ISSN 2658-4948 (Online)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы
(Саратов, 28 января – 1 февраля 2020 г.)

Саратов
2020

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их приложе-

С56 **ния:** материалы 20-й международной Саратовской зимней школы / А. П. Хромов (гл. редактор), Б. С. Кашин (зам. гл. редактора), Ю. С. Крусс (отв. секретарь) [и др.]. — Саратов : Саратовский университет, 2020. — 480 с. : ил. (3.37 Мб)

ISSN 2658-4948 (Online). — Текст : электронный. — Режим доступа: Продолжающиеся издания СГУ на сайте www.sgu.ru.

Минимальные системные требования: операционная система Windows, поддерживаемая производителем; свободное месте в оперативной памяти не менее 3.37 Мб; свободное место в памяти хранения (на жестком диске) не менее 3.37 Мб; интерфейс ввода информации; программа для чтения pdf-файлов (AdobeReader).

Представлены результаты исследований участников конференции по актуальным проблемам современной теории функций действительного и комлексного переменного, гармоническому анализу и преобразованиям Фурье, спектральной теории операторов, задачам оптимизации и негладкому анализу, а также их приложениям.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения»
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
(грант правительства РФ, проект 14.W03.31.0031).

ЛАБОРАТОРИЯ
«МНОГОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»

УДК 517:518:519:533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 2658-4948 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

О р г к о м и т е т   ш к о л ы :

Председатель:
Кашин Борис Сергеевич, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Москва

Заместители председателя:
Голубов Борис Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, президент СГУ, Саратов
Чумаченко Алексей Николаевич, доктор географических наук, ректор СГУ, Саратов
Хромов Август Петрович , доктор физико-математических наук, профессор, Саратов

Секретарь:
Крусс Юлия Сергеевна, кандидат-физико математических наук, доцент, Саратов

Члены организационного комитета:
Бердышев Виталий Иванович, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Екатеринбург
Конягин Сергей Владимирович, академик Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Антонов Николай Юрьевич, профессор Российской академии наук, Екатеринбург
Абанин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, Ростов-на-Дону
Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, Воронеж
Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Саратов
Дьяченко Михаил Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Москва
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Минск, Беларусь
Лосев Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Волгоград

УДК 519.853

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ В НЕСИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Абрамова, С. И. Дудов , А. В. Жаркова
(Саратов, Россия)
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru, ZharkovaAV@gmail.com

Рассматривается функция расстояния, заданная функцией Минковского (калибром выпуклого телесного компакта) от точки до замкнутого множества конечномерного пространства. Известно, что в случае выпуклости множества данная функция является выпуклой. Получена формула субдифференциала этой функции расстояния. В отличие от полученной ранее Б.Н.Пшеничным, она выражена через другие характеристики объектов, задающих расстояние. Приводятся примеры применения полученной формулы.

Ключевые слова: функция расстояния, функция Минковского, субдифференциал, конус возможных направлений.

ON SOME DIFFERENTIAL PROPERTIES OF DISTANCE FUNCTION IN ASYMMETRIC SPACE

V. V. Abramova, S. I. Dudov, A. V. Zharkova
(Saratov, Russia)
veronika0322@rambler.ru, dudovsi@info.sgu.ru, ZharkovaAV@gmail.com

We consider the distance function given by the Minkowsky function(the gage of a certain convex solid set) from point to a closed set of a finite-dimensional space. It is known that if the set is convex, this function is convex. The formula for the subdifferential of this distance function is obtained. In contrast to that obtained earlier by B.N. Pshenichny, it is expressed through other characteristics of objects which specifies the distance function. Examples of the use of the obtained formula are given.

Keywords: distance function, Minkowsky function, subdifferential, cone of feasible directions.

Введение

Пространства с несимметричной нормой и некоторые задачи наилучшего приближения исследовались, например, в [1–7]. Роль нормы в таких пространствах играет функция Минковского (далее будем иметь в виду конечномерный случай):

$$k(x) = \inf\{\alpha \geq 0 : x \in \alpha M\}, \tag{1}$$

где M — телесное компактное выпуклое множество из $\mathbb{R}^p$ и $0_p \in \mathrm{int}M$.

При постановке и исследовании задач по приближению и оценкам сложных множеств множествами простой структуры важную роль играет функция

$$\rho(x,\Omega) = \min_{y\in\Omega} k(x-y), \tag{2}$$

где Ω – некоторое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$. Таким образом, функция $\rho(\cdot,\Omega)$ задается функцией Минковского (1) (калибром множества M ([8])) и выражает расстояние от точки x до множества Ω в этой несимметричной норме.

Ниже приводятся некоторые результаты исследования дифференциальных свойств функции расстояния (2) (далее ФР). Далее будут использованы следующие обозначения:

$\overline{A}, \mathrm{int}A, \mathrm{co}A, \mathbb{K}(A), A^0$ – замыкание, внутренность, выпуклая оболочка, коническая оболочка и поляра множества соответственно; $\gamma(x,A) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists\alpha_g > 0,\ x+\alpha g \in A,\ \forall\alpha \in (0,\alpha_g)\}$, $K(x,A) = \overline{\gamma}(x,A)$ – конус допустимых и конус возможных направлений множества в точке x соответственно; $\underline{\partial} f(x)(\bar{\partial} f(x))$ – субдифференциал (супердифференциал) выпуклой (вогнутой) функции $f(x)$ в точке x; $\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \lim\limits_{\alpha\downarrow 0} \alpha^{-1}[f(x+\alpha g) - f(x)]$ – производная по направлению $g \in \mathbb{R}^p$ функции $f(\cdot)$ в точке x; $\delta(x,\Omega)$ – индикаторная функция множества Ω; $s(v,M) = \max\limits_{w\in M} < v,w >$ – опорная функция множества M; $< x,y >$ – скалярное произведение элементов $x,y \in \mathbb{R}^p$; $K^+ = \{w \in \mathbb{R}^p :< v,w >\geq 0,\ \forall v \in K\}$ – конус, сопряженный к конусу K; $0_p = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^p$; $Q^\rho(x,\Omega) = \{z \in \Omega : k(x-z) = \rho(x,\Omega)\}$ – проекция точки x на множество Ω.

1. Субдифференциал ФР до выпуклого множества

Известно, если множество Ω является выпуклым, то ФР (2) является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. В [9, гл. 2, §3] получена формула ее субдифференциала в виде:

$$\underline{\partial}\rho(x,\Omega) = \begin{cases} \underline{\partial}\delta(x,\Omega)\bigcap M^0, & \text{если } x \in \Omega, \\ \underline{\partial}\delta(x,\Omega+\rho(x,\Omega)M)\bigcap\{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) = 1\}, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Ниже мы предлагаем формулу субдифференциала в другой форме, которая использует другие характеристики объектов, задающих ФР.

Теорема 1. *Если Ω – выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^p$, то функция расстояния (2), заданная функцией Минковского (1), является выпуклой на $\mathbb{R}^p$ функцией. Ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$*

можно выразить формулой

$$\underline{\partial}\rho(x,\Omega) = \underline{\partial}k(x-z)\bigcap -K^{+}(z,\Omega), \tag{4}$$

где z – любая точка из $Q^{\rho}(x,\Omega)$.

Отметим, что формула (4) является обобщением формулы, полученной в [10] для обычной функции расстояния.

Разумеется для приложений интересны и формула Б.Н.Пшеничного (3) и формула (4). В конкретных случаях одна из них может оказаться более удобной для использования. Отметим так же необходимую для (4) формулу субдифференциала функции Минковского ([9, гл. 4, § 4]):

$$\underline{\partial}k(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) \le 1\}, & \text{если } x = 0_p, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) = 1, < v, x >= k(x)\}, & \text{если } x \ne 0_p. \end{cases}$$

2. Приложения формулы (4)

В зависимости от способа задания множеств M и Ω формула (4) может быть конкретизирована.

Теорема 2. *Пусть выпуклое множество Ω и выпуклый компакт M заданы в виде*

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \le 0\},\ M = \{y \in \mathbb{R}^p : h(y) \le 0\}.$$

Здесь $f(\cdot)$ и $h(\cdot)$ – выпуклые конечные на $\mathbb{R}^p$ функции, причем $h(0_p) < 0$ и существует точка $\hat{y}$, в которой $f(\hat{y}) < 0$. Тогда справедлива формула

$$\underline{\partial}\rho(x,\Omega) = \begin{cases} 0_p, & \textit{если } f(x) < 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) \le 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial}f(x)), & \textit{если } f(x) = 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : s(v,M) = 1\} \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial}h(\frac{x-z}{K(x-z)})) \bigcap \mathbb{K}(\underline{\partial}f(z)), & \textit{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Здесь z –любая точка из $Q^{\rho}(x,\Omega)$.

Формула (4) может быть использована для дифференциальной характеристики ФР и в некоторых случаях, когда множество Ω не является выпуклым.

Теорема 3. *Пусть множество Ω имеет вид*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, \quad \Omega \ne \mathbb{R}^p, \tag{5}$$

где I – конечное множество индексов, а Ω_i – выпуклые замкнутые множества для всех $i \in I$. Тогда ФР всюду дифференцируема по любому направлению, причем

$$\frac{\partial\rho(x,\Omega)}{\partial g} = \min_{i\in I(x)} \max_{v\in\underline{\partial}\rho(x,\Omega_i)} < v, g > \quad \forall g \in \mathbb{R}^p,$$

где $I(x) = \{i \in I : \rho(x,\Omega) = \rho(x,\Omega_i)\}$, $\underline{\partial}\rho(x,\Omega_i) = \underline{\partial}k(x - z_i)\bigcap -K^+(z_i,\Omega_i)$, *а* z_i *– любая точка из* $Q^\rho(x,\Omega_i)$.

Интересным для приложений является случай, когда множества Ω_i в (5) являются полупространствами.

Теорема 4. *Пусть множество* Ω *имеет вид* (5), *а* $\Omega_i = \{y \in \mathbb{R}^p : < A_i, y >\leq b_i\}$, $A_i \in \mathbb{R}^p$, $A_i \neq 0_p$, $b_i \in \mathbb{R}$ *и* $\operatorname{int} D \neq \emptyset$, *где* $D = \overline{\mathbb{R}^p\backslash\Omega}$. *Тогда*

1) *ФР вогнута на D;*

2) *ее супердифференциал в точках* $x \in \operatorname{int}D$ *можно выразить в виде*

$$\overline{\partial}\rho(x,\Omega) = \operatorname{co}\Big\{\frac{A_i}{s(A_i,M)} : i \in I(x)\Big\},$$

где $I(x) = \{i \in I : \rho(x,\Omega) = \rho(x,\Omega_i)\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Dunham Ch. B.* Asymmetric norms and linear approximation // Congr. Numer. 1989. Vol. 69. P. 113–120.

[2] *Romaguera S., Schellekens M.* Quasi–metric properties of complexity spaces // Topology Appl. 1999. Vol. 98, № 1–3. P. 311–322.

[3] *De Blasi F. S., Myjak J.* On generalized best approximation problem // J. Approx.Theory. 1998. Vol. 94, № 1. P. 54–72.

[4] *Alegre C.* Continuous operators on asymmetric normed spaces // Acta Math.Hungar. 2009. Vol. 122, № 4. P. 357–372.

[5] *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces. Birkhauser, 2013. 219 p.

[6] *Алимов А. Р.* Аппроксимативно–геометрические свойства множеств в нормированных и несимметрично нормированных пространствах : дис. ... д-ра физ.-матем. нук / Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. М., 2014. 207 с.

[7] *Алимов А. Р.* Выпуклость ограниченных чебышевских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4. С. 489–497.

[8] *Rockafellar R.* Convex analysis. New Jersey : Princeton University Press, 1970. 451 p.

[9] *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1981. 320 с.

[10] *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61, № 4. С. 530–542.

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ КРЕСТАМ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев (Нур-Султан, Казахстан; Екатеринбург, Россия)

akishev_g@mail.ru

В докладе рассматривается пространство Лоренца периодических функций многих переменных. Доказаны неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов с номерами гармоник из ступенчатых гиперболичских крестов в пространстве Лоренца.

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрический полином, гиперболический крест.

THE INEQUALITY FOR TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS BY HYPERBOLIC CROSSES IN LORENTZ SPACE[1]

G. Akishev (Nur-Sultan, Kazakhstan)

akishev_g@mail.ru

The talk consider the Lorentz space of periodic functions of many variables. Inequalities of different metrics for trigonometric polynomials with harmonic numbers from step hyperbolic crosses in Lorentz space are proved.

Keywords: Lorentz space, trigonometric polynomial, hyperbolic cross.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j \le 1;\ j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют 2π- период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

конечна, где $f^*(y)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$, $0 < p < \infty, 0 < \tau < \infty$ (см. [1], с. 216).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

[1]This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University

В случае $1 \leqslant \tau = p < \infty$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$. В дальнейшем $\|f\|_\infty = \max\limits_{\bar{x}\in\mathbb{T}^m} |f(\bar{x})|$ – норма в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{T}^m)$.

Для данного вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$,$\gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant ... \leqslant \gamma_m$ рассмотрим множество $Q_n^{(\bar{\gamma})} = \cup_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s})$ — ступенчатый гиперболический крест.

Рассмотрим тригонометрический полином по ступенчатому гиперболическому кресту (см. [2])

$$T_{n,\bar{\gamma}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{(\bar{\gamma})}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k},\bar{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$.

Для кратного тригонометрического полинома

$$T_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k},\overline{x}\rangle},$$

С. М. Никольский [3] доказал следующее неравенство

$$\|T_{\bar{n}}\|_q \leqslant 2^m \prod_{j=1}^m n_j^{1/p-1/q} \|T_{\bar{n}}\|_p, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty.$$

В данное время имеются различные обобщения этого неравенства Джексона–Никольского и тесно связанного с ним неравенства Бернштейна для полиномов об оценке нормы производной полинома через норму заданного пространства (см. например [4]– [8] и библиографии в них). Одним из обобщений является распространение неравенства Джексона — Никольского на пространства Лоренца [6]– [8]. Для тригонометрического полинома одной переменной T_n в пространстве Лоренца Л. А. Шерстнева [6] доказала точное по порядку неравенство

$$\|T_n\|_{p,\tau_2} \leqslant C(\log(n+1))^{1/\tau_2-1/\tau_1}\|T_n\|_{p,\tau_1},$$

для $0 < \tau_2 < \tau_1 < \infty,\ 1 < p < \infty$. В [8] доказан следующий многомерный вариант этого неравенства

$$\|T_{\bar{n}}\|_{p,\tau_2} \leqslant C\Big(\log\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{1/\tau_2-1/\tau_1} \|T_{\bar{n}}\|_{p,\tau_1}$$

при $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$, $1 < p < \infty$. Точность этого неравенства доказано в [9].

В 2018 году во время доклада автора на школе-конференции С. Б. Стечкина (г. Кыштым, Россия) профессор Арестов В.В. задал вопрос: какой вид будет иметь это неравенство для полиномов с номерами гармоник в множествах отличных от m– мерных параллелепипедов?

В докладе дается ответ на этот вопрос для тригонометрических полиномов по ступенчатым гиперболическим крестам.

Неравенство разных метрик в пространстве Лебега для тригонометрических полиномов с номерами гармоник из гиперболичских крестов доказаны в [2]. В частности, для тригонометрических полиномов по ступенчатым гиперболическим крестам из теоремы 2.3 [2] следует, что

$$\sup_{T_{n,\gamma}\neq 0}\frac{\|T_{n,\gamma}\|_q}{\|T_{n,\gamma}\|_p}\asymp 2^{n(1/p-1/q)} \tag{1}$$

при $1 \leqslant p < q < \infty$. В случае $0 < p < 1$ доказано в [7].

Здесь и в дальнейшем запись $A_n \asymp B_n$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 независящие от $n \in \mathbb{N}$ такие, что $C_1 A_n \leqslant B_n \leq C_2 A_n$.

Известно , что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ если $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$ (см. [1], с. 217).

Доказаны неравенства разных метрик в пространстве Лоренца для полиномов $T_{n,\gamma}$ при различных соотношениях между параметрами p, q, τ_1, τ_2.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$. Тогда выполняется соотношение*

$$\sup_{T_{n,\bar{\gamma}}\neq 0}\frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_\infty}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau}}\asymp 2^{\frac{n}{p}} n^{(m-1)(1-\frac{1}{\tau})}.$$

Теорема 2. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1$. Если $2 < \tau_1 < \infty$, то выполняется соотношение*

$$\sup_{T_{n,\bar{\gamma}}\neq 0}\frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{q,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}}\asymp 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Если $\tau_1 \leqslant 2$, то выполняются неравенства

$$C_1 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \leqslant \sup_{T_{n,\bar{\gamma}}\neq 0}\frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{q,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \leqslant C_2 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}.$$

Теорема 3. *Если* $1 < p < q \leqslant 2$, $1 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 2$ *или* $1 < p \leqslant 2 < q < \infty$, $1 < \tau_1 \leqslant 2 < \tau_2 < \infty$ *или* $2 < p < q < \infty$, $2 < \tau_1 \leqslant \tau_2 < \infty$, *то*

$$\sup_{T_{n,\bar{\gamma}} \neq 0} \frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{q,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \asymp 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1$. *Если* $2 < \tau_1 < \infty$, *то*

$$\sup_{T_{n,\bar{\gamma}} \neq 0} \frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \asymp n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Если $\tau_1 \leqslant 2$, *то выполняются неравенства*

$$C_2 n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})} \leqslant \sup_{T_{n,\bar{\gamma}} \neq 0} \frac{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_2}}{\|T_{n,\bar{\gamma}}\|_{p,\tau_1}} \leqslant C_1 n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{2})}.$$

Отметим, что при $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ из теоремы 3 следует (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 332 с.

[2] *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИ АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

[3] *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИ АН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.

[4] *Иванов В. И.* Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Тр. МИ АН СССР. 1980. Т. 145. С. 79–110.

[5] *Арестов В. В., Глазырина П. Ю.* Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.

[6] *Шерстнева Л. А.* Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1984. № 4. С. 75–79.

[7] *Temlyakov V. N., Tikhonov S.* Remez–type and Nikol'skii–type inequalities: general relations and the hiperbolic cross polynomials// Constr. Approx. 2017. Vol. 46, № 3. P. 593–615.

[8] *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 3–21.

[9] *Акишев Г.* О точности неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 9–20.

УДК 517.9

ЗАДАЧА СТЕЧКИНА НА КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Р. Р. Акопян (Екатеринбург, Россия)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G односвязная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ – жордановой спрямляемой кривой; γ_1 – измеримое подмножество Γ. Изучается задача наилучшего приближения производной в точке $z_0 \in G$ линейными ограниченными функционалами в $L^\infty(\gamma_1)$ на классе Q аналитических в G функций с граничными значениями на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$, ограниченными единицей. Получено полное точное решение.

Ключевые слова: наилучшее приближение неограниченных функционалов ограниченными, аналитические функции.

STECHKIN'S PROBLEM IN THE CLASS OF ANALYTIC AND BOUNDED FUNCTIONS[1]

R. R. Akopyan (Yekaterinburg, Russia)
RRAkopyan@mephi.ru

Let G be a simply connected domain in $\mathbb{C}$ with boundary Γ that is a closed rectifiable Jordan curve; γ_1 be an arbitrary measurable subset of Γ. We study the problem of the best approximation of the derivative at a point $z_0 \in G$ by bounded linear functionals in $L^\infty(\gamma_1)$ on the class Q of analytic functions with limit boundary values bounded by 1 on $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$. Complete exact solution of the problem is obtained.

Keywords: best approximation of an unbounded functional by bounded functionals, analytic functions.

В дальнейшем G – односвязная область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ. Пусть γ_1 – измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, т.е. $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$. Через $H(G) = H^\infty(G)$ обозначают класс Харди аналитических и ограниченных в G функций. В $H(G)$ выделим класс Q функций f, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \leq 1$. Рассмотрим функционал $\Upsilon^1_{z_0}$, который ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 функции f значение её производной $f'(z_0)$ в точке z_0 области G. Пусть $\mathcal{L}(N)$ есть множество линейных ограниченных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, норма которых не превосходит числа $N \geq 0$. Величина

$$U(T) := \sup\{|f'(z_0) - Tf| \,:\, f \in Q\}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{L}(N)$ от функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) := \inf\{U(T) \,:\, T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00336).
[1]The article is done with the financial support of RFFI (project № 18-01-00336).

есть *наилучшее приближение функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Задача (1) является частным случаем задачи Стечкина [4] приближения неограниченного оператора ограниченными на классе элементов банахова пространства; этой задаче к настоящему времени посвящено большое число исследований (см. работы [2], [3] и приведённую в них библ.). Исследования задачи (1) начато в работе [1].

Будем обозначать w гармоническую в области G функцию переменной z, значение которой в точке равно гармонической мере γ_1 относительно области G в этой точке и определяемую равенством

$$w(z) = w(z, \gamma_1, G) = \int_{\gamma_1} P(z, \zeta)\, |d\zeta|,$$

в котором $P(z, \zeta)$ – плотность гармонической меры области G.

Для $\delta \geq 0$ зададим аналитическую в области G функцию f_δ равенством $f_\delta(z) := \exp\left(u_\delta(z) + iv_\delta(z)\right)$, $z \in G$, где функция $u_\delta(z) := \ln\delta\, w(z)$, $z \in G$, а $v_\delta(z) := \ln\delta\, v(z)$, v – функция, гармонически сопряжённая в области G к функции w.

Обозначим через $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$, соответственно, длину, направление и аргумент градиента гармонической меры γ_1 относительно области G в точке z_0, т.е. определяемые равенствами

$$\kappa = \kappa(z_0) := \left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0) := \frac{\overline{\nabla} w(z_0)}{\left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|}, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g – функция, задающая однолистное отображение области G на единичный круг, удовлетворяющая условиям $g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) > 0$. Обозначим через $\eta(z_0)$ положительную величину $\eta(z_0) := 2g'(z_0)/\kappa(z_0)$.

На пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству $|\ln\delta| \geq \eta(z_0)$ определим функционал T^1_δ формулой

$$(T^1_\delta f)(z) := e^{-it} \int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\, \frac{f_\delta(z_0)}{f_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta|, \tag{2}$$

в которой

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z, \zeta) + \ln\delta\, \kappa\, P(z, \zeta).$$

Для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющих условию $|\ln\delta| < \eta(z_0)$, определим на области G функцию F_δ равенством

$$F_\delta(z) := \frac{g(z) - g_0}{1 - g(z)\,\overline{g_0}}\, f_\delta(z), \quad g_0 := -e^{it}\frac{\kappa(z_0)\,\ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it}\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

В этом случае определим функционал T_1^δ равенством

$$T_1^\delta f := e^{-it} \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\, \frac{f_\delta(z_0)}{F_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta|, \tag{3}$$

где

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\, \frac{\partial P}{\partial\overline{\nu}}(z_0,\zeta) + \kappa(z_0)\, \frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) P(z_0,\zeta).$$

Теорема 1. *Для величины* (1) *справедливы утверждения.*

(*I*) *Если* $N > 0$ *имеет вид*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta}\, |\alpha\ln\delta + 1|, \quad |\ln\delta| \geq \eta(z_0),$$

то для величины (1) *справедливо равенство:*

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, |\beta\ln\delta - 1|.$$

Функционал T_δ^1, *определенный формулой* (2), *является функционалом наилучшего приближения.*

(*II*) *Если* $N > 0$ *имеет вид*

$$N = \kappa(z_0)\, \delta^{-\beta}\, \left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln\delta| < \eta(z_0),$$

то для величины (1) *справедливо равенство:*

$$E(N) = \kappa(z_0)\, \delta^{\alpha}\, \left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right].$$

Функционалом наилучшего приближения является функционал T_δ^1, *определенный равенством* (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Akopyan R. R.* Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary // Analysis Math. 2018. Vol. 44, No. 1. Pp. 3–19.

[2] *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995, № 11. С. 42–68.

[3] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.

[4] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.

UDC 517.9

IMPROVED BERNOULLI SUB-EQUATION FUNCTION METHOD FOR EXACT SOLUTIONS OF CONFORMABLE TIME FRACTIONAL RLW EQUATION

V. Ala, U. Demirbilek, Kh. R. Mamedov, (Mersin, TURKEY)
volkanala@mersin.edu.tr, ulviyedemirbilek@gmail.com, hanlar@mersin.edu.tr

In this paper, we consider conformable time fractional Regularized Long Wave (RLW) equation with the form

$$D_t^\alpha u + pu_x + quu_x + rD_t^\alpha u_{xx} = 0, t > 0, \tag{1}$$

where p, q and r real parameters, D_t^α is the conformable fractional differential operator and $u = u(x,t)$. In this study, we obtain the exact solutions of (1) using Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method (IBSEFM) and give the 3D graphs acquired from the values of the solutions.

Keywords: conformable time fractional regularized long wave equation, IBSEF method.

Introduction

In recent years,the fractional differential equations have become a useful tool for describing nonlinear phenomena of science and engineering models.Many of techniques applied to nonlinear partial differential equations have been adapted for fractional nonlinear partial differential equations to find exact solutions. For example the functional variable method [1], the first integral method [2], the exp-function method [3] and many others.In [4] a new simple well behaved definition of the fractional derivative called conformable fractional derivative is introduced. The conformable fractional derivative is theoretically easier than fractional derivative to handle. Also the conformable fractional derivative obeys some conventional properties that can't be satisfied by the existing fractional derivatives, for instance; the chain rule [5]. The conformable fractional derivative has the weakness that the fractional derivative of any differentiable function at the point zero is equal to zero. So that in [6-8] it is proposed a suitable fractional derivative that allows us to escape the lack of the conformable fractional derivative.

1. Conformable Fractional Derivative

In this section, we give some basic definition, properties and theorems about the conformable fractional derivative.

The conformable derivative of order α with respect to the independent variable t is defined as [9]

$$D_t^a(y(t)) = \lim_{\tau \to 0} \frac{y(t + \tau t^{1-\alpha}) - y(t)}{\tau}, \ t > 0, \ \alpha \in (0,1]$$

for a function $y = y(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Assume that the order of the derivative $\alpha \in (0,1]$ and suppose that $u = u(t)$ and $y = y(t)$ are $\alpha-$ differentiable for all positive t. Then,*

1. $D_t^a(c_1 u + c_2 y) = c_1 D_t^a(u) + c_2 D_t^a(y)$.

2. $D_t^a(t^k) = kt^{k-x}, \forall\ k \in \mathbb{R}$.

3. $D_t^a(\lambda) = 0$, *for all constant function* $u(t) = \lambda$.

4. $D_t^a\,(uy) = uD_t^a(y) + yD_t^a(u)$.

5.$D_t^a \left(\frac{u}{y}\right) = \frac{yD_t^a(u) - uD_t^a(y)}{y^2}$

6.$D_t^a\,(u)\,(t) = t^{1-\alpha}\frac{du}{dt}$ *for* $\forall\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Conformable fractional differential operator satisfies some critical fundamental properties like the chain rule, Taylor series expansion and Laplace transform.

Теорема 2. *Let $u = u(t)$ be an $\alpha-$ conformable differentiable function and assume that y is differentiable and defined in the range of u. Then,*

$$D_t^a(u \circ y)(t) = t^{1-\alpha} y'(t) u'(y(t)).$$

The proofs of these theorems are given in [4] and in [7] respectively.

2. Basic Properties of The Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method(IBSEFM)

In this section we will give the fundamental properties of the Improved Bernoulli sub-equation function method (IBSEFM) formed by modifying the Bernoulli sub-equation function method [10]. We consider the following four steps:

Step 1: Let us consider the following conformable time-fractional PDE of the form

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, D_{tt}^{2\alpha} u, u_{xx}, ...) = 0, \tag{2}$$

and take the wave transformation;

$$u(x,t) = U\,(\eta)\,, \quad \eta = \left(x - \frac{vt^\alpha}{\alpha}\right), \tag{3}$$

where v is a constant to be determined later. Using chain rule and substituting (3) in (2) we obtain the following nonlinear ordinary differential equation;

$$N(U, U', U'', ...) = 0. \tag{4}$$

Step 2: Considering trial equation of solution in (4) it can be written as following;

$$U(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i F^i(\eta)}{\sum_{j=0}^{m} b_j F^j(\eta)} = \frac{a_0 + a_1 F(\eta) + a_2 F^2(\eta) + ... a_n F^n(\eta)}{b_0 + b_1 F(\eta) + b_2 F^2(\eta) + ... b_m F^m(\eta)} \tag{5}$$

According to the Bernoulli theory, we can consider the general form of Bernoulli differential equation for as following;

$$F'(\eta) = \sigma F(\eta) + dF^M(\eta),\ \sigma \neq 0, d \neq 0,\ M \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}, \tag{6}$$

where $F(\eta)$ is Bernoulli differential polynomial. Substituting (5) and (6) in (4) it yields us an equation of polynomial $\Omega(F)$ of F as following;

$$\Omega(F(\eta)) = \rho_s F(\eta)^s + ... + \rho_1 F(\eta) + \rho_0 = 0.$$

According to the balance principle, we can determine the relationship between n, m and M.

Step 3: The coefficients of $\Omega(F(\eta))$ all be zero will give us an algebric system of equations;

$$\rho_i = 0, \quad i = 0, ..., s.$$

Solving this system, we will specify the values of $a_0, a_1, ..., a_n$ and $b_0, b_1, ..., b_m$.

Step 4: When we solve differential equation (6), we obtain the following two situations according to σ and d,

$$F(\eta) = \left[\frac{-d}{\sigma} + \frac{E}{e^{\sigma(M-1)\eta}}\right]^{\frac{1}{1-M}}, \quad \sigma \neq d, \tag{7}$$

$$F(\eta) = \left[\frac{(E-1) + (E+1)\tanh(\sigma(1-M))\frac{\eta}{2}}{1 - \tanh\left(\sigma(1-M)\frac{\eta}{2}\right)}\right], \sigma = d,\ E \in \mathbb{R}.$$

Using a complete discrimination system for polynomial of $F(\eta)$, we obtain the analytical solutions of (4) with the help of software programme and classify the exact solutions of (4). For a better interpretations of obtained results, we can plot two and three dimensional figures of analytical solutions by considering suitable values of parameters.

