УДК 517.518.24, 517.518.5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Φ-ВАРИАЦИИ

Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия),
С. С. Волосивец (Саратов, Россия)
golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Доказывается несколько критериев непрерывности функций ограниченной Φ-вариации, принадлежащих пространствам L^q на $\mathbb{R}$. Первый результат связывает непрерывность функции с поведением ее преобразования Фурье, во втором используется модуль непрерывности в $\Psi(L)$, тогда как в третьем результате рассматривается степень приближения частными интегралами Фурье. Теоремы 1 и 3 в случае $\Phi(u) = |u|^p$, $1 \le p < \infty$, были получены ранее первым автором.

Ключевые слова: функции ограниченной Φ-вариации, преобразование Фурье, непрерывность.

FOURIER TRANSFORM AND CONTINUITY OF FUNCTIONS OF BOUNDED Φ-VARIATION

B. I. Golubov (Dolgoprudnyi, Russia),
S. S. Volosivets (Saratov, Russia)
golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Several criterions for the continuity of functions of bounded Φ-variation belonging to L^q spaces on $\mathbb{R}$ are proved. The first result connects continuity of a function with behaviour of its Fourier transform, in the second one a $\Psi(L)$ modulus of continuity is used, while in the third one the degree of approximation by partial Fourier integrals is considered. Theorems 1 and 3 in the case $\Phi(u) = |u|^p$, $1 \le p < \infty$, were obtained earlier by the first author.

Keywords: functions of bounded Φ-variation, Fourier transform, continuity.

Введение

В 1924 г. Н.Винер [1] доказал критерий непрерывности 2π-периодической функции ограниченной вариации. Его исследования были продолжены С.М.Лозинским [2,3], получившим другие критерии непрерывности также для функций ограниченной вариации в терминах поведения их коэффициентов Фурье, и первым из авторов [4], установившим, что результаты Н.Винера-С.М.Лозинского справедливы для функций ограниченной p-вариации при $1 < p \le 2$, но теряют силу при $p > 2$. Для 2π-периодических функций ограниченной Φ-вариации аналогичные результаты были доказаны Э.Коэном [5].

Пусть L^1V_1 — класс функций. интегрируемых по Лебегу и имеющих ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, причем для любой точки $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x) = 2^{-1}(f(x+0) + f(x-0)), \tag{1}$$

где $f(x+0)$, $f(x-0)$ — пределы справа и слева функции f в точке x. Для $f \in L^1(\mathbb{R})$ рассмотрим преобразование Фурье и частичный интеграл Фурье

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx}\, dt, \quad S_t(f)(x) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin t(x-u)}{x-u}\, du,$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. В [3] С.М.Лозинским была установлена

Теорема A. *Пусть $f \in L^1 V_1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: $f \in C(\mathbb{R})$, т.е. f непрерывна на $\mathbb{R}$;*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_{-t}^{t} |u\widehat{f}(u)|\, du = 0; \tag{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty} (\ln t)^{-1} \int_{-t}^{t} |\widehat{f}(u)|\, du = 0; \tag{3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t \int_{\mathbb{R}} |f(x) - S_t(f)(x)|^2\, dx = 0. \tag{4}$$

Будем писать $f \in V_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, если

$$V_p^p(f) = \sup_{-\infty<a<b<\infty} \sup_T \sum_{i=1}^{n(T)} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p < \infty,$$

где $T = \{x_i\}_{i=0}^{n(T)} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. В этом случае из результатов Н.Винера [1] следует существование $f(x+0)$ и $f(x-0)$ для любой точки $x \in \mathbb{R}$. Поэтому для функций $f \in L^2 V_p = L^2(\mathbb{R}) \cap V_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, считаем, что выполнено условие (1). Рассмотрим также класс W функций f на $\mathbb{R}$, не имеющих разрывов второго рода и удовлетворяющих равенству (1) для любого $x \in \mathbb{R}$. Напомним, что для $f \in L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \le 2$, преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$ определяется, как предел $(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{|t|\le N} f(t) e^{-itx}\, dt$ при $N \to +\infty$ в $L^{q'}(\mathbb{R})$, где $1/q + 1/q' = 1$. В этом случае также определен частичный интеграл Фурье (см. [6, гл. 4]). Первым из авторов установлены в [7] следующие результаты.

