УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ БОМБИЕРИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. Гордиенко (Саратов, Россия)
valeriygor@mail.ru

Бомбиери предложил описать строение множества значений начальных коэффициентов нормированных конформных отображений круга в окрестности угловой точки, соответствующей функции Кебе. Задача Бомбиери переносится на класс ограниченных нормированных конформных отображений круга, где роль функции Кебе передается функции Пика. Вычислено число Бомбиери для пары двух нетривиальных начальных коэффициентов.

Ключевые слова: однолистная функция, число Бомбиери, функция Кебе, функция Пика.

ON BOMBIERI PROBLEM FOR BOUNDED UNIVALENT FUNCTIONS

V. G. Gordienko (Saratov, Russia)
valeriygor@mail.ru

Bombieri proposed to describe the structure of the sets of values of the initial coefficients of normalized conformalmappings of the disk in a neighborhood of the corner point corresponding to the Koebe function. The Bombieri problem is studied for the class of bounded normalized conformal mappings of the disk, where the role of the Koebe function is played by the Pick function. The Bombieri number for a pair of two nontrivial initial coefficients are calculated.

Keywords: univalent function, Bombieri number, Koebe function, Pick function.

Введение

Одним из главных объектов исследования в геометрической теории функций комплексного переменного служит класс S, состоящий из всех голоморфных и однолистных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных разложением

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Подкласс $S(M) \subset S$, $M > 1$, ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$ в $\mathbb{D}$, обладает даже более сложной структурой по сравнению с классом $S(\infty) = S$. Традиционно функция Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \in S$$

оказывается экстремальной во многих задачах на классе S. Аналогом функции Кебе для класса $S(M)$ считается функция Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Бомбиери в [1] привел доказательство локальной гипотезы Бибербаха о точной оценке $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, в классе S и поставил там же задачу о нахождении чисел

$$\sigma_{mn} := \liminf_{a_m \to m} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = \liminf_{S \ni f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \geq 2, \qquad (1)$$

где f стремится к K локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Он предположил, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$ с

$$B_{mn} := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{n \sin\theta - \sin(n\theta)}{m \sin\theta - \sin(m\theta)},$$

и доказал, что $\sigma_{mn} \leq B_{mn}$ при $m = 3$ и нечетных n. Бшути и Хенгартнер в [2] показали, что гипотеза Бомбиери справедлива для класса S_R функций $f \in S$ с вещественными коэффициентами a_n, $n \geq 2$.

В целом классе S Грайнер и Рот в [3] опровергли гипотезу Бомбиери в случае $n = 2$ и $m = 3$. Они нашли точное значение числа σ_{32}

$$\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} < \frac{1}{4} = B_{32}.$$

Недавние работы [4, 5] свидетельствуют о новом интересе к различным аспектам гипотезы Бомбиери.

Формулы, теоремы

Задача о вычислении чисел Бомбиери σ_{mn}, заданных формулой (1), сводится к определению линейных функционалов на классе S, локальный экстремум которых дается функцией Кебе K, см., например, [3]. А именно,

$$\sigma_{mn} = -\inf\{\mu \in \mathbb{R}\},$$

где нижняя грань берется по всем μ, для которых локальный максимум линейного функционала

$$\operatorname{Re}(a_n + \mu a_m)$$

в классе S доставляется функцией K. Числа Бомбиери характеризуют предельные положения опорных гиперплоскостей, проходящих через критическую угловую точку граничной поверхности тела начальных коэффициентов, доставляемую функцией Кебе. При переходе от класса S к классу $S(M)$ роль угловой точки берет на себя точка, соответствующая функции Пика P_M. Строение границы множества тела начальных коэффициентов, в окрестности этой точки, тоже будет характеризоваться числами $\sigma_{mn}(M)$, которые вместо формулы (1) могут корректно задаваться с помощью линейных функционалов с функцией Пика P_M в качестве локально экстремальной функции.

Справедлива следующая теорема, подробное доказательство которой приведено в работе [6]

Теорема 1. Справедливы равенства

$$\sigma_{32}(M) = \begin{cases} \dfrac{M(e-1)}{4(Me-2e+1)}, & e \leq M \leq \infty, \\ \dfrac{M}{4(M-1)}, & 1 < M \leq e. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bombieri E.* On the local maximum property of the Koebe function // Inventiones Mathematicae. 1967. Vol. 4, iss. 1. P. 26–67.

[2] *Bshouty D., Hengartner W.* Local behavior of coefficients in subclasses of S // Contemporary Mathematics. 1985. Vol. 38. P. 77–84.

[3] *Greiner R., Roth O.* On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri // Proceedings of the American Mathematical Society. 2001. Vol. 129. P. 3657–3664.

[4] *Aharonov D., Bshouty D.* A problem of Bombieri on univalent functions // Computational Methods and Function Theory. 2016. Vol. 16, № 4. P. 677–688.

[5] *Leung Yuk – Y.* On the Bombieri numbers for the class S // The Journal of Analysis. 2016. Vol. 24, № 2. P. 229–250.

[6] *Гордиенко В. Г, Прохоров Д. В.* Задача Бомбиери для ограниченных однолистных функций // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 3. С. 364–374.