REFERENCES

[1] *Liu W., Chen K.* The functional variable method for finding exact solutions of some nonlinear timefractional differential equations // Pramana. 2013. Vol. 81, № 3. P. 377–384.

[2] *Lu B.* The first integral method for some time fractional diferential equations // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395, № 2. P. 684–693.

[3] *Bin Z.* Exp-function method for solving fractional partial dierential equations // The Sci. World J. 2013. Vol. 2013. P. 1–8.

[4] *Abdeljawad T.* On conformable fractional calulus // J. Comput. Appl. Math. 2015. Vol. 279. P. 57–66.

[5] *Atangana A., Goufo E. F. D.* Extension of matched asymptotic method to fractional boundary layers problems // Math. Probl. Eng. 2014. Vol. 2014, № 3. P. 1–7.

[6] *Atangana A., Noutchie S. C. O.* Model of break-bone fever via beta-derivatives // BioMed Research International. 2014. Vol. 2014, Article ID 523159. 10 p. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2014/523159

[7] *Atangana A., Baleanu D., Alsaedi A.* New properties of conformable derivative // Open Math. 2015. Vol. 13, № 1. P. 1–10.

[8] *Atangana A.* A novel model for the lassa hemorrhagic fever, deathly disease for pregnant women // Neural. Comput. Appl. 2015. Vol. 26, № 8. P. 1895–1903.

[9] *Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M.* A new definition of fractional derivative // Pramana. 2013. Vol. 81, № 3. P. 377–384.

[10] *Guo S., Mei L., Li Y., Sun Y.* The improved fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional dierential equations in fluid mechanics // Physics Letters A. 2012. Vol. 376, iss. 4. P. 407–411. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.10.056

УДК 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ В УРАВНЕНИИ ПУАССОНА ПРИ ПОМОЩИ СПЕЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

М. Алмохамед (Москва, Россия)
mssrmtz@gmail.com

Изучается обратная задача для эллиптического уравнения Пуассона в цилиндрической области. Правая часть уравнения считается неизвестной. Доказана теорема единственности восстановления правой части при помощи специальной переопределенной системы краевых условий. Этот результат получен применением одной общей теоремы единственности для абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: уравнения эллиптического типа, уравнение Пуассона, обратная задача, единственность решения.

RECONSTRUCTION OF THE INHOMOGENEOUS TERM FOR POISSON'S EQUATION WITH SPECIAL BOUNDARY CONDITIONS

M. Almohamed (Moscow, Russia)
mssrmtz@gmail.com

Inverse problem for Poisson's equation in a cylindrical domain is studied. The inhomogeneous term of the equation is unknown. A special overdetermination in a system of boundary conditions is given. The uniqueness theorem of reconstruction of the inhomogeneous term is proved. This result was obtained as applying of the general uniqueness theorem for abstract differential equations of the second order.

Keywords: elliptic partial differential equations, Poisson's equation, inverse problem, uniqueness of solution.

В цилиндрической области трехмерного пространства рассматриваем уравнение Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -g(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < z < h, \tag{1}$$

с неизвестной функцией $g(x,\,y)$. Здесь Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^2_{(x,\,y)}$ с гладкой (или кусочно гладкой) границей $\partial\Omega$. Число $h > 0$ считаем фиксированным.

Для одновременного нахождения пары $\left\{\, u(x,\,y,\,z),\, g(x,\,y)\right\}$ возьмем набор краевых условий

$$u(x,\,y,\,z)\,|_{\partial\Omega} = \mu(x,\,y,\,z), \qquad (x, y) \in \partial\Omega, \quad 0 < z < h, \tag{2}$$

$$u(x,\,y,\,0) = u_0(x,\,y), \qquad u_z(x,\,y,\,0) = u_1(x,\,y), \tag{3}$$

$$u_z(x,\,y,\,h) = u_2(x,\,y). \tag{4}$$

Функции $u_0(x,\,y)$, $u_1(x,\,y)$, $u_2(x,\,y)$ заданы при $(x,\,y) \in \Omega$.

Если трактовать уравнение (1) как уравнение стационарной теплопроводности, то $u(x, y, z)$ — неизвестная температура внутри области $\Omega \times (0, h)$, $g(x, y)$ — плотность стационарных источников тепла, не зависящая от координаты z, функции $\mu(x, y, z)$ и $u_0(x, y)$ выражают граничные значения температуры, а функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — это соответствующие температурные градиенты.

Задача (1)–(4) относится к классу *обратных задач* (см. [1, 2]). Похожие обратные задачи для эллиптических уравнений рассматривались, например, в работах [3–5]. Новым моментом является использование в (4) краевого условия второго рода, а не первого, как часто было раньше.

Основной результат состоит в следующей теореме единственности.

Теорема. *Пусть при некотором выборе функций* μ, u_0, u_1, u_2 *обратная задача* (1)–(4) *имеет два решения*

$$\bigl\{u^{(1)}(x, y, z), g^{(1)}(x, y)\bigr\}, \ \bigl\{u^{(2)}(x, y, z), g^{(2)}(x, y)\bigr\},$$

таких, что их разность

$$u(x, y, z) \equiv u^{(1)}(x, y, z) - u^{(2)}(x, y, z), \ \ g(x, y) \equiv g^{(1)}(x, y) - g^{(2)}(x, y),$$

удовлетворяет условиям

$$u \in C^2(\,(\,0, h\,),\ L_2(\Omega)\,) \cap C^1(\,[\,0, h\,],\ L_2(\Omega)\,),$$

$$u(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\, z) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \textit{при всех} \quad z \in (0,\, h),$$

$$g \in L_2(\Omega),$$

и является решением обратной задачи для уравнения (1) *с однородными краевыми условиями* (2)–(4)*. Тогда* $u^{(1)}(x, y, z) = u^{(2)}(x, y, z)$ *п. в. в цилиндре* $\Omega \times (0, h)$ *и* $g^{(1)}(x, y) = g^{(2)}(x, y)$ *п. в. в области* Ω.

Данное утверждение получается применением общего результата [6], относящегося к абстрактным дифференциальным уравнениям второго порядка. Соображения «самосопряженности» при этом не используются, что позволяет легко перенести теорему единственности в пространства типа L^p произвольным $p \in (1, \infty)$. Отметим, что задача (1)–(4) представляет определенный интерес для геофизики в связи с вопросом о нахождении радиоактивных источников тепла в земной коре [7].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Тихонову за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

[2] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel : Marcel Dekker, 2000. 744 p.

[3] *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.

[4] *Прилепко А. И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Новосибирск : Наука, 1992. С. 151–162.

[5] *Соловьев В. В.* Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестник МГОУ. Сер. Физика – Математика. 2012. № 1. С. 27–38.

[6] *Алмохамед М.* Критерий единственности решения в одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж : Изд-во ВГУ, 2019. С. 19–20.

[7] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ; Наука, 2004. 798 с.

УДК 517.518.4

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ L^∞-НОРМЫ СУММЫ РЯДА ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ $\{b_k\}$ ЧЕРЕЗ l^∞-НОРМУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{kb_k\}$[1]

Е. Д. Алферова, А. Ю. Попов (Москва, Россия)
elena.alferova@gmail.com

Доказана теорема о двусторонней оценке L^∞-нормы суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами через l^∞-норму $\{kb_k\}$: $C_0\|b\| \le \|g(b,\cdot)\| \le C_1\|b\|$.

Константа C_1 найдена точно. Константа C_0 точно не указана, но ее значение найдено с точностью 0.2.

Ключевые слова: двусторонняя оценка, ряды по синусам, монотонные коэффициенты.

TWO-SIDED ESTIMATES FOR L^∞-NORM OF SINE SERIES WITH MONOTONE COEFFICIENTS $\{b_k\}$ IN TERMS OF l^∞-NORM OF $\{kb_k\}$ SEQUENCE[1]

E. D. Alferova, A. Yu. Popov (Moscow, Russia)
elena.alferova@gmail.com

Two-sided estimates for L^∞-norm of sine series with monotone coeffcients $\{b_k\}$ in terms of l^∞-norm of $\{kb_k\}$ sequence are obtained. We proved that $C_0\|b\| \le \|g(b,\cdot)\| \le C_1\|b\|$, where C_1 we found exactly, and C_0 we could't find. But we showed that is between 0.53 and 0.73.

Keywords: two-sided estimate, sine series, monotone coefficients.

Рассмотрим ряды по синусам

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = g(b,x), \tag{1}$$

последовательности коэффициентов которых $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ монотонны:

$$b_1 > 0,\ b_{k+1} \le b_k \ \ \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{2}$$

Множество всех последовательностей $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих условию (2), обозначим $\mathbb{M}$. Ряды (1) с коэффициентами из $\mathbb{M}$ сходятся в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а суммы их непрерывны на интервалах $(2\pi m, 2\pi(m+1)), m \in \mathbb{Z}$. Ввиду нечетности и 2π-периодичности синуса сумму ряда (1) достаточно исследовать на интервале $(0,\pi)$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project No. 20-01-00584.

Если для рядов по синусам общего вида (сходящихся всюду или почти всюду) найти критерий ограниченности их сумм в терминах последовательностей коэффициентов вряд ли возможно, то для сумм рядов (1) с коэффициентами из множества $\mathbb{M}$ такой критерий выглядит довольно просто.

Теорема A. (см. [1, §7, теорема 7.27; 2, гл. V, теорема 1.3]) *Сумма ряда (1) с коэффициентами из $\mathbb{M}$ ограничена на $\mathbb{R}$ (или, что то же самое, ограничена на $(0,\pi)$) тогда и только тогда, когда ограниченной является последовательность $\{kb_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

В связи с приведенным критерием возникает вопрос об оценке друг через друга норм

$$\|g(b,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(b,x)| = \sup_{0<x<\pi}|g(b,x)| = \|g(b,\cdot)\|_{L^\infty(0,\pi)} \tag{3}$$

и

$$\|b\| = \sup_{k\in\mathbb{N}}(kb_k) \tag{4}$$

(поскольку $b\in\mathbb{M}$, то в определении этой нормы модуль можно не ставить). Насколько известно авторам, этот вопрос в математической литературе не рассматривался. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для нормы суммы ряда по синусам (1), последовательность коэффициентов b которого лежит в $\mathbb{M}$, справедлива следующая двусторонняя оценка*

$$C_0\|b\| \le \|g(b,\cdot)\| \le \left(\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt\right)\|b\|, \tag{5}$$

где

$$C_0 = \max_{x\in[\pi,\frac{5\pi}{4}]}\left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{1-\cos t}{t}dt\right), \tag{6}$$

если хотя бы одна из величин (3) или (4) конечна.

Замечание 1. Константа $\int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt$ в неравенстве (5) является точной, поскольку (см. [3, т.2, стр. 89, № 23]) выполняется равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\max_{x\in[0,\pi]}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt.$$

Замечание 2. Точная константа C в оценке снизу $C\|b\| \le \|g(b,\cdot)\|$ нами не найдена, но зазор между ней и ее оценкой снизу C_0 не очень велик. С одной стороны, верно численное неравенство $C_0 > 0.53$, с другой стороны, имеем

$$C \le C_1 = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) < 0.73.$$

Действительно, сопряженные ядра Дирихле

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \tag{7}$$

являются рядами по синусам с монотонными коэффициентами и норма (4) последовательности коэффициентов функции $\widetilde{D}_n$ равна n. Максимумы же функций (7) на отрезке $[0,\pi]$, как нетрудно убедиться, находятся на отрезке $[0,\frac{2\pi}{n+1}]$ и имеют асимптотику $C_1 n$ при $n\to\infty$.

Также нами был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $b=\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{M}$. *Положим* $\beta = \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\, kb_k$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\overline{\lim_{x\to 0+}}\, g(b,x) \ge \overline{\lim_{x\to 0+}}\, \frac{1}{x}\int\limits_0^x g(b,t)dt \ge C_0\beta, \tag{8}$$

где постоянная C_0 *определена равенством (6).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Boas R. P.* Integrability theorems for trigonometric transforms. N. Y. : Springer-Verlag Inc., 1967. 616 p.

[2] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М : Мир, 1965. 616 с.

[3] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы анализа. М. : Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1978. 432 с.

УДК 517.935.2

РАСШИРЕННЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, Д. В. Мельничук (Саратов, Россия)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru, melnichukdv@sgu.ru

Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. «Быстрый» алгоритм проверки устойчивости КДС применим лишь в случае аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. Предложен основанный на принципе аргумента расширенный алгоритм моделирования устойчивости КДС, свободный от данного ограничения.

Ключевые слова: комбинированные динамические системы, устойчивость.

ADVANCED ALGORITHM FOR MODELING STABILITY OF HYBRID DYNAMICAL SYSTEMS[1]

D. K. Andreichenko, K. P. Andreichenko, D. V. Melnichuk (Saratov, Russia)

andreichenkodk@gmail.com, kp_andreichenko@renet.ru, melnichukdv@sgu.ru

Hybrid dynamic systems (HDS) are mathematical models in the form of systems of ordinary differential equations and partial differential equations connected by means of boundary conditions and constraint's conditions under the corresponding initial conditions. The "fast"algorithm for checking the stability of the HDS is applicable only in the case of analyticity of the characteristic and perturbing quasi-polynomials of the HDS in the right complex half-plane and near the imaginary axis. The extended algorithm of modeling of stability of HDS, based on the principle of argument, and free from this restriction is offered.

Keywords: hybrid dynamic systems, stability.

Введение

Комбинированные динамические системы (КДС) [1–3] представляют собой математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. «Быстрый» алгоритм, т.е. частотный критерий, проверки устойчивости КДС [1–3] требует аналитичности характеристического и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-90017).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19-37-90017).

возмущающих квазимногочленов КДС в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси, т.е. устойчивости объектов управления с распределенными по пространству параметрами. Разомкнутая система управления может быть неустойчивой, а замкнутая — устойчивой [4]. Т.е. объект с распределенными по пространству параметрами может быть неустойчив, а КДС – устойчива. Целью работы является развитие частотного критерия устойчивости применительно к КДС подобного типа.

Алгоритмы моделирования устойчивости

Уравнения линеаризованной КДС с входной и выходной вектор-функциями $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$ аналогичны [2,3]:

$$\begin{array}{c} \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{x} + C\mathbf{y} + A\mathbf{h};\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) + L_2^{(F)}\mathbf{x} + L_3^{(F)}\mathbf{y} + L_4^{(F)}\dot{\mathbf{y}},\ \mathbf{r} \in \Omega \\ (\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) + L_2^{(G)}\mathbf{y})\Big|_S = 0;\ \mathbf{h} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u})dS;\ \mathbf{y}(0) = 0,\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0 \end{array} \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ – независимые пространственные координаты; $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ и $S = \partial\Omega$ – области, занимаемые объектами управления с распределенными по пространству параметрами, и их границы; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_u}$; $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_h}$; A, B, C – постоянные матрицы; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ – матрицы, которые могут зависеть от $\mathbf{r}$; $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ – линейные операторы; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t. После преобразования Лапласа $\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{C}$ (1) сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda)$, причем

$$\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda),\ \Phi(\lambda) = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)],\ k = \overline{1, N_y},\ j = \overline{1, N_x} \qquad (2)$$

$$D(\bar{\lambda}) = \overline{D(\lambda)},\ Q_{kj}(\bar{\lambda}) = \overline{Q_{kj}(\lambda)} \qquad (3)$$

Здесь $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ – характеристический и возмущающие квазимногочлены, алгоритм вычисления которых приведен в [2,3]. В [3] доказаны теоремы об аналитичности функций $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ при $|\lambda| \gg 1$, $\operatorname{Re}\lambda > -|\lambda|\sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, а их аналитичность при $\lambda = \underline{\underline{O}}(1)$, $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$ проверяется численно на основе принципа аргумента [3]. Обобщенная степень $n \in \mathbb{R}$ (обычно $n = N_y$) характеристического квазимногочлена $D(\lambda)$ определяется условием [1,2]

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-n} D(\lambda) = C_a,\ 0 < |C_a| < \infty,\ \mathrm{Re}\lambda > -\infty \qquad (4)$$

При аналитичности функций $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ критерий устойчивости КДС имеет вид [1,2] $\underset{0 \leqslant \omega \leqslant \infty}{\Delta} \arg D(i\omega) = n\pi/2$. Индексы k и j у функций $Q(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ далее опускаем.

Неустойчивость по одной или нескольким формам колебаний объекта с распределенными по пространству параметрами влечет наличие при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ полюсов функций $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$. Функции $\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda)$ будут аналитическими при $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, если у $D(\lambda)$ отсутствуют корни при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, полюса $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ совпадают, и порядок полюсов $Q(\lambda)$ не превосходит порядка полюсов $D(\lambda)$. Обобщенная степень $m \in \mathbb{R}$ возмущающего квазимногочлена определена аналогично (4)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-m} Q(\lambda, \mathbf{p}) = C_b(\mathbf{p}),\ 0 < |C_b(\mathbf{p})| < \infty,\ \operatorname{Re}\lambda > -\infty \tag{5}$$

Квазирациональная дробь $\Phi(\lambda, \mathbf{p}) = Q(\lambda, \mathbf{p})/D(\lambda, \mathbf{p})$ называется физически возможной, если выполнены условия (3)-(5) и условие $n > m+1$.

Рассмотрим контур

$$\begin{aligned} L_R = \{\lambda = i\omega,\ -\infty < \omega \leqslant -R\} \cup \{\lambda = Re^{i\vartheta},\ -\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2\} \cup \\ \cup \{\lambda = i\omega,\ R \leqslant \omega < \infty\},\ R \gg 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Характеристический и возмущающие квазимногочлены КДС $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны в неограниченной области правее контура (6) и в его окрестности (см. [3]). Следующие утверждения аналогичны [1, 2]

Теорема 1. *Всякая физически возможная и аналитическая при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$ *квазирациональная дробь (передаточная функция)* $\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda)$ *асимптотически устойчива.*

Теорема 2. *Если квазирациональная дробь* $\Phi(\lambda)$ *имеет хотя бы одну особенность при* $\operatorname{Re}\lambda > 0$, *то она неустойчива.*

Теорема 3. *Пусть квазимногочлен* $D(\lambda)$ *аналитичен в неограниченной области комплексной плоскости* (λ) *правее контура* (6) *и в его окрестности, и выполнены условия* (3), (4). *Если при монотонном движении вдоль контура* (6) *от точки* $\lambda = R$ *до точки* $\lambda = i\infty$ *вектор* $D(\lambda)\big|_{L_R} = u + iv$ *повернется на комплексной плоскости* (u, iv) *в положительном направлении на угол* $n\pi/2$, *т.е.*

$$\underset{0\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2}{\Delta} \arg D(Re^{i\vartheta}) + \underset{R\leqslant\omega<\infty}{\Delta} \arg D(i\omega) = n\pi/2 \tag{7}$$

то все корни квазимногочлена $D(\lambda)$ *лежат левее контура* (6).

Из (1), (2) следуют уравнения для нахождения столбца матрицы передаточных функций $\Phi_j = (\Phi_{1j}(\lambda, \mathbf{p}), \Phi_{2j}(\lambda, \mathbf{p}), ..., \Phi_{N_y j}(\lambda, \mathbf{p}))^T,\ j = \overline{1, N_x}$

$$\lambda\Phi_j = B(\mathbf{p})\mathbf{e}_j^{(N_x)} + C(\mathbf{p})\Phi_j + A(\mathbf{p})\mathbf{h},\ \mathbf{h} = \textstyle\int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\lambda\mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + L_2^{(F)}\mathbf{e}_j^{(N_x)} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\Phi_j,\ \mathbf{r} \in \Omega \\ &(\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) + L_2^{(G)}\Phi_j)\Big|_S = 0;\ \mathbf{e}_1^{(N)} = (1, 0, ...0)^T, ...,\ \mathbf{e}_N^{(N)} = (0, 0, ...1)^T \end{aligned} \tag{9}$$

В области, охватываемой контуром $(R \gg 1)$

$$\ell_R = \{\lambda = -\varepsilon - i\omega, -(R^2 - \varepsilon^2)^{1/2} \leqslant \omega \leqslant (R^2 - \varepsilon^2)^{1/2}\} \cup \{\lambda = \\ = Re^{i\vartheta}, -\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0\},\ \vartheta_0 = \pi/2 + \arcsin(\varepsilon/R),\ 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{10}$$

передаточные функции находятся численно на основе проекционного метода Галеркина. Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r}), \mathbf{W}_k : \Omega \to \mathbb{R}^{N_u},\ k = 1, 2, \ldots$ – полная система функций в области Ω; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_s), \Gamma_k : S \to \mathbb{R}^{N_G},\ k = 1, 2, \ldots$ – полная система функций на $S = \partial\Omega$. Для того, чтобы приближенно выполнить (9), полагаем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \lambda) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} v_k(\lambda)\mathbf{W}_k(\mathbf{r}),\ \lambda \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega = \int_\Omega (\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + \\ + L_2^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_x)} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\Phi_j) \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega,\ k = \overline{1, N_\Omega}, \\ \int_S (\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) + L_2^{(G)}\Phi_j) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS = 0,\ k = \overline{1, N_S},\ j = \overline{1, N_x} \tag{11}$$

Уравнения (8) и (11) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $\Phi_j \in \mathbb{C}^{N_y}$ и величин $v_k(\lambda),\ k = \overline{1, N_\Omega + N_S}$. Ее определитель $\mathcal{D}(\lambda)$ является полиномом по λ. Особенности передаточных функций внутри контура (10) исчерпываются корнями определителя $\mathcal{D}(\lambda)$, и проверка их отсутствия внутри контура (10) согласно принципу аргумента сводится к проверке условия

$$\underset{\lambda \in \ell_R}{\Delta} \arg \mathcal{D}(\lambda) = 2 \left(\underset{0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0}{\Delta} \arg \mathcal{D}(Re^{i\vartheta}) - \underset{0 \leqslant \omega \leqslant R}{\Delta} \arg \mathcal{D}(i\omega - \varepsilon) \right) = 0 \tag{12}$$

Расширенный алгоритм моделирования устойчивости основан на том, что физически возможная КДС, для которой выполнены условия (7) и (12), согласно теоремам 1 и 3 асимптотически устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

[2] *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.

[3] *Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К.* Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 208–217. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217

[4] *Ким Д. П. С. М.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 288 с.

УДК 517.982.22

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА – ЛОРЕНЦА

С. В. Асташкин, С. И. Страхов (Самара, Россия)
astash56@mail.ru, www.stepan121@mail.ru

Доклад посвящён дизъюнктно однородным пространствам Орлича–Лоренца. Будут даны условия, при которых в пространстве Орлича–Лоренца все относительно слабо компактные подмножества имеют равностепенные абсолютно непрерывные нормы.

Ключевые слова: дизъюнктно однородное пространство, пространство Орлича–Лоренца, слабо компактное множество.

ON SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF ORLICZ – LORENTZ SPACES

S. V. Astashkin, S. I. Strakhov (Samara, Russia)
astash56@mail.ru, www.stepan121@mail.ru

The presentation focuses on disjointly homogeneous Orlicz–Lorentz spaces. We will give conditions under which all relatively weakly compact sets have equi-absolutely continuous norms.

Keywords: disjointly homogeneous spaces, Orlicz–Lorentz Spaces, weakly compact set.

Симметричное пространство E называется *дизъюнктно однородным* или *DH пространством*, если из любой пары дизъюнктных нормированных последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ из E можно выделить эквивалентные в E подпоследовательности. Если же всякая $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ содержит подпоследовательность, эквивалентную стандартному базису пространства l_p, то говорят, что E — *p-DH пространство.*

Пусть ϕ — функция Орлича, т.е., возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $\phi(0) = 0$ и $w(t)$ – положительный убывающий вес на [0,1]. Через $x^*(t)$ обозначим невозрастающую непрерывную слева перестановку функции $|x(t)|$. Пространство Орлича-Лоренца $\Lambda_{\phi,w}$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(t)$ таких, что

$$\|x\|_{\phi,w} := \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 \phi\left(\frac{x^*(t)}{u}\right) w(t)dt \ \leq 1\right\} < \infty.$$

В теории пространств Орлича-Лоренца $\Lambda_{\phi,w}$ значительную роль играют свойства следующих множеств непрерывных функций на $[0,\frac{1}{2}]$:

$$E_{\phi,A}^{\infty} = \overline{\left\{G(x) = \frac{\phi(xy)}{\phi(y)} \ : y > A > 0\right\}}, \quad E_{\phi}^{\infty} = \bigcap_{A>0} E_{\phi,A}^{\infty},$$

где замыкание берётся в пространстве $C[0,\frac{1}{2}]$ (см. [1]). Теорема 4.1 из работы [2] для пространств Орлича может быть распространена на пространства Орлича-Лоренца.

Теорема 1. *$\Lambda_{\phi,w}$ — DH пространство тогда и только тогда, когда $E_\phi^\infty \cong \{\psi\}$, т.е. все функции из множества E_ϕ^∞ эквивалентны на $[0,\frac{1}{2}]$ функции ψ. Более того, $\Lambda_{\phi,w}$ — DH пространство, если и только если оно для некоторого $1 \le p \le \infty$ имеет p-DH свойство, и в этом случае $E_\phi^\infty \cong \{t^p\}$.*

Для 1-DH пространств имеет место обобщение классического результата Данфорда-Петтиса о слабо компактных множествах [3, Th. 3.4]. Поэтому, применяя теорему 1, а также [3, Th. 3.4], получаем

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\Lambda_{\phi,w}$ — 1-DH пространство;

(ii) всякое относительно слабо компактное подмножество пространства $\Lambda_{\phi,w}$ имеет равностепенные абсолютно непрерывные нормы в $\Lambda_{\phi,w}$;

(iii) $\phi(t) = t$ и $w(t) \equiv 1$, т.е. $\Lambda_{\phi,w} = L_1$, или функция Орлича $\tilde{\phi}$, дополнительная к ϕ, удовлетворяет условию: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\tilde{\phi}(ct)}{\tilde{\phi}(t)} = \infty$ для некоторого $c > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kaminska A., Raynaud Y.* Isomorphic copies in the lattice E and its symmetrization $E^{(*)}$ with applications to Orlicz-Lorentz spaces // J. Funct. Anal. 2009. Vol. 257. P. 271–331.

[2] *Flores J., Hernandez F. L., Semenov E. M., Tradacete P.* Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices // Israel J. Math. 2012. Vol. 188. P. 323–352.

[3] *Astashkin S. V.* Rearrangement invariant spaces satisfying Dunford-Pettis criterion of weak compactness // Contemp. Math. 2019. Vol. 733 P. 45–59.

УДК 517.518+517.983

ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ НА ОСИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_r ОПЕРАТОРАМИ И РОДСТВЕННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)

vitalii.arestov@urfu.ru

Будет обсуждаться задача о наилучшем приближении в пространстве $C(-\infty,\infty)$ оператора дифференцирования порядка k на классе функций с ограниченной производной порядка n, $0<k<n$, линейными ограниченными в пространстве L_r, $1\le r<\infty$, операторами. Будут обсуждаться родственные задачи в преддуальном пространстве F_r для пространства мультипликаторов пространства L_r.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова.

APPROXIMATION IN THE UNIFORM NORM ON THE AXIS OF A DIFFERENTIATION OPERATOR BY OPERATORS BOUNDED IN THE SPACE L_r AND RELATED EXTREMAL PROBLEMS[1]

V. V. Arestov (Ekaterinburg, Russia)

vitalii.arestov@urfu.ru

We will discuss the problem of the best approximation in the space $C(-\infty,\infty)$ of the differentiation operator of order k on the class of functions with a bounded derivative of order n, $0<k<n$, by linear operators bounded in the space L_r, $1\le r<\infty$. Related problems in the space F_r predual for the space of multipliers of the space L_r will be discussed.

Keywords: differentiation operator, Stechkin problem, Kolmogorov inequality.

Обозначения. Постановка задачи

При $1\le\gamma<\infty$ через L_γ обозначается лебегово пространство (комплекснозначных) измеримых на оси функций f, у которых функция $|f|^\gamma$ суммируема на оси; это пространство наделено нормой $\|f\|_\gamma=\|f\|_{L_\gamma}=\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^\gamma dt\right)^{1/\gamma}$. Символами L_∞ обозначается пространство измеримых, существенно ограниченных функций на оси; оно наделено нормой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

[1]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement No. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)|\colon t \in (-\infty, \infty)\}$. Это пространство содержит пространство C непрерывных, ограниченных функций на оси, наделенное равномерной нормой, которое, в свою очередь, содержит подпространство C_0 функций, имеющих нулевой предел на бесконечности. Далее под L_∞ иногда будет пониматься пространство C или даже C_0.

При $1 \le r \le \infty$ и целом $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,\infty}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_\infty$. В $W^n_{r,\infty}$ выделим класс $Q^n_{r,\infty} = \{f \in W^n_{r,\infty}\colon \|f^{(n)}\|_{L_\infty} \le 1\}$. Всюду далее $0 < k < n$.

Обозначим через $\mathcal{B}(L_r)$ множество всех линейных ограниченных операторов в пространстве L_r, а через $\mathcal{B}(N; L_r)$ при $N > 0$ – множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_r} \le N$. Здесь при $r = \infty$ под L_∞ понимается пространство C. Для оператора $T \in \mathcal{B}(L_r)$ положим

$$U(T) = U_{n,k}(T; L_r) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_C\colon f \in Q^n_{r,\infty}\}; \tag{1}$$

если разность $f^{(k)} - Tf$ не принадлежит пространству C, то считаем, что $\|f^{(k)} - Tf\|_C = \infty$. Величину (1) можно интерпретировать как уклонение (в пространстве C) оператора T от оператора дифференцирования $D^k = d^k/dt^k$ на классе $Q^n_{r,\infty}$. При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; L_r) = \inf\{U(T)\colon T \in \mathcal{B}(N; L_r)\} \tag{2}$$

есть наилучшее приближение (в пространстве C) оператора дифференцирования D^k на классе $Q^n_{r,\infty}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N; L_r)$. Задача состоит в вычислении величины (2) и экстремального оператора $T^*_{n,k} = T^*_{n,k}(N; L_r)$, на котором в (2) достигается нижняя грань; будем называть ее задачей Стечкина или задачей $E_{n,k}(N; L_r)$.

