УДК 517.9;519.25

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНФЛЮЕНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ФУНКЦИИ ГАУССА[1]

Ю. Е. Гагарин, У. В. Никитенко, М. А. Степович
(Калуга, Россия)
g_ug@mail.ru, uvnikitenko@gmail.com, m.stepovich@rambler.ru

Рассмотрены некоторые возможности использования конфлюентного анализа для оценивания параметров функциональных зависимостей с учетом погрешностей исходных данных. Для функции Гаусса показана возможность определения интервальных оценок с учетом погрешностей значений функции и аргумента.

Ключевые слова: интервальное оценивание, конфлюентный анализ.

USING THE CONFLUENT ANALYSIS FOR INTERVAL ESTIMATION OF THE GAUSS FUNCTION[1]

Yu. E. Gagarin, U. V. Nikitenko, M. A. Stepovich
(Kaluga, Russia)
g_ug@mail.ru, uvnikitenko@gmail.com, m.stepovich@rambler.ru

The use of confluent analysis for estimation of parameters of functional dependences taking into account errors of initial data is considered. For the Gauss function, the possibility of determining interval estimates taking into account the errors of the function and argument values is shown.

Keywords: interval estimation, confluent analysis.

Методы конфлюентного анализа позволяют получать несмещённые оценки параметров функциональных зависимостей с учетом погрешностей в значениях функций и аргументов [1]. Модель оценивания вектора неизвестных параметров $\mathbf{\Theta}$ функциональной зависимости $f\,(x,\ \mathbf{\Theta})$ с учетом погрешностей исходных данных имеет вид [2]

$$\begin{cases} y_i = f(\xi_i, \mathbf{\Theta}) + \varepsilon_i, \\ x_i = \xi_i + \delta_i,\ i = \overline{1,\ n}. \end{cases}$$

Исходные данные (x_i, y_i) $i = \overline{1,\ n}$ являются результатами экспериментов и, как любые измерения, содержат случайные ошибки $(\delta_i,\ \varepsilon_i)$, которые необходимо учитывать. Примем, что ошибки измерений ε_i и δ_i — нормально распределённые случайные величины с нулевыми средними

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19–03–00271), and by the Government of the Kaluga region, Russian Federation (project No. 18–41–400001).

значениями, с дисперсиями $\sigma^2(y_i)$ и $\sigma^2(x_i)$ соответственно и коэффициентом корреляции $\rho_i = 0$. Оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ находятся из условия минимума функционала

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(y_i - f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta}))^2}{\sigma^2(y_i)} + \frac{(x_i - \xi_i)^2}{\sigma^2(x_i)}\right].$$

В функционале F значения ξ_i неизвестны и определяются из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i = \hat{\xi}_i} = 0,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Оценки S параметров $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ находятся из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \theta_k}\right|_{\theta_k = \hat{\theta}_k} = 0,\ k = \overline{1,\ S}.$$

Рассмотрим случай, когда функциональная зависимость $f(x,\ \boldsymbol{\Theta})$ соответствует функции Гаусса с параметрами (μ, σ). Методами конфлюентного анализа определим несмещённые оценки параметров, которые определяются из системы нелинейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta})}{\sigma^2(y)} f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta})\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta})}{\sigma^2(y)} f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta})\left(\frac{(\xi_i - \mu) - \sigma^2}{\sigma^3}\right) = 0$$

при условии, что

$$\frac{x_i - \xi_i}{\sigma^2(x_i)} - \frac{y_i - f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta})}{\sigma^2(y_i)} f(\xi_i, \boldsymbol{\Theta})\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma^2}\right) = 0,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ определяются, исходя из экспериментальных значений признаков, содержащих случайные ошибки. Значения оценок параметров $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ в каждом конкретном эксперименте могут отличаться от значений параметров $\boldsymbol{\Theta}$ и, следовательно, остается ещё известная доля неопределенности [3]. Величину этой неопределенности можно найти из дисперсий параметров $D(\hat{\boldsymbol{\Theta}})$.

Помимо точечных оценок функциональной зависимости $f(x, \boldsymbol{\Theta})$, для всех значений $x_i = \xi_i$ определим интервальные оценки $f(x, \boldsymbol{\Theta})$. Это можно сделать по следующей формуле, зная несмещенные оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$ и дисперсии параметров $D(\hat{\boldsymbol{\Theta}})$:

$$P\Big(f(x, \boldsymbol{\Theta}) - t_\gamma\sqrt{D\left(f(x, \boldsymbol{\Theta}\right)} \leq f\left(x, \boldsymbol{\Theta}\right) \leq f(x, \boldsymbol{\Theta}) +$$

$$+t_\gamma \sqrt{D\left(f(x, \mathbf{\Theta})\right)}\Big) = \gamma.$$

Здесь γ — доверительная вероятность, t_γ — квантиль распределения Стьюдента, $D\left(f(x,\ \mathbf{\Theta})\right)$ — дисперсия значения функции $(x, \mathbf{\Theta})$, которая в случае некоррелированности S параметров может быть вычислена по формуле

$$D\left(f(x, \mathbf{\Theta})\right) = \sum_{k=1}^{S} \left(\frac{\partial f(x, \mathbf{\Theta})}{\partial \theta_k}\right)^2 \Bigg|_{\Theta = \hat{\Theta}} D\left(\theta_k\right).$$

Для функции Гаусса дисперсия $D\left(f(x, \mathbf{\Theta})\right)$ имеет вид

$$D\left(f(x, \mathbf{\Theta})\right) = f^2(x, \mathbf{\Theta}) \left[\frac{x - \hat{\mu}_j}{\hat{\sigma}_j^2} D(\hat{\mu}_j) + \frac{(x - \hat{\mu}_j)^2 - \hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}_j^3} D(\hat{\sigma}_j)\right].$$

Использование методов конфлюентного анализа дает возможность учитывать неопределенность исходной информации и получать несмещенные оценки параметров, по значениям которых находятся точечные и интервальные оценки функциональных зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Грешилов А. А.* Математические методы принятия решений : учеб. пособие для вузов. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 584 с.

[2] *Гагарин Ю. Е., Лапшинова Е. Н., Петров В. И., Степович М. А.* Использование конфлюентного анализа для оценки влияния электрофизических параметров прямозонных полупроводниковых материалов на результаты интервального оценивания зависимости интенсивности катодолюминесценции от энергии электронов пучка. Результаты математического моделирования // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2007. № 10. С. 31–35.

[3] *Гагарин Ю. Е.* Учет множества случайных факторов при использовании минимаксного критерия в задачах распознавания объектов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. Воронеж : Воронежский институт высоких технологий, 2019. № 7 (1). С. 89–98.