УДК 517.53, 517.535

ОБ ОЦЕНКАХ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ И ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. Е. Додонов (Владимир, Россия)
art-dodonov@mail.ru

С помощью интерполяционного тождества, дополняющего результат В. Н. Русака, получена оценка производных рациональных функций типа Бернштейна–Виденского–Русака, которая применяется для получения оценки квазимногочлена с помощью ассоциированных рациональных функций.

Ключевые слова: интерполяционные тождества, оценки производных рациональных функций, оценки квазимногочленов.

ON ESTIMATES OF QUASIPOLYNOMIALS AND DERIVATIVES OF RATIONAL FUNCTIONS[1]

A. E. Dodonov (Vladimir, Russia)
art-dodonov@mail.ru

We obtain Bernshtein–Videnskii–Rusak type estimate of derivatives of rational functions by dint of interpolation equality complementary to Rusak's result. Also we obtain estimate of quasipolynomial by norm of associated rational functions by dint of this estimate of derivatives of rational functions.

Keywords: interpolation equalities, estimates of derivatives of rational functions, estimates of quasipolynomials.

При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим дроби

$$R_1(z) = P(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}, \quad R_2(z) = Q(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\overline{z_k}}, \quad R = R_1 + R_2, \quad (1)$$

где $P(z)$, $Q(z)$ — произвольные многочлены с комплексными коэффициентами, $\deg P, \deg Q \le n$, а $z_k \in \mathbb{C}^+$ — не обязательно различные точки.

При $0 \le \varphi < \pi$, $\alpha \ne \pi/2 + \pi k$, положим

$$B(x) = \prod_{k=1}^{n}\frac{x-z_k}{x-\overline{z_k}}, \qquad \mu(x) = -i\frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\operatorname{Im} z_k}{|x-z_k|^2},$$

$$M(x) = M_{\varphi+\alpha}(x) = \operatorname{Re}\left(e^{i(\varphi+\alpha)}B(x)\right), \qquad N(x) = N_{\varphi}(x) = \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi}B(x)\right),$$

и обозначим через $\xi_m = \xi_m(\varphi,\alpha)$ и $\zeta_k = \zeta_k(\varphi)$ нули функций $N_{\varphi+\alpha}$ и M_φ соответственно. Отметим, что все числа $\{\xi_m\}_{m=1}^{2n}$ (как и $\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n}$) вещественные и попарно различные.

[1]Работа выполнена в рамках эффективного контракта ВлГУ.
[1]The article is done under the effective contract of Vladimir State University.

С помощью интерполяционного тождества, полученного В. Н. Русаком в монографии [1] для дроби того же вида, что и $R(x)$, но с дополнительным условием вещественнозначности на $\mathbb{R}$, получается

Лемма. *Для дроби вида* (1) *имеет место равенство*

$$R_1'(\xi_m)e^{-i\alpha} + R_2'(\xi_m)e^{i\alpha} = \sum_{k=1}^{2n} R(\zeta_k) \cdot \frac{N(\zeta_k)M(\xi_m) + \sin\alpha}{\mu(\zeta_k)(\xi_m - \zeta_k)^2}.$$

Будем обозначать

$$\mathcal{R}(\varphi) = \max_{1\le k\le 2n} |R(\zeta_k)|, \qquad \|R\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |R(x)|.$$

С помощью леммы методами монографии [1] получается

Теорема 1. *При любых* $x, \alpha \in \mathbb{R}$ *для рациональных функций вида* (1) *имеют место неравенства*

$$\left|R_1'(x)e^{-i\alpha} + R_2'(x)e^{i\alpha}\right| \le \mu(x)\mathcal{R}(\varphi) \le \mu(x)\|R\|, \tag{2}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ *— такое число, что* x *— нуль функции* $N_{\varphi+\alpha}$.

Оценка (2) экстремальна: для дробей $R(x) = B(x)$, $R_1(x) \equiv 1$, $R_2(x) = B(x) - 1$ с одной стороны имеем

$$\left|R_1'(x)e^{-i\alpha} + R_2'(x)e^{i\alpha}\right| = |B'(x)|,$$

а с другой стороны

$$\mu(x)\|R\| = \mu(x) = \left|\frac{B'(x)}{B(x)}\right| = |B'(x)|,$$

так что в этом случае (2) обращается в равенство.

Из (2) методами работы [2] получается оценка квазимногочлена

$$\Omega(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m} p_{s,k}\lambda^s\right)e^{iz_k\lambda}, \qquad p_{s,k}\in\mathbb{C}, \quad z_k\in\mathbb{C}^+.$$

с помощью ассоциированных с ним рациональных функций

$$\rho_1(z) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{\hat{p}_{s,k}z^s}{(z-z_k)^{m+1}}, \qquad \rho_2(z) = Q(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(z-\overline{z_k})^{m+1}}, \tag{3}$$

где при каждом k коэффициенты $\{\hat{p}_{s,k}\}_{s=0}^{m}$ являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=j}^{m} \frac{C_m^j i^{m-j} s! z_k^{s-j}}{(s-j)!} \hat{p}_{s,k} = m! p_{m-j,k}, \qquad j = 0, 1, \ldots, m,$$

а $Q(z)$ — произвольный многочлен, $\deg Q \leq mn$. Именно, справедлива

Теорема 2. *Для любого вещественного* $\lambda > 0$ *и рациональных функций вида* (3) *справедливо неравенство*

$$|\Omega(\lambda)| \leq \frac{n(m+1)}{\lambda} \inf_{\rho_2} \|\rho_1 + \rho_2\|, \tag{4}$$

где точная нижняя грань берется по всем дробям ρ_2 *вида* (3).

Неравенство (4) обобщает оценки экспоненциальных сумм, полученные в [3]. Примеры сумм $\Omega(\lambda)$, для которых неравенства типа (4) существенно учитывают взаимное «погашение» гармонических слагаемых, приводились в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск : Изд-во БГУ, 1979. 176 с.

[2] *Данченко В. И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 4. С. 33–52.

[3] *Danchenko V. I., Dodonov A. E.* Estimates for exponential sums. Applications // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 188, № 3. P. 197–206.