УДК 517.9

ОБ ОДНОМ МОДЕЛЬНОМ ПРИМЕРЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

В работе рассматривается модификация метода подобных операторов, применяемая при исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка. При этом существенно используется весовая последовательность, отвечающая за скорость убывания матричных элементов оператора-возмущения. Построен модельный пример.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, допустимая тройка.

ON ONE MODEL EXAMPLE OF A SIMILAR OPERATOR METHOD[1]

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova (Voronezh, Russia)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

We consider the modification of the similar operator method which usually used for the investigation perturbed differential operator first order. In this modification we used the weight sequence which characterizes the decay of the matrix elements of perturbation along its rows and columns. The model example is given.

Keywords: a similar operator method, differential operator first order, admissible triplet.

Введение

В серии работ Ф.П. Хромова и М.Ш. Бурлуцкой (см. например [1–4]) изучались дифференциальные операторы перого порядка с инволюцией, в основном, сведением к операторам Дирака. При этом рассматривались различные граничные условия и различные места нахождения инволюции: при производной или при потенциале. Другим, альтернативным, методом исследования спектральных свойств указанных выше операторов является метод подобных операторов. Таким методом проводились исследования в работах А. Г. Баскакова совместно с учениками [5–9]. При этом потребовалась несколько другая модификация метода подобных операторов, впервые предложенная в работе [5]. Это обусловлено тем, что у дифференциального оператора первого порядка, выступающего в роли невозмущенного оператора, собственные значения не разбегаются и нельзя ожидать автоматического выполнения условий пременимости метода подобных операторов. Поэтому приходится вводить

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).
[1]The article is done with the financial support of RFFI (project № 19-01-00732).

некоторую весовую последовательность, отвечающую за скорость убывания матричных элементов матрицы оператора-возмущения по строкам и по столбцам и получать условия применимости метода в терминах этой последовательности. Все результаты работ [5-9] получены с использованием этой последовательности, но соответствующей общей модификации метода подобных операторов в этих работах не было. Такая модификация была, наконец, разработана в недавно вышедшей работе [10]. И теперь встал вопрос о простом и понятном примере, иллюстрирующем эту общую модификацию, причем таком, для которого весовая последовательность легко считается. Заметим, что в [5–9] конкретного вида этой последовательности выписано не было. Мы предлагаем именно такой модельный пример, который позволяет легко и понятно проиллюстрировать указанную модификацию метода подобных операторов. При этом оказалось, что предложенный ниже пример интересен еще и тем, что он позволяет построить и проиллюстрировать четыре допустимых тройки (см. [10, definition 3.1], [5, определение 2]) метода подобных операторов, что является редкостью.

Основные результаты

Введем в рассмотрение трехдиагональную бесконечную матрицу $\mathcal{A}$ вида

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-\beta_1}{2} & -2a & -\beta_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\beta_1 & -a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \beta_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \beta_1 & a & \frac{\beta_2}{2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\beta_1}{2} & 2a & \frac{\beta_2}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Здесь $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ – постоянная и β_1, β_2 некоторые константы.

Матрица $\mathcal{A}$ определяет в пространстве $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ линейный оператор $A\colon D(A) \subset l_2 \to l_2$, действующий по формуле

$$(Ax)(n) = anx(n) + \frac{\beta_1}{n}x(n-1) + \frac{\beta_2}{n+1}x(n+1),\ n \neq 0, n \neq -1,$$

$$(Ax)(0) = \beta_2 x(1),\ (Ax)(-1) = -ax(-1) - \beta_1 x(-2),$$

с областью определения $D(A) = \{x \in l_2\colon \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |nx(n)|^2 < \infty\}$.

Представим оператор A в виде $A = A_0 - B$, где $A_0\colon D(A_0) = D(A) \subset l_2 \to l_2$, $(A_0x)(n) = anx(n)$ и $B = A_0 - A$.