Теорема B. *1) Если $f \in L^2 V_p$, $1 \le p < 2$, то условия $f \in C(\mathbb{R})$ и (2)–(4) равносильны.*

2) Если $f \in L^2 V_p$, $p \ge 2$, или $f \in L^2 W := L^2(\mathbb{R}) \cap W$, то каждое из условий (2)–(4) влечет непрерывность f на $\mathbb{R}$.

Назовем $\Phi(x)$ N-функцией, если $\Phi(x)$ — четная, выпуклая и строго возрастающая на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функция, такая что $\lim\limits_{u \to +\infty} \Phi(u)/u = +\infty$ и $\lim\limits_{u \to 0} \Phi(u)/u = 0$ (см. [8, § 1]). Для N-функции Φ положим

$$V_\Phi(f) = \sup_{-\infty < a < b < \infty} \sup_T \sum_{i=1}^{n(T)} \Phi(f(x_i) - f(x_{i-1}),$$

где $T = \{x_i\}_{i=0}^{n(T)}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, и определим классы $V_\Phi(\mathbb{R}) = \{f : V_\Phi(f) < \infty\}$ и $V_\Phi^*(\mathbb{R})$, состоящий из функций f, таких что $kf \in V_\Phi(\mathbb{R})$ для некоторого $k > 0$. Для N-функции Φ класс $V_\Phi^*(\mathbb{R})$ является линейным пространством, тогда как $V_\Phi(\mathbb{R})$ будет линейным пространством в том и только том случае, когда выполнено Δ_2-условие $\Phi(2u) \leq C\Phi(u)$, $u \in [0, a]$, $a > 0$. Эти и другие результаты, касающиеся функций ограниченной Φ-вариации, можно найти в [9].

Как обычно, при $1 \leq p < \infty$ норма в $L^p(\mathbb{R})$ задается равенством $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, а норма $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ используется в пространстве $B(\mathbb{R})$ ограниченных на $\mathbb{R}$ функций. Для $\alpha > 0$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, будем писать, что существует $D^\alpha(f) = g$, если $g \in L^p(\mathbb{R})$ и $\widehat{g}(x) = (ix)^\alpha \widehat{f}(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Здесь по определению $(ix)^\alpha = |x|^\alpha \exp(\alpha \pi i sign(x)/2)$.

С.М. Никольский [10] установил асимптотическую формулу для приближений функций ограниченной вариации частными суммами их рядов Фурье в метрике $L^p_{2\pi}$. Следующая теорема, являющаяся интегральным аналогом результата С.М.Никольского, была получена В.О.Гукевич [11] при $q \in (1, 2]$, $p = 1$ и в [7] при $1 \leq p < q \leq 2$.

Теорема С. *Пусть $f \in L^q V_p$, $1 \leq p < q \leq 2$, $\{\sigma_k\} = \{f(x_k + 0) - f(x_k - 0)\}$ является конечной или счетной последовательностью всех скачков функции f. Тогда*

$$\|f - S_t(f)\|_q = \pi^{-1} \left(\sum_k |\sigma_k|^q \right)^{1/q} \nu_q / t^{1/q} + o(t^{-1/q}), \quad t \to +\infty, \qquad (5)$$

где

$$\nu_q = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{z \cos z + y \sin z}{z^2 + y^2} e^{-y} \, dy \right|^q \, dz \right)^{1/q}.$$

Целью настоящей работы является получение критериев непрерывности функций ограниченной Φ-вариации на прямой, которые также интегрируемы на $\mathbb{R}$ в некоторой степени. Первый из них является аналогом теоремы A и части 1) теоремы B, второй (теорема 2) является аналогом теоремы 2.6 из [5], третий использует теорему C.

