УДК 517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНЫМИ РЯДАМИ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)
ramis3004@gmail.com

Работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств специальных рядов по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$. Эти полиномы при $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\alpha > -1$ образуют ортогональную систему на равномерной сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ относительно веса $\rho_N(x,\alpha) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}$. Основное внимание уделено получению верхней оценки для функции типа Лебега частичных сумм специального ряда.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, ряды Фурье, специальные ряды, функция типа Лебега.

APPROXIMATION OF DISCRETE FUNCTIONS USING SPECIAL SERIES BY MEIXNER POLYNOMIALS

R. M. Gadzhimirzaev (Makhachkala, Russia)
ramis3004@gmail.com

The purpose of this paper is to study of approximative properties of a special series by the modified Meixner polynomials $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$. For $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\alpha > -1$ these polynomials form an orthogonal system on the uniform grid $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ with respect to the weight function $\rho_N(x,\alpha) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}$. The main attention is paid to obtaining an upper estimate on $\left[\frac{\theta_n}{2}, \infty\right)$ for the Lebesgue type function of partial sums of these series, where $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$.

Keywords: Meixner polynomials, Fourier series, special series, Lebesgue type function.

Введение

Пусть $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$, $\rho_N(x) = \rho_N(x,\alpha) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}$ – весовая функция. Обозначим через $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ модифицированные полиномы Мейкснера, которые при $\alpha > -1$ ортогональны на равномерной сетке Ω_δ относительно веса $\rho_N(x)$, т.е

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} M_{n,N}^{\alpha}(x)M_{k,N}^{\alpha}(x)\rho_N(x) = h_{n,N}^{\alpha}\delta_{nk},\ \alpha > -1,$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, $h_{n,N}^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}e^{n\delta}\Gamma(\alpha+1)$. Соответствующие ортонормированные с весом $\rho_N(x)$ полиномы обозначим через $m_{n,N}^{\alpha}(x) = (h_{n,N}^{\alpha})^{-1/2}M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$.

Далее через $l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)$ обозначим пространство дискретных функций $f(x)$, заданных на множестве Ω_δ и удовлетворяющих условию

$\sum\limits_{x\in\Omega_\delta} f^2(x)\rho_N(x) < \infty$. Для $x \in \Omega_{r,\delta} = \{r\delta, (r+1)\delta, \ldots\}$ мы можем определить дискретный аналог полинома Тейлора вида $P_{r-1,N}(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta_\delta^\nu f(0)}{\nu!}(Nx)^{[\nu]}$, где $\Delta_\delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta_\delta^1 f(x) = f(x+\delta) - f(x)$, $\Delta_\delta^k f(x) = \Delta_\delta^1(\Delta_\delta^{k-1} f(x))$. Нетрудно проверить, что если $f(x) \in l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)$, тогда функция $f_r(x) = \frac{f(x)-P_{r-1,N}(x)}{N^{-r}(Nx)^{[r]}}$ принадлежит пространству $l^2_{\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$, где $\rho_{N,r}(x) = \rho_N(x-r\delta)$. Поскольку модифицированные полиномы Мейкснера $m^\alpha_{k,N,r}(x) = m^\alpha_{k,N}(x-r\delta)$ $(k=0,1,\ldots)$ при $\alpha > -1$ образуют ортонормированный базис в $l^2_{\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$, то мы можем определить коэффициенты Фурье–Мейкснера

$$\hat{f}^\alpha_{r,k} = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} f_r(t)\rho_{N,r}(t)m^\alpha_{k,N,r}(t) = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{f(t)-P_{r-1,N}(t)}{N^{-r}(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)m^\alpha_{k,N,r}(t)$$

и ряд Фурье–Мейкснера $f_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}^\alpha_{r,k} m^\alpha_{k,N,r}(x)$, который в силу базисности в $l^2_{\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$ системы полиномов $m^\alpha_{k,N,r}(x)$ $(k=0,1,\ldots)$ сходится равномерно относительно $x \in \Omega_{r,\delta}$. Отсюда следует, что

$$f(x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}^\alpha_{r,k} m^\alpha_{k,N,r}(x). \qquad (1)$$

Ряд (1) и есть специальный ряд по модифицированным полиномам Мейкснера для функции $f(x)$. Частичную сумму ряда (1) обозначим через

$$S^\alpha_{n+r,N}(f,x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{n} \hat{f}^\alpha_{r,k} m^\alpha_{k,N,r}(x).$$

Отсюда мы видим, что при $n \geq 1$ имеет место равенства $S^\alpha_{n+r,N}(f,x) = f(x)$ для $x \in \{0, \delta, 2\delta, \ldots, (r-1)\delta\}$. Кроме того, если $f(x) = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то, очевидно, $\hat{f}^\alpha_{r,k} = 0$ при $k \geq n+1$ и поэтому из (1) следует $S^\alpha_{n+r,N}(p_{n+r}, x) \equiv p_{n+r}(x)$, т.е. $S^\alpha_{n+r,N}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_{n+r}(x)$ степени не выше $n+r$. Обозначим через $q_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, для которого $\Delta^i f(0) = \Delta^i q_{n+r}(0)$ $(i = \overline{0, r-1})$. Тогда

$$\left|f(x) - S^\alpha_{n+r,N}(f,x)\right| \leq |f(x) - q_{n+r}(x)| + \left|S^\alpha_{n+r,N}(q_{n+r} - f, x)\right|.$$

