УДК 517.54

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ ХОРДОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА[1]

А. В. Жердев (Саратов, Петрозаводск, Россия)
jerdevandrey@gmail.com

Рассмотрена задача описания множества $\{g(i,T)\}$ значений решений хордового уравнения Лёвнера с ограничением на управляющую функцию $|\lambda(t)| \le c$. Использованы методы оптимального управления и принцип Понтрягина.

Ключевые слова: множество значений, уравнение Лёвнера, принцип максимума Понтрягина.

ON A VALUE RANGE OF SOLUTIONS TO THE CHORDAL LOEWNER EQUATION[1]

A. V. Zherdev (Saratov, Petrozavodsk, Russia)
jerdevandrey@gmail.com

We consider a value range $\{g(i,T)\}$ of solutions to the chordal Loewner equation with the restriction $|\lambda(t)| \le c$ on the driving function. We use reachable set methods and the Pontryagin maximum principle.

Keywords: Value range, Loewner equation, Pontryagin maximum principle.

Одной из типичных задач геометрической теории функция является проблема отыскания множества значений $\{f(z_0)\}$ для различных классов аналитических функций.

Обозначим $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathcal{H}(T)$, $T > 0$ - класс всех конформных отображений $g : \mathbb{H}\backslash K \to \mathbb{H}$, нормированных в окрестности бесконечности соотношением $g(z) = z + \frac{2T}{z} + O(|z|^{-2})$. Здесь $K \subset \mathbb{H}$ - так называемый "хал"(hull), это означает что $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ и $\mathbb{H}\backslash K$ есть односвязная область. Решения хордового уравнения Лёвнера

$$\frac{dg(z,t)}{dt} = \frac{2}{g(z,t) - \lambda(t)},\ g(z,0) = z,\ t \ge 0, \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ - вещественнозначная непрерывная функция (управляющая функция), образуют всюду плотный подкласс в классе $\mathcal{H}(T)$. Таким образом, проблема отыскания множества значений $\{g(z_0) : g \in \mathcal{H}(T)\}$, $z_0 \in \mathbb{H}$, сводится к описанию множества $\{g(z_0,T)\}$ достижимости уравнения (1). Без потери общности можно положить $z_0 = i$. Множество

$$D(T) = \{g(i,T) : g \text{ решение } (1)\}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

[1]The article is done with the financial support of the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01229).

было описано в работе [1]. Продолжая это исследование, мы рассматриваем задачу описания множества значений

$$D_c(T) = \{g(i,T) : g \text{ решение } (1),\ |\lambda(t)| \le c\},$$

таким образом, мы добавили ограничение $|\lambda(t)| \le c$. Мы используем методы теории оптимального управления и прицип максимума Понтрягина в качестве основных инструментов для решения указанной задачи (см., например [2, 3]).

Хотя множество $D(T)$ было описано в [1], мы приводим другое описание $D(T)$ в декартовых координатах (X, Y).

Теорема 1. *Граница области $D(T)$, $T > 0$ может быть задана уравнением*

$$2X^2 = \log Y(1 - 4T - Y^2). \tag{2}$$

Легко видеть, что при $T \le \frac{1}{4}$ область $D(T)$ ограничена и ее граница пересекает мнимую ось в точках $y = \sqrt{1-4T}$, $y = 1$. С этого момента мы будем рассматривать только этот случай.

Можно показать, что все точки некоторой дуги на $\partial D(T)$ в окрестности точки $(0, \sqrt{1-4T})$ доставляются управляющими функциями со значениями в интервале $[-c, c]$, следовательно это дуга лежит на границе $\partial D_c(T)$. Это утверждение содержится в следующей теореме.

Лемма 1. *Сегмент границы $\partial D_c(T)$ задается уравнением* (2), $Y \in [1-4T, Y_0]$, *где Y_0 - решение одного из уравнений:*

$$2c^2 \log Y + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \ge T - \frac{1-e^{-4}}{4}, \tag{3}$$

$$\frac{2c^2 \log Y}{(1+\log Y)^2} + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \le T - \frac{1-e^{-4}}{4}. \tag{4}$$

Заметим, что если $c^2 = T - \frac{1-e^{-4}}{4}$ оба уравнения (3), (4) имеют общий корень $Y_0 = e^{-2}$.

Следующая теорема описывает искомое множество $D_c(T)$ при условии $c^2 \ge T - \frac{1-e^{-4}}{4}$.

Теорема 2. *Пусть $c^2 \ge T - \frac{1-e^{-4}}{4}$, $T \le \frac{1}{4}$ и пусть кривые $l_1 - l_4$ определены следующим образом:*

1. Кривая l_1 задана уравнением (2), $Y \in [1-4T, Y_0]$, *Y_0 единственное решение* (3).

