УДК 517.958

О ПРИМЕНЕНИИ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА[1]

Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович, М. А. Степович
(Калуга, Россия)
v572264@yandex.ru

Моделируется процесс остывания в многослойной среде. Рассматривается одномерная задача теплопроводности. Решение задачи ищется методом Фурье. Проблема многослойности решается с помощью матричного метода.

Ключевые слова: многослойная среда, теплоперенос, матричный метод, задача теплопроводности.

ON THE APPLICATION OF THE MATRIX METHOD FOR MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER PROCESSES[1]

Yu. A. Gladyshev, V. V. Kalmanovich, M. A. Stepovich
(Kaluga, Russia)
v572264@yandex.ru

The cooling process is simulated in a multilayer medium. The one-dimensional heat conduction problem is considered. The solution to the problem is sought by the Fourier method. The multilayer problem is solved using the matrix method.

Keywords: multilayer medium, heat transfer, matrix method, heat conduction problem.

Для построения аналитического решения стационарной задачи теплопроводности в многослойной среде ранее нами было предложено использовать совместно аппарат обобщённых степеней Берса [1] и матричный метод [2], [3], [4]. В данной работе показана возможность сочетания этих методов и классического метода Фурье для решения нестационарной задачи теплопроводности в многослойной среде.

Рассмотрим многослойную среду из n слоёв различных материалов. Ось x направим по потоку тепла $J(x)$, перпендикулярно слоям. Координаты границ слоёв обозначим x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}. Номер (i) слоя (x_i, x_{i+1}) для соответствующих физических величин будем отмечать в верхнем индексе в скобках. Процесс переноса в каждом слое определён температурой $T^{(i)}(x,t)$ и потоком $J^{(i)} = -a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}$, которые удовлетворяют уравнениям

[1]Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

[1]The article is done with the financial support of Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-03-00271, and by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of Kaluga Oblast, project no. 18-41-400001.

$$a_2^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}\right)-\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

условиям идеального контакта на границах слоёв

$$T^{(i)}(x_{i+1},t)=T^{(i+1)}(x_{i+1},t),\quad J^{(i)}(x_{i+1},t)=J^{(i+1)}(x_{i+1},t)$$

и краевым условиям первого рода

$$T^{(1)}(x_1,t)=0,\quad T^{(n)}(x_{n+1},t)=0.$$

Коэффициенты $a_1^{(i)}(x)$, $a_2^{(i)}(x)$ учитывают возможную неоднородность слоёв и геометрию всей среды. Например, слои могут быть плоские или могут иметь осевую или центральную симметрию.

И пусть задано начальное распределение температуры

$$T^{(i)}(x,0)=g(x),\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=\overline{1,n}.$$

Функция $g(x)$ задана для всей многослойной среды и, вообще говоря, она может быть разрывной.

Решение задачи будем искать методом Фурье. Частное решение уравнений (1) запишем в виде

$$T^{(i)}(x,t)=u^{(i)}(x)e^{-\lambda^2 t},\quad i=\overline{1,n}.$$

Амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$a_2^{(i)}(x)\frac{d}{dx}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{du^{(i)}}{dx}\right)+\lambda^2 u^{(i)}(x)=0$$

и граничным условиям

$$u^{(1)}(x_1)=0,\quad u^{(n)}(x_{n+1})=0,\quad u^{(i)}(x_{i+1})=u^{(i+1)}(x_{i+1}),\quad i=\overline{1,n}.$$

В работе [5] получено решение задачи Коши для каждого слоя

$$\begin{array}{l} u^{(i)}(x)=u^{(i)}(x_i)\cos\lambda X_i(x,x_i)-\frac{1}{\lambda}j^{(i)}(x_i)\sin\lambda X(x,x_i),\\ j^{(i)}(x)=u^{(i)}(x_i)\lambda\sin\lambda\tilde{X}_i(x,x_i)+j^{(i)}(x_i)\cos\lambda\tilde{X}(x,x_i), \end{array} \tag{2}$$

где $j^{(i)}=-a_1^{(i)}(x)\frac{du^{(i)}}{dx}$. Здесь $X_i(x,x_i)$ и $\tilde{X}_i(x,x_i)$ – обобщённая и присоединённая обобщённая степени Берса [1] соответственно.

