УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ И УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА РЕШЕНИЙ

А. А. Голубков (Москва, Россия)
andrej2501@yandex.ru

Для уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом и условиями разрыва решений на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ поставлена обратная спектральная задача по передаточной матрице вдоль этой кривой. Методом единичной передаточной матрицы доказана единственность решения поставленной задачи с помощью исследования асимптотики решений уравнения Штурма–Лиувилля при больших значениях модуля спектрального параметра. Изучена также обратная задача по отношению элементов одного столбца или одной строки передаточной матрицы.

Ключевые слова: метод единичной передаточной матрицы, условия разрыва решений, асимптотика решений.

THE INVERSE PROBLEM FOR THE STURM – LIOUVILLE EQUATION WITH A PIECEWISE-INTEGER POTENTIAL ON THE CURVE AND WITH CONDITIONS FOR THE DISCONTINUITY OF SOLUTIONS

A. A. Golubkov (Moscow, Russia)
andrej2501@yandex.ru

The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville equation with a piecewise-entire potential function and the discontinuity conditions for solutions on a rectifiable curve $\gamma \subset \mathbf{C}$ by the transfer matrix along this curve is studied. By the method of a unit transfer matrix the uniqueness of the solution to this problem is proved with the help of studying of the asymptotic behavior of the solutions to the Sturm–Liouville equation for large values of the spectral parameter module. The inverse problem by the ratio of elements of one column or one row of the transfer matrix is also studied.

Keywords: method of a unit transfer matrix, solution jump conditions, asymptotic behavior of solutions.

Обратные задачи для стандартного уравнения Штурма–Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

в случае вещественной переменной хорошо изучены в различных постановках. Для уравнений Штурма–Лиувилля общего вида даже с действительными коэффициентами они исследованы значительно меньше.

Уравнение Штурма–Лиувилля общего вида на отрезке можно преобразовать в стандартное уравнение Штурма–Лиувилля на кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ известной подстановкой, что могло бы стать одним из эффективных методов исследования обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля общего вида на отрезке. К сожалению, даже прямые задачи для уравнений Штурма–Лиувилля на кривых изучены только в очень ограниченном числе случаев. Среди обратных задач на кривых до недавнего времени достаточно полно была исследована только задача о безмонодромных уравнениях Штурма–Лиувилля стандартного вида с потенциалом, суммируемым на кусочно-гладкой замкнутой кривой, являющейся границей некоторой выпуклой ограниченной области [1]. Однако требование выпуклости замкнутой кривой заметно ограничивает область возможного применения полученных в [1] результатов.

Первый шаг в направлении снятия ограничений на форму кривой в обратной задаче для уравнения (1) был сделан в работе [2] за счёт сужения класса рассматриваемых потенциалов до кусочно-целых функций, т.е. функций, которые на разных участках кривой почти всюду совпадают с различными целыми функциями комплексной переменной z. Это сужение позволило поставить обратную задачу для уравнения Штурма–Лиувилля стандартного вида по столбцу или строке передаточной матрицы вдоль не заданной непрерывной спрямляемой кривой произвольной формы (в том числе самопересекающейся) и сформулировать условия единственности её решения. При этом наряду с традиционным исследованием асимптотики решений уравнения Штурма–Лиувилля при больших значениях модуля спектрального параметра впервые был использован метод единичной матрицы.

В докладе полученные в [2,3] результаты обобщены на случай, когда на произвольной непрерывной спрямляемой кривой γ имеется конечное число точек, в которых решения уравнения (1) с кусочно-целым потенциалом Q и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы. Причём кривая γ, потенциал Q, положение точек разрыва решений на кривой и матрицы перехода в них, а также матрицы перехода в начальной и конечной точках кривых априори неизвестны.

Обозначим: $\hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пусть на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, заданной параметрически функцией $z = V(t)$ $(t \in [t_0, t_f])$, определена кусочно-целая функция Q и заданы точки, в которых решения стандартного уравнения Штурма–Лиувилля (1) и (или) их производные имеют разрывы, не зависящие от параметра $\rho := \lambda^2$.

