УДК 517.518.43

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ВИЛЕНКИНА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ p_k[1]

С. М. Воронов (Москва, Россия)
cmvoron@gmail.com

Рассматриваются ряды по системе характеров любой нульмерной компактной коммммутативной группы. Доказываются обобщение аналога признака Дини и его следствие, аналог признака Харди–Литтлвуда и его следствие, которые были ранее получены для систем, определяемых ограниченными последовательностями $\{p_k\}$.

Ключевые слова: нульмерная группа, характеры группы, ряды Фурье, признак Дини, система Виленкина, призак Харди – Литтлвуда.

CONVERGENCE FOURIER SERIES WITH RESPECT TO VILENKIN SYSTEM IN THE CASE OF UNBOUNDED p_k[1]

S. M. Voronov (Moscow, Russia)
cmvoron@gmail.com

Series with respect to a system of characters of a zero-dimensional compact commutative group are considered. A generalization of analogue of Dini test and its consequences, a generalization of analogue of Hardy–Littlewood test and its consequences, which were earlier obtained in the case of bounded sequence $\{p_k\}$ defining the system, are proved.

Keywords: zero-dimensional group, characters of a group, Fourier series, Dini test, Vilenkin system, Hardy–Littlewood test.

1. Система Виленкина, являющаяся системой характеров нульмерной компактной коммммутативной группы, впервые была рассмотрена в [1]. В книгу [2] включены более поздние результаты, известные к моменту ее публикации.

Пусть G есть компактная нульмерная коммутативная группа, и X есть ее группа характеров. В [2, гл.4, §1] показано, что существует возрастающая последовательность подгрупп $\{X_n\}$ группы X ,такая, что $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n$, где $\{0\} = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$. При этом порядок фактор-группы X_{n+1}/X_n равен p_n. Элементы группы X можно занумеровать так:

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \quad a_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1, \quad m_0 = 1, \quad m_k = p_0 p_1 \ldots p_{k-1},$$

$$p_k \geqslant 2, \quad k \geqslant 0, \text{– натуральные числа.}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project No. 20-01-00584.

Положим $\chi_0(g) \equiv 1$. В каждой подгруппе X_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$ выберем по одному характеру χ, не принадлежащему X_n, и дадим ему номер m_n. Так как порядок фактор-группы X_{n+1}/X_n равен p_n, то $(\chi_{m_n})^{p_n} \in X_n$. Положим $\chi_n(g) = \prod\limits_{k=0}^{s} [\chi_{m_k}(g)]^{a_k}$.

Пусть $G_n = \{x \in G : \chi_k(x) = 1, 0 \leqslant k < m_n\}$. Тогда $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$. Подгруппы G_n образуют базис окрестностей нуля в G. При этом X_n являются аннуляторами соответствующих основных подгрупп в G.

Ядро Дирихле с номером n по системе Виленкина имеет вид $D_n(g) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(g)$.

В [2, гл.4, §5, теорема 4.12] доказан следующий аналог признака Дини, который впервые опубликован в [3]:

Теорема А. *Если* $p_k = O(1)$ *и* $\int\limits_G |f(g_0) - f(g_0 - h)| \left[\frac{1}{h}\right] d\mu(h) < \infty$, *то ряд Фурье интегрируемой функции* f *по системе характеров нульмерной компактной коммутативной группы* G *сходится в элементе* g_0 *к значению* $f(g_0)$.

Здесь

$$\left[\frac{1}{g}\right] = \begin{cases} m_k, & g \in G_k \backslash G_{k+1}, \quad k > 0, \\ +\infty, & g = 0, \end{cases}$$

а $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ есть основная система открытых подгрупп в G.

Далее, из этой теоремы в [2] получено, что ряд Фурье $f \in \operatorname{Lip}\alpha(G)$ сходится в каждом элементе g к $f(g)$.

Мы обобщим [4] эти результаты на случай неограниченных p_k.

