УДК 517.51

ФУНКЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

М. Г. Григорян (Ереван, Армения)
gmarting@ysu.am

Изучаются вопросы существования и описания структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах.

Ключевые слова: универсальная функция, ряд Фурье, сходимость,классические системы .

FUNCTIONS THAT ARE UNIVERSAL WITH RESPECT TO THE CLASSICAL SYSTEMS[1]

M. G. Grigoryan (Yrevan, Armenia)
gmarting@ysu.am

Are studied the questions of existence and description the structure of functions whose Fourier series for a given classical system universal in one sense or another in various functional classes

Keywords: universal function, Fourier series, convergence, classical systems.

Введение

Доклад(лекция) посвящен(а) вопросам существования и описания структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах.

Заметим, что определения понятия «универсальная функция» не существует. Обычно под этим термином понимается функция, с помощью которой можно «представить» «все» функции. При этом способ представления, а также класс представимых функций может трактоваться различным образом. Примеры универсальных функций привлекали внимание многих математиков и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати. В этих публикациях изучаются те или иные универсальные функции, а также их свойства. Причем развитие происходит как в действительных, так и в комплексных рамках. Близким является понятие универсального ряда так называют ряды, с помощью которых можно представить любую функцию (здесь также способ представления и класс представимых функций можно понимать

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1A148.

[1]This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project 18T-1A148.

различным образом). Часто такой ряд связан с какой-то функцией, например, является ее рядом Тейлора или Фурье (Фурье–Стильтеса). Понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова и Талаляна. Универсальные ряды также изучались во многих работах и имеется значительная информация о свойствах таких рядов.

По сути первый тип универсальной функции был рассмотрен в 1929 г. Биркхофом: существует целая функция $g(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т.е. для любой целой функции $f(z)$ и числа $r > 0$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая,что последовательность сдвигов $\{g(z+n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(z)$ на круге $|z| \leq r$.

В 1935 году Марцинкевич опираясь на некоторые идеи Н. Н. Лузина, доказал существование непрерывной функций, которая универсальна относительно производных чисел (производной отношния). Если $h_n \to 0$ заранее фиксированная последовательность, то существует функция $F \in C[0,1]$ такая, что для любой измеримой функций g определенной на $[0,1]$ существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что почти всюду на $[0,1]$

$$\lim_{\to\infty} \frac{F(x+h_{n_k}) - F(x)}{h_{n_k}} = g(x).$$

В 1987г. Гроссе–Эрдман доказал существование вещественной действительной функции с универсальным рядом Тейлора: существует функция $g(x) \in C^{\infty}(R)$ с $g(0) = 0$, ряд Тейлора которой в точке $x = 0$ локально-равномерно универсален в $C(R)$, т.е. для любой функции $f(x) \in C(R)$ с $f(0) = 0$ и числа $r > 0$, существует подпоследовательность

$$S_{n_k}(g,0) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

частичных сумм ряда Тейлора функции $g(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $|x| \leq r$. Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в$M[0,1]$ в смысле сходимости почти всюду, является работа Меньшова. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, универсальные в M в обычном смысле (в случае сходимости почти всюду) были построены Талаляном. Для формулировки некоторых результатов существования универсальных рядов напомним следующие обозначения и определения. Пусть $M[0,1]$ — совокупность всех (не обязательно конечных) измеримых функций (соотв. $L^0[0,1]$) — класс всех (соотв. почти везде конечных) измеримых на $[0,1]$ функций. Под сходимостью в метрике $M[0,1]$ или в метрике $L^0[0,1]$ мы будем подразумывать сходимость почти всюду.

Пусть $E \subseteq [0,1]$ некоторое измеримое множество и $|E|$ — мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, $\operatorname{supp} f = \{x \in [0,1]; f(x) \neq 0\}$, $L^p(E)$ $(p > 0)$ — класс всех тех измеримых на E функций, для которых $\int_E |f(x)|^p\,dx < \infty$ и $C(E)$ — класс всех непрерывных на $E \subseteq [0,1]$ функций. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система на $[0,1]$, и пусть $c_k(U) = \int_0^1 U(x)\varphi_k(x)dx,\ k \in \mathbf{N}-$коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0,1]$,($\mathbf{N}-$ совокупность всех натуральных чисел).

Пусть метрическое пространство $S-$ какое-нибудь из пространств $M[0,1]$, $L^p[0,1]$, $p \geq 0$.