Задача (2) является конкретным вариантом более общей задачи о наилучшем приближении оператора дифференцирования D^k на классе n раз дифференцируемых функций (см. [1, 2] и приведенную там библ.).

Впервые задачу (2) изучал С. Б. Стечкин в классическом случае $r = \infty$, т. е. в пространстве $C = C(-\infty, \infty)$. В частности, он заметил [3], что задача $E_{n,k}(N; C)$ связана с точным неравенством

$$\|f^{(k)}\|_C \le C_{n,k} \|f\|_C^{(n-k)/n} \|f^{(n)}\|_{L_\infty}^{k/n}, \quad f \in W^n_{\infty,\infty}, \tag{3}$$

между нормами производных дифференцируемых функций, называемым неравенством Колмогорова; а именно, наименьшая константа $C_{n,k}$ в (3) дает для $E_{n,k}(N; C)$ оценку снизу. В. Н. Габушин уточнил этот результат, обосновав равенство (см. детали в [1, § 3])

$$E_{n,k}(N; C) = k \left(\frac{C_{n,k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}}, \quad N > 0. \tag{4}$$

Точное неравенство (3) для $n = 2$, $k = 1$ впервые (1914) получил Ж. Адамар; а для $n = 3, 4$ при всех $1 \le k < n$ и $n = 5$, $k = 2$ – Г. Е. Шилов (1937). А. Н. Колмогоров (1939) году нашел [4] точную константу в неравенстве (3) для всех $1 \le k < n$. Экстремальной в неравенстве (3) является известная функция Фавара–Ахиезера–Крейна

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2\ell+1)t - n\pi/2\right)}{(2\ell+1)^{n+1}}.$$

С. Б. Стечкин [3] получил решение задачи $E_{n,k}(N; C)$ при $n = 2$ и $n = 3$ для $1 \le k < n$. Он показал, что в этих случаях экстремальными операторами $T^*_{n,k}$ являются классические (конечноразностные) операторы; в частности, при $k = 1$

$$(T^*_{2,1} f)(t) = (T^*_{3,1} f)(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}, \quad N = h^{-1}. \tag{5}$$

При $n = 4, 5$ решение этого случая задачи (2) нашел В. В. Арестов (1967), а при произвольном $n \ge 6$ – А. П. Буслаев (1981). При $n \ge 4$ экстремальные операторы бесконечноразностные с равномерными узлами.

Основной результат

Положим $\lambda_n = \|f_n\|_C = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell(n+1)}}{(2\ell+1)^{n+1}}$, $\lambda^*_n = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^{n+1}}$.

Теорема. *При всех* $n \ge 2$, $1 \le k < n$, $1 < r < \infty$ *для значения задачи* (2) *справедливы оценки*

$$k \left(\frac{\lambda_{n-k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N\,\lambda^*_n}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}} \le E_{n,k}(N; L_r) \le k \left(\frac{\lambda_{n-k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N\,\lambda_n}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}}. \tag{6}$$

Для нечетного $n \ge 3$ *и произвольных* k, $1 \le k < n$, *второе неравенство в* (6) *обращается в равенство*:

$$E_{n,k}(N; L_r) = k \left(\frac{\lambda_{n-k}}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{N\,\lambda_n}{n-k}\right)^{-\frac{n-k}{k}}.$$

Более того, оператор $T^*_{n,k}(N; C)$, *экстремальный в задаче* $E_{n,k}(N; C)$, *будет экстремальным в задаче* $E_{n,k}(N; L_r)$ *при всех* r, $1 \le r \le \infty$.

В работе автора [2] дано решение задачи (2) при $n = 2$, $k = 1$, $r = 2$. В этом случае точным является первое неравенство (6) и экстремальным является сингулярный оператор свертки, отличный от оператора (5).

В доказательстве теоремы основная трудность состоит в обосновании оценки снизу в (6). Для этого используются следующие соображения. Задача Стечкина (2) инвариантна относительно сдвигов. В силу этого в (2) можно ограничиться аппроксимирующими операторами T, также инвариантными относительно сдвигов. Оператор $T \in \mathcal{B}(L_r)$, инвариантный относительно сдвигов, по крайней мере, на множестве S быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, имеет вид свертки $Tf = \theta * f$ с некоторой обобщенной функцией θ. Такие обобщенные функции θ называют мультипликаторами пространства L_r. Множество M_r с нормой $\|\theta(T)\|_{M_r} = \|T\|_{L_r \to L_r}$ является банаховым пространством. Свойствам мультипликаторов посвящена обширная литература, см. [5] и приведенную там библиографию.

A. Figà-Talamanca [6] доказал, что пространство M_r является сопряженным для конкретного функционального пространства A_r. Автор в нескольких работах, посвященных задаче Стечкина, использовал функциональное пространство F_r, которое описано в других терминах в сравнении с A_r, однако, как показано в [5], эти два пространства совпадают.

Как оказалось [1, § 6; 2], величина (2) выражается равенством, аналогичным (4), через наименьшую константу $K_{n,k}(r)$ в неравенстве

$$\|f^{(k)}\|_C \le K_{n,k}(r)\|f\|_{F_r}^{(n-k)/n}\,\|f^{(n)}\|_{L_\infty}^{k/n}, \quad f \in W^n_{\infty,\infty},$$

подобном неравенству (3). Именно эти соображения приводят к первому неравенству в (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124.

[2] *Арестов В. В.* Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 34–56.

[3] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

[4] *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избранные тр. Математика, механика. М. : Наука, 1985. С. 252–263.

[5] *Арестов В. В.* О сопряженности пространства мультипликаторов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–15.

[6] *Figà-Talamanca A.* Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.

УДК 517.9

ПРЯМЫЕ СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И ОПЫТ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О ПРОГИБАХ БАЛОК И ПЛАСТИН

Р. В. Арутюнян (Москва, Россия)
rob57@mail.ru

В статье описан опыт применения прямых сеточных методов решения вариационных задач на примере краевых задач теории упругости о прогибах балок и пластин. Минимизация сеточных аналогов функционалов осуществлялась при помощи программы MINV, реализующей одну из модификаций метода покоординатного спуска. Отмечены вопросы устойчивости и сходимости методов. В качестве примеров рассмотрены задача о брахистохроне, расчет прогибов балки и пластины. Библиогр. 5 назв. Ил.3.

Ключевые слова: теория упругости, вариационная постановка, сеточные методы, численная оптимизация, задача о брахистохроне, расчет прогибов балок и пластин.

DIRECT GRID METHODS FOR SOLVING VARIATIONAL PROBLEMS AND EXPERIENCE OF THEIR APPLICATION IN PROBLEMS OF DEFLECTIONS OF BEAMS AND PLATES

R. V. Harutyunyan (Moscow, Russia)
robert57@mail.ru

The article describes the experience of using direct grid methods for solving variational problems on the example of boundary value problems of elasticity theory on deflections of beams and plates. Minimization of grid analogues of functionals was carried out using the MINV program, which implements one of the modifications of the coordinate descent method. The questions of stability and convergence of methods are noted. As examples we consider the problem about brachistochrone, the calculation of deflections of beams and plates.

Keywords: theory of elasticity, variational formulation, grid methods, the numerical optimization, the problem of brachistochrone, calculation of deflections baloe and plates.

Введение

Задачи теории упругости могут быть решены на основе как дифференциальной, так вариационной постановки о нахождении решений, доставляющих соответствующему функционалу экстремум. Опыт компьютерного моделирования в области прикладной теории упругости свидетельствует, что конечноразностные аппроксимации часто более предпочтительнее применять с вариационной формулировкой. На основе известных процедур в современных программных комплексах строятся конечноразностные уравнения для решения задач расчета тонкостенных конструкций. Применение непрямоугольных сеток позволяет рассчитывать пластинчатые и оболочечные конструкции сложных очертаний, с вырезами, подкреплениями и т. п. [1-4]. В статье описан опыт применения данного метода в сочетании с методом покоординатного спуска.

1. Задача о брахистохроне

Полное время T скатывания точки равно:

$$T = \int_0^a \sqrt{\left(1 + (dy/dx)^2\right) / (2gy(x))} dx.$$

Материальная точка первоначально находится в начале координат, конечное положение точка B , то есть $y(0) = 0, y(a) = b$. Введем сетку на $[0; a]$: $x_0 = 0, x_{n-1} = x_0 + (n-1)\delta x, x_n = a, \delta x = a/n$ и применим формулу трапеций. Для внутренних узлов сетки будем использовать центральные разности для аппроксимации производной функции y. Для правого конца отрезка будем использовать левую разность для аппроксимации производной в точке $x = x_n$. Задача оптимизации принимает вид

$$a/n \left(\sum_{i=2}^{i=n} \sqrt{\frac{\left(4\delta x^2 + (y_i - y_{i-2})^2\right)}{(8g\delta x^2 y_{i-1})}} + \sqrt{\frac{\left(\delta x^2 + (y_n - y_{n-1})^2\right)}{(4g\delta x^2 y_n)}} \right) \to 0$$

при $y_0 = 0, y_n = b, y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n-1$. Неизвестными величинами являются $y_i, i = 1, \ldots, n-1$. График оптимального решения задачи (рис. 1).

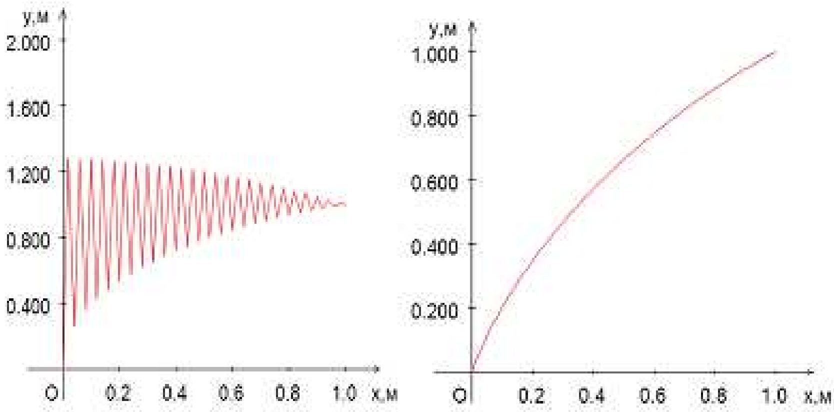


Рис. 1. Слева: пример вычислительной неустойчивости.
Справа: корректное решение

Обнаружилось, что во многих случаях имеет место вычислительная неустойчивость. Причиной является наличие нерегулярной точки при $= 0$, где решение обращается в нуль, а подынтегральная функция – в бесконечность. На рис. 1 слева – пример неустойчивости при нахождении решения (аппроксимация подынтегрального выражения осуществлялось со вторым порядком точности по шагу интегрирования δx). Справа корректное решение, которое было достигнуто за счет увеличения до 100 количества шагов интегрирования и применения регуляризации, основанной на разбиении отрезка интегрирования на 2 части: $x < x_0$, с особой точкой $=0$ (где решение вычислялось приближенно аналитически) и регулярную часть ($x > x_0 > 0$).

2. Задача о прогибе балки

На двух опорах и , расположенных в горизонтальной плоскости, свободно лежит цилиндрическая упругая тяжелая балка. Пренебрегая весом частей балки, лежащих вне опор, требуется определить форму изогнутой оси этой балки. Все размеры, плотность и коэффициенты упругости балки считаются известными. Обозначим через $2l$ расстояние между опорами,$\rho-$ линейную плотность балки, $ds-$ элемент дуги изогнутой оси балки. Введем декартову систему координат xOy. Пусть ось Ox соединяет точку опоры, начало координат делит отрезок пополам и ось направлена вертикально вверх. Вычислим потенциальную энергию балки, предполагая, что уравнение ее упругой оси есть $y = y(x)$. Обозначим L – длина части балки между опорами, $\phi-$ угол, образованный касательной с осью Ox, $\mu-$ постоянный коэффициент, зависящий от модуля упругости и момента инерции поперечного сечения балки, элемент длины балки и кривизна:

$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx, d\phi/dx = d^2y/dx^2 \left(1 + (dy/dx)^2\right)^{-1,5}$.

Задача сводится к нахождению минимума :

$$E = \int_{-l}^{l} \left(\rho y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} + 0,5\mu (d^2y/dx^2)^2 \left(1 + (dy/dx)^2\right)^{-3} \right) dx$$

Графики решения задачи методом сеток представлены ниже на рис. 2.

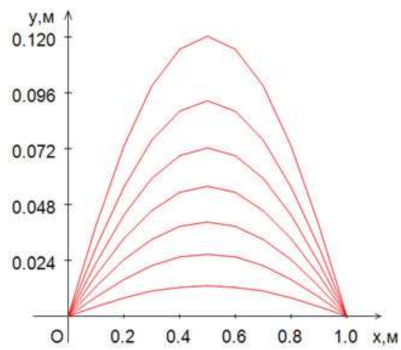


Рис. 2. Прогибы балки при $\mu = 1$, $\rho = 1, \ldots, 7$.
Крепление балки шарнирное: $y(0) = y(L) = 0$,
$y^{(2)}(0) = y^{(2)}(L) = 0$.

3. Решение задачи о прогибе пластины с закрепленными краями вариационным методом конечных разностей

Постановка двумерной вариационной задачи:

$$E = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(D \left(\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 \right)^2 - q(x,y) w \right) dx dy \to min$$

Крепление краев пластины шарнирное:

$$\begin{gathered} w(0,y) = w(L_x, y) = w(x, 0) = w(x, L_y) = 0, \\ \partial^2/\partial x^2 [w(0,y)] = \partial^2/\partial x^2 [w(L_x, y)] = \\ = \partial^2/\partial y^2 [w(x,0)] = \partial^2/\partial x^2 [w(x, L_y)] = 0. \end{gathered}$$

Исходные данные: размеры $L_x = 1; L_y = 1$; число разбиений по каждой координате $N_x = N_y = 10$; точность $\varepsilon = 10^{-5}$; коэффициент $D = 1$; плотность сил $q(x,y) = 1$. Решение задачи находится посредством метода конечных разностей и минимизации методом покоординатного спуска рассматриваемого интегрального функционала. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

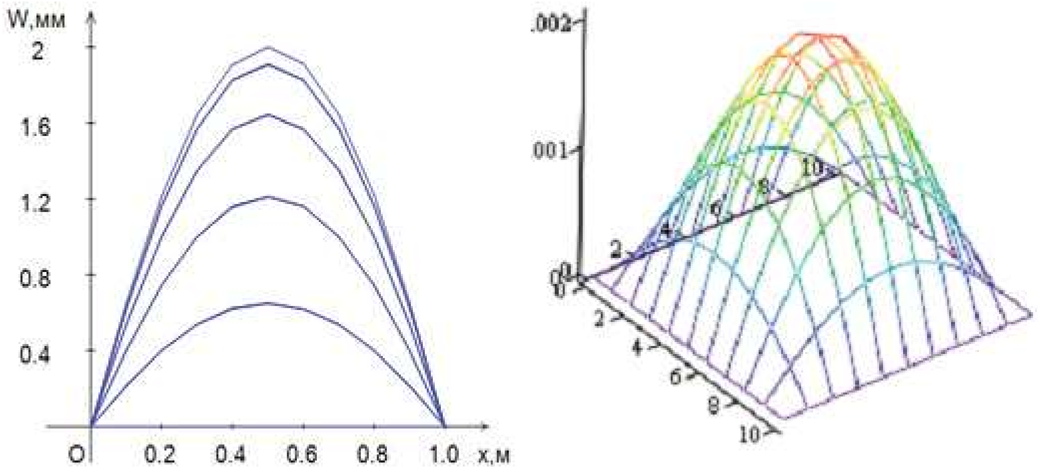


Рис. 3. Графики функции прогибов пластины $W(x,y)$, $y = 0, h, \ldots, L$ (слева). Трехмерный график функции прогибов (справа)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М. : Наука, 1970. 512 с.

[2] *Розин Л. А.* Вариационные постановки смешанных задач теории упругости в форме наименьших квадратов // Изв. вузов. Строительство. № 8. 1999. С. 22–28.

[3] *Галанин М. П.; Савенков Е. Б.* Методы численного анализа моделей М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 591 с. (Математическое моделирование в технике и технологии).

[4] *Игнатьев А. В.* Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 1 // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 37–57.

[5] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1988. 552 с.

УДК 517.9

ДВУСТОРОННИЕ МЕТОДЫ МАГНИТОСТАТИКИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА

Т. Р. Арутюнян (Москва, Россия)
tigran_201094@mail.ru

Рассмотрены двусторонние методы расчета магнитного поля, основанные на применении к уравнениям электромагнитного поля в терминах скалярного потенциала вариационного метода множителей Лагранжа. Получены сопряженные уравнения для разных критериев оптимальности (как для равномерной, так и среднеквадратической метрики). Рассмотрено решение задачи расчета двусторонних оценок решения при расчете статического магнитного поля в ферромагнетике, помещенном в стороннее равномерное магнитное поле. Полученные результаты могут использоваться также при решении прямых и обратных задач для системы ферромагнитных тел и в тестовых задачах при использовании других методов.Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: уравнения магнитостатики, двусторонний метод, магнитные потенциалы, вариационный метод, множители Лагранжа.

TWO-SIDED METHODS OF MAGNETOSTATIC BASED ON THE VARIATIONAL APPROACH

T. R. Harutyunyan (Moscow, Russia)
tigran_201094@mail.ru

Two-sided methods of magnetic field calculation based on the application of the Lagrange multipliers variational method to the electromagnetic field equations in terms of scalar potential are considered. Conjugate equations for different optimality criteria (both for uniform and mean square metrics) are obtained. The solution of a problem of calculation of bilateral estimates of the solution at calculation of a static magnetic field in the ferromagnet placed in a third-party uniform magnetic field is considered. The obtained results can also be used in solving direct and inverse problems for the system of ferromagnetic bodies and in test problems using other methods.Bibliography 4 the name.

Keywords: magnetostatic equations, Two-sided method, magnetic potentials, variational method, Lagrange multipliers.

Рассмотрим задачу магнитостатики [1,2]. Материал с магнитными свойствами занимает объем V. Намагниченность связана с индукцией и напряженностью согласно соотношению: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{B}/\mu_0 - \overrightarrow{H}$. В немагнитной среде $\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{H}$, в ферромагнетике $\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{H}+\overrightarrow{M})$, где μ - удельная магнитная проницаемость определяется кривой намагничивания $\mu = \mu(\overrightarrow{B})$, в воздухе, изоляционных материалах и шинах $\mu = \mu_0$, Гн/м. Определим скалярный магнитный потенциал: $\overrightarrow{H} = -\nabla\phi$. На бесконечности потенциал равен нулю. Если магнитная проницаемость ферромагнитного материала многов выше проницаемости воздуха, то краевая задача (КЗ) может быть разбита на две: в воздухе решается уравнение Лапласа для потенциала при нулевом краевом условии на границе ферромагнетика и заданных источниках поля: $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}_{ex} - \nabla v_{ex}$, $\overrightarrow{H}_{ex} = -\nabla v_{ex}$,

$$\Delta v = 0, (x, y) \in C(D + \Gamma); v = -v_{ex}(x, y) \in \Gamma = \partial D, \tag{1}$$

В объеме ферромагнитного тела решается КЗ 2-го типа для потенциала при заданной плотности магнитного потока сквозь границу объема:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(H)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(H)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \quad (x,y)\in D; \tag{2}$$

$$\mu(H)\frac{\partial u}{\partial n}=\mu_0\frac{\partial v}{\partial n}, \quad (x,y)\in\Gamma; \tag{3}$$

$$u(0,0)=0, \quad \overrightarrow{H}=-\nabla u. \tag{4}$$

Требуется решить уравнения (1)–(4) с учетом погрешности задания кривой намагничивания:

$$\mu=\mu(H)\in(\mu^-(H),\mu^+(H)), \quad w_0=\mu^+(H)-\mu^-(H), \tag{5}$$

предположим требуется найти оценку решения КЗ снизу (сверху):

$$u(x_0,y_0)\to\min(\max), \quad \mu=\mu(H)\in(\mu^-(H),\mu^+(H)),$$

Подобные задачи для ОДУ решались в литературе [3]. Функционал Лагранжа рассматриваемой задачи имеет вид, согласно [2, 4]:

$$\begin{gathered}L=\int\int_D w(x_N,y_N)\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\mu(|\nabla_N u|)\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial y_N}\left(\mu(|\nabla_N u|)\frac{\partial u}{\partial y_N}\right)\right)dx_N dy_N+\\ +\int_\Gamma w_1(x_N,y_N)\left(\mu(|\nabla_N u|)\frac{\partial u}{\partial n_N}-\mu_0\frac{\partial v}{\partial n_N}\right)d\Gamma_N+w_2u(0,0)+\\ +\int\int_D u(x_N,y_N)\delta(x_N-x_0,y_N-y_0)dx_N dy_N=0, \quad (x,y)\in D.\end{gathered}$$

Первый интеграл в данном функционале преобразуется к виду

$$\int_\Gamma w(x_N,y_N)\ \mu_0\frac{\partial v}{\partial n_N}d\Gamma_N-\int\int_D \mu(|\nabla_N u|)\nabla_N u\nabla_N w dx_N dy_N=0.$$

Для решения задачи вычисляется вариация по функции u и находится уравнение экстремалей функционала. Соответствующие верхней (нижней) оценке решения значения находятся из условия экстремума функционала Лагранжа: $L\to\max(\min)$, для всех $\mu(|\nabla u|)$ из допустимого множества (5). Экстремальное значение достигается, если магнитная характеристика описывается выражением

$$\mu^*=\mu^0(|\nabla u|)(1-0.5\omega(|\nabla u|)\operatorname{sign}(\nabla u\nabla p)).$$

Сопряженное уравнение имеет вид:

$$div\left(\mu^*(|\nabla u|)\nabla p + H^{-1}\frac{d\mu^*}{dH}(\nabla u \nabla p)\nabla u\right) +$$
$$+\delta(x - x_0, y - y_0) - \delta(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Если требуется оценить не равномерную, а среднеквадратическую погрешность, например

$$\|u - u^0\|_{L_2(D)} \to \min(\max),$$

то сопряженное уравнение имеет вид:

$$div\left(\mu^*(|\nabla u|)\nabla p + H^{-1}\frac{d\mu^*}{dH}(\nabla u \nabla p)\nabla u\right) + C_0(u - u^0) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

КЗ решались конечно-разностным методом на неравномерной сетке. Уравнения системы МКР приводятся к виду, удобному для применения итерационного метода релаксации и Зейделя. Итерации оканчиваются, если имеет место совпадение требуемого количества знаков в числовых значениях приближений. Эффективность метода проверена при решении на ЭВМ модельной задачи двусторонней оценки решения уравнений магнитостатики в объеме призматического ферромагнита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Блох Ю. И.* Теоретические основы комплексной магниторазведки. М. : МГГА, 2012. 160 с.

[2] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М. : Наука, 1978. 832 с.

[3] *Рогалев А.Н.* Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 86–94.

[4] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1988. 552 с.

УДК 517.9

НЕВЫПУКЛАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

М. В. Балашов (Москва, Россия)
balashov73@mail.ru

Рассматривается задача минимизации невыпуклой в общем случае функции с непрерывным по Липшицу градиентом на вещественном компактном многообразии без края. Обсуждаются условия ограничения ошибки в указанной задаче, которые могут заменить условие выпуклости. В качестве примера многообразий рассмотрены вещественном многообразии Штифеля или Грассмана. Многобразие Штифеля рассматривается как вложение в пространство матриц. Многобразие Грассмана рассмотрено как вложение в пространство симметричных матриц. В этой ситуации доказана проксимальная гладкость многообразия Штифеля с константой 1 и многообразия Грассмана с константой $1/\sqrt{2}$ в Фробениусовской норме. Получены достаточные условия сходимости метода проекции градиента в определенных случаях. Получены формулы для вычисления метрической проекции на указанные многообразия для точек, достаточно близких к многообразию (не далее константы проксимальной гладкости).

Ключевые слова: невыпуклая оптимизация, условие ограничения ошибки, проксимальная гладкость, гладкое многообразие, многообразие Штифеля, многообразие Грассмана.

NONCONVEX OPTIMIZATION ON SMOOTH MANIFOLDS[1]

M. V. Balashov (Moscow, Russia)
balashov73@mail.ru

The problem of minimization for a nonconvex in general function with Lipschitz continuous gradient on a smooth manifold without egde is considered. Error bound conditions which can replace the convexity condition are discussed in this problem. As an example of manifolds the real Stiefel or Grassmann manifolds are considered. The Stiefel manifold is embedded in a matrix space. The Grassmann manifold is embedded in a space of symmetric matrices. Proximal smoothness of the Stiefel manifold with constant 1 and the Grassmann manifold with constant $1/\sqrt{2}$ in the Frobenius norm is proved in this situation. Sufficient conditions of convergence for the gradient projection algorithm are obtained in certain cases. Formulas for calculating the metric projection onto considered manifolds for sufficiently close points (not further than proximal smoothness constant) are obtained.

Keywords: nonconvex optimization, error bound condition, proximal smoothness, smooth manifold, Stiefel manifold, Grassnmann manifold.

Рассмотрим задачу

$$\min_S f(x), \tag{1}$$

где S — компактное гладкое многообразие без края, а функция f имеет липшицев градиент f' с константой $L_1 > 0$. Мы будем предполагать, что S задаётся системой $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$. Для матрицы Якоби $g'(x) = \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i=1\ldots m, j=1\ldots n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ранг $\operatorname{rank} g'(x) = m$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-11-10015).
[1]The article is done with the financial support of RSF (project № 16-11-10015).

для всех $x \in S$. Определим $\varrho_S(X) = \varrho(x, S) = \inf\limits_{a \in S} \|x - a\|$ — расстояние от точки x до множества S. Мы будем предполагать проксимальную гладкость S [1,2] с константой $R > 0$. Последнее эквивалентно тому, что для каждой точки $x \in U_S(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varrho_S(x) < R\}$ существует единственная метрическая проекция $P_S x$ на множество S, которая непрерывна по $x \in U_S(R)$.

Пусть Ω — множество стационарных точек в (1), т.е. $\Omega = \{x_* \in S \mid f'(x_*) \in -N(S, x_*)\}$. Для проксимально гладкого множества в качестве $N(S, x_*)$ можно понимать любой нормальный конус (они все совпадают). Рассмотрим алгоритм поиска стационарной точки в задаче (1), а также точек минимума.

Обычно при решении задачи (1) используются шаги метода проекции градиента, ассоциированные с геодезическими на многообразии S [3].

Мы предлагаем подход [4, 5], в котором метод проекции градиента записывается в стандартном виде

$$x_0 \in S, \qquad x_{k+1} = P_S(x_k - tf'(x_k)), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{G}_t(x) = \frac{1}{t}(x - P_S(x - tf'(x)))$, $x \in S$, — градиентное отображение [6], а $P_{T_x} f'(x)$ — проекция $f'(x)$ на касательное подпространство T_x ко множеству S в точке $x \in S$, т.е.

$$P_{T_x} f'(x) = \left(I_n - g'(x)^T \left(g'(x) g'(x)^T\right)^{-1} g'(x)\right) f'(x),$$

I_n — единичная $n \times n$ матрица.

Рассмотрим некоторые условия *ограничения ошибки:* существует такое $\mu > 0$, что $\mu \varrho_\Omega(x) \le \|P_{T_x} f'(x)\|$ (будем называть это условие *касательное ограничение ошибки* или tEB) или $\mu \varrho_\Omega(x) \le \|\mathcal{G}_t(x)\|$ для всех $x \in S$ (будем называть это условие *градиентное ограничение ошибки* или gEB). Условие tEB предложил А. Тремба.

Свойства tEB и gEB позволяют получить сходимость метода проекции градиента со скоростью геометрической прогрессии в ряде случаев.

Пусть в задаче $\min\limits_{x \in Q} f(x)$ выполнено условие gEB и Ω есть множество глобальных минимумов функции f на множестве $Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x_0)\}$, где $x_0 \in Q$. В работе [5] доказано, что если множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ проксимально гладкое с константой $R > 0$ (Q не обязательно является многообразием), а функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ липшицева с константой L_0 и ее градиент f' липшицев с константой L_1, то при выборе $0 < t \le \frac{1}{L_1 + \frac{3L_0}{R}}$ метод проекции градиента (2) для задачи $\min\limits_{x \in Q} f(x)$ с начальным условием x_0 сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Пусть в задаче (1) множество Ω есть множество глобальных минимумов функции f на множестве $S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$, где $x_0 \in S$. В работе [4] для гладкого и проксимально гладкого многообразия $S \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n-1$ предложен алгоритм в духе метода проекции градиента: $z_k = x_k + tP_{T_{x_k}} f'(x_k)$, $x_{k+1} = P_S z_k$. При выборе $0 < t \leq \frac{1}{L_1 + \frac{2L_0}{R}}$ и выполнении условия Лежанского-Поляка-Лоясевича [4], т.е.

$$\exists \mu > 0: \ \mu(f(x) - f(\Omega)) \leq \|P_{T_x} f'(x)\|^2, \quad \forall x \in S,$$

которое эквивалентно условию gEB, указанный метод также сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Аналогичный алгоритм можно предложить и в случаем многообразия S любой размерности.

