УДК 519.853

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ В НЕСИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Абрамова, С. И. Дудов , А. В. Жаркова
(Саратов, Россия)
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru, ZharkovaAV@gmail.com

Рассматривается функция расстояния, заданная функцией Минковского (калибром выпуклого телесного компакта) от точки до замкнутого множества конечномерного пространства. Известно, что в случае выпуклости множества данная функция является выпуклой. Получена формула субдифференциала этой функции расстояния. В отличие от полученной ранее Б.Н.Пшеничным, она выражена через другие характеристики объектов, задающих расстояние. Приводятся примеры применения полученной формулы.

Ключевые слова: функция расстояния, функция Минковского, субдифференциал, конус возможных направлений.

ON SOME DIFFERENTIAL PROPERTIES OF DISTANCE FUNCTION IN ASYMMETRIC SPACE

V. V. Abramova, S. I. Dudov, A. V. Zharkova
(Saratov, Russia)
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru, ZharkovaAV@gmail.com

We consider the distance function given by the Minkowsky function(the gage of a certain convex solid set) from point to a closed set of a finite-dimensional space. It is known that if the set is convex, this function is convex. The formula for the subdifferential of this distance function is obtained. In contrast to that obtained earlier by B.N. Pshenichny, it is expressed through other characteristics of objects which specifies the distance function. Examples of the use of the obtained formula are given.

Keywords: distance function, Minkowsky function, subdifferential, cone of feasible directions.

Введение

Пространства с несимметричной нормой и некоторые задачи наилучшего приближения исследовались, например, в [1–7]. Роль нормы в таких пространствах играет функция Минковского (далее будем иметь в виду конечномерный случай):

$$k(x) = \inf\{\alpha \geq 0 : x \in \alpha M\}, \tag{1}$$

где M — телесное компактное выпуклое множество из $\mathbb{R}^p$ и $0_p \in \mathrm{int} M$.

При постановке и исследовании задач по приближению и оценкам сложных множеств множествами простой структуры важную роль играет функция

$$\rho(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} k(x - y), \tag{2}$$

где Ω – некоторое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$. Таким образом, функция $\rho(\cdot, \Omega)$ задается функцией Минковского (1) (калибром множества M ([8])) и выражает расстояние от точки x до множества Ω в этой несимметричной норме.

Ниже приводятся некоторые результаты исследования дифференциальных свойств функции расстояния (2) (далее ФР). Далее будут использованы следующие обозначения:

$\overline{A}, \mathrm{int} A, \mathrm{co} A, \mathbb{K}(A), A^0$ – замыкание, внутренность, выпуклая оболочка, коническая оболочка и поляра множества соответственно; $\gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists \alpha_g > 0,\ x + \alpha g \in A,\ \forall \alpha \in (0, \alpha_g)\},\ K(x, A) = \overline{\gamma}(x, A)$ – конус допустимых и конус возможных направлений множества в точке x соответственно; $\underline{\partial} f(x) (\bar{\partial} f(x))$ – субдифференциал (супердифференциал) выпуклой (вогнутой) функции $f(x)$ в точке x; $\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [f(x + \alpha g) - f(x)]$ – производная по направлению $g \in \mathbb{R}^p$ функции $f(\cdot)$ в точке x; $\delta(x, \Omega)$ – индикаторная функция множества Ω; $s(v, M) = \max\limits_{w \in M} < v, w >$ – опорная функция множества M; $< x, y >$ – скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^p$; $K^+ = \{w \in \mathbb{R}^p :< v, w > \geq 0,\ \forall v \in K\}$ – конус, сопряженный к конусу K; $0_p = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$; $Q^\rho(x, \Omega) = \{z \in \Omega : k(x - z) = \rho(x, \Omega)\}$ – проекция точки x на множество Ω.

1. Субдифференциал ФР до выпуклого множества

Известно, если множество Ω является выпуклым, то ФР (2) является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. В [9, гл. 2, §3] получена формула ее субдифференциала в виде:

$$\underline{\partial} \rho(x, \Omega) = \begin{cases} \underline{\partial} \delta(x, \Omega) \bigcap M^0, & \text{если } x \in \Omega, \\ \underline{\partial} \delta(x, \Omega + \rho(x, \Omega) M) \bigcap \{v \in \mathbb{R}^p : s(v, M) = 1\}, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Ниже мы предлагаем формулу субдифференциала в другой форме, которая использует другие характеристики объектов, задающих ФР.

Теорема 1. *Если Ω – выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$, то функция расстояния (2), заданная функцией Минковского (1), является выпуклой на $\mathbb{R}^p$ функцией. Ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$*

можно выразить формулой

$$\underline{\partial}\rho(x,\Omega) = \underline{\partial}k(x-z)\bigcap -K^{+}(z,\Omega), \tag{4}$$

где z – любая точка из $Q^{\rho}(x,\Omega)$.