Теорема 1. *Если* $\int\limits_G |f(g_0) - f(g_0 - h)| \beta(h)\, d\mu(h) < \infty$, *где*

$$\beta(g) = \begin{cases} m_k(p_k + 2), & g \in G_k \backslash G_{k+1}, \quad k \geqslant 0, \\ +\infty, & g = 0, \end{cases}$$

то ряд Фурье по системе характеров нульмерной компактной коммутативной группы G *сходится в элементе* g_0 *к* $f(g_0)$.

Теорема 1 является обобщением результата, полученного Г. М. Джафарли [3], так как при ограниченных p_k ее условие эквивалентно условию теоремы 4.12 в [2].

Теорема 2. *Если* $f \in \operatorname{Lip}\alpha(G)$ *и существует число* $r > 1$ *такое, что*

$m_s^{-\alpha}(p_s+2) < m_s^{-\alpha/r}$, $s = 3,4,5,\ldots$, то ряд Фурье f по системе характеров нульмерной компактной коммутативной группы G сходится в элементе g к $f(g)$.

Замечание. Условие на p_s в теореме 2 можно записать следующим образом:

$$p_s + 2 < m_s^{\alpha(1-1/r)}, \quad s = 3,4,5,\ldots \ .$$

В таком виде это условие на p_s очевидно выполняется при ограниченных p_s, поэтому результат, полученный в [2, с. 103] как следствие теоремы 4.12, является следствием доказанной здесь теоремы 2. Далее приведем формулировку следующей теоремы, которая и представляет собой обобщение упомянутого выше аналога признака Харди–Литтлвуда:

Теорема 3. *Пусть функция $f(g) \in L(G)$ и*

$$m_n \int\limits_{G_n} |f(g_0+g) \ - f(g_0)|\, d\mu(g) = o(\frac{1}{(p_n+2)\log m_n}), \tag{1}$$

$$c_k(f) = O(k^{-\delta}),\ \delta > 0, \tag{2}$$

причем p_k удовлетворяют соотношению:

$$(p_0+p_1+\cdots+p_r)\frac{m_r}{m_n^{\delta}} = o(1),\ n \to \infty,\ \ r = \left[\frac{n\delta}{2}\right],\ 0 < \delta < 1. \tag{3}$$

Тогда ряд Фурье по системе Виленкина функции $f(g)$ сходится к $f(g_0)$ в g_0

Замечание. Если условие (1) теоремы 3 имеет место равномерно на $g_0 + G_{t_0}$, то сходимость ряда Фурье $f(g)$ будет равномерной на этом смежном классе. В частности, если условие (1) теоремы 3: $\omega_n(f) = o(\frac{1}{(p_n+2)\log m_n})$, то ряд Фурье $f(g)$ сходится равномерно на G.

В заключение приведем пример последовательности $p_i : p_i = 2^{i+1}, i \geq 0$, легко проверить, что для нее выполняется условие (3) теоремы 3. Аналогично можно проверить условие (3) теоремы 3 для любой показательно растущей p_i. Нетрудно это сделать и для $p_i = i, i \geq 2, p_0 = p_1 = 2$. Если же p_i ограничена, то интегральное условие, доказанной здесь теоремы 3 эквивалентно такому же условию в [2, с. 104]. Что касается условия (3) в формулировке теоремы 3, в [2, с. 107] доказано, что соответствующее выражение стремится к нулю, только там иначе выбирается r, отличается постоянным множителем от того, что сделано в представленном вашему вниманию докладе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Виленкин Н. Я.* О классе полных ортонормированных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 363–400.

[2] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и анализ на нульмерных группах. Баку : Элм, 1981.

[3] *Джафарли Г. М.* О сходимости рядов Фурье по одному классу ортонормированных мультипликативных систем // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. 1962. Т. 4. С. 17–36.

[4] *Воронов С. М.* О некоторых признаках сходимости рядов Фурье по системе Виленкина в случае неограниченных p_k // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2019. Т. 5. С. 42–44.