Рассмотрим $z = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ и $F(z) = \begin{pmatrix} f'(x) + g'(x)^T \lambda \\ g(x) \end{pmatrix}$. Пусть $\lambda(x) = -\left(g'(x)g'(x)^T\right)^{-1} g'(x)f'(x)$ для всех $x \in S$. Заметим, что $f'(x) + g'(x)^T \lambda(x) = P_{T_x} f'(x)$ для всех $x \in S$.

Центральным моментом является следующий результат.

Теорема 3. *Пусть в задаче (1) функции f и g дважды непрерывно дифференцируемы и вторые производные имеют липшицев градиент. Пусть множество стационарных точек Ω конечно и в каждой из точек $x_0 \in \Omega$ матрица*

$$F'_z(x_0, \lambda(x_0)) = \begin{pmatrix} f''(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i(x_0) g''_i(x_0) & g'(x_0)^T \\ g'(x_0) & 0 \end{pmatrix}$$

невырождена. Тогда выполнено tEB: существует такое число $\mu > 0$, что

$$\mu \varrho(x, \Omega) \leq \|P_{T_x} f'(x)\| \qquad \forall x \in S.$$

Доказательство. В невырожденной задаче множество стационарных точек конечно ($\Omega = \{x_j\}_{j=1}^{J}$). Это легко доказать от противного. Заметим также, что функция $S \ni x \to \lambda(x)$ липшицева, обозначим её константу Липшица через L_λ.

По определению стационарных точек $F(x_j, \lambda(x_j)) = 0$ для всякого $x_j \in \Omega$. Тогда из дифференцируемости $F(z)$ по формуле Тейлора имеем для любого $j \in \{1, \ldots, J\}$ при $\varrho \to +0$ асимптотическое равенство

$$F_x(x) = F(x, \lambda(x)) - F(x_j, \lambda(x_j)) = F'(x_j, \lambda(x_j)) \begin{bmatrix} x - x_j \\ \lambda(x) - \lambda(x_j) \end{bmatrix} + o_j(\varrho),$$

где $\varrho = \sqrt{\|x - x_j\|^2 + \|\lambda(x) - \lambda(x_j)\|^2} \leq \|x - x_j\|\sqrt{1 + L_\lambda^2}$.

Пусть $\sigma_0 > 0$ удовлетворяет условию $\|F'(x_j, \lambda(x_j))^{-1}\| \leq \sigma_0, \ j = 1, ..., J$. По теореме Банаха об обратном операторе это эквивалентно условию

$$\|F'(x_j, \lambda(x_j))h\| \geq \frac{1}{\sigma_0}\|h\|, \ \ \forall h \in \mathbb{R}^{n+m}, \ j = 1, ..., J.$$

Выберем число $\ell > 0$ настолько малое, что для всех $j = 1, ..., J$ и $h \in \mathbb{R}^{n+m}, \ \|h\| \leq \ell$, выполняется $\|o_j(\|h\|)\| \leq \frac{1}{2\sigma_0}\|h\|$.

Зафиксируем $x \in S$, $\rho(x, \Omega) \leq \frac{\ell}{\sqrt{1+L_\lambda^2}}$. Используя разложение Тейлора относительно *ближайшей* к x стационарной точки x_j с учетом $\varrho \leq \|x - x_j\|\sqrt{1 + L_\lambda^2} \leq \ell$ имеем

$$\|F_x(x)\| \geq \left\| F'(x_j, \lambda(x_j)) \begin{bmatrix} x - x_j \\ \lambda(x) - \lambda(x_j) \end{bmatrix} \right\| - \|o_j(\varrho)\| \geq \frac{1}{\sigma_0}\varrho - \frac{1}{2\sigma_0}\varrho = \frac{1}{2\sigma_0}\varrho$$
$$\geq \frac{1}{2\sigma_0}\|x - x_j\| = \frac{1}{2\sigma_0}\rho(x, \Omega).$$

Таким образом, выполняется условие tEB

$$\|P_{T_x} f'(x)\| = \|F_x(x)\| \geq \mu\rho(x, \Omega), \quad \forall x \in \cup_{j=1}^J \mathrm{int} B_r(x_j), \tag{3}$$

где $\mu = 1/(2\sigma_0)$, $r = \frac{\ell}{\sqrt{1+L_\lambda^2}}$.

На оставшемся компактном множестве $S_1 = \left\{ x \in S : \rho(x, \Omega) \geq \frac{\ell}{\sqrt{1+L_\lambda^2}} \right\}$ функция $F_x(x)$ непрерывная, и, в силу отсутствия в S_1 стационарных точек, $\|F_x(x)\| > 0$ для всех $x \in S_1$. По теореме Вейерштрасса существует число $b > 0$ такое, что $\|F_x(x)\| \geq b > 0$ для всех $x \in S_1$. Посокольку $\mathrm{diam}\, S = \sup_{x,y \in S} \|x - y\| \geq \rho(x, \Omega)$, то

$$\|F_x(x)\| \geq b \geq \frac{b}{\mathrm{diam}\, S}\rho(x, \Omega), \ \ \forall x \in S : \rho(x, \Omega) > \frac{\ell}{\sqrt{1 + L_\lambda^2}}. \tag{4}$$

Комбинируя неравенства (3) и (4), получаем условие tEB на всём множестве S:

$$\|F_x(x)\| \geq \min\left\{\frac{1}{2\sigma_0}, \frac{b}{\mathrm{diam}\, S}\right\}\rho(x, \Omega), \ \ \forall x \in S.$$

□

Будем называть задачу (1) невырожденной, если выполнены условия теоремы 3. Например, условие теоремы выполнено для квадратичной функции $f(x) = (x, \Lambda x)$ на единичной евклидовой сфере, $\Lambda =$

$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, $\lambda_i < \lambda_j$ для всех $i < j$, с $\mu = \min\limits_{1 \le i \ne j \le n} |\lambda_i - \lambda_j|$, а также, более общо, для квадратичной функции на многообразии Штифеля $S_{n,k} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times k} \mid X^T X = I_k\}$, $k \le n$ [7].

Заметим, что условие невырожденности задачи не обязательно для выполнения условия tEB. Пусть функция $x \to \lambda(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности множества S вида $U_S(\delta)$, $\delta > 0$, и существует такое число $\mu > 0$, что для любой точки $x_* \in \Omega$ выполнено условие

$$\left\| F'_z(x_*, \lambda(x_*)) \begin{pmatrix} I_n \\ \lambda'(x_*) \end{pmatrix} h \right\| \ge \mu \|h\|, \quad \forall h \in T_{x_*} \subset \mathbb{R}^n.$$

Тогда в соответствующей задаче (1) выполнено условие tEB. Доказательство повторяет доказательство теоремы 3. Заметим, однако, что обратимость матрицы $F'(x, \lambda(x))$ в точках $x \in \Omega$ полезна, например, для применения метода Ньютона.

Условия tEB и gEB эквивалентны. Покажем, что условие tEB влечет условие gEB. Действительно, пусть $x \in S$, $x_1 = P_S(x - tf'(x))$. Тогда известно, что $\|P_{T_{x_1}} f'(x_1)\| \le (1 + L_1 t)\, \|\mathcal{G}_t(x)\|$ [4, стр. 7]. Отсюда

$$\varrho(x, \Omega) - \|x - x_1\| \le \varrho(x_1, \Omega) \le \frac{1}{\mu} \|P_{T_{x_1}} f'(x_1)\| \le \frac{1 + tL_1}{\mu} \|\mathcal{G}_t(x)\|,$$

$$\varrho(x, \Omega) \le \left(\frac{1 + tL_1}{\mu} + t \right) \|\mathcal{G}_t(x)\|.$$

Рассмотрим применение полученных результатов в случае многообразий Штифеля и Грассмана. Мы ограничимся вопросами оценки константы проксимальной гладкости для указанных многообразий и формулами для нахождения метрической проекции.

Мы можем вычислить наибольшую константу проксимальной гладкости для этих многообразий. Многообразие Штифеля определено выше, а многообразие Грассмана можно определить по формуле $G_{n,k} = \{XX^T \mid X \in S_{n,k}\}$ [8]. Заметим, что многообразие Грассмана вложено (в определенном смысле изометрично) в пространство симметричных $n \times n$ матриц $Sym(n)$.

Далее мы будем рассматривать указанные реализации многообразий $S_{n,k}$ и $G_{n,k}$ в соответствующих евклидовых пространствах $\mathbb{R}^{n\times k}$ и $Sym(n)$ со скалярным произведением $(X, Y) = \mathrm{tr} X^T Y$, $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$, и соответствующей Фробениусовской нормой $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$.

Из [9, Proposition 7] вытекает, что многообразие Штифеля проксимально гладкое с константой $R = 1$ во Фробениусовской норме. При этом $P_{S_{n,k}}X = UI_{n,k}V^T$, где $I_{n,k} = (I_k \vdots 0)^T \in \mathbb{R}^{n\times k}$, а $X = U\Sigma V^T$ — сингулярное разложение матрицы X. Здесь $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times k}$, а U и V ортогональные матрицы соответствующих размеров.

Пусть $X \in S_{n,k}$. Тогда $X = U\Sigma V^T$, $U \in O(n)$, $V \in O(k)$, $\Sigma = (I_k \vdots 0)^T \in \mathbb{R}^{n\times k}$ (сингулярное разложение). Таким образом, любой элемент $XX^T \in G_{n,k}$ может быть представлен в ввиде

$$XX^T = UZU^T, \qquad Z = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Теорема 4. *Пусть $Y \in Sym(n)$ и $Y = W^T\Lambda W$, $W \in O(n)$, $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ со свойством $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$, то есть $\lambda_k > \lambda_{k+1}$. Тогда метрическая проекция $P_{G_{n,k}}Y = \{W^TZW\}$.*

Доказательство. Легко проверить, что для произвольной ортогональной матрицы $Q \in O(n)$ ($Q \in O(k)$) и для произвольной матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ выполнено равенство $\|QX\| = \|X\|$ ($\|XQ\| = \|X\|$). Отсюда следует, что

$$\|W^T\Lambda W - UZU^T\| = \|\Lambda - WUZU^TW^T\| = \|\Lambda - QZQ^T\|.$$

Положим $Q = WU$. Из равенства $\|\Lambda - QZQ^T\|^2 =$

$$\|\Lambda\|^2 + \|QZQ^T\|^2 - 2(\Lambda, QZQ^T) = \|\Lambda\|^2 + k - 2(\Lambda, QZQ^T)$$

мы получаем, что метрическая проекция матрицы Y на $G_{n,k}$ реализуется для таких матриц $Q \in O(n)$, которые дают максимум выражения

$$(\Lambda, QZQ^T) = \operatorname{tr} \Lambda QZQ^T = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \sum_{i=1}^{k} Q_{mi}^2,$$

т.е. когда $\sum\limits_{i=1}^{k} Q_{mi}^2 \leq 1$ для всех m и $\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k} Q_{mi}^2 = k$. Следовательно максимум (Λ, QZQ^T) достигается *тогда и только тогда* когда матрица $Q \in O(n)$ такая, что $\sum\limits_{i=1}^{k} Q_{mi}^2 = 1$ для всех $1 \leq m \leq k$ (напомним, что $\lambda_1 \geq \dots \lambda_k > \lambda_{k+1} \geq \dots \lambda_n$). Таким образом, равенство $\max_Q(\Lambda, QZQ^T) = \sum\limits_{m=1}^{k} \lambda_m$ имеет место только для матриц вида $Q = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с компонентами $S \in O(k)$, $F \in O(n-k)$. Из предыдущих рассуждений имеем $\varrho_{G_{n,k}}(Y) = \min_Q \|\Lambda - QZQ^T\| = \left\| \Lambda - \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} S^T & 0 \\ 0 & F^T \end{pmatrix} \right\| =$ $\|\Lambda - Z\|$. Выбирая $U = W^T \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ для всех $S \in O(k)$ и $F \in O(n-k)$ мы получаем $\varrho_{G_{n,k}}(Y) = \|W^T \Lambda W - W^T Z W\|$. Следовательно $W^T Z W \in P_{G_{n,k}} Y$. Предположим $Y = W^T \Lambda W$, $W \in O(n)$, и $U^T Z U \in P_{G_{n,k}} Y$ для некоторой $U \in O(n)$. Тогда $\varrho_{G_{n,k}}(Y) = \|\Lambda - QZQ^T\|$ для $Q = WU^T =$ $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ для некоторых $S \in O(k)$ и $F \in O(n-k)$. Из равенства $W = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} U$ мы получаем $W^T Z W = U^T Z U$.

Предположим, что $Y = W^T \Lambda W = W_1^T \Lambda_1 W_1$, Λ и Λ_1 — диагональные матрицы, верхний-левый $k \times k$ и правый-нижний $(n-k) \times (n-k)$ блоки матрицы Λ_1 состоят из тех же собственных значений, что и соответствующие блоки Λ (но взятых в другом порядке); $W, W_1 \in O(n)$. Аналогично с предыдущими рассуждениями легко показать, что $W_1^T Z W_1 = W^T Z W$. Следовательно $P_{G_{n,k}} Y$ одноточечно. □

Дальнейшие результаты были доказаны вместе со студентом Р. Камаловым.

Заметим, что для матрицы $Y \in \mathrm{Sym}(n)$ со свойством $\varrho_{G_{n,k}}(Y) = \|\Lambda - Z\| < 1/\sqrt{2}$ мы получаем $\Lambda = \mathrm{diag}\{1+\varepsilon_1, \dots, 1+\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots \varepsilon_n\}$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 < \frac{1}{2}$. Для всех i, j имеем $\varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2 < \frac{1}{2}$, $1 + \varepsilon_i > 0$ и

$$(1+\varepsilon_i)^2 - \varepsilon_j^2 = 1 + 2\varepsilon_i + 2\varepsilon_i^2 - (\varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2) > 1 + 2\varepsilon_i + 2\varepsilon_i^2 - \frac{1}{2} \geq 0.$$

Следовательно, $1 + \varepsilon_i = |1 + \varepsilon_i| > |\varepsilon_j| \geq \varepsilon_j$ для всех $1 \leq i \leq k$, $j \geq k+1$. В силу предыдущих рассуждений множество $P_{G_{n,k}} Y$ одноточечно. Итак, для всякого $Y \in \mathrm{Sym}(n)$ с $\varrho_{G_{n,k}}(Y) < 1/\sqrt{2}$ существует единственная метрическая проекция $P_{G_{n,k}} Y$. Значит, $G_{n,k}$ проксимально гладкое множество с константой $R = 1/\sqrt{2}$.

Рассмотрим $\Lambda = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1 \text{ раз}}, 1/2, 1/2, 0, \dots 0\} \in \mathrm{Sym}(n)$. Для блочно-диагональной матрицы $Q(\varphi)$, состоящей из блоков I_{k-1}, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $(\varphi \in [0, 2\pi))$ и I_{n-k-1} мы получаем, что $P(\varphi) =$

$Q(\varphi)ZQ^T(\varphi) =$

$$= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

даёт равенство $\|\Lambda - P(\varphi)\| = 1/\sqrt{2}$. Поэтому константа $R = 1/\sqrt{2}$ неулучшаема (нельзя увеличить). $\square$

Мы хотим обратить внимание на то, что рассмотренное вложение многообразия Грассмана в пространство $\mathrm{Sym}(n)$ не единственно возможное и другие вложения (см. детали в [8]) могут давать иные оценки для константы проксимальной гладкости R.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Vial J.-Ph.* Strong and weak convexity of sets and functions. // Mathematics of Operations Research. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

[2] *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal smoothness and lower–C^2 property. // J. Convex Anal. 1995. Vol. 2, № 1-2. P. 117–144.

[3] *Edelman A., Arias T. A., Smith S. T.* The geometry of algorithms with orthogonality constraints. // J. Matrix Anal. Appl. 1998. Vol. 20, № 2. P. 303–335.

[4] *Balashov M., Polyak B., Tremba A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization. 2019. arXiv:1906.11580.

[5] *Балашов М. В.* Метод проекции градиента для проксимально гладкого множества и функции с непрерывным по Липшицу градиентом. // В печати.

[6] *Nesterov Yu.* Introductory lectures on convex optimization. A basic course basic course. Springer, 2004.

[7] *Liu H., Wu W., So A. M.-Ch.* Quadratic Optimization with Orthogonality Constraints: Explicit Lojasiewicz Exponent and Linear Convergence of Line-Search Methods. 2015. arXiv:1510.01025.

[8] *Conway J. H., Hardin R. H., Sloane N. J. A.* Packing Lines, Planes, etc.: Packings in Grassmannian Spaces // Experimental Mathematics. 1996. Vol. 5. P. 139–159.

[9] *Absil P.-A., Malick J.* Projection-like retraction on matrix manifolds // SIAM J. OPTIM. 2012. Vol 22, № 1. P. 135–158.

УДК 517.518.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВОИЧНЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

И. С. Баранова (Москва, Россия)
irarinoka@gmail.com

Рассмотрено орторекурсивное разложение в пространстве дважды интергируемых на отрезке функций. Приведены асимптотические формулы для коэффициентов орторекурсивного разложения по системе характеристических функций двоичных промежутков в случаях дифференцируемых функций и функций, имеющих в исследуемой точке разрыв 1-го рода.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, двоичные интервалы, асимптотика.

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE COEFFICIENTS OF ORTHORECURSIVE EXPANSIONS IN A SYSTEM OF INDICATORS OF DYADIC INTERVALS

I. S. Baranova (Moscow, Russia)
irarinoka@gmail.com

An orthorecursive expansion in the space of square-integrable functions on an interval is considered. Asymptotic formulas are given for the coefficients of orthorecursive expansion in the system of indicators of dyadic intervals in the cases of differentiable functions and functions having a discontinuity of the first kind at the point under study.

Keywords: orthorecursive expansion, dyadic intervals, asymptotics.

Введение

Орторекурсивные разложения [1, 2] представляют собой естественное обобщение классических разложений в ряды Фурье по ортогональным системам, применимое в случае переполенных систем. Орторекурсивные разложения по конкретным системам рассматривались в работах [1, 2, 4–6], общие свойства орторекурсивных разложений — в работах [2, 3, 7, 8].

Определение орторекурсивных разложений в общем случае приведено в работе [2]. Рассмотрим частный случай.

Пусть $H = L_2[0,1]$ — пространство вещественных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[0,1]$, со скалярным произведением $(f,g)_2 = \int_{[0,1]} f(t)g(t)dt$. Зададим систему $\{\chi_k\}$ характеристических функций двоичных отрезков: для каждого $k = 2^n + j$ ($n \in \mathbb{Z}^+$, $j \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$)

$$\Delta_k = \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right],\ \chi_k(x) = \begin{cases} 1, x \in \Delta_k; \\ 0, x \notin \Delta_k. \end{cases}$$

При этом отрезки и соответствующие им функции делятся на группы (пачки) по номеру n и каждая следующая пачка отрезков получается из предыдущей делением отрезков пачки пополам.

Орторекурсивные разложения по системам характеристических функций промежутков рассматривались в работе [2], по обобщениям таких систем — в работе [4]. В соответствии с результатами [3] орторекурсивное разложение по системе характеристических функций двоичных промежутков абсолютно устойчиво к погрешностям в вычислении коэффициентов и к возмущениям самой системы.

Пусть функция $f \in L_2[0,1]$. Коэффициенты и остатки ее орторекурсивного разложения по системе $\{\chi_k\}$ имеют следующий вид:

1) $\hat{f}_1 = \frac{1}{|\Delta_1|} \int\limits_{\Delta_1} f dt,\ r_1(f) = f - \hat{f}_1\chi_1;$

2) $\hat{f}_{n+1} = \frac{1}{|\Delta_{n+1}|} \int\limits_{\Delta_{n+1}} r_n(f) dt,\ r_{n+1}(f) = f - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \hat{f}_k\chi_k.$

Для произвольной фиксированной точки x_0 из интервала (0,1), не являющейся двоично-рациональной (т.е. $x_0 \neq \frac{q}{2^k}$, $q, k \in \mathbb{Z}^+$), и для любого номера $n \in \mathbb{Z}^+$ обозначим через $c_n^f(x_0)$ коэффициент разложения f по той функции n-й пачки, носитель которой содержит x_0, т.е.

$$c_n^f(x_0) = \hat{f}_{2^n+s},\ \text{где } 0 \leqslant s < 2^n,\ \frac{s}{2^n} < x_0 < \frac{s+1}{2^n}.$$

Представленные в настоящей работе результаты устанавливают связь между свойствами функции f вблизи точки x_0 и свойствами последовательности $\{c_n^f(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$.

Для их формулировки потребуется ввести ряд дополнительных обозначений, характеризующих положение точки x_0 относительно двоично-рациональных точек отрезка $[0,1]$.

Для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ обозначим через I_n отрезок из n-й пачки, содержащий x_0. Для $n \geqslant 1$ обозначим $\widehat{I_n} = I_{n-1} \setminus I_n$. Заметим, что отрезок I_n всегда является одной из половин отрезка I_{n-1}.

Далее, для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ через через $d_n(x_0)$ обозначим разность между серединой отрезка I_n и точкой x_0, а через $q_n(x_0)$ — ближайшую к x_0 точку вида $\frac{m}{2^n}$ ($m \in \{0, \ldots, 2^n\}$). Такой точкой всегда будет являться один из концов отрезка I_n. Также обозначим $p_n(x_0) = x - q_n(x_0)$. При этом $p_n(x_0) \in (-2^{-n-1},\ 2^{-n-1})$. Введем еще одну величину:

$$P_n(x) = 2^n p_n(x) = \frac{p_n(x)}{|I_n|} \in (-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}).$$

Для получения представленных ниже результатов были использованы несколько вспомогательных утверждений. Наиболее содержательным из них представляется следующее.

Лемма *При каждом $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула*

$$c_n^f(x_0) = 2^{n-1}\left(\int\limits_{I_n} - \int\limits_{\widehat{I}_n}\right) f(t)dt.$$

Из полученной формулы явно видно, что значения $c_n^f(x_0)$ зависят от значений функции f на стягивающейся к точке x_0 системе отрезков. Таким образом, становится естественным предположение о связи между свойствами этой последовательности и локальными (вблизи точки x_0) свойствами функции f.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть f — один из представителей класса эквивалентных функций из $L_2[0,1]$ и $f \in D^k(x_0)$, $k \geq 1$, $f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Тогда с точностью до $o(2^{-kn})$ при $n \to \infty$ величина $c_n^f(x_0)$ зависит только от положения точки x_0 и значения $f^{(k)}(x_0)$, а именно:*

$$c_n^f(x_0) = 2^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} g_k(n, x_0) + o(2^{-nk}),\ n \to \infty,$$

где $g_k(n, x_0) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{I_n} - \int\limits_{\widehat{I}_n}\right)(x - x_0)^k dx =$

$$= -\tfrac{\operatorname{sgn}(d_{n-1}(x_0))}{k+1} \sum_{\substack{s \text{ четное} \\ 2 \leq s \leq k+1}} C_{k+1}^s 2^{-ns} d_{n-1}^{k+1-s}(x_0).$$

В частности,

$$c_n^f(x_0) \sim -\operatorname{sgn}(d_{n-1}(x_0)) \frac{f'(x_0)}{2} 2^{-n},\ n \to \infty,\ \text{при } k = 1.$$

Теорема 2. *Пусть f — один из представителей класса эквивалентных функций из $L_2[0,1]$ и существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ функции f в точке x_0, $\delta = f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$, т.е. функция f имеет в точке x_0 разрыв 1-го рода с величиной скачка $\delta \neq 0$ или при $\delta = 0$ непрерывна в точке x_0 либо имеет в ней устранимый разрыв. Тогда с* *точностью до* $o(1)$, $n \to \infty$, *величина* $c_n^f(x_0)$ *зависит только от положения точки* x_0 *и величины скачка, а именно:*

$$c_n^f(x_0) = P_{n-1}(x_0)\delta + o(1),\ n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Об орторекурсивних разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 83.

[2] *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Математ. Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

[3] *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 1. С. 3–16.

[4] *Галатенко В. В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 7. С. 21–36.

[5] *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 707–720.

[6] *Кудрявцев А. Ю.* О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 4. С. 49–64.

[7] *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2010. № 3. С. 3–7.

[8] *Политов А. В.* Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 3. С. 637–640.

УДК 517.5

О КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ

В. А. Беднаж (Брянск, Россия)
vera.bednazh@mail.ru

В статье получено описание корневых множеств и факторизационное представление функций из класса $N_s(C_+)$, $s \geq 2$.

Ключевые слова: верхняя полуплоскость, голоморфные функции, корневые множества.

ON ROOT SETS OF ONE CLASS OF ANALYTICAL IN THE HALF-PLANE OF THE FUNCTIONS

V. A. Bednazh (Bryansk,Russia)
vera.bednazh@mail.ru

The article provides a complete description of the root sets and factorization representation of functions from classes $N_s(C_+)$, $s \geq 2$.

Keywords: upper half-plane, holomorphic functions, root sets.

Для изложения основных результатов, полученных в работе, введем следующие обозначения. Пусть C — комплексная плоскость, $C_+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, $H(C_+)$ — множество голоморфных в C_+ функций,

$$B_p(\zeta, \zeta_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2y_k(i+\zeta)}{i(i+\zeta_k)(\overline{\zeta_k} - \zeta)}\right) \cdot \exp \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{p} \left(\frac{2y_k(i+\zeta)}{i(i+\zeta_k)(\overline{\zeta_k} - \zeta)}\right)^p$$

- бесконечное произведение типа Вейерштрасса, $\{\zeta_k\}$ — произвольная последовательность точек из C_+ , для которой $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(\operatorname{Im} \zeta_k)^{p+1}}{|\zeta_k + i|^{2(p+1)}} < +\infty$.

Скажем, что функция из класса $N_s(C_+)$, $s \geq 2$, если она голоморфна в C_+ и удовлетворяет условию

$$N_s(C_+) = \left\{ f \in H(C_+) : \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |f(x+iy)|}{1 + |x+iy|^{2s}} \, dx \, dy < +\infty \right\},$$

где $ln^+|a| = \max(ln|a|, 0)$.

Исследование свойств корневых множеств и построение факторизационных представлений привлекло внимание классиков комплексного анализа ещё в начале прошлого столетия. В этой связи отметим классические работы К. Вейерштрасса, Ж. Адамара, Ф. Бореля, Е. Линделёфа, О. Пикара и других о нулях целых функций, имеющих заданный рост вблизи бесконечно удалённой точки, а также работы Р. Неванлинна и В. Н. Смирнова о внешне-внутренней факторизации классов Харди и классов функций ограниченного вида в единичном круге. Эти вопросы остаются в центре внимания и современных авторов, для этого достаточно отметить работы М. М. Джрбашяна, Б. Я. Левина, Л. А. Рубеля, Ф. А. Шамояна и других математиков. Эти результаты изложены в хорошо известных монографиях Р. Неванлинны [3], И. И. Привалова [4], П. Кусиса [2], Д. Гарнета [1].

В работе получено полное описание корневых множеств функций из класса $N_s(C_+)$, $s \geq 2$. В частности, устанавливаются следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $z_k = iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *причём* $y_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) существует функция $f \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$ *такая, что* $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f(z) \neq 0$ *при* $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $\sum\limits_{y_k \geq 1} \frac{1}{y_k^{2(s-1)}} < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\{y_k\}$ *— произвольная последовательность неотрицательных чисел,* $0 < y_k \leq 1$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) существует функция $f \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$ *такая, что* $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f(z) \neq 0$ *при* $z \neq iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} y_k^{2(s-1)} < +\infty$.

Для рассматриваемого класса голоморфных функций получена следующая теорема о факторизации.

Теорема 3. *Пусть* $f \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$, *предположим* $f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f(z) \neq 0$ *при* $z \neq iy_k$, $k = 1, 2, \ldots$ *Тогда функцию* $f(z)$ *можно представить в виде* $f(z) = B_p(z, y_k) \cdot g(z)$, *где* $g \in N_s(C_+)$, $s \geq 2$, $g(z) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции М. : Мир, 1984. 469 с.

[2] *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p М. : Мир, 1984. 368 с.

[3] *Неванлинна Р.* Граничные свойства аналитических функций М. : ИМГИТТЛ, 1941. 388 с.

[4] *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитические функции М. : ГИТТЛ, 1950. 336 с.

[5] *Шамоян Ф. А.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеризация ну-лей аналитических функций с мажорантой конечного роста // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978 Т. 13, № 5 С. 405–422.

УДК 517.982.256

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЧЕБЫШЁВСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ, ИМИ ЗАДАВАЕМЫХ В $L_1[0,1]^n$[1]

Б. Б. Беднов (Москва, Россия)
noriiii@inbox.ru

В комплексном пространстве $L_1[0,1]^n$ исследуется существование и единственность элемента наилучшего приближения в замыкании линейной оболочки экспонент со спектром из решётки в $\mathbb{Z}^n$.

Ключевые слова: пространство L_1, чебышёвское множество, периодические функции.

ON PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND TCHEBYSHEV SUBSPACES DEFINED BY THEM IN $L_1[0,1]^n$[1]

B. B. Bednov (Moskow, Russia)
noriiii@inbox.ru

There are investigated existense and uniqueness of the best approximation element in the closure of the linear shell of exponents with a spectrum from the sublattice of $\mathbb{Z}^n$ in complex space $L_1[0,1]^n$.

Keywords: complex L_1 space, Tchebyshev sets, periodic functions.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Подпространство $Y \subset X$ называется подпространством существования, если для каждого $x \in X$ найдётся такой элемент $y \in Y$, что $\|x-y\| = \inf_{z \in Y} \|x-z\|$. Любой такой элемент y для x называется ближайшим в Y, или элементом наилучшего приближения. Подпространство $Y \subset X$ называется подпространством единственности, если для каждого $x \in X$ существует не более одного элемента наилучшего приближения в Y. Подпространство $Y \subset X$ называется чебышёвским (в X), если Y есть и подпространство существования, и подпространство единственности в X, то есть для каждого $x \in X$ существует и единствен элемент наилучшего приближения в Y.

