

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})^1$

А. Е. Додонов (Владимир, Россия)

art-dodonov@mail.ru

Приводятся критерии и необходимые условия сходимости рядов наимпростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: наимпростейшие дроби, ряды наимпростейших дробей, условия сходимости.

CONVERGENCE CONDITIONS FOR SERIES OF SIMPLE PARTIAL FRACTIONS¹

A. E. Dodonov (Vladimir, Russia)

art-dodonov@mail.ru

Criteria and necessary conditions for the convergence of series of simple partial fractions are given.

Keywords: simple partial fractions, series of simple partial fractions, conditions of convergence.

В работах [1]–[4] рассматривалась сходимость в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, рядов наимпростейших дробей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_k}, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k \neq 0. \quad (1)$$

В частности, В. И. Данченко в работе [2] было получено следующее необходимое условие сходимости ряда (1) к некоторой функции ρ в $L_p(\mathbb{R})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q+\varepsilon}} \leq \frac{A(p, \|\rho\|_{L_p(\mathbb{R})})}{\varepsilon^{1/q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (2)$$

а И. Р. Каюмовым в работе [4] для рядов вида (1) с полюсами, лежащими при фиксированном $\alpha > 0$ в угле $V_\alpha = \{z : |z| \leq \alpha|y|\}$, занумерованными в порядке возрастания $|y_k|$, было получено необходимое и достаточное условие сходимости в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < \infty. \quad (3)$$

¹Работа выполнена в рамках эффективного контракта ВлГУ.

¹The article is done under the effective contract of Vladimir State University.

Нами доказано следующее необходимое условие сходимости в $L_p(\mathbb{R})$ ряда (1).

Теорема 1. Пусть ряд наимпростейших дробей (1) сходится в $L_p(\mathbb{R})$ к некоторой функции ρ . Тогда при $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{(1+\varepsilon)/q}(|z_k| + 1)} < \frac{A(p, \|\rho\|_{L_p(\mathbb{R})})}{\varepsilon^{1/q}}. \quad (4)$$

Очевидно, условие (4) сильнее условия (2). При $2 \leq p < 3$ существенно усилить теорему 1 нельзя, поскольку существует такой сходящийся в $L_p(\mathbb{R})$ ряд наимпростейших дробей, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{1/p-\delta}(|z_k| + 1)} = \infty, \quad \delta > 0.$$

Нами получен также критерий сходимости в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, ряда (1) с полюсами из угла $V_\alpha \cap \mathbb{C}^+$.

Теорема 2. Пусть $z_k \in V_\alpha \cap \mathbb{C}^+$, $1 < p < 2$. Тогда для сходимости ряда (1) в $L_p(\mathbb{R})$ необходимо и достаточно, чтобы при всех $n \in \mathbb{N}$ было выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{y_k + y_j} \right)^{p-1} \leq A(p, \{z_k\}). \quad (5)$$

Отметим, что из условия (5) вытекает и условие (3) при $1 < p < 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Протасов В. Ю. Приближения наимпростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем., 2009. Т. 73, № 2. С. 123–140.
- [2] Данченко В. И. О сходимости наимпростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 7. С. 53–66.
- [3] Каюмов И. Р. Сходимость рядов наимпростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 10. С. 87–98.