Введем, используемые далее, операторные пространства. Символом $End\,\ell_2$ обозначена банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в ℓ_2 с нормой $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Xx\|$, $X \in End\,\ell_2$, $x \in \ell_2$. Через $\mathfrak{S}_2(\ell_2)$ обозначен двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта. $\mathfrak{S}_2(\ell_2) \subset End\,\ell_2$ с нормой $\|X\|_2$. Все операторы из $End\,\ell_2$ также будут считаться заданными своими матрицами относительно стандартного базиса пространства ℓ_2. Для оператора $X \in End\,\ell_2, X = (x_{ij})$, введем в рассмотрение последовательность $d_X\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, положив $d_X(n) = \sup\limits_{i-j=n} |x_{ij}|$. Оператор X из $End\,\ell_2$ отнесем к пространству $End_1\,\ell_2$ операторов, имеющих матрицы с суммируемыми диагоналями, если конечна величина $d_X = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} d_X(i)$. В пространстве $End_1\,\ell_2$ зададим норму, положив $\|X\|_1 = d_X, X \in End_1\,\ell_2 \subset End\,\ell_2$.

Пусть $P_i = P(\{ai\}, A_0), i \in \mathbb{Z}$ и $P_{(k)} = \sum\limits_{|i|\le k} P_i,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Отметим, что $B \in End\ell_2$, $B \in End_1\ell_2$ и $B \in \mathfrak{S}_2(\ell_2)$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из условий:*
1) $\sqrt{3}\pi\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} < a$; *2)* $3(|\beta_1| + |\beta_2|) < a$; *3)* $3\|B\|_\infty < a$.

Тогда оператор A подобен оператору $A_0 - \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} P_iX_*P_i$, имеющемму диагональную матрицу. Оператор X_* есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов и это решение можно найти методом итераций, полагая $X_{*(0)} = 0$, $X_{*(1)} = B$ и т. д.

Отметим, что уравнение при выполнении условия 1) рассматривается в $\mathfrak{S}_2(\ell_2)$ и $X_* \in \mathfrak{S}_2(\ell_2)$, при выполнении условий 2) и 3) — в $End_1\ell_2$, $X \in End_1\ell_2$ и $End\ell_2$, $X \in End\ell_2$ соответственно.

При исследовании дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и оператора Дирака используется другое операторное пространство. Чтобы его описать для каждого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ введем двустороннюю последовательность

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1} \max\{(\sum_{|k|\ge n} \|XP_k\|_2^2)^{1/4}, (\sum_{|k|\ge n} \|P_kX\|_2^2)^{1/4}\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Такая последовательность характеризует скорость убывания элементов матрицы оператора X по строкам и столбцам.

Рассмотрим оператор $f(A) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(B)P_n \in End\ell_2$. Введем пространство $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ операторов, допускающих представление $X = X_lf(A), X = f(A)X_r$, с нормой $\|X\|_* = \max\{\|X_r\|_2, \|X_l\|_2\}$. Очевидно, что $B \in \mathcal{M}_B$ и $\alpha_0(B) = 1$. Таким образом, операторы из $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ наследуют скорость убывания матричных элементов возмущения B.

Теорема 2. *Существует такое $k \geq 0$, что оператор A подобен блочно-диагональному оператору $A_0 - P_{(k)} X_* P_{(k)} - \sum\limits_{|i|>k} P_i X_* P_i$, где $X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ и преобразование подобия осуществляет оператор $U \in End \ell_2$, такой что $U - I \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$.*

Например, если $\beta_1 = \beta_2 = 1$, тогда для элементов последовательности $\alpha_n(B)$, $n \geq 3$, характеризующей скорость убывания, имеется оценка

$$\frac{4n^4 - 6n^3 + 4n^2 + 1}{\pi n^2 (n-1)^2 (n+1)} \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \alpha_n(B) \leq \frac{4n^3 - 4n^2 + 1}{\pi n^2 (n-1)^2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бурлуцкая М. Ш.* Классичесское и обобщенное решение смешанной задачи для системмы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 3. С. 380–390.

[2] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Оператор Дирака с потенциалом специального вида и периодическими краевыми условиями // Дифференц. уравнения 2018. Т. 54, № 5. С. 592–601.

[3] *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача для системмы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 145–151.

[4] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 15–17.

[5] *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

[6] *Baskakov A. G., Krishtal I. A.and Uskova N. B.* Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group // Operators and Matrices. 2018. Vol. 12, № 3. P. 723–756.

[7] *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 2. С. 277–281.

[8] *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Метод Фурье для дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, № 3. С. 11–34.

[9] *Ускова Н. Б.* Спектральные свойства оператора Дирака с негладким потенциалом общего вида и группы операторов // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 8. С. 1154–1158.

[10] *Baskakov A. G., Krishtal I. A.and Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. App. 2019. Vol. 477. P. 930–960.