В 1940 году Дуб [1] доказал, что пространство Харди H_1 является чебышёвским подпространством в пространстве комплекснозначных суммируемых на $[0,1]$ функций $L_1[0,1]$.

Обозначим $Y_\Lambda = \overline{\langle e^{2\pi i \lambda \mathbf{t}} \rangle}_{\lambda \in \Lambda}$ — замыкание линейной оболочки комплексных экспонент $e^{2\pi i \lambda \mathbf{t}}$ со спектром показателей λ из некоторого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ — подпространство из пространства $L_1[0,1]^n$ комплекснозначных функций n действительных переменных, суммируемых на $[0,1]^n$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 18-01-00333) и Программой Президента РФ “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ 6222.2018.1).

[1]This article is supported of RFBR (project № 18-01-00333) and Program of President RF “Leading scientific schools RF” (grant НШ 6222.2018.1).

Напомним, что пространство Харди H_1 изометрически изоморфно подпространству $\overline{\langle e^{2\pi int}\rangle}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_1[0,1]$.

В 1974 году Кахан [2] описал все чебышёвские подпространства Y_Λ в $L_1[0,1]$.

Теорема A ([2]). *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Подпространство Y_Λ чебышёвское в $L_1[0,1]$ тогда и только тогда, когда Λ — бесконечная (хотя бы в одну сторону) арифметическая прогрессия с нечетной разностью.*

Обобщением бесконечной арифметической прогрессии из $\mathbb{Z}$ (из теорем Дуба и Кахана) на множество в $\mathbb{Z}^n$ является подрешетка из $\mathbb{Z}^n$.

Пусть Λ — все целочисленные линейные комбинации n целочисленных векторов $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$, то есть $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n$ при $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$, $\omega_j \in \mathbb{Z}^n$, $j = 1, \ldots, n\}$. Такое множество Λ мы будем называть решёткой, или подрешёткой $\mathbb{Z}^n$. Число $\det T = |\det(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)|$ называется определителем решётки T и не зависит от выбора базиса решётки T (см., напр. [3, гл.1]). Подрешётка Λ задаёт подпространство $Y_\Lambda = \overline{\langle e^{2\pi i\lambda\mathbf{t}}\rangle}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве $L_1[0,1]^n$.

Полярная решётка T^* (вообще говоря, не из $\mathbb{Z}^n$) к решётке T это решётка, состоящая из всех таких векторов γ^*, что для каждого $\gamma \in T$ скалярное произведение (γ^*, γ) есть целое число. При этом $\det T \det T^* = 1$ (см., напр. [3, гл.1, §5]).

Напомним, что функция $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется периодической, если $\phi(\mathbf{x}+\tau) = \phi(\mathbf{x})$ при $\tau \in T$, где T — решётка в $\mathbb{R}^n$, называемая решёткой периодов функции $\phi(\mathbf{x})$.

При линейно независимых $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$ решётке $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ соответствует подпространство Y_Λ — подпространство периодических функций с решёткой периодов Λ^*.

Заметим, что решётке Λ с нулевым определителем соответствует подпространство Y_Λ, не являющееся подпространством единственности в $L_1[0,1]^n$.

Теорема. *Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{Z}^n$, $\Lambda = \Lambda(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Подпространство Y_Λ чебышёвское в $L_1[0,1]^n$ тогда и только тогда, когда* $\det\Lambda$ *нечётен.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Doob J. L.* A minimum problem in the theory of analytic functions // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, № 3. P. 413–424.

[2] *Kahane J. P.* Best approximation in $L^1(T)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, № 5. P. 788–804.

[3] *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. М. : Мир, 1965. 420 с.

УДК 512.643.8

СВЕРТОЧНЫЕ МАТРИЦЫ

М. С. Беспалов (Владимир, Россия)
bespalov@vlsu.ru

Введено понятие полициркулянтных матриц. Известное утверждение о собственных числах и векторах циркулянтной матрицы перенесено на полициркулянтные.

Ключевые слова: циркулянтная матрица, свертка, дискретное преобразование Фурье, дискретное преобразование Уолша, кронекерово произведение.

CONVOLUTIONAL MATRICES

M. S. Bespalov (Vladimir, Russia)
bespalov@vlsu.ru

The concept of polycirculant matrices is introduced. We show that the well-known result about eigenvalues and eigenvectors of a circulant matrix is also valid for a polycirculant matrix.

Keywords: circulant matrix, convolution, discrete Fourier transform, discrete Walsh transform, Kronecker product.

Введение

При цифровой обработке информации [1] дискретный сигнал в виде вектора a кодируют с помощью дискретного ортогонального преобразования анализа $A = \mathcal{F}[a]$, а декодируют обратным оператором синтеза $a = \mathcal{F}^{-1}[A]$, которое запишем в матричном виде $a = A \cdot F$ для сигналов a и A в виде строк. Условие ортогональности преобразований состоит в требовании ортогональности строк матрицы F (или F^{-1}) относительно эрмитова дискретного скалярного произведения $< a, b >= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \overline{b_k}$.

1. Основные определения и понятия

Основным примером такого оператора синтеза служит (обратное) дискретное преобразование Фурье (ДПФ) с матрицей

$$F_N = \left(\omega^{kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}, \qquad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}. \tag{1}$$

Умышленно взяли в качестве основного для исследования обратное ДПФ, так как прямое ДПФ, заданное комплексно-сопряженной матрицей $\overline{F_N} = \left(\omega^{-kj}\right)_{k,j=0}^{N-1}$, выглядит несколько сложнее.

Обозначим $H = F_2$ матрицу ДПФ (1) второго порядка. Следующим примером такого оператора служит дискретное преобразование Уолша

(ДПУ) в нумерации Адамара с матрицей $H_n = H^{n\otimes}$ в виде кронекеровой степени матрицы H. Эта матрица действительная. Дальнейшим обобщением служат комплекснозначные матрицы дискретного преобразования Крестенсона (ДПК) в виде кронекеровой степени других ДПФ: $F_p^{n\otimes}$. Следующим обобщением служит оператор дискретного преобразования Виленкина (ДПВ) с матрицей в виде кронекерова произведения различных ДПФ

$$F = F_{p_n} \otimes F_{p_{n-1}} \otimes \ldots \otimes F_{p_2} \otimes F_{p_1}, \tag{2}$$

которую будем называть матрицей n-го уровня. Так как формула (2) включает все предыдущие случаи, то о ней и пойдет речь.

Для выбранного набора целых чисел $\{p_k\}_{k=1}^n$ через разложения чисел $k, j \in M = \{0, 1, 2, \ldots, m_n - 1\}$ в смешанной системе счисления

$$k = \sum_{s=1}^{n} k_s m_{s-1}, \quad \text{где } m_0 = 1,\ m_k = m_{k-1} p_k, \quad 0 \leq k_s < p_s,$$

вводим групповую операцию

$$t = k \oplus j = \sum_{s=1}^{n} t_s m_{s-1}, \quad \text{где } t_s = (k_s + j_s) \pmod{p_s},$$

обратную к которой обозначим $\ominus$.

Дискретные периодические сигналы будем классифицировать и соответственно называть (уровня n) в зависимости от того, относительно какой групповой операции $\oplus$ и какого дискретного преобразования эти сигналы рассматриваются:

1) при $N = p$ имеем периодический сигнал относительно ДПФ;
2) при $N = 2^n$ имеем *диадический* сигнал относительно ДПУ;
3) при $N = p^n$ имеем *p-адический* сигнал относительно ДПК;
4) при $N = m_n$ имеем *полиадический* сигнал относительно ДПВ.

Определение 1. *Дискретной групповой сверткой* сигналов выбранного типа называется сигнал $c = a * b$, отсчеты которого

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{k \ominus j}.$$

Определение 2. *Полициркулянтной* назовем матрицу $[a]$, построенную по сигналу a, с элементами

$$[a]_{ij} = a_{j \ominus i}.$$

Понятие уровня переносится с сигнала на полициркулянтную матрицу. Полициркулянтная матрица уровня 1 это известная [2] циркулянтная матрица для периодического сигнала.

2. Основные утверждения

Утверждение 1. *Дискретная групповая свертка двух сигналов в матричном виде равна произведению строки одного на полициркулянтную матрицу другого:* $a * b = a \cdot [b] = b \cdot [a]$.

Утверждение 2. *ДПВ дискретной групповой свертки равно произведению (по Адамару) ДПВ исходных сигналов:*

$$\mathcal{F}[a * b] = \mathcal{F}[a] \circ \mathcal{F}[b].$$

Следствие 1. *ДПВ произведения (по Адамару) сигналов, помноженное на порядок сигнала* N*, равно дискретной групповой свертке ДПВ этих сигналов:*

$$N\mathcal{F}[a \circ b] = \mathcal{F}[a] * \mathcal{F}[b].$$

Столбцы симметричной матрицы (2) обозначим φ_k (при нумерации с нуля) и назовем дискретными функциями Виленкина. Их легко перенумеровать в порядке $\overline{\varphi_k}$. Следующая теорема служит обобщением известного [2] результата для циркулянтных матриц.

Теорема 1. *Для любой полициркулянтной матрицы* $[x]$ *собственными векторами служат дискретные функции Виленкина* $\overline{\varphi_k}$*, отвечающими собственным числам* $c_k =< x, \varphi_k >$.

Следствие 2. *Полициркулянтная матрица* $[x]$ *диагонализируется преобразованием подобия с матрицей ДПВ* (2)*:*

$$D = \frac{1}{N} F \cdot [x] \cdot \overline{F},$$

где $D = \operatorname{diag}(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$.

Следствие 3. *Спектральное разложение полициркулянтной матрицы*

$$[x] = \frac{1}{N} \overline{F} \cdot D \cdot F,$$

где F *вида* (2)*,* $D = \operatorname{diag}(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$*,* $c_k =< x, \varphi_k >$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Малоземов В. Н., Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.

[2] *Davis P. J.* Circulant matrices. N. Y. : Wiley Publ. 1979. 304 p.

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ОБЩЕГО ВИДА[1]

Н. П. Бондаренко (Самара, Саратов, Россия)
bondarenkonp@info.sgu.ru

Рассматривается матричный оператор Штурма – Лиувилля на конечном интервале с условием Дирихле в одном конце интервала и самосопряженным краевым условием общего вида в другом. Изучены свойства собственных значений и весовых матриц этого оператора.

Ключевые слова: спектральный анализ, матричный оператор Штурма – Лиувилля, асимптотика собственных значений, асимптотика весовых матриц.

SPECTRAL ANALYSIS OF THE MATRIX STURM – LIOUVILLE OPERATOR WITH THE SELF-ADJOINT BOUNDARY CONDITION IN THE GENERAL FORM[1]

N. P. Bondarenko (Samara, Saratov, Russia)
bondarenkonp@info.sgu.ru

The matrix Sturm-Liouville operator on a finite interval with the Dirichlet boundary condition at the first end of the interval and with the general self-adjoint boundary condition at the second one is considered. For this operator, properties of the eigenvalues and of the weight matrices are studied.

Keywords: spectral analysis, matrix Sturm-Liouville operator, eigenvalue asymptotics, asymptotics of weight matrices.

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения Штурма – Лиувилля

$$\begin{gathered} -Y''(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in (0, \pi), \\ Y(0) = 0, \quad V(Y) := T(Y'(\pi) - HY(\pi)) - T^{\perp}Y(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

которую будем обозначать через $L = L(Q(x), T, H)$. Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=1}^m$ — вектор-функция, $Q(x) = [q_{jk}(x)]_{j,k=1}^m$ — матрица-функция размера $m \times m$ с элементами q_{jk} из класса $L_2(0, \pi)$, λ — спектральный параметр, T, $T^{\perp}$ и H — константные $m \times m$-матрицы, причем T — ортогональный проектор, $T^{\perp} = I - T$, где I — единичная матрица. При условиях $Q(x) = Q^*(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, $H = H^*$, краевая задача L является самосопряженной.

---

[1]Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-00009).

[1]The article is prepared in Saratov State University with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 19-71-00009).

Отметим, что в следующем частном случае

$$Q(x) = \operatorname{diag}\{q_j(x)\}_{j=1}^m, \quad T = [T_{jk}]_{j,k=1}^m, \quad T_{jk} = \frac{1}{m}, \quad j,k = \overline{1,m},$$
$$H = hT, \quad h \in \mathbb{R},$$

задача L превращается в задачу Штурма–Лиувилля на графе-звезде:

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad x \in (0,\pi), \quad j = \overline{1,m},$$
$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1,m},$$
$$y_j(\pi) = y_m(\pi), \quad j = \overline{1,m-1}, \qquad \sum_{j=1}^m (y_j'(\pi) - hy_j(0)) = 0.$$

Дифференциальным операторам на графах посвящена обширная литература (см., например, [1, 2]).

В данной работе изучены свойства собственных значений и весовых матриц задачи L. Эти спектральные характеристики играют важную роль в теории обратных спектральных задач (см. [3]).

Обозначим $p := \operatorname{rank} T$, тогда $\operatorname{rank} T^\perp = m - p$. Для определенности будем считать, что $1 \le p < m$. Введем обозначения

$$\Omega := \frac{1}{2}\int_0^\pi Q(x)\,dx,$$
$$P_1(z) := z^{p-m}\det(zI - T(\Omega - H)T), \quad P_2(z) := z^{-p}\det(zI - T^\perp H T^\perp).$$

Нетрудно показать, что $P_1(z)$ и $P_2(z)$ — многочлены степеней p и $(m-p)$ соответственно. Все корни этих многочленов вещественные. Обозначим через $\{z_k\}_{k=1}^p$ корни $P_1(z)$ и через $\{z_k\}_{k=p+1}^m$ — корни $P_2(z)$ с учетом кратностей и в порядке неубывания: $z_k \le z_{k+1}$, $k = \overline{1,p-1}$ и $k = \overline{p+1,m-1}$.

Теорема 1. *Спектр задачи L представляет собой счетное множество собственных значений, которые можно пронумеровать как $\{\lambda_{nk}\}_{n\in\mathbb{N},\, k=\overline{1,m}}$ с учетом кратностей в порядке неубывания: $\lambda_{n_1,k_1} \le \lambda_{n_2,k_2}$, если $(n_1,k_1) < (n_2,k_2)$. При этом для $\rho_{nk} := \sqrt{\lambda_{nk}}$ выполняются асимптотические формулы*

$$\rho_{nk} = n - \frac{1}{2} + \frac{z_k}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nk}}{n}, \quad k = \overline{1,p},$$
$$\rho_{nk} = n + \frac{z_k}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nk}}{n}, \quad k = \overline{p+1,m},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\{\varkappa_{nk}\} \in l_2$.

Решением Вейля называется матричное решение $\Phi(x,\lambda) = [\Phi_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^m$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям $\Phi(0,\lambda) = I$, $V(\Phi) = 0$. Матрица-функция $M(\lambda) := \Phi'(0,\lambda)$ называется *матрицей Вейля*. Она мероморфна в λ-плоскости, все ее особенности являются простыми полюсами и совпадают с собственным значениями задачи L. Введем *весовые матрицы*: $\alpha_{nk} := -\mathop{Res}_{\lambda=\lambda_{nk}} M(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,m}$.

Рассмотрим в последовательности $\{\lambda_{nk}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=\overline{1,m}}$ произвольную максимальную по включению группу кратных собственных значений $\lambda_{n_1,k_1} = \lambda_{n_2,k_2} = \ldots = \lambda_{n_r,k_r}$, $(n_j,k_j) < (n_{j+1},k_{j+1})$, $j = \overline{1,r-1}$. Очевидно, $\alpha_{n_1,k_1} = \alpha_{n_2,k_2} = \ldots = \alpha_{n_r,k_r}$. Введем обозначения $\alpha'_{n_1,k_1} := \alpha_{n_1,k_1}$, $\alpha'_{n_j,k_j} := 0$, $j = \overline{2,r}$. В итоге мы получили последовательность $\{\alpha'_{nk}\}_{n\in\mathbb{N},\,k=\overline{1,m}}$.

Обозначим

$$\alpha_n^I := \sum_{k=1}^{p} \alpha'_{nk}, \quad \alpha_n^{II} := \sum_{k=p+1}^{m} \alpha'_{nk},$$

$$\alpha_n^{(s)} := \sum_{\substack{k=1\\ z_k=z_s}}^{p} \alpha'_{nk},\ s = \overline{1,p}, \qquad \alpha_n^{(s)} := \sum_{\substack{k=p+1\\ z_k=z_s}}^{m} \alpha'_{nk},\ s = \overline{p+1,m}.$$

Теорема 2. *Весовые матрицы эрмитовы и неотрицательно определены: $\alpha_{nk} = \alpha_{nk}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,m}$. Ранги весовых матриц совпадают с кратностями соответствующих собственных значений. Справедливы асимптотические формулы*

$$\alpha_n^I = \frac{2(n-1/2)^2}{\pi}\left(T + \frac{K_n}{n}\right), \quad \alpha_n^{II} = \frac{2n^2}{\pi}\left(T^{\perp} + \frac{K_n}{n}\right),$$
$$\alpha_n^{(s)} = \frac{2n^2}{\pi}(A^{(s)} + K_n), \quad s = \overline{1,m},$$

где $A^{(s)}$ — константные матрицы, формулы для них приведены в [4]. Обозначение $\{K_n\}$ используется для различных матричных последовательностей, таких что $\{\|K_n\|\} \in l_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S., Kuchment P.* Quantum Graphs and Their Applications, Contemp. Math. 415. Providence : AMS, 2006. 307 p.

[2] *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П.,Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах М. : Физматлит, 2005. 272 с.

[3] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2005. 384 с.

[4] *Bondarenko N. P.* Spectral data asymptotics for the matrix Sturm–Liouville operator. 2019. https://arxiv.org/abs/1909.03810.

УДК 517.547.22

ОБ ИНДИКАТОРАХ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С КОРНЯМИ НУЛЕВОЙ НИЖНЕЙ ПЛОТНОСТИ, ЛЕЖАЩИМИ НА ЛУЧЕ[1]

Г. Г. Брайчев (Москва, Россия)
braichev@mail.ru

Для целой функции нецелого порядка с отрицательными корнями, имеющими нулевую нижнюю плотность, приводятся точные оценки индикаторов роста. В некоторых случаях даются точные формулы для вычисления индикаторов.

Ключевые слова: целая функция, индикатор и нижний индикатор роста, верхняя и нижняя плотности корней.

ON INDICATORS OF AN ENTIRE FUNCTION WITH ROOTS ZERO LOWER DENSITY, LYING ON A RAY[1]

G. G. Braichev (Moscow, Russia)
braichev@mail.ru

For an entire function of non-integer order with negative roots having zero lower density, accurate estimates of the growth indicators are given. Some subclasses provide exact formulas for indicators.

Keywords: entire function, indicator and lower growth indicator, upper and lower density of roots.

Введение

Стандартными характеристиками роста целой функции $f(z)$, описывающими ее поведение на лучах $\arg z=\theta$ комплексной плоскости, являются ее индикатор и нижний индикатор при порядке $\rho>0$:

$$h_\rho(f,\theta)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{r^\rho},$$

$$\underline{h}_\rho(f,\theta)=\sup_{E_0}\ \varliminf_{r\to+\infty,\, r\notin E_0}\ \frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{r^\rho}, \qquad \theta\in[-\pi,\pi].$$

Супремум во второй формуле берется по всем множествам нулевой относительной меры (см. [1]).

Мы устанавливаем связь этих характеристик целой функции с ростом ее корней. Считаем, что все корни расположены на одном (отрицательном) луче, т. е. $\Lambda=\Lambda_f=(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, где

$$0>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n\geqslant\ldots, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=-\infty.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-01-00236).)

Скорость стремления корней к бесконечности характеризуется верхней и нижней ρ-плотностями

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}\,, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}\,. \tag{1}$$

В случае, когда последовательность (отрицательных) корней $\Lambda = \Lambda_f$ целой функции $f(z)$ нецелого положительного порядка ρ является измеримой, т. е. когда $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, известна следующая точная формула для вычисления индикаторов (см. [1], [2]) :

$$h_\rho\,(f,\theta) = \underline{h}_\rho\,(f,\theta) = \frac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}\cos\rho\theta\,, \qquad \theta\in(-\pi,\,\pi).$$

Если же корни целой функции неизмеримы, т. е. $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) < \overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, то подобные формулы для индикаторов неизвестны. Мы восполняем этот пробел, приводя формулы и точные оценки индикаторов.

Основные результаты

Для формулировки результатов нам понадобятся дополнительные сведения. Используем интегральное представление, полученное в работе [2, теорема 7.2.1]. Запишем его в удобной для нас форме

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(r\tau)}{(r\tau)^\rho}\,K_p(\tau,\theta)\,d\tau, \qquad \theta\in(-\pi,\,\pi),$$

где $n(t) = n_\Lambda(t) = \max\{n : |\lambda_n| \leqslant t\}$ — считающая функция последовательности корней $f(z)$, $p = [\rho]$ — целая часть числа ρ, $\gamma = \{\rho\}$ — его дробная часть; ядро $K_p(\tau,\theta)$ имеет вид

$$K_p(\tau,\theta) = (-1)^p\,\frac{\tau^{\gamma-1}(\tau\cos(p+1)\theta + \cos p\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\,.$$

Пусть $\tau_\theta = -\dfrac{\cos p\theta}{\cos(p+1)\theta}$. Введем следующие множества.

$$\Gamma_p^{(+)} = \{\theta\in[0,\,\pi) :\ K_p(\tau,\theta) \geqslant 0 \text{ для всех } \tau\geqslant 0\}\,,$$

$$\Gamma_p^{(-)} = \{\theta\in[0,\,\pi) :\ K_p(\tau,\theta) \leqslant 0 \text{ для всех } \tau\geqslant 0\}\,.$$

В случае, когда $\tau_\theta > 0$, символом $\Gamma_p^{(\pm)}$ обозначаем множество тех значений $\theta\in[0,\,\pi)$, для которых $K_p(\tau,\theta)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку τ_θ, а символом $\Gamma_p^{(\mp)}$ — с минуса на плюс.

Далее считаем, что последовательность корней $\Lambda = \Lambda_f$ целой функции $f(z)$ подчинена дополнительным требованиям

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0, \qquad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \in (0,\, +\infty). \tag{2}$$

Сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0,\, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с отрицательными корнями, подчиненными требованию (2), и $p = [\rho]$. Тогда нижний индикатор функции $f(z)$ удовлетворяет неравенству*

$$\underline{h}_\rho\,(f,\theta) \leqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi,\, \pi),$$

причем $\underline{h}_\rho\,(f,\theta) \equiv 0$, $\theta \in \Gamma_p^{(+)}$.

Индикатор функции $f(z)$ удовлетворяет неравенству

$$h_\rho\,(f,\theta) \geqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi,\, \pi),$$

причем $h_\rho\,(f,\theta) \equiv 0$, $\theta \in \Gamma_p^{(-)}$.

Этот общий результат действует при любом фиксированном значении β. Для уточнения приведенных оценок потребуется еще одно определение. Запишем последовательность корней $f(z)$ в виде, учитывающем их кратности:

$$\Lambda = \Lambda_f: \quad 0 > \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n_1} > \lambda_{n_1+1} = \ldots = \lambda_{n_2} > \ldots .$$

Тогда формулы для плотностей (1) можно конкретизировать так

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}. \tag{3}$$

Будем говорить, что последовательность Λ полуизмерима (при заданном показателе $\rho > 0$), если ее верхняя (или нижняя) ρ-плотность задается обычным, а не верхним (соответственно, нижним) пределом в (2), т. е. если существует хотя бы один из пределов

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \qquad \text{или} \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0,\, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ с отрицательными корнями, подчиненными условию (2), и $p = [\rho]$. Тогда для нижнего индикатора и индикатора $f(z)$ верны точные оценки*

$$\underline{h}_\rho\,(f,\theta) \leqslant \beta \inf_{a>0} \left\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \right\}, \qquad \theta \in \Gamma_p^{(-)},$$

$$h_\rho(f,\theta) \geqslant \beta \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \right\}, \qquad \theta \in \Gamma_p^{(+)},$$

где величина $I_p(a,\theta)$ *задается формулой*

$$I_p(a,\theta) = \frac{1}{2} \ln\left(a^2 + 2a\cos\theta + 1\right) + \sum_{n=1}^{p} (-1)^n \frac{a^n}{n} \cos n\theta.$$

Если дополнительно известно, что последовательность корней функции $f(z)$ *полуизмерима, то эти оценки выполнены и для значений* $\theta \in \Gamma_p^{(\mp)} \cup \Gamma_p^{(\pm)}$.

Противоположные неравенства (следовательно, и равенства) справедливы для функций с быстрорастущими (по модулю) последовательностями корней Λ_f. Так называются последовательности, удовлетворяющие условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|} = \infty.$$

Следующая теорема дает формулы для вычисления индикаторов целых функций из выделенного класса.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *— целая функция порядка* $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ *с отрицательными быстрорастущими корнями конечной верхней* ρ*-плотности, равной* β. *Тогда для индикаторов* $f(z)$ *верны равенства*

$$\underline{h}_\rho(f,\theta) = \beta \inf_{a>0} \left\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \right\}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

$$h_\rho(f,\theta) = \beta \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} I_p(a,\theta) \right\}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi),$$

с величиной $I_p(a,\theta)$ *из теоремы 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

[2] *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation (Encyclopedia of mathematics and its applications; 27). Cambridge : Cambridge University Press, 1987. 494 p.

УДК 517.9

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ ИЗ ДВУХ РЕБЕР С ЦИКЛОМ[1]

М. Ш. Бурлуцкая, Я. П. Коржова (Воронеж, Россия)
bmsh2001@mail.ru

Методом Фурье получено классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с суммируемым потенциалом на простейшем геометрическом графе, состоящем из двух ребер, одно из которых образует цикл. Используется подход, базирующийся на методе контурного интегрирования резольвенты оператора, который позволяет с помощью специального преобразования формального ряда получить классическое решение задачи, и при этом избежать трудоемкого исследования уточненных асимптотик собственных значений и собственных функций соответствующего оператора.

Ключевые слова: смешанная задача, волновое уравнение, геометрический граф, метод Фурье.

MIXED PROBLEM FOR A WAVE EQUATION WITH INTEGRABLE POTENTIAL ON A TWO-EDGE GRAPH CONTAINING A CYCLE[1]

M. Sh. Burlutskaya, Ya. P. Korzhova (Voronezh, Russia)
bmsh2001@mail.ru

A mixed problem for a wave equation with integrable potential on a two-edge graph containing a cycle is considered. The approach used is based on the contour integration of the operator's resolvent. With the help of a special transformation of a formal series, a classical solution of the problem by the Fourier method is obtained. This approach makes it possible to do without an expensive analysis of improved asymptotics for the eigenvalues and eigenfunctions of the operator.

Keywords: mixed problem, wave equation, geometric graph, Fourier method.

Рассматривается смешанная задача для волнового уравнения на простейшим геометрическом графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, состоящем из двух ребер, одно из которых γ_1 образует цикл. При параметризации каждого ребра графа отрезком $[0,1]$, задача будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - Q(x)u(x,t), \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t), \quad u_2(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

[1]The article is done with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 19-11-00197 at Voronezh State University).

Здесь $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ (T — знак транспонирования), $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $Q(x) = \operatorname{diag}(q_1(x), q_2(x))$, $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Условия (2) обеспечивают непрерывность решения во внутреннем узле графа и неподвижное закрепление свободного конца на втором ребре. Условие (3) является частным случаем условий трансмиссии [1], нулевые значения для производных в (2) берутся для простоты.

Различные задачи для волнового уравнения на геометрических графах активно изучались: имеется достаточно много результатов в случае нулевого потенциала (см., например, [2–5]), исследовались задачи с привлечением теории обобщенных функций [6], а также с помощью описания дифференциального уравнения в терминах производных по мере [7], проводилось численное решение задач [8, 9].

Используя резольвентный подход (см., например, [10]), в [11] получено классическое решение смешанной задачи на графе из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа), в случае непрерывных потенциалов. При этом метод Фурье применялся с использованием идей по ускорению сходимости рядов, идущих от А.Н. Крылова, и позволяющих получать классическое решение при минимальных требованиях на начальные функции. Здесь рассматривается простейший граф иной конфигурации. Такие простейшие графы являются базовыми: наличие всего лишь двух ребер у графа упрощает техническую часть исследования, но позволяет понять трудности, возникающие при исследовании подобных задач. Так, в [12], где впервые на графе Γ исследовалась смешанная задача для уравнения с инволюцией, показано, что простейшим может быть только рассматриваемый граф (на графе без цикла или с двумя циклами постановка задачи для уравнения первого порядка оказывается некорректной [12]).

Исследуем задачу (1)–(2) в предположении, что $q_j(x) \in L[0,1]$ и комплекснозначны. Здесь используется техника работ [13, 14].

Классическим решением будем называть вектор-функцию $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$, компоненты которой абсолютно непрерывны вместе с первой производной по x и t, удовлетворяют граничным и начальным условиям (2)–(2), и удовлетворяют дифференциальному уравнению (1) лишь почти всюду.

По методу Фурье, полагая в задаче (1)–(2) $u_1(x,t) = T(t)y_1(x)$, $u_2(x,t) = T(t)y_2(x)$, придем к спектральной задаче для оператора

$$(Ly)(x) = \Big(-y_1''(x) + q_1(x)y_1(x),\ -y_2''(x) + q_2(x)y_2(x)\Big)^T,\ y = (y_1, y_2)^T,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0), \quad y_2(1) = 0, y_1'(0) - y_1'(1) + y_2'(0) = 0.$$

Через L_0 обозначаем оператор, который есть оператор L при $q_j(x) \equiv 0$.

