УДК 517.535

ОЦЕНКИ L_p-НОРМ ПРОСТЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ[1]

В. И. Данченко (Владимир, Россия)
vdanch2012@yandex.ru

Для простых рациональных дробей получены оценки L_p-норм, зависящие от полюсов этих дробей

Ключевые слова: простые рациональные дроби, L_p-оценки, аппроксимация, вычеты.

ESTIMATES OF L_p-NORMS OF SIMPLE RATIONAL FRACTIONS[1]

V. I. Danchenko (Vladimir, Russia)
vdanch2012@yandex.ru

For the L_p-norms of the simple rational fractions we obtained estimates, which depend on the poles of these fractions

Keywords: simple rational fractions, L_p - estimates, approximation, residues.

1. Простой дробью назовем рациональную функцию комплексного переменного $\sigma(z)$, имеющую конечное число простых полюсов и равную нулю на бесконечности:

$$\sigma(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k}{z-z_k},\qquad \rho_k\in\mathbb{C},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

В частности, при натуральных ρ_k получаются так называемые наипростейшие дроби (НД). Интерес к оценкам L_p-норм дробей (1) возник в связи с задачами о сходимости рядов НД. Известны оценки L_p-норм НД через их L_r-нормы (т.е. неравенства разных метрик). Такие оценки на ограниченных и неограниченных вещественных промежутках и при различных p и r получены, например, в работах [1], [2]. Так, в [2] показано, что при $1<r<p\le\infty$ для НД имеем

$$\|\sigma\|^q_{L_p(\mathbb{R})}\le A(p,r)\,\|\sigma\|^s_{L_r(\mathbb{R})}\,,\qquad \text{где}\qquad p^{-1}+q^{-1}=1,\quad r^{-1}+s^{-1}=1,$$

где $A>0$ и зависит только от указанных аргументов. Кроме того, в задачах о сходимости бесконечных НД применяются оценки L_p-норм,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект 18-01-00744).

[1]The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 1.574.2016/1.4) and the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18- 01-744).

зависящие от полюсов z_k явно (см., например, [3], [4]). В настоящей заметке приведен один простой способ получения такого рода оценок для простых дробей.

2. Случай прямой. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть простая дробь* (1) *отображает* $\mathbb{C}^-$ *в* $\mathbb{C}^+$ (*в этом случае все полюсы* z_k *лежат в открытой полуплоскости* $\mathbb{C}^+$). *Тогда при* $1 < p < 3$ *имеем:* $2\pi\,\kappa_1 \le \|\sigma\|_p^p \le 2\pi\, c\, \kappa_1$, *где*

$$\kappa_1 := \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}}\sum_{k=1}^{n}\overline{\rho_k}\sigma^{p-1}(\overline{z_k})\right), \qquad c := \operatorname{cosec}\frac{\pi(3-p)}{2},$$

и суммируются значения однозначной в нижней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^-$ *аналитической ветви*

$$\sigma^{p-1}(z) = |\sigma(z)|^{p-1}e^{i\varphi(p-1)}, \quad \varphi = \arg\,\sigma(z) \in (0,\pi), \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

Для НД аналогичный результат получен в [5].

Доказательство. При $z \in \mathbb{C}^-$ и $\varepsilon \in (0,1)$ выделяется однозначная регулярная ветвь

$$\sigma^{\varepsilon}(z) = |\sigma(z)|^{\varepsilon}e^{i\varphi\varepsilon}, \quad \text{где} \quad 0 < \varphi = \arg\sigma(z) < \pi.$$

Функция $w(z) = e^{i\pi(1-\varepsilon)/2}\varrho^{\varepsilon}(z)$ отображает нижнюю полуплоскость в угол $\pi(1-\varepsilon)/2 < \arg w < \pi(1+\varepsilon)/2$. Поэтому при $z \in \mathbb{C}^-$ имеем

$$\operatorname{Im} w(z) \le |w(z)| = |\sigma(z)|^{\varepsilon} \le c\operatorname{Im} w(z), \qquad c := \operatorname{cosec}\frac{\pi(1-\varepsilon)}{2}. \tag{2}$$

