| < 1\,\}$ относительно единичного круга с разрезом вдоль дуги с центром в начале координат. Функция $F(w, w_0)$, осуществляющая конформное и однолистное отображение E_q на область указанного типа, имеет вид (см. например, [3, с. 233]):

$$F(w,w_0) = \frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-q^{2k}w/w_0)(1-q^{2k}w_0/w)}{(1-q^{2k}w\overline{w}_0)(1-q^{2k}/(w\overline{w}_0))}\right].$$

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом равен $M(w) = \frac{1}{2\pi}\ln R(w)$, где $R(w)$ — конформный радиус в точке w, с точностью до постоянного сомножителя равный

$$R(w) = (1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}r^{-2}), \quad r = |\, w\,|,$$

Критические точки обобщённого приведённого модуля кольцевой области E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом находятся из уравнения (5):

$$\frac{r^2}{1-r^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2}-\frac{q^{2k}\,/\,r^2}{1-q^{2k}\,/\,r^2}\right]=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{2k}(r^4-q^2)}{(1-q^{2k}r^2)(r^2-q^{2k+2})}=0\,.$$

Теорема 4. *Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом имеет бесконечное количество критических точек, расположенных на окружности $|\,w\,|=\sqrt{q}$.*

Единичный круг с радиальным разрезом

Найдем обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом. Обозначим через $F(w,w_0)$ функцию, которая конформно и однолистно отображает E_q на область указанного типа, при этом для удобства будем считать, что радиальный разрез расположен на вещественной оси. Функция $F(w,w_0)$ имеет вид

$$F(w,w_0)=\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-q^{2k}w\,/\,w_0)(1-q^{2k}w_0\,/\,w)}{(1-q^{2k}w\overline{w}_0)(1-q^{2k}\,/\,(w\overline{w}_0))}\right]^{(-1)^k}.$$

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно этой области равен $M(w)=\frac{1}{2\pi}\ln R(w)$, где $R(w)$ — конформный радиус в точке w, с точностью до постоянного сомножителя равный

$$R(w)=(1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}\left[(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}r^{-2})\right]^{(-1)^k},\quad r=|\,w\,|.$$

Уравнение (5) для нахождения критических точек обобщённого приведённого модуля области E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом

$$\frac{r^2}{1-r^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2}-\frac{q^{2k}\,/\,r^2}{1-q^{2k}\,/\,r^2}\right]=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2m}+r^{-2m}q^{2m}}{1+q^{2m}}=0.$$

не имеет решений.

Теорема 5. *Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом не имеет критических точек.*

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q можно исследовать также относительно других канонических двусвязных областей специального вида, у которых внутренний контур — круговой или радиальный разрез, а внешний — звездообразная кривая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kazantsev A. V.* Hohlov effects for pre-Schwarzian derivatives of functions in the Gakhov class // Lobachevskii J. Math. 2019. Vol. 40, № 9. P. 1324–1329.

[2] *Киндер М. И.* О числе решений уравнения Ф. Д. Гахова в случае многосвязной области // Изв. вузов. Матем. 1984. № 8. С. 69–72.

[3] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970. 304 с.