Собственные значения оператора L_0 есть $\lambda_n^{(0k)} = (\rho_n^{(0k)})^2$, где $\rho_n^{(01)} = \pi n$, $\rho_n^{(02)} = b_1 + 2\pi n$, $\rho_n^{(03)} = b_2 + 2\pi n$, $\quad b_{1,2} = -i\ln((2 \pm \sqrt{5}i)/3)$ (под $\ln z$ понимается главное значение $\mathrm{Ln} z$, при $\arg z \in (-\pi; \pi])$. Собственные значения оператора L образуют три серии: $\lambda_n^{(k)} = (\rho_n^{(k)})^2$ с асимптотикой $\rho_n^{(k)} = \rho_n^{(0k)} + \varepsilon_n^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, где $\varepsilon_n^{(k)} = o(1)$, $n \geqslant n_0$, n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Схема резольвентного подхода с использованием идей А.Н. Крылова по ускорению сходимости ряда предполагает преобразование формального ряда, и разбиение его на сумму двух рядов $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$ (см., например, [10, теорема 2], [11, теорема 3]). Ряд $u_0(x,t)$ оказывается формальным рядом задачи, соответствующей задаче (1)–(2) с $q_j(x) = 0$ и $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_{\mu_0} g$ вместо $\varphi(x)$, и называемой эталонной (здесь μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0, $g = (L - \mu_0 E)\varphi)$. Возможность дифференцирования ряда $u_1(x,t)$ устанавливается за счет имеющихся оценок резольвент операторов L и L_0. При этом на $\varphi(x)$ накладываются следующие требования:

$$\begin{gathered} \varphi_j(x), \varphi_j'(x) \in AC[0,1], L\varphi \in L_2^2[0,1], \\ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_2(1) = 0, \quad \varphi_1'(0) - \varphi_1'(1) + \varphi_2'(0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 1. *При $q_j(x) = 0$ и $\widetilde{\varphi}(x) = R^0_{\mu_0} g$ вместо $\varphi(x)$ классическое решение задачи (1)–(2) существует и дается формулой*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}(F(x+t) + F(x-t)),$$

где вектор-функция $F(x)$ обладает следующими свойствами: $F(x)$ и $F'(x)$ абсолютно непрерывны при $x \in (-\infty, +\infty)$, $F''(x) \in L_2^2[-A, A]$, для любого $A > 0$, $F(x) = \tilde{\varphi}(x) = R^0_{\mu_0} g$ при $x \in [0,1]$, и $F(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} F_1(-x) = \frac{1}{3}[2F_1(1-x) + 2F_2(x) - F_1(x)], \\ F_2(-x) = \frac{1}{3}[2F_1(x) + 2F_1(1-x) - F_2(x)], \\ F_1(1+x) = \frac{1}{3}[2F_1(x) + 2F_2(x) - F_1(1-x)], \\ F_2(1+x) = -F_2(1-x). \end{gathered}$$

Теорема 2. *Если $q_j(x) \in L[0,1]$, вектор-функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (5), то сумма $u(x,t)$ формального решения является классическим решением задачи (1)–(2), когда уравнение (1) удовлетворяется почти всюду.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах М. : Физматлит, 2004. 272 с.

[2] *Провоторов В .В.* Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 105–126.

[3] *Прядиев В. Л.* Один подход к описанию конечной формы решения волнового уравнения на пространственной сети // Spectral and Evolution Problems: Proc. of the 15-th Crim. Autumn Math. School-Symposium. Sept. 17–29, 2004, Sevastopol, Laspi. Simferopol, 2005. Vol. 15. P. 132–139.

[4] *Коровина О. В., Прядиев В. Л.* Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 37–46.

[5] *Zvereva M.* A String Oscillations Simulation with Nonlinear Conditions // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2017. № 72. P. 141–150.

[6] *Провоторов В. В., Волкова А. С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж : Научная книга, 2014. 188 с.

[7] *Головко Н. И., Голованева Ф. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2017. № 1. С. 91–98.

[8] *Прядиев В. Л.* Численная схема решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети при обобщённо-гладких условиях трансмиссии // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2008. Т. 67, № 8/2. С. 195–202.

[9] *Найдюк Ф. О., Десятирикова Е. Н., Проскурина Д. К.* Численное решение задач о колебаниях // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2013. № 1. С. 55–60.

[10] *Бурлуцкая М. Ш. Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

[11] *Бурлуцкая М. Ш.* Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе // Докл. АН. 2015. Т. 465, № 5. С. 519–522.

[12] *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 479–482.

[13] *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.

[14] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–515.

УДК 517.984

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

С. А. Бутерин (Саратов, Россия)
buterinsa@info.sgu.ru

Рассматривается возмущение оператора Штурма – Лиувилля на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле оператором свертки. Известна локальная устойчивость и глобальная однозначная разрешимость обратной задачи восстановления сверточного ядра по спектру в предположении, что потенциал задан. В работе получена равномерная полная устойчивость данной обратной задачи, включающая равномерную оценку отклонений сверточного ядра через отклонения спектра и потенциала в пределах шаров любых фиксированных радиусов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальный оператор, нелокальный оператор, свертка, обратная спектральная задача, нелинейное интегральное уравнение, равномерная устойчивость, полная устойчивость.

UNIFORM FULL STABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS[1]

S. A. Buterin (Saratov, Russia)
buterinsa@info.sgu.ru

The perturbation of the Sturm–Liouville operator on a finite interval with Dirichlet boundary conditions by a convolution operator is considered. Local stability and global unique solvability of the inverse problem of recovering the convolution kernel from the spectrum, provided that the potential is given a priori, is known. In the present work, we establish uniform full stability of this inverse problem involving a uniform estimate of deviations of the convolution kernel via deviations of the spectrum and the potential within balls of any fixed radii.

Keywords: integro-differential operator, nonlocal operator, convolution, inverse spectral problem, nonlinear integral equation, uniform stability, full stability.

Введение

Наиболее полные результаты по обратным спектральным задачам известны для дифференциальных операторов (см., например, обзор в [1]). Для интегро-дифференциальных и других классов нелокальных операторов классические методы, которые позволяют получить глобальное решение обратной задачи, не работают. Одно из первых обстоятельных исследований обратной задачи для интегро-дифференциальных операторов было предпринято в [2], где изучалась краевая задача $\mathcal{L}(q, M)$ вида

$$-y''+q(x)y+\int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad 0<x<\pi, \quad y(0)=y(\pi)=0. \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).
[1]The work was made under the financial support of RFBR (project No. 20-31-70005).

Пусть $q(x)$, $M(x)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L_2(0,\pi)$, а $M(x) \in L_{2,\pi} := \{f(x) : (\pi - x)f(x) \in L_2(0,\pi)\}$. В [2] было установлено, что спектр $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ задачи (1) имеет вид

$$\lambda_n = n^2 + \omega + \varkappa_n, \quad \omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

но условие на $M(x)$ выглядело иначе, а именно, предполагалось, что

$$\left.\begin{array}{c} M_0(x) := (\pi - x)M(x),\ M_1(x) := \displaystyle\int\limits_0^x M(t)\,dt \in L(0,\pi), \\ Q(x) := M_0(x) - M_1(x) \in L_2(0,\pi). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Однако в силу теоремы Фубини $M_0(x) \in L(0,\pi)$ влечет $M_1(x) \in L(0,\pi)$. Кроме того, согласно лемме 2.4 в [3] условие (3) равносильно $M(x) \in L_{2,\pi}$, т.е. $M_0(x) \in L_2(0,\pi)$. В [2] исследовалась следующая обратная задача.

Задача 1. По заданному спектру $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ найти функцию $M(x)$ в предположении, что потенциал $q(x)$ известен априори.

При помощи аналога классического метода Борга (см., например, [1]), для этой обратной задачи была доказана теорема единственности и установлена ее *локальная* разрешимость и устойчивость. А именно, доказано, что для всякой задачи $\mathcal{L} := \mathcal{L}(q, M)$ со спектром $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ существует $\delta > 0$ (зависящее от $\mathcal{L}$), такое что для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geq 1}$, удовлетворяющей условию $\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2} \leq \delta$, существует (единственная) задача $\mathcal{L}(q, \tilde M)$, для которой последовательность $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geq 1}$ является спектром. При этом имеют место оценки

$$\|\hat M_k\|_1 \leq C_{\mathcal{L}}\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2}, \quad k = 0, 1, \quad \|\hat Q\|_2 \leq C_{\mathcal{L}}\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2}, \tag{4}$$

где $C_{\mathcal{L}}$ зависит только от $\mathcal{L}$. Здесь $\|\cdot\|_k := \|\cdot\|_{L_k(0,\pi)}$ и $\hat\gamma := \gamma - \tilde\gamma$.

Отметим, что с помощью леммы 2.4 в [3] нетрудно показать, что совокупность оценок (4) равносильна оценке $\|\hat M\|_{2,\pi} := \|\hat M_0\|_2 \leq \tilde C_{\mathcal{L}}\|\{\hat\lambda_n\}\|_{l_2}$.

Позднее в [4] иным методом была получена *глобальная* разрешимость задачи 1. А именно, было доказано, что для *любой* последовательности комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ вида (2) и комплекснозначной функции $q(x) \in L_2(0,\pi)$ существует (единственная) функция $M(x) \in L_{2,\pi}$, такая что $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ является спектром соответствующей краевой задачи $\mathcal{L}(q, M)$. Доказательство этого факта было основано на сведении обратной задачи к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению (см. ниже уравнение (9)) и доказательству его глобальной разрешимости в $L_{2,\pi}$. Ранее в [3] данное утверждение было установлено для частного случая $q(x) \equiv const$. Отметим, что случай произвольной функции $q(x) \in L_2(0,\pi)$ существенно труднее. Впоследствии развитие подхода, предложенного в [3] и [4], позволило получить глобальное решение обратных задач и для других классов интегро-дифференциальных операторов (см. [5–16] и литературу там). Чтобы облегчить доказательство разрешимости основного уравнения обратной задачи в каждом новом случае, в [17] был разработан общий подход к решению нелинейных уравнений такого типа и доказательству их равномерной устойчивости.

В настоящей работе развитием метода, предложенного в [4], получено следующее усиление устойчивости задачи 1, установленной в работе [2].

Теорема 1. *Для любого фиксированного* $r > 0$ *имеет место оценка*

$$\|M - \tilde{M}\|_{2,\pi} \le C_r(\|\{\varkappa_n - \tilde{\varkappa}_n\}\|_{l_2} + \|q - \tilde{q}\|_2), \tag{5}$$

коль скоро $\|\{\varkappa_n\}\|_{l_2} \le r$, $\|q\|_2 \le r$ *и* $\|\{\tilde{\varkappa}_n\}\|_{l_2} \le r$, $\|\tilde{q}\|_2 \le r$. *Здесь числа* $\varkappa_n$ *определены в (2), а числа* $\tilde{\varkappa}_n$ *определяются представлением*

$$\tilde{\lambda}_n = n^2 + \tilde{\omega} + \tilde{\varkappa}_n, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \tilde{q}(x)\,dx, \quad n \ge 1,$$

где $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n\ge1}$ *– спектр краевой задачи* $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\tilde{q}, \tilde{M})$.

Здесь и далее одним и тем же символом C_r обозначаются *различные* положительные константы в оценках, зависящие только от r.

Нетрудно показать, что оценка (5) влечет, в частности, оценки (4). Однако, в отличие от (4), оценка (5) является равномерной по спектрам и потенциалам обеих задач $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$. Кроме того, поскольку $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$ могут различаться, теорема 1 дает равномерную *полную* устойчивость задачи 1, т.е. равномерную устойчивость относительно полного набора входных данных. Заметим также, что метрика, используемая в правой части (5), в отличие от соответствующей метрики в (4), допускает различные средние значения ω и $\tilde{\omega}$. Также преимуществом примененного здесь подхода является нечувствительность доказательства теоремы 1 к возможной кратности спектра, тогда как в [2] для простоты спектр предполагался некратным. При этом обобщение метода Борга на случай кратного спектра является далеко не тривиальной и технически сложной задачей (см [18]). Отметим, что равномерная устойчивость классической обратной задачи Штурма–Лиувилля в самосопряженном случае была получена в [19] при дополнительном естественном ограничении, не позволяющем соседним собственным значениям слишком сильно сближаться друг с другом. Для задачи 1 подобное ограничение не требуется.

Схема доказательства теоремы 1

Пусть $y = S(x, \lambda)$ является решением уравнения в (1) при начальных условиях $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Собственные значения краевой задачи (1) совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda) := S(\pi, \lambda)$ с учетом кратностей, которая называется *характеристической функцией* задачи (1).

Лемма 1. *Положим $\rho^2 = \lambda$. Имеет место представление*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int\limits_0^x P(x,t;q,M)\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho}\,dt, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{6}$$

где $P(x,t) := P(x,t;q,M)$ непрерывна в треугольнике $0 \le t \le x \le \pi$. Кроме того, $P(x,\,\cdot\,) \in W_2^1[0,x]$, $x \in (0,\pi]$, $P(\,\cdot\,,t) \in W_2^1[t,\pi]$, $t \in [0,\pi)$, и

$$P(x,0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)\,dt, \quad P(x,x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{7}$$

Согласно лемме 1 характеристическая функция задачи (1) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} - \omega\pi\frac{\cos\rho\pi}{2\rho^2} + \int\limits_0^\pi v(x)\frac{\cos \rho x}{\rho^2}\,dx, \quad v(x) \in L_2(0,\pi). \tag{8}$$

При этом имеет место представление

$$-v(\pi - x) = R(\pi, x; q, M), \quad 0 < x < \pi, \tag{9}$$

где $R(x,t;q,M) = \frac{\partial}{\partial t}P(x,t;q,M)$. Кроме того, очевидно, что

$$\int\limits_0^\pi v(x)\,dx = \frac{\omega\pi}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(x)\,dx. \tag{10}$$

Известно, что всякая целая функция $\Delta(\lambda)$ вида (8) имеет бесконечное множество нулей вида (2) и определяется по ним однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi\prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{11}$$

Обратно, для любой последовательности $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ вида (2) функция $\Delta(\lambda)$, построенная по формуле (11), имеет вид (8) с некоторой функцией $v(x)$, удовлетворяющей условию (10), (см., например, лемму 3.3 в [3]).

На соотношение (9) можно смотреть, как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое называется *основным уравнением* обратной задачи. В [4] установлено, что для любых комплекснозначных функций $q(x)$, $v(x) \in L_2(0,\pi)$, удовлетворяющих условию (10), нелинейное уравнение (9) имеет единственное решение $M(x) \in L_{2,\pi}$. Также можно показать, что $\|M\|_{2,\pi} \le C_r$ для любого $r > 0$, если $\|v\|_2, \|q\|_2 \le r$.

Итак, решение задачи 1 находится с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 1. *Пусть задан спектр $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ и потенциал $q(x)$ некоторой краевой задачи $\mathcal{L}(q,M)$.*

1) В соответствии с (8) вычисляем функцию $v(x)$ по формуле

$$v(x) = \omega + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k^2\Delta(k^2) + (-1)^k\frac{\omega\pi}{2}\Big)\cos kx, \quad \omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt, \quad (12)$$

где функция $\Delta(\lambda)$ строится по формуле (11);

2) Находим функцию $M(x)$, как решение основного уравнения (9).

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать равномерную устойчивость обоих шагов алгоритма 1 в соответствующих метриках. При этом без ущерба для общности можно считать, что $\omega = 0$ и $\tilde\omega = 0$. Следующая теорема дает равномерную устойчивость шага 1).

Теорема 2. *Для всякого $r > 0$ имеет место оценка*

$$\|v - \tilde v\|_2 \le C_r\|\{\varkappa_n - \tilde\varkappa_n\}\|_{l_2},$$

коль скоро $\|\{\varkappa_n\}\|_{l_2} \le r$ и $\|\{\tilde\varkappa_n\}\|_{l_2} \le r$. Здесь функция $v(x)$ определяется формулами (11) и (12) при $\omega = 0$, тогда как

$$\tilde v(x) := \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\tilde\Delta(k^2)\cos kx, \quad \tilde\Delta(\lambda) = \pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde\lambda_n - \lambda}{n^2}, \quad \tilde\lambda_n = n^2 + \tilde\varkappa_n, \ n \ge 1.$$

Наконец, развитие идей работы [4] приводит к следующей теореме, дающей равномерную полную устойчивость основного уравнения (9).

Теорема 3. *Пусть $r > 0$ и $\|v(x)\|_2$, $\|\tilde v(x)\|_2$, $\|q(x)\|_2$, $\|\tilde q(x)\|_2 \le r$, причем выполняется условие (10), а также соответствующее условие для функций $\tilde v(x)$ и $\tilde q(x)$. Тогда имеет место оценка*

$$\|M - \tilde M\|_{2,\pi} \le C_r(\|v - \tilde v\|_2 + \|q - \tilde q\|_2),$$

где $M(x)$ — решение уравнения (9), а $\tilde M(x)$ — решением уравнения

$$-\tilde v(\pi - x) = R(\pi, x; \tilde q, \tilde M), \quad 0 < x < \pi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

[2] *Юрко В. А.* Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 134–146.

[3] *Buterin S. A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results Math. 2007. V. 50, № 3–4. P. 173–181.

[4] *Бутерин С. А.* О восстановлении сверточного возмущения оператора Штурма–Лиувилля по спектру // Дифф. уравнения 2010. Т. 46, № 1. С. 146–149.

[5] *Buterin S. A., Choque Rivero A. E.* On inverse problem for a convolution integro-differential operator with Robin boundary conditions // Appl. Math. Lett. 2015. Vol. 48. P. 150–155.

[6] *Buterin S. A., Sat M.* On the half inverse spectral problem for an integro-differential operator // Inverse Probl. Sci. Eng. 2017. Vol. 25, № 10. P. 1508–1518.

[7] *Bondarenko N., Buterin S.* On recovering the Dirac operator with an integral delay from the spectrum // Results Math. 2017. Vol. 71, № 3-4. P. 1521–1529.

[8] *Bondarenko N., Buterin S.* An inverse spectral problem for integro-differential Dirac operators with general convolution kernels // Appl. Anal. 2018. P. 1–17. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1508653

[9] *Buterin S. A.* On inverse spectral problems for first-order integro-differential operators with discontinuities // Appl. Math. Lett. 2018. Vol. 78. P. 65–71.

[10] *Бутерин С. А.* Обратная спектральная задача для интегро-дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля с условиями разрыва // Современная математика. Фундаментальные направления 2018. Т. 64, № 3. С. 427–458.

[11] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for an integro-differential operator on a star-shaped graph // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41, № 4. P. 1697–1702.

[12] *Ignatyev M.* On an inverse spectral problem for the convolution integro-differential operator of fractional order // Results Math. 2018. Vol. 73, Art. № 34. P. 1–8.

[13] *Ignatiev M.* On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order // J. Inverse and Ill-posed Probl. 2019. Vol. 27, № 1. P. 17–23.

[14] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for the integro-differential Dirac system with partial information given on the convolution kernel // J. Inverse and Ill-posed Probl. 2019. Vol. 27, № 2. P. 151–157.

[15] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for the second-order integro-differential pencil // Tamkang J. Math. 2019. Vol. 50, № 3. P. 223–231.

[16] *Buterin S. A.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville-type integro-differential operators with Robin boundary conditions // Tamkang J. Math. 2019. Vol. 50, № 3. P. 207–221.

[17] *Buterin S. A., Malyugina M. A.* On global solvability and uniform stability of one nonlinear integral equation // Results Math. 2018. Vol. 73, Art. № 117. P. 1–19.

[18] *Buterin S. A., Kuznetsova M. A.* On Borg's method for non-selfadjoint Sturm-Liouville operators // Anal. Math. Phys. 2019. Vol. 9. P. 2133–2150.

[19] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53.

УДК 517.518.224

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТИ[1]

А. А. Васильева (Москва, Российская Федерация)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Получены порядковые оценки колмогоровских поперечников пересечения весового класса Соболева и единичного шара весового пространства Лебега на области, удовлетворяющей условию Джона. Веса имеют вид степеней расстояния до подмножества границы области.

Ключевые слова: колмогоровские поперечники, пересечения функциональных классов, весовые классы Соболева.

KOLMOGOROV WIDTHS OF INTERSECTIONS OF WEIGHTED SOBOLEV CLASSES ON A DOMAIN[1]

A. A. Vasil'eva (Moscow, Russian Federation)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Order estimates for the Kolmogorov widths of the weighted Sobolev class with the unit ball of the Lebesgue space on a John domain are obtained. Weights are powers of distances from a subset of the boundary.

Keywords: Kolmogorov widths, intersections of function classes, weighted Sobolev classes.

Задачи о вложениях пересечений весовых классов Соболева (т. е. классов с различными ограничениями на несколько производных) и изучались многими авторами (см., например, [1–6]).

Задача о поперечниках пересечений весовых классов Соболева на многомерных областях с ограничениями на производные различных порядков изучалась Х. Трибелем [2], П. И. Лизоркиным и М. О. Отелбаевым [7], К. Мынбаевым и М. О. Отелбаевым [4], И. В. Бойковым [10], М. С. Айтеновой и Л. К. Кусаиновой [8, 9]. Отметим, что в этих работах либо условия были такими, что ограничения на младшие производные на порядки поперечников не влияли, либо в ряде случаев не удавалось найти совпадающие по порядку оценки сверху и снизу (например, для пересечений весовых классов $W^{k_i}_p$ в весовое пространство L_q при $1 < p < 2 < q < \infty$ различались оценки сверху и снизу для линейных поперечников).

В данной работе получены порядковые оценки колмогоровских поперечников весовых классов Соболева (с ограничениями на 0-ю и r-ю производные) на области, удовлетворяющей условию Джона. Веса являются функциями расстояния до h-множества (примерами таких множеств могут быть липшицевы поверхности и некоторые фракталы — например, кривая Коха, канторово множество). Введем необходимые определения.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19-01-00332).)

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $a > 0$. Скажем, что $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$, если существует точка $x_* \in \Omega$ такая, что для любого $x \in \Omega$ существуют число $T(x) > 0$ и кривая $\gamma_x : [0,\, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. γ_x имеет натуральную параметризацию относительно евклидовой нормы на $\mathbb{R}^d$,
2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
3. $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in [0,\, T(x)]$.

Скажем, что область Ω удовлетворяет условию Джона, если $\Omega \in \mathbf{FC}(a)$ для некоторого $a > 0$.

Примерами областей, удовлетворяющих условию Джона, являются ограниченные области с липшицевой границей и снежинка Коха.

Обозначим через $\mathbb{H}$ совокупность всех неубывающих положительных функций на полуинтервале $(0,\, 1]$.

Определение (см. [11]). Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — непустое компактное множество, $h \in \mathbb{H}$. Скажем, что Γ является h-множеством, если существуют константа $c_* \geq 1$ и конечная счетно-аддитивная мера μ на $\mathbb{R}^d$ такие, что $\operatorname{supp} \mu = \Gamma$ и

$$c_*^{-1} h(t) \leq \mu(B_t(x)) \leq c_* h(t)$$

для любых $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\, 1]$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область с условием Джона, $\Gamma \subset \partial\Omega$ — h-множество, $h(t) = t^\theta$, $0 \leq \theta < d$, $r \in \mathbb{N}$, $1 < p_0,\, p_1 \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $\beta,\, \sigma \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \operatorname{dist}^\beta(x,\, \Gamma), \quad w(x) = \operatorname{dist}^{-\sigma}(x,\, \Gamma),$$

$$M = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_{p_1}(\Omega)} \leq 1, \quad \|wf\|_{L_{p_0}(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Положим $\delta = r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p_1}$,

$$\tilde{\theta} = \frac{r}{d} \cdot \frac{\sigma + \frac{d-\theta}{q} - \frac{d-\theta}{p_0}}{\beta + \sigma - \left(r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1}\right)\left(1 - \frac{\theta}{d}\right)},$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sigma\left(\frac{r}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}\right) + \beta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p_0}\right)}{\beta + \sigma - \left(r + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_1}\right)\left(1 - \frac{\theta}{d}\right)}.$$

Определим числа $j_0 \in \mathbb{N}$ и $\theta_j \in \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq j_0)$ следующим образом.

1. При $p_0 \ge q$, $p_1 \ge q$: $j_0 = 2$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$.

2. При $p_0 > q$, $p_1 < q \le 2$: $j_0 = 3$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$, $\theta_3 = \hat{\theta}$.

3. При $p_0 > q$, $2 \le p_1 < q$: $j_0 = 4$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

4. При $p_0 > q$, $p_1 < 2 < q$: $j_0 = 5$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \hat{\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_5 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

5. При $p_0 \le q$, $p_1 \le q \le 2$: $j_0 = 2$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d}$, $\theta_2 = \hat{\theta}$.

6. При $p_0 < q \le 2$, $p_1 > q$: $j_0 = 3$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \tilde{\theta}$, $\theta_3 = \hat{\theta}$.

7. При $p_0 < q$, $q > 2$, $\max\{p_0, p_1\} \le 2$: $j_0 = 4$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \hat{\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_4 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

8. При $p_0 < q$, $q > 2$, $\min\{p_0, p_1\} \ge 2$: $j_0 = 4$, $\theta_1 = \frac{r}{d}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \frac{q\hat{\theta}}{2}$.

9. При $p_0 < q$, $q > 2$, $\min\{p_0, p_1\} < 2 < \max\{p_0, p_1\}$: $j_0 = 5$, $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \tilde{\theta}$, $\theta_4 = \hat{\theta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\theta_5 = \frac{q\theta}{2}$.

Теорема. Пусть $\delta > 0$, $\min\{\beta+\sigma-r-\frac{d-\theta}{p_0}+\frac{d-\theta}{p_1}, \beta+\sigma-r-\frac{d}{p_0}+\frac{d}{p_1}\} > 0$; $\tilde{\theta} > 0$ при $p_0 \ge q$, $\hat{\theta} > 0$ при $p_0 < q$. Предположим, что существует $j_* \in \{1, \ldots, j_0\}$ такое, что $\theta_{j_*} < \min_{j \ne j_*} \theta_j$. Тогда

$$d_n(M, L_q(\Omega)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kufner A.* Weighted Sobolev spaces. Leipzig : Teubner, 1980. 115 p.

[2] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980. 664 с.

[3] *Бесов О. В.* Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 3. С. 3–26.

[4] *Мынбаев К., Отелбаев М.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М. : Наука, 1988. 282 с.

[5] *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. (2). 1993. Vol. 48. P. 103–116.

[6] *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 298–317.

[7] *Лизоркин П. И., Отелбаев М. О.* Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 213–232.

[8] *Айтенова М. С., Кусаинова Л. К.* Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I // Матем. журн. Алматы. 2002. Т. 2, № 1. С. 3–9.

[9] *Айтенова М. С., Кусаинова Л. К.* Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. II // Матем. журн. Алматы. 2002. Т. 2, № 2. С. 7–14.

[10] *Бойков И. В.* Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 1. С. 25–33.

[11] *Bricchi M.* Existence and properties of h-sets // Georgian Mathematical Journal. 2002. Т. 9, № 1. С. 13–32.

УДК 517.9

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛАПЛАСИАНАМИ ЛЕВИ И КАЛИБРОВОЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Б. О. Волков (Москва, Россия)
borisvolkov1986@gmail.com

В докладе обсуждаются теоремы типа теоремы Аккарди–Джибилиско–Воловича. Эта теорема утверждает об эквивалентности уравнений Янга–Миллса для связности в векторном расслоении и уравнений Лапласа для лапласиана Леви. Вводится семейство модифицированных лапласианов Леви, параметризованных выбором кривой в группе вращений четырехмерного пространства. Показано, что уравнения анти-автодуальности Янга–Миллса эквивалентны системе из трех уравнений Лапласа для модифицированных лапласианов Леви из этого семейства.

Ключевые слова: лапласиан Леви, калибровочные поля, уравнения Янга–Миллса, инстантоны.

RELATIONSHIP BETWEEN LEVY LAPLACIANS AND GAUGE FIELDS

B. O. Volkov(Moscow, Russia)
borisvolkov1986@gmail.com

The report discusses theorems of the type of the Accardi–Gibilisco–Volovich theorem. This theorem states the equivalence of the Yang–Mills equations for a connection in a vector bundle and the Laplace equation for the Levy Laplacian. A family of modified Levy Laplacians, parametrized by the choice of a curve in the rotation group of four-dimensional space, is introduced. It is shown that the anti-self-duality Yang–Mills equations are equivalent to a system of three Laplace equations for modified Levy Laplacians from this family.

Keywords: Levy Laplacian, gauge fields, Yang–Mills equations, instantons.

Введение

Лапласианами Леви называют дифференциальные операторы, определенные по аналогии с оператором Лапласа для функций на $L_2([0,1],\mathbb{R})$, введенным П. Леви (см. [1]). Одна из основных причин интереса к таким дифференциальным операторам заключается в их связи с калибровочными полями. В работе [2] Аккарди, Джибилиско и Воловича доказана эквивалентность следующих утверждений: 1) связность в векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга–Миллса; 2) порожденный связностью параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви. Для случая многообразия такая эквивалентность была доказана в [3]. В настоящей работе обсуждается связь лапласианов Леви и инстантонов (решений уравнений антиавтодуальности Янга–Миллса).

1. Калибровочные поля

Пусть E — векторное расслоение над четырехмерным C^∞-гладким римановым ориентируемым (не обязательно компактным) многообразием M. Уравнения Янга–Миллса на связность A имеют вид:

$$D^* F = 0,$$

где F — кривизна связности A, а D^* — оператор сопряженный к внешнему ковариантному дифференцированию. Уравнения антиавтодуальности (автодуальности) на связность A имеют вид:

$$F = - * F \, (F = *F)$$

где $*$ — оператор Ходжа. Инстантоны и антиинстантоны решения уравнений антиавтодуальности и автодуальности соответственно. Они являются точками локального экстремума функционала действия Янга–Миллса. Решения уравнения Янга–Миллса — это критические точки этого функционала. Параллельный перенос U, порожденный связностью A, можно рассматривать как сечение в векторном расслоении над гильбертовым многообразием H^1-кривых на M с фиксированным началом.