Отметим, что формула (4) является обобщением формулы, полученной в [10] для обычной функции расстояния.

Разумеется для приложений интересны и формула Б.Н.Пшеничного (3) и формула (4). В конкретных случаях одна из них может оказаться более удобной для использования. Отметим так же необходимую для (4) формулу субдифференциала функции Минковского ([9, гл. 4, § 4]):

$$\underline{\partial}k(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) \le 1\}, & \text{если } x = 0_p, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) = 1, < v, x >= k(x)\}, & \text{если } x \ne 0_p. \end{cases}$$

2. Приложения формулы (4)

В зависимости от способа задания множеств M и Ω формула (4) может быть конкретизирована.

Теорема 2. *Пусть выпуклое множество Ω и выпуклый компакт M заданы в виде*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \le 0\},\ M = \{y \in \mathbb{R}^p : h(y) \le 0\}.$$

Здесь $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ – выпуклые конечные на $\mathbb{R}^p$ функции, причем $h(0_p) < 0$ и существует точка $\hat{y}$, в которой $f(\hat{y}) < 0$. Тогда справедлива формула

$$\underline{\partial}\rho(x,\Omega) = \begin{cases} 0_p, & \text{\textit{если} } f(x) < 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) \le 1\}\bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial}f(x)), & \text{\textit{если} } f(x) = 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) = 1\}\bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial}h(\frac{x-z}{K(x-z)}))\bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial}f(z)), & \text{\textit{если} } f(x) > 0. \end{cases}$$

Здесь z –любая точка из $Q^{\rho}(x,\Omega)$.

Формула (4) может быть использована для дифференциальной характеристики ФР и в некоторых случаях, когда множество Ω не является выпуклым.

Теорема 3. *Пусть множество Ω имеет вид*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, \quad \Omega \ne \mathbb{R}^p, \tag{5}$$

где I – конечное множество индексов, а Ω_i – выпуклые замкнутые множества для всех $i \in I$. Тогда ФР всюду дифференцируема по любому направлению, причем

$$\frac{\partial \rho(x,\Omega)}{\partial g} = \min_{i \in I(x)} \max_{v \in \underline{\partial}\rho(x,\Omega_i)} < v, g > \quad \forall g \in \mathbb{R}^p,$$

где $I(x) = \{i \in I : \rho(x,\Omega) = \rho(x,\Omega_i)\}$, $\underline{\partial}\rho(x,\Omega_i) = \underline{\partial}k(x - z_i) \bigcap -K^+(z_i,\Omega_i)$, *а* z_i *– любая точка из* $Q^\rho(x,\Omega_i)$.

Интересным для приложений является случай, когда множества Ω_i в (5) являются полупространствами.

Теорема 4. *Пусть множество* Ω *имеет вид* (5), *а* $\Omega_i = \{y \in \mathbb{R}^p : < A_i, y > \leq b_i\}$, $A_i \in \mathbb{R}^p$, $A_i \neq 0_p$, $b_i \in \mathbb{R}$ *и* $\mathrm{int}\ D \neq \emptyset$, *где* $D = \overline{\mathbb{R}^p \backslash \Omega}$. *Тогда*

1) *ФР вогнута на D;*

2) *ее супердифференциал в точках* $x \in \mathrm{int}D$ *можно выразить в виде*

$$\overline{\partial}\rho(x,\Omega) = \mathrm{co}\Big\{\frac{A_i}{s(A_i,M)} : i \in I(x)\Big\},$$

где $I(x) = \{i \in I : \rho(x,\Omega) = \rho(x,\Omega_i)\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Dunham Ch. B.* Asymmetric norms and linear approximation // Congr. Numer. 1989. Vol. 69. P. 113–120.

[2] *Romaguera S., Schellekens M.* Quasi–metric properties of complexity spaces // Topology Appl. 1999. Vol. 98, № 1–3. P. 311–322.

[3] *De Blasi F. S., Myjak J.* On generalized best approximation problem // J. Approx.Theory. 1998. Vol. 94, № 1. P. 54–72.

[4] *Alegre C.* Continuous operators on asymmetric normed spaces // Acta Math.Hungar. 2009. Vol. 122, № 4. P. 357–372.

[5] *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces. Birkhauser, 2013. 219 p.

[6] *Алимов А. Р.* Аппроксимативно–геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах : дис. ... д-ра физ.-матем. нук / Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. М., 2014. 207 с.

[7] *Алимов А. Р.* Выпуклость ограниченных чебышевских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4. С. 489–497.

[8] *Rockafellar R.* Convex analysis. New Jersey : Princeton University Press, 1970. 451 p.

[9] *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1981. 320 с.

[10] *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.