Введём вектор-столбцы $V^{(i)}(x)$, $V^{(i)}(x_i)$ и матрицу K

$$V^{(i)}(x)=\begin{pmatrix} u^{(i)}(x)\\ j^{(i)}(x)\end{pmatrix},\quad V^{(i)}(x_i)=\begin{pmatrix} u^{(i)}(x_i)\\ j^{(i)}(x_i)\end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(x,x_i)=\begin{pmatrix} \cos\lambda X_i(x,x_i) & -\frac{1}{\lambda}\sin\lambda X_i(x,x_i)\\ \lambda\sin\lambda\tilde{X}_i(x,x_i) & \cos\lambda\tilde{X}_i(x,x_i)\end{pmatrix}.$$

Тогда решение (2) запишем в матричной форме

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i)V^{(i)}(x_i).$$

Для крайней точки i-го слоя получим

$$V^{(i)}(x_{i+1}) = K^{(i)}(x_{i+1}, x_i)V^{(i)}(x_i). \tag{3}$$

Выражение (3), учитывая записанные в матричной форме контактные условия $V^{(i)}(x_{i+1}) = V^{(i+1)}(x_{i+1})$, будем применять последовательно, начиная с первого слоя. Тогда получим:

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{4}$$

где $K^{(i,1)}(x, x_1) = K^{(i)}(x, x_i)K^{(i-1)}(x_i, x_{i-1})...K^{(1)}(x_2, x_1)$.

Формула (4) определяет значения $u^{(i)}(x)$ и $j^{(i)}(x)$ в i-ом слое через значения $u^{(1)}(x_1)$ и $j^{(1)}(x_1)$ в начальной точке системы. В конечной точке системы слоёв получим

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1)V^{(1)}(x_1). \tag{5}$$

Уравнение (5) даёт возможность находить собственные значения для различных краевых задач, так как зная какую-либо пару значений из $u^{(1)}(x_1)$, $u^{(n)}(x_{n+1})$, $j^{(1)}(x_1)$, $j^{(n)}(x_{n+1})$ можно найти другую пару. Введем обозначения $k_{ij}^{(n,1)}$ для элементов матрицы $K^{(n,1)}$. Тогда для решения первой краевой задачи при выполнении $u^{(1)}(x_1) = 0$, $u^{(n)}(x_{n+1}) = 0$ имеем условие $k_{12}^{(n,1)} = 0$ для определения собственных значений λ_k.

Решение, соответствующее собственному значению λ_k, обозначим $u_k^{(i)}(x)$. Для нормировки найдём

$$N_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a_2^{(i)}} \left(u_k^{(i)}\right)^2 dx,$$

тогда соответствующие собственные функции найдём по формулам $f_k^{(i)} = u_k^{(i)}/N_k^2$. Коэффициенты в разложении Фурье определим из скалярного произведения

$$c_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) \frac{1}{a_2^{(i)}} \left(u_k^{(i)}\right)^2 dx.$$

Таким образом, имеем решение уравнения (1)

$$T^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k^{(i)}(x) e^{-\lambda_k^2 t}.$$

Применение обобщённых степеней Берса позволяет в едином аналитическом виде получить решение для различных видов симметрии среды (сдвиговой, осевой или центральной). Матричный метод даёт возможность свести нахождение собственных значений и собственных функций при решении первой краевой задачи к решению одного уравнения при любом конечном числе слоёв.

Для иллюстрации возможностей предлагаемого подхода проведены расчёты для модельных задач теплопроводности в планарной многослойной среде и в среде с осевой симметрией с постоянными коэффициентами в каждом слое. Данный метод применим и при других видах граничных условий, например, если поставлена задача третьего типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56. P. 67–93.

[2] *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем, М. : ИППМ РАН, 2018. Вып. III. С. 194–201.

[3] *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2017. № 10. С. 105–110.

[4] *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2018. Вып. 3. С. 158–167.

[5] *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде // Вестник Калужского университета. 2015. № 3. С. 5–10.