1. Лапласианы Леви и инстантоны

Пусть $\mathcal{E}$ — вещественное банахово пространство, а $\mathcal{E}^*$ — сопряженное к нему. Пусть S — линейный функционал на пространстве линейных непрерывных операторов из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}^*$. Этот линейный функционал определяет дифференциальный оператор второго порядка $D^{2,S}$ на пространстве дважды дифференцируемых по Фреше функций на $\mathcal{E}$ по формуле: $D^{2,S} f(x) = S f''(x)$. Лапласиан Леви, введенный в работе [2], можно задать как дифференциальный оператор, порожденный некоторым линейным функционалом tr_L^{AGV} — следом Леви (см. [4]). След Леви определяется как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной. Определение лапласиана Леви как дифференциального оператора, порожденного tr_L^{AGV}, переносится на случай многообразия (см. [5]).

Гладкая кривая $W \in C^1([0,1], SO(4))$ поточечным левым умножением задает ортогональный оператор в $L_2([0,1], \mathbb{R}^4)$. Модифицированный след Леви, порожденный кривой $W \in C^1([0,1], SO(4))$, действует на билинейную форму K по формуле:

$$tr_L^W K = tr_L^{AGV} W^* K W.$$

Модифицированный след Леви Δ_L^W — это дифференциальный оператор второго порядка, порожденный следом tr_L^W.

У группы четырехмерных вращений $SO(4)$ есть две нормальные подгруппы $S_L^3 \cong SU(2)$ и $S_R^3 \cong SU(2)$. Алгебра Ли $so(4)$ является прямой суммой $su(2) \otimes su(2)$. Это разложение соответствует разложению пространства 2-форм на прямую сумму пространства антиавтодуальных и автодуальных форм.

Теорема 1. *Пусть* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ *— базис в алгебре Ли группы* S_L^3. *Пусть* $W_i(t) = e^{t\mathbf{e_i}}$ *для* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Следующие условия равносильны: 1) связность* A *является инстантоном; 2) для параллельного переноса* U *выполняются равенства* $\Delta_L^{W_i} U = 0$ *для* $i \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство теоремы можно найти в [5].

При некоторых условиях уравнения антиавтодуальности Янга–Миллса эквивалентны только одному уравнению Лапласа для модифицированного лапласиана Леви.

Теорема 2. *Пусть* $W \in C^1([0, 1], S_L^3)$, *причем*

$$dimspan\{\dot{W}(t) W^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} \geq 2.$$

Пусть существует точка $x \in M$, *в которой* $F(x) = - * F(x)$. *Следующие условия равносильны: 1) связность* A *является инстантоном; 2) параллельный перенос* U *является решением уравнения Лапласа для модифицированного лапласиана Леви* Δ_L^W:

$$\Delta_L^W U = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М. : Наука, 1967. 512 с.

[2] *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy-Laplacian // Russ. J. Math. 1994. Vol. 2, № 2. P. 235–250.

[3] *Leandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. Vol. 2, № 1. P. 151–172.

[4] *Volkov B. O.* Levy Differential Operators and Gauge Invariant Equations for Dirac and Higgs Fields // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2019. Vol. 22, № 2 Pap. 1950001 (20 pages).

[5] *Volkov B. O.* Levy Laplacians and instantons on manifolds. arXiv:1909.13312

УДК 517.9

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТНЫХ СУММ ФУРЬЕ В p-ВАРИАЦИОННОЙ МЕТРИКЕ

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

В данной статье мы изучаем степень приближения частными суммами Фурье в p-вариационной норме. Мы приводим два критерия сходимости этих сумм с данной скоростью в терминах роста норм производных продифференцированных частных сумм Фурье. Так же мы устанавливаем связь между приближением функции и ее сопряженной.

Ключевые слова: функция ограниченной p-вариации, частные суммы Фурье, скорость сходимости. производная, сопряженная функция.

APPROXIMATION PROPERTIES OF PARTIAL FOURIER SUMS IN p-VARIATIONAL NORM

S. S. Volosivets, A. A. Tyuleneva (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

In the paper we study the degree of approximation by Fourier partila sums in p-variational norm. We give two criterions for convergence of these sums with a given rate in terms of growth of norms of the differentiated Fourier partial sums. Also we establish the connection between approximation of a function and its conjugate.

Keywords: function of bounded p-variation, partial Fourier sums, rate of convergence, derivative, conjugate function.

Пусть $f(x) \in L^1_{2\pi}$, т.е. $f(x)$ является 2π-периодической интегрируемой по Лебегу функцией, а ряд

$$a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) =: \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)(x) \tag{1}$$

является рядом Фурье функции $f(x)$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx) =: \sum_{k=1}^{\infty} B_k(f)(x) \tag{2}$$

называется сопряженным к ряду (1). Известно, что для $f \in L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, ряд (2) сходится по норме $L^p_{2\pi}$ к функции $\widetilde{f} \in L^p_{2\pi}$, а ряд (1) сходится по норме $L^p_{2\pi}$ к функции $f(x)$ (см. [1, гл. VIII] и лемму 1). Рассмотрим частные суммы рядов (1) и (2)

$$S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j(f)(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \widetilde{S_n}(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Р. Салем и А.Зигмунд [2] получили следующие результаты

Теорема A. 1) *Пусть* $\alpha > 0$, $f \in C_{2\pi}$ *и*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty := \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - S_n(f)(x)| = O(n^{-\alpha}), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Тогда функция $\widetilde{f}$ *эквивалентна (т.е. равна п.в.) функции* $\widetilde{f}_0 \in C_{2\pi}$ *и при этом* $\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f})\|_\infty = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$.

2) *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $f \in C_{2\pi}$ *и* f *удовлетворяет условию* (3). *Тогда* $\|S_n'(f)\|_\infty = O(n^{1-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$.

Аналоги результата части 2) теоремы A доказывались в основном для полиномов наилучшего приближения (см. обзор в [3]).

Пусть f 2π-периодическая действительная ограниченная функция, $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ разбиение периода и $æ_\xi^p(f) := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Положим по определению для $1 < p < \infty$

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\{æ_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i (x_i - x_{i-1}) \leqslant \delta\}$$

и $\|f\|_{V_p} := \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi))$. Для $1 < p < \infty$ введем пространство V_p, состоящее из всех 2π-периодических ограниченных функций со свойством $\|f\|_{V_p} < \infty$, и пространство $C_p = \{f \in V_p : \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0\}$. Пространство V_p функций ограниченной p-вариации было введено в случае $p = 2$ Н.Винером [1], тогда как пространство p-абсолютно непрерывных функций C_p в другой, но эквивалентной форме было рассмотрено Л.С.Юнгом [5]. Оба пространства V_p и C_p являются банаховыми относительно нормы $\|\cdot\|_{V_p}$.

Если T_n пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, то n-е наилучшее приближение в V_p вводится равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf\limits_{t_n\in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводится наилучшее приближение $E_n(f)_p$ по норме $\|f\|_p = \left(\int_{[0,2\pi]} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ пространства $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$. Теория приближений в C_p тесно связана с аналогичной теорией в L^p (см. [6, 7]).

Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ убывает к нулю. Скажем, что $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит классу B, если $\sum_{k=n}^\infty k^{-1}\varepsilon_k \le C\varepsilon_n$, соответственно, классу B_α, $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1}\varepsilon_k \le Cn^\alpha\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Эти определения аналогичны данным Н.К.Бари и С.Б.Стечкиным для мажорант модулей гладкости [8].

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p_{2\pi}$. *Тогда 1)* $\|S_n(f)\|_p \le C_1(p)\|f\|_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$; *2)* $\|f - S_n(f)\|_p \le (C_1(p) + 1)E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$; *3) ряд* (2) *сходится к* $\widetilde{f} \in L^p_{2\pi}$ *в* $L^p_{2\pi}$ *и* $\|\widetilde{f}\|_p \le C_2(p)\|f\|_p$.

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ *абсолютно непрерывны на любом периоде и* $f^{(r)} \in L^p_{2\pi}$. *Тогда* $E_n(f)_p \le Cn^{-r}\|f^{(r)}\|_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 3. *1) Пусть* $1 < p < \infty$, $t_n \in \mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\|t_n\|_{V_p} \le Cn^{1/p}\|t_n\|_p$.

2) Пусть $1 < p < \infty$, $f \in V_p$. *Тогда* $n^{1/p}E_n(f)_p \le CE_n(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *1) Пусть* $1 < p < \infty$, $t_n \in \mathbb{T}_n$, $n, k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1) $\|t_n^{(k)}\|_{V_p} \le n^k\|t_n\|_{V_p}$;

2)$\|t_n^{(k)}\|_p \le \pi^{1/p}n^{k-1/p}\|t_n\|_{V_p}$.

Лемма 1 принадлежит М.Риссу (см. [1, гл. VIII, §§ 14,20]). Лемма 2 является одной из форм неравенства Джексона (см. [9, § 5.5.5, (17)]. Первое утверждение леммы 3 установлено А.П.Терехиным [7], второе можно найти в работе авторов [10]. Оба утверждения леммы 4 можно найти в работе А.П.Терехина [6].

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p_{2\pi}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \in B$ *и* $\|f - S_n(f)\|_p = O(n^{-1/p}\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\widetilde{f}$ *эквивалентна* $\widetilde{f}_0 \in C_p$ *и* $\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f}_0)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Применяя лемму 3, лемму 1 и условие $\|f - S_n(f)\|_p = O(n^{-1/p}\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, мы имеем

$$\sum_{k=0}^\infty \|S_{2^{k+1}n}(\widetilde{f}) - S_{2^k n}(\widetilde{f})\|_{V_p} \le C_1 \sum_{k=0}^\infty (2^k n)^{1/p}\|S_{2^{k+1}n}(\widetilde{f}) - S_{2^k n}(\widetilde{f})\|_p \le$$

$$\le C_2 \sum_{k=0}^\infty (2^k n)^{1/p}\|S_{2^{k+1}n}(f) - f + f - S_{2^k n}(f)\|_p \le$$

$$\le C_3 \sum_{k=0}^\infty (2^k n)^{1/p}((2^{k+1}n)^{-1/p}\varepsilon_{2^{k+1}n} + (2^k n)^{-1/p}\varepsilon_{2^k n}) \le C_4 \sum_{k=0}^\infty \varepsilon_{2^k n} \le C_5\varepsilon_n, \tag{4}$$

поскольку $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \in B$. Из (4) вытекает сходимость $S_{2^k n}(\widetilde{f}) \in C_p$ в V_p к функции $\varphi \in C_p$. Но по лемме 1 $S_{2^k n}(\widetilde{f})(x)$ сходится к $\widetilde{f}(x)$ в $L^p_{2\pi}$, поэтому $\widetilde{f}(x) = \varphi(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Обозначая $\varphi \in C_p$ через $\widetilde{f}_0$, в силу (4) получаем

$$\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f}_0)\|_{V_p} \le \sum_{k=0}^\infty \|S_{2^{k+1}n}(\widetilde{f}) - S_{2^k n}(\widetilde{f})\|_{V_p} \le C_5\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$ *и* $\|f - S_n(f)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\widetilde{f}$ *эквивалентна* $\widetilde{f}_0 \in C_p$ *и* $\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f}_0)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B \cap B_k$. *Тогда для* $f \in V_p$ *условия* $\|f - S_n(f)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\|S_n^{(k)}(f)\|_{V_p} = O(n^k \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B \cap B_{k-1/p}$. *Тогда для* $f \in V_p$ *условия* $\|f - S_n(f)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\|S_n^{(k)}(f)\|_p = O(n^{k-1/p} \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 936 с.

[2] *Salem R., Zygmund A.* Approximation by partial sums of Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 59, № 1. P. 14–22.

[3] *Butzer P. L., Scherer K.* On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin // Aequationes Math. 1969. Vol. 3. P. 170–185.

[4] *Wiener N.* The quadratic variation of a function and the Fourier coefficients // J. Math and Phys. (MTI). 1924. Vol. 3. P. 72–94.

[5] *Young L. C.* An inequality of Hölder type connected with Stieltjes integration // Acta Math. 1936. Vol. 67. P. 251–282.

[6] *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

[7] *Терехин А. П.* Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 289–300.

[8] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С.483–522.

[9] *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 624 с.

[10] *Volosivets S. S., Tyuleneva A. A.* Generalized monotonicity of sequences and functions of bounded p-variation // Acta Sci. Math. (Szeged). 2016. Vol. 82, № 1–2. P. 111–124.

УДК 517.518.43

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ВИЛЕНКИНА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ p_k[1]

С. М. Воронов (Москва, Россия)
cmvoron@gmail.com

Рассматриваются ряды по системе характеров любой нульмерной компактной комммутативной группы. Доказываются обобщение аналога признака Дини и его следствие, аналог признака Харди–Литтлвуда и его следствие, которые были ранее получены для систем, определяемых ограниченными последовательностями $\{p_k\}$.

Ключевые слова: нульмерная группа, характеры группы, ряды Фурье, признак Дини, система Виленкина, призак Харди – Литтлвуда.

CONVERGENCE FOURIER SERIES WITH RESPECT TO VILENKIN SYSTEM IN THE CASE OF UNBOUNDED p_k[1]

S. M. Voronov (Moscow, Russia)
cmvoron@gmail.com

Series with respect to a system of characters of a zero-dimensional compact commutative group are considered. A generalization of analogue of Dini test and its consequences, a generalization of analogue of Hardy–Littlewood test and its consequences, which were earlier obtained in the case of bounded sequence $\{p_k\}$ defining the system, are proved.

Keywords: zero-dimensional group, characters of a group, Fourier series, Dini test, Vilenkin system, Hardy–Littlewood test.

1. Система Виленкина, являющаяся системой характеров нульмерной компактной комммутативной группы, впервые была рассмотрена в [1]. В книгу [2] включены более поздние результаты, известные к моменту ее публикации.

Пусть G есть компактная нульмерная коммутативная группа, и X есть ее группа характеров. В [2, гл.4, §1] показано, что существует возрастающая последовательность подгрупп $\{X_n\}$ группы X ,такая, что $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n$, где $\{0\} = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$. При этом порядок фактор-группы X_{n+1}/X_n равен p_n. Элементы группы X можно занумеровать так:

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \quad a_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1, \quad m_0 = 1, \quad m_k = p_0 p_1 \ldots p_{k-1},$$

$$p_k \geqslant 2, \quad k \geqslant 0, \text{– натуральные числа.}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project No. 20-01-00584.

Положим $\chi_0(g) \equiv 1$. В каждой подгруппе X_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$ выберем по одному характеру χ, не принадлежащему X_n, и дадим ему номер m_n. Так как порядок фактор-группы X_{n+1}/X_n равен p_n, то $(\chi_{m_n})^{p_n} \in X_n$. Положим $\chi_n(g) = \prod\limits_{k=0}^{s} [\chi_{m_k}(g)]^{a_k}$.

Пусть $G_n = \{x \in G : \chi_k(x) = 1, 0 \leqslant k < m_n\}$. Тогда $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$. Подгруппы G_n образуют базис окрестностей нуля в G. При этом X_n являются аннуляторами соответствующих основных подгрупп в G.

Ядро Дирихле с номером n по системе Виленкина имеет вид $D_n(g) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(g)$.

В [2, гл.4, §5, теорема 4.12] доказан следующий аналог признака Дини, который впервые опубликован в [3]:

Теорема А. *Если $p_k = O(1)$ и $\int\limits_G |f(g_0) - f(g_0 - h)| \left[\frac{1}{h}\right] d\mu(h) < \infty$, то ряд Фурье интегрируемой функции f по системе характеров нульмерной компактной коммутативной группы G сходится в элементе g_0 к значению $f(g_0)$.*

Здесь

$$\left[\frac{1}{g}\right] = \begin{cases} m_k, & g \in G_k \backslash G_{k+1}, \quad k > 0, \\ +\infty, & g = 0, \end{cases}$$

а $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ есть основная система открытых подгрупп в G.

Далее, из этой теоремы в [2] получено, что ряд Фурье $f \in \operatorname{Lip}\alpha(G)$ сходится в каждом элементе g к $f(g)$.

Мы обобщим [4] эти результаты на случай неограниченных p_k.

Теорема 1. *Если $\int\limits_G |f(g_0) - f(g_0 - h)| \beta(h)\, d\mu(h) < \infty$, где*

$$\beta(g) = \begin{cases} m_k(p_k + 2), & g \in G_k \backslash G_{k+1}, \quad k \geqslant 0, \\ +\infty, & g = 0, \end{cases}$$

то ряд Фурье по системе характеров нульмерной компактной коммутативной группы G сходится в элементе g_0 к $f(g_0)$.

Теорема 1 является обобщением результата, полученного Г. М. Джафарли [3], так как при ограниченных p_k ее условие эквивалентно условию теоремы 4.12 в [2].

Теорема 2. *Если $f \in \operatorname{Lip}\alpha(G)$ и существует число $r > 1$ такое, что*

$m_s^{-\alpha}\,(p_s+2) < m_s^{-\alpha/r}$, *$s = 3, 4, 5, \ldots$, то ряд Фурье f по системе характеров нульмерной компактной коммутативной группы G сходится в элементе g к $f(g)$.*

Замечание. Условие на p_s в теореме 2 можно записать следующим образом:

$$p_s + 2 < m_s^{\alpha(1-1/r)}, \quad s = 3, 4, 5, \ldots \ .$$

В таком виде это условие на p_s очевидно выполняется при ограниченных p_s, поэтому результат, полученный в [2, с. 103] как следствие теоремы 4.12, является следствием доказанной здесь теоремы 2. Далее приведем формулировку следующей теоремы, которая и представляет собой обобщение упомянутого выше аналога признака Харди–Литтлвуда:

Теорема 3. *Пусть функция $f(g) \in L(G)$ и*

$$m_n \int\limits_{G_n} |f(g_0+g)\ - f(g_0)|\, d\mu(g) = o(\frac{1}{(p_n+2)\log m_n}), \tag{1}$$

$$c_k(f) = O(k^{-\delta}),\ \delta > 0, \tag{2}$$

причем p_k удовлетворяют соотношению:

$$(p_0+p_1+\cdots+p_r)\frac{m_r}{m_n^{\delta}} = o(1),\ n \to \infty,\ \ r = \left[\frac{n\delta}{2}\right],\ 0 < \delta < 1. \tag{3}$$

Тогда ряд Фурье по системе Виленкина функции $f(g)$ сходится к $f(g_0)$ в g_0

Замечание. Если условие (1) теоремы 3 имеет место равномерно на $g_0 + G_{t_0}$, то сходимость ряда Фурье $f(g)$ будет равномерной на этом смежном классе. В частности, если условие (1) теоремы 3: $\omega_n(f) = o(\frac{1}{(p_n+2)\log m_n})$, то ряд Фурье $f(g)$ сходится равномерно на G.

В заключение приведем пример последовательности $p_i : p_i = 2^{i+1}, i \geq 0$, легко проверить, что для нее выполняется условие (3) теоремы 3. Аналогично можно проверить условие (3) теоремы 3 для любой показательно растущей p_i. Нетрудно это сделать и для $p_i = i, i \geq 2, p_0 = p_1 = 2$. Если же p_i ограничена, то интегральное условие, доказанной здесь теоремы 3 эквивалентно такому же условию в [2, с. 104]. Что касается условия (3) в формулировке теоремы 3, в [2, с. 107] доказано, что соответствующее выражение стремится к нулю, только там иначе выбирается r, отличается постоянным множителем от того, что сделано в представленном вашему вниманию докладе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Виленкин Н. Я.* О классе полных ортонормированных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 363–400.

[2] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и анализ на нульмерных группах. Баку : Элм, 1981.

[3] *Джафарли Г. М.* О сходимости рядов Фурье по одному классу ортонормированных мультипликативных систем // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук. 1962. Т. 4. С. 17–36.

[4] *Воронов С. М.* О некоторых признаках сходимости рядов Фурье по системе Виленкина в случае неограниченных p_k // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2019. Т. 5. С. 42–44.

УДК 517.9;519.25

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНФЛЮЕНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ФУНКЦИИ ГАУССА[1]

Ю. Е. Гагарин, У. В. Никитенко, М. А. Степович
(Калуга, Россия)
g_ug@mail.ru, uvnikitenko@gmail.com, m.stepovich@rambler.ru

Рассмотрены некоторые возможности использования конфлюентного анализа для оценивания параметров функциональных зависимостей с учетом погрешностей исходных данных. Для функции Гаусса показана возможность определения интервальных оценок с учетом погрешностей значений функции и аргумента.

Ключевые слова: интервальное оценивание, конфлюентный анализ.

USING THE CONFLUENT ANALYSIS FOR INTERVAL ESTIMATION OF THE GAUSS FUNCTION[1]

Yu. E. Gagarin, U. V. Nikitenko, M. A. Stepovich
(Kaluga, Russia)
g_ug@mail.ru, uvnikitenko@gmail.com, m.stepovich@rambler.ru

The use of confluent analysis for estimation of parameters of functional dependences taking into account errors of initial data is considered. For the Gauss function, the possibility of determining interval estimates taking into account the errors of the function and argument values is shown.

Keywords: interval estimation, confluent analysis.

Методы конфлюентного анализа позволяют получать несмещённые оценки параметров функциональных зависимостей с учетом погрешностей в значениях функций и аргументов [1]. Модель оценивания вектора неизвестных параметров $\mathbf{\Theta}$ функциональной зависимости $f\,(x,\ \mathbf{\Theta})$ с учетом погрешностей исходных данных имеет вид [2]

$$\begin{cases} y_i = f(\xi_i, \mathbf{\Theta}) + \varepsilon_i, \\ x_i = \xi_i + \delta_i,\ i = \overline{1,\ n}. \end{cases}$$

Исходные данные (x_i, y_i) $i = \overline{1,\ n}$ являются результатами экспериментов и, как любые измерения, содержат случайные ошибки $(\delta_i,\ \varepsilon_i)$, которые необходимо учитывать. Примем, что ошибки измерений ε_i и δ_i — нормально распределённые случайные величины с нулевыми средними

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19–03–00271), and by the Government of the Kaluga region, Russian Federation (project No. 18–41–400001).

значениями, с дисперсиями $\sigma^2(y_i)$ и $\sigma^2(x_i)$ соответственно и коэффициентом корреляции $\rho_i = 0$. Оценки параметров $\hat{\mathbf{\Theta}}$ находятся из условия минимума функционала

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(y_i - f(\xi_i, \mathbf{\Theta}))^2}{\sigma^2(y_i)} + \frac{(x_i - \xi_i)^2}{\sigma^2(x_i)}\right].$$

В функционале F значения ξ_i неизвестны и определяются из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i = \hat{\xi}_i} = 0,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Оценки S параметров $\hat{\mathbf{\Theta}}$ находятся из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \theta_k}\right|_{\theta_k = \hat{\theta}_k} = 0,\ k = \overline{1,\ S}.$$

Рассмотрим случай, когда функциональная зависимость $f(x,\ \mathbf{\Theta})$ соответствует функции Гаусса с параметрами (μ, σ). Методами конфлюентного анализа определим несмещённые оценки параметров, которые определяются из системы нелинейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - f(\xi_i, \mathbf{\Theta})}{\sigma^2(y)} f(\xi_i, \mathbf{\Theta})\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma^2}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - f(\xi_i, \mathbf{\Theta})}{\sigma^2(y)} f(\xi_i, \mathbf{\Theta})\left(\frac{(\xi_i - \mu) - \sigma^2}{\sigma^3}\right) = 0$$

при условии, что

$$\frac{x_i - \xi_i}{\sigma^2(x_i)} - \frac{y_i - f(\xi_i, \mathbf{\Theta})}{\sigma^2(y_i)} f(\xi_i, \mathbf{\Theta})\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma^2}\right) = 0,\ i = \overline{1,\ n}.$$

Оценки параметров $\hat{\mathbf{\Theta}}$ определяются, исходя из экспериментальных значений признаков, содержащих случайные ошибки. Значения оценок параметров $\hat{\mathbf{\Theta}}$ в каждом конкретном эксперименте могут отличаться от значений параметров $\mathbf{\Theta}$ и, следовательно, остается ещё известная доля неопределенности [3]. Величину этой неопределенности можно найти из дисперсий параметров $D(\hat{\mathbf{\Theta}})$.

Помимо точечных оценок функциональной зависимости $f(x, \mathbf{\Theta})$, для всех значений $x_i = \xi_i$ определим интервальные оценки $f(x, \mathbf{\Theta})$. Это можно сделать по следующей формуле, зная несмещенные оценки параметров $\hat{\mathbf{\Theta}}$ и дисперсии параметров $D(\hat{\mathbf{\Theta}})$:

$$P\Big(f(x, \mathbf{\Theta}) - t_\gamma\sqrt{D\left(f(x, \mathbf{\Theta}\right)} \leq f\left(x, \mathbf{\Theta}\right) \leq f(x, \mathbf{\Theta}) +$$

$$+t_\gamma \sqrt{D\left(f(x,\mathbf{\Theta})\right)}\Big) = \gamma.$$

Здесь γ — доверительная вероятность, t_γ — квантиль распределения Стьюдента, $D\left(f(x,\ \mathbf{\Theta})\right)$ — дисперсия значения функции $(x,\mathbf{\Theta})$, которая в случае некоррелированности S параметров может быть вычислена по формуле

$$D\left(f(x,\mathbf{\Theta})\right) = \sum_{k=1}^{S} \left(\frac{\partial f(x,\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_k}\right)^2 \Bigg|_{\Theta = \hat{\Theta}} D\left(\theta_k\right).$$

Для функции Гаусса дисперсия $D\left(f(x,\mathbf{\Theta})\right)$ имеет вид

$$D\left(f(x,\mathbf{\Theta})\right) = f^2(x,\mathbf{\Theta}) \left[\frac{x-\hat{\mu}_j}{\hat{\sigma}_j^2} D(\hat{\mu}_j) + \frac{(x-\hat{\mu}_j)^2 - \hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}_j^3} D(\hat{\sigma}_j)\right].$$

Использование методов конфлюентного анализа дает возможность учитывать неопределенность исходной информации и получать несмещенные оценки параметров, по значениям которых находятся точечные и интервальные оценки функциональных зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Грешилов А. А.* Математические методы принятия решений : учеб. пособие для вузов. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 584 с.

[2] *Гагарин Ю. Е., Лапшинова Е. Н., Петров В. И., Степович М. А.* Использование конфлюентного анализа для оценки влияния электрофизических параметров прямозонных полупроводниковых материалов на результаты интервального оценивания зависимости интенсивности катодолюминесценции от энергии электронов пучка. Результаты математического моделирования // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2007. № 10. С. 31–35.

[3] *Гагарин Ю. Е.* Учет множества случайных факторов при использовании минимаксного критерия в задачах распознавания объектов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. Воронеж : Воронежский институт высоких технологий, 2019. № 7 (1). С. 89–98.

УДК 517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНЫМИ РЯДАМИ ПО ПОЛИНОМАМ МЕЙКСНЕРА

Р. М. Гаджимирзаев (Махачкала, Россия)
ramis3004@gmail.com

Работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств специальных рядов по модифицированным полиномам Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$. Эти полиномы при $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\alpha > -1$ образуют ортогональную систему на равномерной сетке $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ относительно веса $\rho_N(x,\alpha) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}$. Основное внимание уделено получению верхней оценки для функции типа Лебега частичных сумм специального ряда.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, ряды Фурье, специальные ряды, функция типа Лебега.

APPROXIMATION OF DISCRETE FUNCTIONS USING SPECIAL SERIES BY MEIXNER POLYNOMIALS

R. M. Gadzhimirzaev (Makhachkala, Russia)
ramis3004@gmail.com

The purpose of this paper is to study of approximative properties of a special series by the modified Meixner polynomials $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$. For $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\alpha > -1$ these polynomials form an orthogonal system on the uniform grid $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$ with respect to the weight function $\rho_N(x,\alpha) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}$. The main attention is paid to obtaining an upper estimate on $\left[\frac{\theta_n}{2}, \infty\right)$ for the Lebesgue type function of partial sums of these series, where $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$.

Keywords: Meixner polynomials, Fourier series, special series, Lebesgue type function.

Введение

Пусть $N > 0$, $\delta = \frac{1}{N}$, $\Omega_\delta = \{0, \delta, 2\delta, \dots\}$, $\rho_N(x) = \rho_N(x,\alpha) = e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1 - e^{-\delta})^{\alpha+1}$ – весовая функция. Обозначим через $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ модифицированные полиномы Мейкснера, которые при $\alpha > -1$ ортогональны на равномерной сетке Ω_δ относительно веса $\rho_N(x)$, т.е

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} M_{n,N}^{\alpha}(x) M_{k,N}^{\alpha}(x)\rho_N(x) = h_{n,N}^{\alpha}\delta_{nk},\ \alpha > -1,$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, $h_{n,N}^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}e^{n\delta}\Gamma(\alpha+1)$. Соответствующие ортонормированные с весом $\rho_N(x)$ полиномы обозначим через $m_{n,N}^{\alpha}(x) = (h_{n,N}^{\alpha})^{-1/2}M_{n,N}^{\alpha}(x)$ $(n = 0, 1, \dots)$.