1. Вспомогательные утверждения

Леммы 1 и 2 установлены в [7].

Лемма 1. *Пусть* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *и* $g(x) \geq 0$ *на* $\mathbb{R}_+$. *Тогда условия*

$$\lim_{t\to+\infty} t \int_t^{\infty} g^2(x)\, dx = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^{t} x^2 g^2(x)\, dx = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^{t} x g(x)\, dx = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to+\infty} (\ln t)^{-1} \int_0^{t} g(x)\, dx = 0, \tag{9}$$

связаны следующим образом: (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (9).

Лемма 2. *Пусть функция* $g(x)$ *неотрицательна и интегрируема на* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. *Тогда из условия* $\int_{\mathbb{R}_+} g(x) \sin^2 tx\, dx = o(t)$, $t \to 0$, *следует, что* $\int_t^{\infty} g(x)\, dx = o(t^{-1})$, $t \to +\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $\Phi(x)$ *— N-функция и* $f \in V_\Phi^*(\mathbb{R})$. *Тогда существует* $b > 0$, *такое что*

$$\sup_{|h|\leq\delta} \int_{\mathbb{R}} \Phi(b(f(x+h) - f(x)))\, dx \leq \delta V_\Phi(bf), \quad \delta \in (0, 1]. \tag{10}$$

Доказательство. По определению класса $V_\Phi^*(\mathbb{R})$ существует $b > 0$, такое что $bf \in V_\Phi(\mathbb{R})$. При $0 < h \leq \delta \leq 1$ имеем равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(b(f(x+h) - f(x)))\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[kh,(k+1)h]} \Phi(b(f(x+h) - f(x)))\, dx =$$

$$= \int_{[0,h]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(b(f(y+kh+h) - f(y+kh)))\, dy =: \int_{[0,h]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k(y)\, dy.$$

Ясно, что любая сумма вида $\sum\limits_{k=-M}^{N} \beta_k(y)$ не превосходит $V_\Phi(bf)$ и это неравенство верно для $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k(y)$. Отсюда легко следует (10) . Лемма доказана.

Следующая почти очевидная лемма приведена для полноты изложения.

Лемма 4. *Пусть* $\Phi(x)$ — N*-функция,* $1 \le q_1 < q_2 < \infty$. *Тогда* $L^{q_1}V_\Phi^* \subset L^{q_2}V_\Phi^*$.

Доказательство. Так как функция $f \in V_\Phi^*(\mathbb{R})$ ограничена, то

$$\|f\|_{q_2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^{q_2}\,dx\right)^{1/q_2} \le \|f\|_\infty^{(q_2-q_1)/q_2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_2} =$$

$$= \|f\|_\infty^{1-q_1/q_2}\|f\|_{q_1}^{q_1/q_2}.$$

Лемма 5. *Пусть* $\Phi(x)$ — N*-функция,* $f \in C(\mathbb{R}) \cap V_\Phi^*(\mathbb{R})$. *Тогда* f *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим $b > 0$, такое что $bf \in V_\Phi(\mathbb{R})$ и

$$V_\Phi(f, [a,b]) = \sup_T \sum_{i=1}^{n(T)} \Phi(bf(x_i) - bf(x_{i-1})),$$

где $T = \{x_i\}_{i=0}^{n(T)}$ — разбиение $[a,b]$. Тогда $V_\Phi(f,[-n,n]) \to V_\Phi(f)$ при $n \to +\infty$. Отсюда следует, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in (-\infty, n] \,\text{или}\, x, y \in [n, +\infty)\} < \varepsilon/2.$$

На $[-n,n]$ функция $f \in C(\mathbb{R})$ равномерно непрерывна и для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta \in (0,1)$, такое что для всех $x, y \in [-n,n]$ со свойством $|x-y| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Если $x \in [-n,n]$, $y \notin [-n,n]$ или наоборот, причем $|x-y| < \delta$, то

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

где $x_0 = \pm n$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдено δ, такое что для всех $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|x-y| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $\Phi(x)$ — N*-функция и* $f \in L^pV_\Phi^*$.

