УДК 517.53/.55

О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЁННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. А. Гладышев (Калуга, Россия)
v572264@yandex.ru

В работе представлено построение обобщённых степеней Берса в комплексном пространстве. Обсуждаются некоторые свойства таких степеней. Приведены условия возможности их построения.

Ключевые слова: комплексное пространство, обобщенная степень, матричный аппарат.

ON THE PROPERTIES OF GENERALIZED POWERS OF BERS IN COMPLEX SPACE

Yu. A. Gladyshev (Kaluga, Russia)
v572264@yandex.ru

The paper presents the construction of generalized Bers powers in a complex space. Some properties of such powers are discussed. The conditions of the possibility of the construction are given.

Keywords: complex space, generalized powers, matrix apparatus.

Понятие обобщённой степени (ОС) было введено Л. Берсом [1] для случая одного переменного как результат последовательного интегрирования постоянной величины при введении подынтегральных положительных весовых функций. Эта конструкция была использована при построении обобщённых методов теории функций комплексного переменного для нахождения решений уравнений с переменными коэффициентами. В [2] было приведено построение ОС в многомерном пространстве. Ниже будем следовать этой работе и приведём метод построения ОС в комплексном пространстве C^2.

Введём комплексные переменные $z_1 = x_2 + ix_1$, $z_2 = x_4 + ix_3$ и соответствующие сопряженные $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$. На основе этих переменных найдём линейные дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_4} + i\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

которыми являются операции интегрирования по соответствующим комплексным переменным в их чисто алгебраическом понимании.

Введём матричные операторы

$$d_1(1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \end{pmatrix}, \quad d_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

действующие на вектор-функцию F, определённую в C^2.

Необходимым условием возможности построения последовательности ОС двух переменных вида $X_1^{(n)}X_2^{(m)}c$ является перестановочность операторов (3). Легко установить, что операторы (3) коммутируют, только если $d_1(1)$ не зависит от переменной x_3. ОС в данном случае определена в R^3. Этот случай был изучен ранее в [2]. На основе принципа соответствия получены как известные решения уравнения Лапласа, так и особые.

Чтобы получить коммутирующие операторы, перейдём к операторам вида

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & d_1(1) \\ \overline{d}_1(1) & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{d}_2(2) \\ d_2(2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти операторы коммутируют, имеют правые обратные и обобщённые константы как функции двух комплексных переменных, а именно

$$c_1 = z_1^k z_2^l, \quad c_2 = \overline{z}_1^k \overline{z}_2^l, \quad c_3 = \overline{z}_1^k z_2^l, \quad c_4 = z_1^k \overline{z}_2^l.$$

Этих условий достаточно для построения последовательностей ОС.

ОС обладают свойствами

$$D_1X_1^{(n)}X_2^{(m)}c = nX_1^{(n-1)}X_2^{(m)}c, \quad D_2X_1^{9n)}X_2(m)c = mX_1^{(n)}X_2^{(m-1)}c,$$
$$D_1X_2^{(m)}c = 0, \quad X_1^{(0)}X_2(m)c = X_2(m)c,$$
$$D_2X_2^{(n)}c = mX_2^{(m-1)}c, \quad X_1^{(0)}X_2^{(0)}c = c.$$

Изучено поведение степени относительно группы сдвигов.

Если за операторы I приняты обычные алгебраические правила интегрирования, то выражения для ОС получаются в явном виде как функции переменных z_1, z_2, $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$.

Установлены связи со спинорными инвариантами [3]. Рассмотрены решения основного уравнения и их поведение при унитарных преобразованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56. P. 67–93.

[2] *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга : Изд-во КГУ, 1997. 314 с.

[3] *Бринкман Г.* Применение спинорных инвариантов в атомной физике. М. : Иностр. лит., 1959. 96 с.