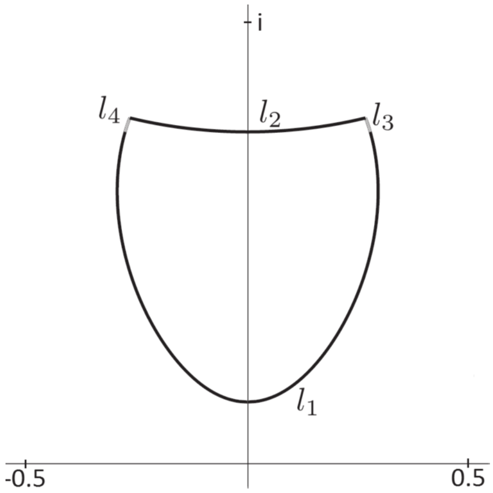

Рис. 1: Граница множества значений $D_c(T)$, T=0.245, c=1

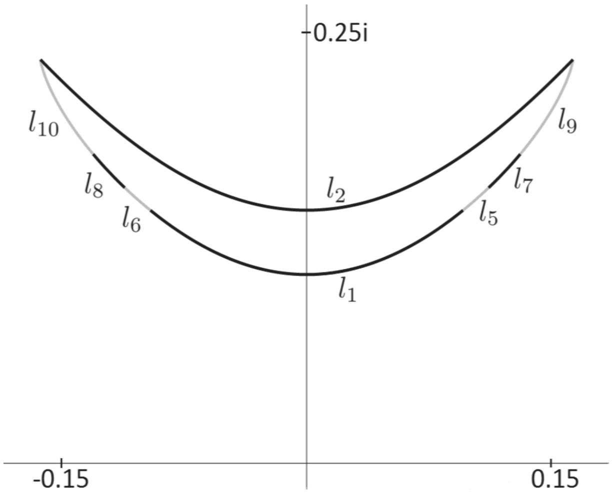

Рис. 2: Граница множества значений $D_c(T)$, T=0.247, c=0.05

2. Кривая l_2 задана решениями (X, Y), $X + iY = z$, $\mu \in [0, 1]$ уравнения

$$z^2 + 1 - 2c(2\mu - 1)(z - i) + 8\mu c^2(\mu - 1)\ln\frac{z + c(2\mu - 1)}{i + c(2\mu - 1)} = 4T.$$

3. Кривая l_3 задана системой

$$\begin{cases} 2p^2 \log\dfrac{Yp}{c} + Y^2 - p^2 = 1 - 4T - c^2, \\ X = -c + p(1 - \log\dfrac{Yp}{c}), \end{cases} \tag{5}$$

где $p \in [c, p_0]$ и

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(4T + c^2 - 1)^2 + 4c^2} + (4T + c^2 - 1))}.$$

Кривая l_4 симметрична кривой l_3 относительно мнимой оси.

В случае, если уравнение

$$-4pc + \frac{c^2}{p^2}\exp\left(-\frac{4c}{p}\right) - p^2 = 1 - 4T - c^2 \tag{6}$$

имеет два различных решения $p_1 < p_2$ в интервале (c, p_0) мы также определим кривые $l_5 - l_{10}$.

4. Кривая l_5 задана системой (5), $p \in [c, p_1]$. Кривая l_6 симметрична l_5 относительно мнимой оси.

5. Кривая l_7 задана системой

$$\begin{cases} 4cp + (X-c)^2 - Y^2 - 4T = c^2 - 1, \\ -p\log\dfrac{(X-c)Y}{c} = 2c, \end{cases}$$

где $p \in [p_1, p_2]$. Кривая l_8 симметрична l_7 относительно мнмимой оси.

6. Кривая l_9 задана системой (5), $p \in [p_2, p_0]$. Кривая l_{10} симметрична l_9 относительно мнмимой оси.

Возможны два случая:

(1) $D_c(T)$ ограничена кривыми $l_1, l_2, l_5 - l_{10}$, если (6) имеет два различных решения $p_1 < p_2$ в интервале (c, p_0).

(2) $D_c(T)$ ограничена кривыми $l_1 - l_4$, если (6) имеет не более одного решения в интервале (c, p_0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Prokhorov D., Samsonova K.* Value range of solutions to the chordal Loewner equation. // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 428, №. 2. P. 910–919.

[2] *Prokhorov D.* Sets of values of systems of functionals in classes of univalent functions. // Mat. Sb., 1990. Vol. 181, №. 12. P. 1659–1677. English translation: Math. USSR Sb. 1992. Vol. 71, № 2. P. 499–516.

[3] *Prokhorov D.* Reachable Set Methods in Extremal Problems for Univalent Functions. Saratov : Saratov Univ. 1993.