1. Если $\lim\limits_{u\to 0} u^2/\Phi(u) = 0$, *то каждое из условий (2)–(4) равносильно условию* $f \in C(\mathbb{R})$.

2. При выполнении условия $\limsup\limits_{u\to 0} u^2/\Phi(u) > 0$ *каждое из соотношений (2)–(4) влечет* $f \in C(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу леммы 4 и определения класса $V^*_\Phi(\mathbb{R})$ имеем $L^pV^*_\Phi \subset L^2W$ и достаточность любого из условий (2)–(4) для $f \in C(\mathbb{R})$ вытекает из теоремы B. В частности, мы получаем утверждение 2). Для доказательства необходимости каждого из условий (2)–(4) для $f \in C(\mathbb{R})$ запишем равенство Парсеваля-Планшереля (см. [6, гл. 3]) для $f \in L^2V^*_\Phi$, т.е.

$$4b^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 \sin^2(tx/2)\, dx = \int_{\mathbb{R}} |bf(x+t/2) - bf(x-t/2)|^2\, dx,$$

где $b > 0$ таково, что $V_\Phi(bf) < \infty$. В силу леммы 3 получаем

$$4b^2 \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 \sin^2(tx/2)\, dx \le$$

$$\le \sup\left\{ \frac{|bf(y+u/2) - bf(y-u/2)|^2}{\Phi(bf(y+u/2) - bf(y-u/2))} : y \in \mathbb{R}, 0 < |u| \le t \right\} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} \Phi(bf(x+t/2) - bf(x-t/2))\, dx = o(1)O(tV_\Phi(bf)) = o(t), \quad t \to 0.$$

Здесь использована равномерная непрерывность функции $f \in C(\mathbb{R}) \cap V^*_\Phi(\mathbb{R})$, установленная в лемме 5. Наконец, согласно лемме 2 имеем

$$\lim_{t\to+\infty} t \int_t^\infty |\widehat{f}(x)|^2\, dx = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} t \int_{-\infty}^{-t} |\widehat{f}(x)|^2\, dx = 0, \tag{11}$$

что соответствует условию (6) для $g(x) = |\widehat{f}(x)|$ в лемме 1. По этой лемме мы получаем, что (2) и (3) также имеют место. Наконец, для $f \in L^q(\mathbb{R})$, $1 \le q \le 2$, хорошо известно, что $\widehat{S_t(f)} = \widehat{f}(y)\chi_{[-t,t]}(y)$ п.в. на $\mathbb{R}$, где χ_E — индикатор множества E. В силу равенства Парсеваля-Планшереля и (11) мы получаем

$$\|f - S_t(f)\|_2^2 = \int_{|u|>t} |\widehat{f}(u)|^2\, du = o(t^{-1}), \quad t \to +\infty,$$

т.е. (4) также верно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\Phi(x)$ — N-функция, такая что $\lim_{u\to0} u^2/\Phi(u) = 0$, $\alpha > 0$, $1 \le p \le 2$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$ имеет производную $D^\alpha(f) \in L^pV^*_\Phi$. Тогда условия $D^\alpha(f) \in C(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_{-t}^t |u|^{1+\alpha}|\widehat{f}(u)|\, du = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} (\ln t)^{-1} \int_{-t}^t |u|^\alpha|\widehat{f}(u)|\, du = 0,$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} t\|D^\alpha(f)-S_t(D^\alpha(f))\|_2=0$$

равносильны.

Для доказательства следствия 1 используется теорема 1 и равенство $\widehat{g}(x)=(ix)^\alpha\widehat{f}(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$, где $g=D^\alpha(f)$.

Теорема 2. *Пусть $1\le p\le 2$, Φ и Ψ — N-функции, такие что $\lim\limits_{t\to0}\Psi(t)/\Phi(t)=0$ и $f\in L^pV_\Phi^*$. Тогда f непрерывна на $\mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда для некоторого $b>0$ верно соотношение*

$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx=o(h),\quad h\to0. \tag{12}$$

.