Иными словами, пусть потенциал Q ограничен на γ, и существуют целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$ такие, что

$$Q(z) \overset{\text{п.в.}}{=} Q_m(z), \text{ если } z = V(t), \ t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (m = \overline{0, N}), \tag{2}$$

где все Q_m — целые функции. Кроме того, пусть функции $u(z)$ и $u'(z)$ удовлетворяют условиям разрыва в точках $z_j := V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ кривой γ:

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} u(V(t_0+0)) \\ u'(V(t_0+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(0)} \begin{pmatrix} u(V(t_0)) \\ u'(V(t_0)) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} u(V(t_n+0)) \\ u'(V(t_n+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(n)} \begin{pmatrix} u(V(t_n-0)) \\ u'(V(t_n-0)) \end{pmatrix} (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \\
\begin{pmatrix} u(V(t_{N+1})) \\ u'(V(t_{N+1})) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1}-0)) \\ u'(V(t_{N+1}-0)) \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{3}$$

где матрицы перехода $\hat{\eta}^{(j)}$ $(j = \overline{0, N+1})$ не зависят от спектрального параметра ρ. При этом, если $N \geq 1$, то для всех чисел $n \in \{1, \ldots, N\}$ выполнены следующие условия:

$$\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I} \text{ или (и) } Q_n \neq Q_{n-1} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1). \tag{4}$$

Определение. *При выполнении условий (2) и (4) будем называть рассматриваемое на непрерывной спрямляемой кривой γ уравнение (1), дополненное условиями разрыва решений (3), уравнением класса D на кривой γ, а точки $z_j = V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ — характеристическими точками кривой γ и уравнения (1) класса D на γ. При этом упорядоченное множество*

$$W := \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\} \tag{5}$$

будем называть набором характеристических данных кривой γ и уравнения (1) класса D на γ.

Определение. *Будем называть $u(z)$ решением уравнения (1) класса D на кривой γ, если функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на γ, является непрерывно-дифференцируемой во всех её точках, кроме, возможно, характеристических, и удовлетворяет всем условиям разрыва (3).*

Определение. *Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — решения уравнения (1) класса D на кривой γ с характеристическими точками z_j $(j = \overline{0, N+1})$ и*

$$\begin{gathered}
u_1(z_b) = 1, \ u_1'(z_b) = 0, \\
u_2(z_b) = 0, \ u_2'(z_b) = 1 \ \ (z_b \notin \{z_j\}_1^N \textit{ при } N \geq 1, \ z_b \in \gamma).
\end{gathered}$$

Назовём передаточной матрицей уравнения (1) класса D между точками z_b и z кривой γ матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix} \quad (z \in \gamma, \ z \notin \{z_j\}_1^N \textit{ при } N \geq 1).$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками кривой.

Определение. *Набор характеристических данных* (5) *уравнения* (1) *класса* D *будем называть регулярным, если* $\det\hat{\eta}^{(0)} \neq 0$, $\det\hat{\eta}^{(N+1)} \neq 0$, *а также выполнены следующие условия*

$$\det\hat{\eta}^{(n)} = 1, \ \ \hat{\eta}^{(n)} \notin \{\pm i\hat{\sigma}_3\} \ \ (n = \overline{1, N} \ \textit{при}\ N \geq 1),$$

$$\Delta z_m := z_{m+1} - z_m \neq 0 \ \ (m = \overline{0, N}).$$

Будем называть кривую регулярной, если на ней задано уравнение (1) *класса* D *с регулярным набором характеристических данных.*

Определение. *Регулярный набор характеристических данных* (5) *уравнения* (1) *класса* D *будем называть стандартным, если* $\det\hat{\eta}^{(0)} = 1$, $\hat{\eta}^{(0)} \notin \{\pm i\hat{\sigma}_3\}$ *и выполнены следующие условия*

$$\mathrm{Re}\,\{\eta_{11}^{(n)}\} > 0, \ \mathrm{Im}\,\{\eta_{11}^{(n)}\} \geq 0 \ \ \textit{или}$$
$$\eta_{11}^{(n)} = 0, \ \mathrm{Re}\,\{\eta_{12}^{(n)}\} > 0, \ \mathrm{Im}\,\{\eta_{12}^{(n)}\} \geq 0 \ (n = \overline{0, N}).$$

Будем называть кривую стандартной, если на ней задано уравнение (1) *класса* D *со стандартным набором характеристических данных.*

Один из основных результатов доклада отражает следующая теорема единственности.

Теорема *Пусть два уравнения* (1) *класса* D *имеют соответственно стандартные наборы характеристических данных* $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ *и передаточные матрицы* $\hat{P}^{(1)}$, $\hat{P}^{(2)}$ *вдоль двух кривых* $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ *с общей начальной точкой. Тогда* $\hat{P}^{(1)}(\rho) \equiv \hat{P}^{(2)}(\rho)$ *тогда и только тогда, когда* $W^{(1)} = W^{(2)}$.

В докладе проведено обощение понятий уравнения класса D и его стандартного набора характеритсических данных на случай, когда матрицы перехода могут зависеть от спектрального параметра λ. Кроме того, исследован вопрос: какую часть стандартного набора характеристических данных уравнения класса D на кривой можно однозначно определить по отношению элементов одной строки или одного столбца передаточной матрицы вдоль этой кривой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 552–568.

[2] *Голубков А. А.* Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 144–156.

[3] *Голубков А. А.* Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 2. С. 37–41.