Определение 1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k \in S \tag{1}$$

называется *универсальным в* S

1) *в обычном смысле*, если для каждой функции $f \in S$ существует последовательность возрастающих натуральных чисел n_k такая, что у ряда (1) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится к $f(x)$ в метрике S;

2) *в смысле перестановок*, если для каждой функции $f \in S$ члены ряда (1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$$

сходился к функции $f(x)$ в метрике S;

3) *в смысле знаков в* S, если для каждой функции $f \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k f_k(x)$ сходится к функции $f(x)$ в метрике S.

Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в $M[0,1]$ в смысле сходимости почти всюду, является работа Д. Е. Меньшова.

Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, универсальные в M в обычном смысле (в случае сходимости почти всюду) были построены в работе А. А. Талаляном.

В последние годы нами (мной и моими соавторами-учениками) были получены некоторые результаты (см. [1–7]), связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах. Такие функции мы назовем универсальными относительно классических систем.

Определение 2. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0,1]$ *универсальна для класса* S *относительно системы* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$:

а) *в обычном смысле*, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в обычном смысле,

б) *в квази-обычном смысле*, если существует последовательность знаков $\{\ \delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ был бы универсальным в обычном смысле в S,

в) *в смысле перестановок*, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле перестановок,

г) *в смысле знаков своих коэффициентов Фурье по этой системе*, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле знаков.

Замечание 1. Не существует функция $U \in L^1[0,1]$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе (по системе Уолша) был бы универсальным в классе $M[0,1]$ в обычном смысле (даже в случае, сходимости по мере). В самом деле, если существовала бы функция $U \in L^1[0,1]$, которая универсальна для класса $M[0,1]$ относительно тригонометрической системы в обычном смысле, тогда для функции $f(x) = 2U(x)$ нашлась бы подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\} \nearrow \infty$ такая, что по мере на $[0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{|n|=0}^{m_k} d_n(U) e^{2\pi n i x} = 2U(x), \quad d_n(U) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 U(x) e^{-2\pi n i x} dx$$

С другой стороны, из известной теоремы Колмогорова (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$) вытекает, что $\sum\limits_{|n|=0}^{m_k} d_n(U) e^{2\pi n i x}$ — сходится к $U(x)$ по мере на $[0,1]$. Отсюда вытекает, что $U(x) = 2U(x)$ почти всюду на $[0,1]$.

Пришли к противоречию. Значит, не существует функция $U \in L^1[0,1]$ универсальная для классов $M[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно

тригонометрической системы (соотв. относительно системы Уолша) в обычном смысле.

Сразу же возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос 1. Существует ли функция$U \in L^1[0,1)$ унивесальна для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно тригонометрической системы $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ или относительно системы Уолша *в смысле перестановок*?

Отметим, что в работах [2, 5] автором и А. Саргсяном построены интрегрируемые функций $U(x)$унивесальные для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша *в смысле знаков своих коэффициентов Фурье.*

Отметим также, что нам не известен ответ и на следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что можно было бы построить функцию $U \in L^1[0,1]$ универсальную для класса $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ или для класса$M[0,1]$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в обычном смысле?

В этой статье мы построим функцию $U \in L^1[0,1]$ такую, что после выбора подходящих знаков ($\delta_k = \pm 1$ и $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 0,1,2..$) для ее коэффициентов Фурье $\{d_k(U)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ можно достичь того, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k d_k(U) e^{2\pi kix}$ (соотв. здесь $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k d_k(U) e^{2\pi kix}$) — будет универсальным в $M[0,1]$ в обычном смысле (соотв. в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ в смысле перестановок).

А именно справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует функция $U \in L^1[0,1]$ которая является универсальной для класса$M[0,1]$ относительно тригонометрической системы $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в квази-обычном смысле.*

Теорема 2. *Существуют числа$\{\varepsilon_k = \pm 1,\ k \geq 0\}$ и функция $U \in$ $\in L^1[0,1]$, таких, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k d_k(U) e^{2\pi kix}$ — универсален в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно перестановок.*

Эти результаты имеют место и для системы Уолша. Более того верны следующие теоремы

Теорема 3. *Существует функция $U \in L^1[0,1]$ ($\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon \in (0,1)$ — наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на $[0,1]$ и по $L^1[0,1]$ норме рядом Фурье–Уолша, с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса $M[0,1]$относительно системы Уолша в квази-обычном смысле.*

Теорема 4. *Существуют числа $\varepsilon_k = \pm 1,\ k \geq 0\}$ и функция $U \in L^1[0,1]$ ($\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon \in (0,1)$ — наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на $[0,1]$ и по $L^1[0,1]$ норме рядом Фурье–Уолша, с монотонно убывающими коэффициентами, таких, что ряд*

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ — *универсален в* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *относительно перестановок.*