Доказательство. Пусть $f\in L^pV_\Phi^*\cap C(\mathbb{R})$ и $b>0$ таково, что $bf\in V_\Phi(\mathbb{R})$. Тогда по лемме 5 функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и в силу условия теоремы и леммы 3 получаем

$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx\le\sup_{t\in\mathbb{R},0<|u|\le h}\frac{\Psi(b(f(t+u)-f(t)))}{\Phi(b(f(t+u)-f(t)))}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}}\Phi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx=o(1)O(h)=o(h),\quad h\to\infty.$$

Обратно, пусть функция $f\in L^pV_\Phi^*$ разрывна, т.е. согласно условию (1) найдется точка $x_0\in\mathbb{R}$, в которой $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|=d>0$. Найдем $\delta>0$, такое что для всех $y\in(x_0,x_0+\delta)$, $x\in(x_0-\delta,x_0)$ верно неравенство $|f(x)-f(y)|>d/2$. Тогда при $h\in(0,\delta)$ и $x\in(x_0-h,x_0)$ имеем $|f(x+h)-f(x)|>d/2$. Значит,

$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx\ge h\Psi(db/2).$$

При $d>0$ и $b>0$ последнее неравенство противоречит (12), т.е. d должно равняться нулю. Противоречие с предположением $f\notin C(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $1<q\le2$, $\Phi(x)$ — N-функция, такая что*

$$\limsup_{u\to0}|u|^{q-\varepsilon}/\Phi(u)<\infty \tag{13}$$

для некоторого $\varepsilon>0$ и $f\in L^qV_\Phi^*$. Тогда $f\in C(\mathbb{R})$ в том и только в том случае, когда $\|f-S_t(f)\|_q=o(t^{-1/q})$, $t\to+\infty$.

Доказательство. Из условия (13) следует, что $|u|^{q-\varepsilon}\le C_1\Phi(u)$ на любом конечном отрезке. Так как $|f(x)-f(y)|$, $x,y\in\mathbb{R}$, ограничены для

$f \in V_\Phi^*(\mathbb{R})$, то $V_\Phi^*(\mathbb{R}) \subset V_p(\mathbb{R})$, $p = q - \varepsilon$. При этом из выполнения условия (13) для $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ следует его справедливость для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, поэтому можно считать $p \geq 1$. По теореме C имеет место формула (5). Если $f \in C(\mathbb{R})$, то первое слагаемое в правой части (5) отсутствует и $\|f - S_t(f)\|_q = o(t^{-1/q})$, $t \to +\infty$. Обратно, если $\|f - S_t(f)\|_q = o(t^{-1/q})$, то все скачки σ_k равны нулю, т.е. $f \in C(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Wiener N.* The quadratic variation of a function and the Fourier coefficients // J. Math and Phys. (MTI). 1924. Vol. 3. P. 72–94.

[2] *Лозинский С. М.* Об одной теореме N. Wiener'a // ДАН СССР. 1945. Т. 49, № 8. С. 562–565.

[3] *Лозинский С. М.* Об одной теореме N. Wiener'a. II // ДАН СССР. 1946. Т. 53, № 8. С. 691–694.

[4] *Голубов Б. И.* О непрерывных функциях ограниченной p-вариации // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 305–312.

[5] *Cohen E.* On the Fourier coefficients and continuity of functions of class $\mathcal{V}_\Phi^*$ // Rocky Mountain J. Math. 1979. Vol. 9, № 2. P. 227–237.

[6] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1948. 480 с.

[7] *Голубов Б. И.* Интеграл Фурье и функции ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1968. № 11. С. 83–92.

[8] *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М. : Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958. 272 с.

[9] *Musielak J., Orlicz W.* On generalized variations (I) // Stud. Math. 1959. Vol. 18, № 1. P. 11–41.

[10] *Никольский С. М.* Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13, № 6. С. 513–532.

[11] *Гукевич В. О.* Интеграл Фурье функций ограниченной вариации на всей оси // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М. : Физматгиз, 1961. С. 60–64.