Пусть $p = 2m+\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Учитывая (2), по теореме о вычетах находим оценку:

$$\|\sigma\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |\sigma(x)|^{2m}\,|\sigma(z)|^{\varepsilon}\,dx \le c\operatorname{Im}\left(e^{i\pi\frac{1-\varepsilon}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}|\sigma(x)|^{2m}\sigma^{\varepsilon}(x)\,dx\right) =$$

$$= c\operatorname{Im}\left(e^{i\pi\frac{1-\varepsilon}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\sigma^{m+\varepsilon}(x)\overline{\sigma^m(x)}\,dx\right) =$$

$$= 2\pi\, c\operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi\varepsilon}{2}}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=\overline{z_k}}\sigma^{m+\varepsilon}(z)\overline{\sigma^m(\overline{z})}\right).$$

Из первого равенства в (2) получается неравенство, противоположное этому неравенству при $c = 1$. В случае $p = 2m-\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ получаются аналогичные оценки однозначной ветви $w(z) = e^{-i\pi(1-\varepsilon)/2}\sigma^{-\varepsilon}(z)$

с заменой в (2) Im на (−Im), а из них — оценки $\|\sigma\|_p^p$. Утверждение теоремы 1 получается в частном случае $1 < p < 3$, $m = 1$ (т.е. при $p = 2 \pm \varepsilon$).

2. Случай окружности. Предположим, что все полюсы простой дроби (1) лежат в единичном круге и $\rho_k > 0$. Легко проверяется, что $\mathrm{Re}\,(\xi\sigma(\xi)) > 0$ при всех ξ с $|\xi| > 1$. Значит, при $\varepsilon \in (-1, 1)$ и $|\xi| \geq 1$ можно выделить регулярную однозначную ветвь$(\xi\sigma(\xi))^{\varepsilon}$, значения которой лежат в угле $(-\varepsilon\pi/2, \varepsilon\pi/2)$. Следовательно, для этой ветви имеем

$$\mathrm{Re}\,\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{\varepsilon} \leq |\xi\sigma(\xi)|^{\varepsilon} \leq c\,\mathrm{Re}\,\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{\varepsilon}, \qquad (3)$$

где $c = \cos^{-1}(\varepsilon\pi/2)$. Отсюда при $p = 2 + \varepsilon$ имеем

$$\|\sigma\|_p^p = \int_{|\xi|=1} |\sigma(\xi)|^2 |\sigma(\xi)|^{\varepsilon} |d\xi| \leq c\,\mathrm{Re} \int_{|\xi|=1} |\sigma(\xi)|^2 \left(\xi\sigma(\xi)\right)^{\varepsilon} |d\xi| =$$

$$= c\,\mathrm{Re} \int_{|\xi|=1} \sigma(\xi)\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{\varepsilon} \overline{\sigma(\xi)} |d\xi| =$$

$$= c\,\mathrm{Re} \int_{|\xi|=1} \frac{\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{1+\varepsilon}}{\xi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k \xi}{1 - \xi\overline{z_k}}\right) \frac{d\xi}{i\xi} =$$

$$= c\,\mathrm{Im} \int_{|\xi|=1} \frac{\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{1+\varepsilon}}{\xi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{1 - \xi\overline{z_k}}\right) d\xi.$$

Из первого неравенства в (4) аналогично получается оценка $\|\sigma\|_p^p$ снизу. Вычислением последнего интеграла по теореме о вычетах получается

Теорема 2. *Пусть полюсы дроби* (1) *лежат в единичном круге и* $\rho_k > 0$. *Тогда при* $1 < p < 3$ *имеем:* $2\pi\kappa_2 \leq \|\sigma\|_p^p \leq 2\pi c\,\kappa_2$, *где*

$$\kappa_2 := \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k \left(\frac{1}{\overline{z_k}}\sigma\left(\frac{1}{\overline{z_k}}\right)\right)^{p-1}\right), \qquad c := \sec\left(\frac{(p-2)\pi}{2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 63–80.

[2] *Данченко В. И, Додонов А. Е.* Оценки L_p-норм наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 9–19.

[3] *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 123–140.

[4] *Каюмов И. Р.* Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 10. С. 87–98.

[5] *Данченко В. И.* О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 4. С. 53–66.