Отсюда для $x \in \Omega_{r,\delta}$

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|f(x) - S^\alpha_{n+r,N}(f,x)\right| \leq e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} |f(x) - q_{n+r}(x)| +$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r}-f,x)\right|. \tag{2}$$

Так как $P_{r-1,N}(q_{n+r}-f,x)=0$, то

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S_{n+r,N}^{\alpha}(q_{n+r}-f,x)\right|=$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t)-f(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \tag{3}$$

Положим

$$E_k^r(f,\delta)=\inf_{q_k}\sup_{x\in\Omega_{r,\delta}}e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x)-q_k(x)\right|, \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_k(x)$ степени k, для которых $\Delta^i f(0)=\Delta^i q_k(0)$ $(i=\overline{0,r-1})$. Тогда из (2)–(4), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x)-S_{n+r,N}^{\alpha}(f,x)\right|\le E_{n+r}^r(f,\delta)(1+l_{n,N}^{\alpha,r}(x)), \tag{5}$$

где

$$l_{n,N}^{\alpha,r}(x)=e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\times$$
$$\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{e^{-\frac{t}{2}+r\delta}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{(Nt)^{[r]}\Gamma(Nt-r+1)}\left|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \tag{6}$$

В связи с неравенством (5) возникает задача об оценке на $[r\delta,\infty)$ функции типа Лебега $l_{n,N}^{\alpha,r}(x)$, определенной равенством (6). С этой целью введем следующие обозначения: $G_1=[r\delta,\frac{3\lambda}{\theta_n}]$, $G_2=[\frac{3\lambda}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, $G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty)$. Для $x\in G_1\bigcup G_2$ это задача была решена в работе [1]. В настоящей работе мы будем оценивать функцию $l_{n,N}^{\alpha,r}(x)$ на множествах G_3 и G_4.

1. Некоторые сведения о полиномах $M_{n,N}^{\alpha}(x)$

При оценке функции $l_{n,N}^{\alpha,r}(x)$ нам понадобятся некоторые сведения о полиномах $M_{n,N}^{\alpha}(x)$. Для этих полиномов имеет место формула Кристоффеля–Дарбу

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,x)=\sum_{k=0}^{n}m_{k,N}^{\alpha}(t)m_{k,N}^{\alpha}(x)=$$
$$\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}}\frac{m_{n+1,N}^{\alpha}(t)m_{n,N}^{\alpha}(x)-m_{n,N}^{\alpha}(t)m_{n+1,N}^{\alpha}(x)}{x-t}$$

и следующие весовые оценки [2]

$$e^{-\frac{x}{2}}\left|m_{n,N}^{\alpha}(x\pm s\delta)\right|\le c(\alpha,\lambda,s)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}A_n^{\alpha}(x),$$

$$A_n^{\alpha}(x)=\begin{cases}\theta_n^{\alpha}, & 0\le x\le\frac{1}{\theta_n},\\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta_n}<x\le\frac{\theta_n}{2},\\ \left[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|x-\theta_n|)\right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta_n}{2}<x\le\frac{3\theta_n}{2},\\ e^{-\frac{3x}{8}}, & \frac{3\theta_n}{2}<x<\infty.\end{cases}$$

Кроме того, нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [3].

Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha\in\mathbb{R}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $t\ge 0$, $N=1/\delta$, $0<\delta\le 1$. *Тогда для* $1\le n\le\lambda N$ *имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t)\le c(\alpha,\lambda)n^{1-\alpha}(A_n^{\alpha}(t))^2.$$

Лемма 2. *Пусть* $-1<\alpha\in\mathbb{R}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $\theta_n/2\le t\le 3\theta_n/2$, $N=1/\delta$, $0<\delta\le 1$. *Тогда для* $1\le n\le\lambda N$ *равномерно относительно* t *имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t)\le c(\alpha,\lambda)n^{-\alpha}.$$

2. Основной результат

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть* $r\in\mathbb{N}$, $r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $0<\delta\le 1$, $1\le n\le\lambda N$. *Тогда имеют место следующие оценки:*
1) если $x\in G_3$, *то*

$$l_{n,N}^{\alpha,r}(x)\le c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac{1}{3}}+|x-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right];$$

2) если $x\in G_4$, *то* $l_{n,N}^{\alpha,r}(x)\le c(\alpha,\lambda,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{4}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гаджимирзаев Р. М.* Аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Мейкснера // Владикавк. матем. журн. 2018. Т. 20, № 3. С. 21–36.

[2] *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 255 с.

[3] *Гаджимирзаев Р. М.* Оценка функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера // Матем. заметки. 2019. Т. 160, № 4. С. 519–530.