Теоремы 3 и 4 следуют из более сыльной теоремы 5

Теорема 5. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ $(\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)$ *— наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на* $[0,1]$ *и по* $L^1[0,1]$ *норме рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и такая что:*

а) она универсальна для класса $M[0,1]$ *относительно системы Уолша в квази-обычном смысле;*

б) для любого $p \in (0,1)$ *существует последовательность знаков* $\{\varepsilon_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ *такая, что ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ *был бы универсальным в* $L^p[0,1]$ *относительно перестановок.*

Теорема 6. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ $(\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)$ *— наперед заданное число) со сходящимся по* $L^1[0,1]$ *норме и почти всюду на* $[0,1]$ *рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша* ***в смысле знаков своих коэффициентов Фурье.***

Теорема 7. *Существуют совокупность измеримых замкнутых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $F_1 \subset ... \subset F_n \subset F_{n+1} \subset ... \subset [0,1]$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n| = |E|$ *и функция* $U \in L^1[0,1]$ $(\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)$ *— наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на* $[0,1]$ *и по* $L^1[0,1]$ *норме рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, таких, что функция* $U(x)$ *является универсальной для классов* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *и*$L^1(F_n)$ *для всех* $n \in N$ *относительно системы Уолша в квази-обычном смысле.*

Замечание 2. Нетрудно видеть, что теорема 2 окончательна в некотором смысле (неулучшаема), она не верна при $p \geq 1$.

В случае $p \geq 1$для системы Уолша верны следующие теоремы

Теорема 8. *Можно найти функцию* $U \in L^1[0,1]$ *такую, что после умножения членов ее ряда Фурье–Уолша некоторой измеримой функцией* $0 < M(x) \leq 1$ *можно достичь того, что ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(U)(M(x)W_k(x))$ *был бы универсальным для пространства* $L^1[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков.*

Теорема 9. *Существуют совокупность измеримых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $F_1 \subset ... \subset F_n \subset F_{n+1} \subset ... \subset [0,1]$ *и* $\lim_{n\to\infty} |F_n| = 1$ *таких, что для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *можно было найти функцию* $U_0(x)$ *со свойствами:*

1) $U_0(x) \in L^1[0,1]$, $\operatorname{sup} p(U_0) \subset [0,\varepsilon]$;

2) ряд Фурье–Уолша функции $U_0(x)$сходится в метрике L^1и почти всюду на $[0,1]$;

3) $U_0(x)$ имеет монотонно убывающие коэффициенты Фурье–Уолша;

4) для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ существует последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ для которой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к $f(x)$ по всем нормам $L^1(E_n)$, $n \in \mathbf{N}$;

5) для любого $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ существует последовательность чисел $\{\delta_k = \pm 1, 0\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к $f(x)$ по всем нормам $L^p(E_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

В этой работе мы опишем структуру тех функций, которые универсальны для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша **в квази-обычном смысле** с точки зрения широко известных классических теорем Лузина и Меньшова «Об исправлении функций». А именно доказывается следующая теорема.

Теорема 10. *Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует совокупность измеримых замкнутых множеств $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, с $E_1 = F_1 \subset ... \subset .. F_n \subset F_{n+1} \subset .. \subset [0,1]$ и $|E_1| \geq 1-\varepsilon$, $lim_{n\to\infty}|F_n| = |E|$,таких, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E_1 со сходящимся по $L^1[0,1]$ норме рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и такую, что она была бы универсальной для пространств для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ и $L^1(F_n)$, $C(F_n)$ для всех $n > 1 \in N$ относительно системы Уолша как* ***в квази-обычном смысле так и в смысле перестановок.***

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grigoryan M. G.* On the universal and strong property related to Fourier–Walsh series // Banach Journal of Math. Analysis. 2017. Vol. 11, № 3. P. 698–712.

[2] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ // Journal of Func. Anal. 2016. Vol. 270, № 8. P. 3111–3133.

[3] *Grigoryan M. G., Galyan L. N.* On the universal functions // Journal of Approximation Theory. 2018. Vol. 225, P. 191–208.

[4] *Григорян М.Г.* О структуре функций, универсальных относительно классических систем // 10-й международ. симпозиум «Ряды фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2018. С. 46–47.

[5] *Григорян М. Г., Саргсян А. А.* О структуре функций,универсальных для классов $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Матем.сб. 2018. Т. 209, № 1. С. 37–58.

[6] *Grigoryan M. G., Galyan L. N.* On Fourier series that are universal modulo signs // Studia Mathematica. 2019. Vol. 249. P. 215–231.

[7] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ // Positivity. 2017. Vol. 21, № 3. P. 1425–1451.