Далее через $l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)$ обозначим пространство дискретных функций $f(x)$, заданных на множестве Ω_δ и удовлетворяющих условию

$\sum\limits_{x\in\Omega_\delta} f^2(x)\rho_N(x) < \infty$. Для $x \in \Omega_{r,\delta} = \{r\delta, (r+1)\delta, \ldots\}$ мы можем определить дискретный аналог полинома Тейлора вида $P_{r-1,N}(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} \frac{\Delta_\delta^\nu f(0)}{\nu!}(Nx)^{[\nu]}$, где $\Delta_\delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta_\delta^1 f(x) = f(x+\delta) - f(x)$, $\Delta_\delta^k f(x) = \Delta_\delta^1(\Delta_\delta^{k-1} f(x))$. Нетрудно проверить, что если $f(x) \in l^2_{\rho_N}(\Omega_\delta)$, тогда функция $f_r(x) = \frac{f(x)-P_{r-1,N}(x)}{N^{-r}(Nx)^{[r]}}$ принадлежит пространству $l^2_{\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$, где $\rho_{N,r}(x) = \rho_N(x - r\delta)$. Поскольку модифицированные полиномы Мейкснера $m^\alpha_{k,N,r}(x) = m^\alpha_{k,N}(x - r\delta)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ при $\alpha > -1$ образуют ортонормированный базис в $l^2_{\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$, то мы можем определить коэффициенты Фурье–Мейкснера

$$\hat{f}^\alpha_{r,k} = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} f_r(t)\rho_{N,r}(t)m^\alpha_{k,N,r}(t) = \sum_{t\in\Omega_{r,\delta}} \frac{f(t) - P_{r-1,N}(t)}{N^{-r}(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)m^\alpha_{k,N,r}(t)$$

и ряд Фурье–Мейкснера $f_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}^\alpha_{r,k} m^\alpha_{k,N,r}(x)$, который в силу базисности в $l^2_{\rho_{N,r}}(\Omega_{r,\delta})$ системы полиномов $m^\alpha_{k,N,r}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ сходится равномерно относительно $x \in \Omega_{r,\delta}$. Отсюда следует, что

$$f(x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}^\alpha_{r,k} m^\alpha_{k,N,r}(x). \tag{1}$$

Ряд (1) и есть специальный ряд по модифицированным полиномам Мейкснера для функции $f(x)$. Частичную сумму ряда (1) обозначим через

$$S^\alpha_{n+r,N}(f,x) = P_{r-1,N}(x) + N^{-r}(Nx)^{[r]} \sum_{k=0}^{n} \hat{f}^\alpha_{r,k} m^\alpha_{k,N,r}(x).$$

Отсюда мы видим, что при $n \geq 1$ имеет место равенства $S^\alpha_{n+r,N}(f,x) = f(x)$ для $x \in \{0, \delta, 2\delta, \ldots, (r-1)\delta\}$. Кроме того, если $f(x) = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то, очевидно, $\hat{f}^\alpha_{r,k} = 0$ при $k \geq n+1$ и поэтому из (1) следует $S^\alpha_{n+r,N}(p_{n+r}, x) \equiv p_{n+r}(x)$, т.е. $S^\alpha_{n+r,N}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов $p_{n+r}(x)$ степени не выше $n+r$. Обозначим через $q_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, для которого $\Delta^i f(0) = \Delta^i q_{n+r}(0)$ $(i = \overline{0, r-1})$. Тогда

$$\left|f(x) - S^\alpha_{n+r,N}(f,x)\right| \leq |f(x) - q_{n+r}(x)| + \left|S^\alpha_{n+r,N}(q_{n+r} - f, x)\right|.$$

Отсюда для $x \in \Omega_{r,\delta}$

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left|f(x) - S^\alpha_{n+r,N}(f,x)\right| \leq e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} |f(x) - q_{n+r}(x)| +$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S^{\alpha}_{n+r,N}(q_{n+r}-f,x)\right|. \tag{2}$$

Так как $P_{r-1,N}(q_{n+r}-f,x)=0$, то

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|S^{\alpha}_{n+r,N}(q_{n+r}-f,x)\right| =$$

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{|q_{n+r}(t)-f(t)|}{(Nt)^{[r]}}\rho_{N,r}(t)\left|\mathcal{K}^{\alpha}_{n,N}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \tag{3}$$

Положим

$$E^r_k(f,\delta)=\inf_{q_k}\sup_{x\in\Omega_{r,\delta}}e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x)-q_k(x)\right|, \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $q_k(x)$ степени k, для которых $\Delta^i f(0)=\Delta^i q_k(0)$ $(i=\overline{0,r-1})$. Тогда из (2)–(4), получаем

$$e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\left|f(x)-S^{\alpha}_{n+r,N}(f,x)\right|\le E^r_{n+r}(f,\delta)(1+l^{\alpha,r}_{n,N}(x)), \tag{5}$$

где

$$l^{\alpha,r}_{n,N}(x)=e^{-\frac{x}{2}}x^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(Nx)^{[r]}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\times$$
$$\sum_{t\in\Omega_{r,\delta}}\frac{e^{-\frac{t}{2}+r\delta}t^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}\Gamma(Nt-r+\alpha+1)}{(Nt)^{[r]}\Gamma(Nt-r+1)}\left|\mathcal{K}^{\alpha}_{n,N}(t-r\delta,x-r\delta)\right|. \tag{6}$$

В связи с неравенством (5) возникает задача об оценке на $[r\delta,\infty)$ функции типа Лебега $l^{\alpha,r}_{n,N}(x)$, определенной равенством (6). С этой целью введем следующие обозначения: $G_1=[r\delta,\frac{3\lambda}{\theta_n}]$, $G_2=[\frac{3\lambda}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}]$, $G_3=[\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]$, $G_4=[\frac{3\theta_n}{2},\infty)$. Для $x\in G_1\bigcup G_2$ это задача была решена в работе [1]. В настоящей работе мы будем оценивать функцию $l^{\alpha,r}_{n,N}(x)$ на множествах G_3 и G_4.

1. Некоторые сведения о полиномах $M^{\alpha}_{n,N}(x)$

При оценке функции $l^{\alpha,r}_{n,N}(x)$ нам понадобятся некоторые сведения о полиномах $M^{\alpha}_{n,N}(x)$. Для этих полиномов имеет место формула Кристоффеля–Дарбу

$$\mathcal{K}^{\alpha}_{n,N}(t,x)=\sum_{k=0}^{n}m^{\alpha}_{k,N}(t)m^{\alpha}_{k,N}(x)=$$
$$\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{e^{\frac{\delta}{2}}-e^{-\frac{\delta}{2}}}\frac{m^{\alpha}_{n+1,N}(t)m^{\alpha}_{n,N}(x)-m^{\alpha}_{n,N}(t)m^{\alpha}_{n+1,N}(x)}{x-t}$$

и следующие весовые оценки [2]

$$e^{-\frac{x}{2}}\left|m_{n,N}^{\alpha}(x\pm s\delta)\right|\le c(\alpha,\lambda,s)\theta_n^{-\frac{\alpha}{2}}A_n^{\alpha}(x),$$

$$A_n^{\alpha}(x)=\begin{cases}\theta_n^{\alpha}, & 0\le x\le\frac{1}{\theta_n},\\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta_n}<x\le\frac{\theta_n}{2},\\ \left[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}}+|x-\theta_n|)\right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta_n}{2}<x\le\frac{3\theta_n}{2},\\ e^{-\frac{3x}{8}}, & \frac{3\theta_n}{2}<x<\infty.\end{cases}$$

Кроме того, нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [3].

Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha\in\mathbb{R}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $t\ge0$, $N=1/\delta$, $0<\delta\le1$. *Тогда для* $1\le n\le\lambda N$ *имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t)\le c(\alpha,\lambda)n^{1-\alpha}(A_n^{\alpha}(t))^2.$$

Лемма 2. *Пусть* $-1<\alpha\in\mathbb{R}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $\theta_n/2\le t\le3\theta_n/2$, $N=1/\delta$, $0<\delta\le1$. *Тогда для* $1\le n\le\lambda N$ *равномерно относительно* t *имеет место следующая оценка*

$$e^{-t}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(t,t)\le c(\alpha,\lambda)n^{-\alpha}.$$

2. Основной результат

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть* $r\in\mathbb{N}$, $r-\frac{1}{2}<\alpha<r+\frac{1}{2}$, $\theta_n=4n+2\alpha+2$, $\lambda>0$, $0<\delta\le1$, $1\le n\le\lambda N$. *Тогда имеют место следующие оценки:*
1) если $x\in G_3$, *то*

$$l_{n,N}^{\alpha,r}(x)\le c(\alpha,\lambda,r)\left[\ln(n+1)+\left(\frac{\theta_n}{\theta_n^{\frac{1}{3}}+|x-\theta_n|}\right)^{\frac{1}{4}}\right];$$

2) если $x\in G_4$, *то* $l_{n,N}^{\alpha,r}(x)\le c(\alpha,\lambda,r)n^{-\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{4}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гаджимирзаев Р. М.* Аппроксимативные свойства специальных рядов по полиномам Мейкснера // Владикавк. матем. журн. 2018. Т. 20, № 3. С. 21–36.

[2] *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 255 с.

[3] *Гаджимирзаев Р. М.* Оценка функции Лебега сумм Фурье по модифицированным полиномам Мейкснера // Матем. заметки. 2019. Т. 160, № 4. С. 519–530.

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ МОДЕЛЬНОМ ПРИМЕРЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

В работе рассматривается модификация метода подобных операторов, применяемая при исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка. При этом существенно используется весовая последовательность, отвечающая за скорость убывания матричных элементов оператора-возмущения. Построен модельный пример.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, допустимая тройка.

ON ONE MODEL EXAMPLE OF A SIMILAR OPERATOR METHOD[1]

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova (Voronezh, Russia)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

We consider the modification of the similar operator method which usually used for the investigation perturbed differential operator first order. In this modification we used the weight sequence which characterizes the decay of the matrix elements of perturbation along its rows and columns. The model example is given.

Keywords: a similar operator method, differential operator first order, admissible triplet.

Введение

В серии работ Ф.П. Хромова и М.Ш. Бурлуцкой (см. например [1–4]) изучались дифференциальные операторы перого порядка с инволюцией, в основном, сведением к операторам Дирака. При этом рассматривались различные граничные условия и различные места нахождения инволюции: при производной или при потенциале. Другим, альтернативным, методом исследования спектральных свойств указанных выше операторов является метод подобных операторов. Таким методом проводились исследования в работах А. Г. Баскакова совместно с учениками [5–9]. При этом потребовалась несколько другая модификация метода подобных операторов, впервые предложенная в работе [5]. Это обусловлено тем, что у дифференциального оператора первого порядка, выступающего в роли невозмущенного оператора, собственные значения не разбегаются и нельзя ожидать автоматического выполнения условий пременимости метода подобных операторов. Поэтому приходится вводить

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).
[1]The article is done with the financial support of RFFI (project № 19-01-00732).

некоторую весовую последовательность, отвечающую за скорость убывания матричных элементов матрицы оператора-возмущения по строкам и по столбцам и получать условия применимости метода в терминах этой последовательности. Все результаты работ [5-9] получены с использованием этой последовательности, но соответствующей общей модификации метода подобных операторов в этих работах не было. Такая модификация была, наконец, разработана в недавно вышедшей работе [10]. И теперь встал вопрос о простом и понятном примере, иллюстрирующем эту общую модификацию, причем таком, для которого весовая последовательность легко считается. Заметим, что в [5–9] конкретного вида этой последовательности выписано не было. Мы предлагаем именно такой модельный пример, который позволяет легко и понятно проиллюстрировать указанную модификацию метода подобных операторов. При этом оказалось, что предложенный ниже пример интересен еще и тем, что он позволяет построить и проиллюстрировать четыре допустимых тройки (см. [10, definition 3.1], [5, определение 2]) метода подобных операторов, что является редкостью.

Основные результаты

Введем в рассмотрение трехдиагональную бесконечную матрицу $\mathcal{A}$ вида

$$\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{-\beta_1}{2} & -2a & -\beta_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & -\beta_1 & -a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & 0 & 0 & \beta_2 & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \beta_1 & a & \frac{\beta_2}{2} & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\beta_1}{2} & 2a & \frac{\beta_2}{3} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}$$

Здесь $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ – постоянная и β_1, β_2 некоторые константы.

Матрица $\mathcal{A}$ определяет в пространстве $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ линейный оператор $A\colon D(A) \subset l_2 \to l_2$, действующий по формуле

$$(Ax)(n) = anx(n) + \frac{\beta_1}{n}x(n-1) + \frac{\beta_2}{n+1}x(n+1),\ n \neq 0, n \neq -1,$$

$$(Ax)(0) = \beta_2 x(1),\ (Ax)(-1) = -ax(-1) - \beta_1 x(-2),$$

с областью определения $D(A) = \{x \in l_2\colon \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |nx(n)|^2 < \infty\}$.

Представим оператор A в виде $A = A_0 - B$, где $A_0\colon D(A_0) = D(A) \subset l_2 \to l_2$, $(A_0x)(n) = anx(n)$ и $B = A_0 - A$.

Введем, используемые далее, операторные пространства. Символом $End\,\ell_2$ обозначена банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в ℓ_2 с нормой $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Xx\|$, $X \in End\,\ell_2$, $x \in \ell_2$. Через $\mathfrak{S}_2(\ell_2)$ обозначен двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта. $\mathfrak{S}_2(\ell_2) \subset End\,\ell_2$ с нормой $\|X\|_2$. Все операторы из $End\,\ell_2$ также будут считаться заданными своими матрицами относительно стандартного базиса пространства ℓ_2. Для оператора $X \in End\,\ell_2, X = (x_{ij})$, введем в рассмотрение последовательность $d_X\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, положив $d_X(n) = \sup\limits_{i-j=n}|x_{ij}|$. Оператор X из $End\,\ell_2$ отнесем к пространству $End_1\,\ell_2$ операторов, имеющих матрицы с суммируемыми диагоналями, если конечна величина $d_X = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} d_X(i)$. В пространстве $End_1\,\ell_2$ зададим норму, положив $\|X\|_1 = d_X, X \in End_1\,\ell_2 \subset End\,\ell_2$.

Пусть $P_i = P(\{ai\}, A_0), i \in \mathbb{Z}$ и $P_{(k)} = \sum\limits_{|i|\le k} P_i,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Отметим, что $B \in End\ell_2$, $B \in End_1\ell_2$ и $B \in \mathfrak{S}_2(\ell_2)$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из условий:*
1) $\sqrt{3}\pi\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2} < a$; *2)* $3(|\beta_1|+|\beta_2|) < a$; *3)* $3\|B\|_\infty < a$.
Тогда оператор A подобен оператору $A_0 - \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} P_iX_*P_i$, имеющемму диагональную матрицу. Оператор X_* есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов и это решение можно найти методом итераций, полагая $X_{*(0)} = 0$, $X_{*(1)} = B$ и т. д.

Отметим, что уравнение при выполнении условия 1) рассматривается в $\mathfrak{S}_2(\ell_2)$ и $X_* \in \mathfrak{S}_2(\ell_2)$, при выполнении условий 2) и 3) — в $End_1\ell_2$, $X \in End_1\ell_2$ и $End\ell_2$, $X \in End\ell_2$ соответственно.

При исследовании дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и оператора Дирака используется другое операторное пространство. Чтобы его описать для каждого ненулевого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ введем двустороннюю последовательность

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1}\max\{(\sum_{|k|\ge n}\|XP_k\|_2^2)^{1/4}, (\sum_{|k|\ge n}\|P_kX\|_2^2)^{1/4}\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Такая последовательность характеризует скорость убывания элементов матрицы оператора X по строкам и столбцам.

Рассмотрим оператор $f(A) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n(B)P_n \in End\ell_2$. Введем пространство $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ операторов, допускающих представление $X = X_lf(A), X = f(A)X_r$, с нормой $\|X\|_* = \max\{\|X_r\|_2, \|X_l\|_2\}$. Очевидно, что $B \in \mathcal{M}_B$ и $\alpha_0(B) = 1$. Таким образом, операторы из $\mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ наследуют скорость убывания матричных элементов возмущения B.

Теорема 2. *Существует такое $k \geq 0$, что оператор A подобен блочно-диагональному оператору $A_0 - P_{(k)}X_*P_{(k)} - \sum\limits_{|i|>k} P_iX_*P_i$, где $X_* \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$ и преобразование подобия осуществляет оператор $U \in End\ell_2$, такой что $U - I \in \mathcal{M}_B \subset \mathfrak{S}_2(\ell_2)$.*

Например, если $\beta_1 = \beta_2 = 1$, тогда для элементов последовательности $\alpha_n(B)$, $n \geq 3$, характеризующей скорость убывания, имеется оценка

$$\frac{4n^4 - 6n^3 + 4n^2 + 1}{\pi n^2(n-1)^2(n+1)}\sqrt{\frac{3}{2}} \leq \alpha_n(B) \leq \frac{4n^3 - 4n^2 + 1}{\pi n^2(n-1)^2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бурлуцкая М. Ш.* Классичесское и обобщенное решение смешанной задачи для системмы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 3. С. 380–390.

[2] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Оператор Дирака с потенциалом специального вида и периодическими краевыми условиями // Дифференц. уравнения 2018. Т. 54, № 5. С. 592–601.

[3] *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача для системмы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 145–151.

[4] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 15–17.

[5] *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

[6] *Baskakov A. G., Krishtal I. A.and Uskova N. B.* Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group // Operators and Matrices. 2018. Vol. 12, № 3. P. 723–756.

[7] *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 2. С. 277–281.

[8] *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Метод Фурье для дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, № 3. С. 11–34.

[9] *Ускова Н. Б.* Спектральные свойства оператора Дирака с негладким потенциалом общего вида и группы операторов // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 8. С. 1154–1158.

[10] *Baskakov A. G., Krishtal I. A.and Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices // J. Math. Anal. App. 2019. Vol. 477. P. 930–960.

УДК 517.53/.55

О СВОЙСТВАХ ОБОБЩЁННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. А. Гладышев (Калуга, Россия)
v572264@yandex.ru

В работе представлено построение обобщённых степеней Берса в комплексном пространстве. Обсуждаются некоторые свойства таких степеней. Приведены условия возможности их построения.

Ключевые слова: комплексное пространство, обобщенная степень, матричный аппарат.

ON THE PROPERTIES OF GENERALIZED POWERS OF BERS IN COMPLEX SPACE

Yu. A. Gladyshev (Kaluga, Russia)
v572264@yandex.ru

The paper presents the construction of generalized Bers powers in a complex space. Some properties of such powers are discussed. The conditions of the possibility of the construction are given.

Keywords: complex space, generalized powers, matrix apparatus.

Понятие обобщённой степени (ОС) было введено Л. Берсом [1] для случая одного переменного как результат последовательного интегрирования постоянной величины при введении подынтегральных положительных весовых функций. Эта конструкция была использована при построении обобщённых методов теории функций комплексного переменного для нахождения решений уравнений с переменными коэффициентами. В [2] было приведено построение ОС в многомерном пространстве. Ниже будем следовать этой работе и приведём метод построения ОС в комплексном пространстве C^2.

Введём комплексные переменные $z_1 = x_2 + ix_1$, $z_2 = x_4 + ix_3$ и соответствующие сопряженные $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$. На основе этих переменных найдём линейные дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - i\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_4} + i\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

которыми являются операции интегрирования по соответствующим комплексным переменным в их чисто алгебраическом понимании.

Введём матричные операторы

$$d_1(1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} \end{pmatrix}, \quad d_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

действующие на вектор-функцию F, определённую в C^2.

Необходимым условием возможности построения последовательности ОС двух переменных вида $X_1^{(n)}X_2^{(m)}c$ является перестановочность операторов (3). Легко установить, что операторы (3) коммутируют, только если $d_1(1)$ не зависит от переменной x_3. ОС в данном случае определена в R^3. Этот случай был изучен ранее в [2]. На основе принципа соответствия получены как известные решения уравнения Лапласа, так и особые.

Чтобы получить коммутирующие операторы, перейдём к операторам вида

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & d_1(1) \\ \overline{d}_1(1) & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{d}_2(2) \\ d_2(2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти операторы коммутируют, имеют правые обратные и обобщённые константы как функции двух комплексных переменных, а именно

$$c_1 = z_1^k z_2^l, \quad c_2 = \overline{z}_1^k \overline{z}_2^l, \quad c_3 = \overline{z}_1^k z_2^l, \quad c_4 = z_1^k \overline{z}_2^l.$$

Этих условий достаточно для построения последовательностей ОС.

ОС обладают свойствами

$$D_1 X_1^{(n)} X_2^{(m)} c = n X_1^{(n-1)} X_2^{(m)} c, \quad D_2 X_1^{9n)} X_2(m) c = m X_1^{(n)} X_2^{(m-1)} c,$$
$$D_1 X_2^{(m)} c = 0, \quad X_1^{(0)} X_2(m) c = X_2(m) c,$$
$$D_2 X_2^{(n)} c = m X_2^{(m-1)} c, \quad X_1^{(0)} X_2^{(0)} c = c.$$

Изучено поведение степени относительно группы сдвигов.

Если за операторы I приняты обычные алгебраические правила интегрирования, то выражения для ОС получаются в явном виде как функции переменных z_1, z_2, $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$.

Установлены связи со спинорными инвариантами [3]. Рассмотрены решения основного уравнения и их поведение при унитарных преобразованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56. P. 67–93.

[2] *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга : Изд-во КГУ, 1997. 314 с.

[3] *Бринкман Г.* Применение спинорных инвариантов в атомной физике. М. : Иностр. лит., 1959. 96 с.

УДК 517.958

О ПРИМЕНЕНИИ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА[1]

Ю. А. Гладышев, В. В. Калманович, М. А. Степович
(Калуга, Россия)
v572264@yandex.ru

Моделируется процесс остывания в многослойной среде. Рассматривается одномерная задача теплопроводности. Решение задачи ищется методом Фурье. Проблема многослойности решается с помощью матричного метода.

Ключевые слова: многослойная среда, теплоперенос, матричный метод, задача теплопроводности.

ON THE APPLICATION OF THE MATRIX METHOD FOR MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER PROCESSES[1]

Yu. A. Gladyshev, V. V. Kalmanovich, M. A. Stepovich
(Kaluga, Russia)
v572264@yandex.ru

The cooling process is simulated in a multilayer medium. The one-dimensional heat conduction problem is considered. The solution to the problem is sought by the Fourier method. The multilayer problem is solved using the matrix method.

Keywords: multilayer medium, heat transfer, matrix method, heat conduction problem.

Для построения аналитического решения стационарной задачи теплопроводности в многослойной среде ранее нами было предложено использовать совместно аппарат обобщённых степеней Берса [1] и матричный метод [2], [3], [4]. В данной работе показана возможность сочетания этих методов и классического метода Фурье для решения нестационарной задачи теплопроводности в многослойной среде.

Рассмотрим многослойную среду из n слоёв различных материалов. Ось x направим по потоку тепла $J(x)$, перпендикулярно слоям. Координаты границ слоёв обозначим x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}. Номер (i) слоя (x_i, x_{i+1}) для соответствующих физических величин будем отмечать в верхнем индексе в скобках. Процесс переноса в каждом слое определён температурой $T^{(i)}(x,t)$ и потоком $J^{(i)} = -a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}$, которые удовлетворяют уравнениям

[1]Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

[1]The article is done with the financial support of Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-03-00271, and by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of Kaluga Oblast, project no. 18-41-400001.

$$a_2^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x}\right)-\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

условиям идеального контакта на границах слоёв

$$T^{(i)}(x_{i+1},t)=T^{(i+1)}(x_{i+1},t),\quad J^{(i)}(x_{i+1},t)=J^{(i+1)}(x_{i+1},t)$$

и краевым условиям первого рода

$$T^{(1)}(x_1,t)=0,\quad T^{(n)}(x_{n+1},t)=0.$$

Коэффициенты $a_1^{(i)}(x)$, $a_2^{(i)}(x)$ учитывают возможную неоднородность слоёв и геометрию всей среды. Например, слои могут быть плоские или могут иметь осевую или центральную симметрию.

И пусть задано начальное распределение температуры

$$T^{(i)}(x,0)=g(x),\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=\overline{1,n}.$$

Функция $g(x)$ задана для всей многослойной среды и, вообще говоря, она может быть разрывной.

Решение задачи будем искать методом Фурье. Частное решение уравнений (1) запишем в виде

$$T^{(i)}(x,t)=u^{(i)}(x)e^{-\lambda^2 t},\quad i=\overline{1,n}.$$

Амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$a_2^{(i)}(x)\frac{d}{dx}\left(a_1^{(i)}(x)\frac{du^{(i)}}{dx}\right)+\lambda^2u^{(i)}(x)=0$$

и граничным условиям

$$u^{(1)}(x_1)=0,\quad u^{(n)}(x_{n+1})=0,\quad u^{(i)}(x_{i+1})=u^{(i+1)}(x_{i+1}),\quad i=\overline{1,n}.$$

В работе [5] получено решение задачи Коши для каждого слоя

$$\begin{aligned}u^{(i)}(x)&=u^{(i)}(x_i)\cos\lambda X_i(x,x_i)-\tfrac{1}{\lambda}j^{(i)}(x_i)\sin\lambda X(x,x_i),\\ j^{(i)}(x)&=u^{(i)}(x_i)\lambda\sin\lambda\tilde{X}_i(x,x_i)+j^{(i)}(x_i)\cos\lambda\tilde{X}(x,x_i),\end{aligned} \tag{2}$$

где $j^{(i)}=-a_1^{(i)}(x)\frac{du^{(i)}}{dx}$. Здесь $X_i(x,x_i)$ и $\tilde{X}_i(x,x_i)$ – обобщённая и присоединённая обобщённая степени Берса [1] соответственно.

Введём вектор-столбцы $V^{(i)}(x)$, $V^{(i)}(x_i)$ и матрицу K

$$V^{(i)}(x)=\begin{pmatrix}u^{(i)}(x)\\ j^{(i)}(x)\end{pmatrix},\quad V^{(i)}(x_i)=\begin{pmatrix}u^{(i)}(x_i)\\ j^{(i)}(x_i)\end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(x,x_i)=\begin{pmatrix}\cos\lambda X_i(x,x_i) & -\frac{1}{\lambda}\sin\lambda X_i(x,x_i)\\ \lambda\sin\lambda\tilde{X}_i(x,x_i) & \cos\lambda\tilde{X}_i(x,x_i)\end{pmatrix}.$$

Тогда решение (2) запишем в матричной форме

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_i)V^{(i)}(x_i).$$

Для крайней точки i-го слоя получим

$$V^{(i)}(x_{i+1}) = K^{(i)}(x_{i+1}, x_i)V^{(i)}(x_i). \tag{3}$$

Выражение (3), учитывая записанные в матричной форме контактные условия $V^{(i)}(x_{i+1}) = V^{(i+1)}(x_{i+1})$, будем применять последовательно, начиная с первого слоя. Тогда получим:

$$V^{(i)}(x) = K^{(i)}(x, x_1)V^{(1)}(x_1), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{4}$$

где $K^{(i,1)}(x, x_1) = K^{(i)}(x, x_i)K^{(i-1)}(x_i, x_{i-1})...K^{(1)}(x_2, x_1)$.

Формула (4) определяет значения $u^{(i)}(x)$ и $j^{(i)}(x)$ в i-ом слое через значения $u^{(1)}(x_1)$ и $j^{(1)}(x_1)$ в начальной точке системы. В конечной точке системы слоёв получим

$$V^{(n)}(x_{n+1}) = K^{(n,1)}(x_{n+1}, x_1)V^{(1)}(x_1). \tag{5}$$

Уравнение (5) даёт возможность находить собственные значения для различных краевых задач, так как зная какую-либо пару значений из $u^{(1)}(x_1)$, $u^{(n)}(x_{n+1})$, $j^{(1)}(x_1)$, $j^{(n)}(x_{n+1})$ можно найти другую пару. Введем обозначения $k_{ij}^{(n,1)}$ для элементов матрицы $K^{(n,1)}$. Тогда для решения первой краевой задачи при выполнении $u^{(1)}(x_1) = 0$, $u^{(n)}(x_{n+1}) = 0$ имеем условие $k_{12}^{(n,1)} = 0$ для определения собственных значений λ_k.

Решение, соответствующее собственному значению λ_k, обозначим $u_k^{(i)}(x)$. Для нормировки найдём

$$N_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{a_2^{(i)}} \left(u_k^{(i)}\right)^2 dx,$$

тогда соответствующие собственные функции найдём по формулам $f_k^{(i)} = u_k^{(i)}/N_k^2$. Коэффициенты в разложении Фурье определим из скалярного произведения

$$c_k = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) \frac{1}{a_2^{(i)}} \left(u_k^{(i)}\right)^2 dx.$$

Таким образом, имеем решение уравнения (1)

$$T^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k^{(i)}(x) e^{-\lambda_k^2 t}.$$

Применение обобщённых степеней Берса позволяет в едином аналитическом виде получить решение для различных видов симметрии среды (сдвиговой, осевой или центральной). Матричный метод даёт возможность свести нахождение собственных значений и собственных функций при решении первой краевой задачи к решению одного уравнения при любом конечном числе слоёв.

Для иллюстрации возможностей предлагаемого подхода проведены расчёты для модельных задач теплопроводности в планарной многослойной среде и в среде с осевой симметрией с постоянными коэффициентами в каждом слое. Данный метод применим и при других видах граничных условий, например, если поставлена задача третьего типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. Vol. 56. P. 67–93.

[2] *Калманович В. В., Степович М. А.* О совместном применении матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем, М. : ИППМ РАН, 2018. Вып. III. С. 194–201.

[3] *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2017. № 10. С. 105–110.

[4] *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2018. Вып. 3. С. 158–167.

[5] *Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А.* Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде // Вестник Калужского университета. 2015. № 3. С. 5–10.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ И УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА РЕШЕНИЙ

А. А. Голубков (Москва, Россия)
andrej2501@yandex.ru

Для уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом и условиями разрыва решений на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ поставлена обратная спектральная задача по передаточной матрице вдоль этой кривой. Методом единичной передаточной матрицы доказана единственность решения поставленной задачи с помощью исследования асимптотики решений уравнения Штурма–Лиувилля при больших значениях модуля спектрального параметра. Изучена также обратная задача по отношению элементов одного столбца или одной строки передаточной матрицы.

Ключевые слова: метод единичной передаточной матрицы, условия разрыва решений, асимптотика решений.

THE INVERSE PROBLEM FOR THE STURM – LIOUVILLE EQUATION WITH A PIECEWISE-INTEGER POTENTIAL ON THE CURVE AND WITH CONDITIONS FOR THE DISCONTINUITY OF SOLUTIONS

A. A. Golubkov (Moscow, Russia)
andrej2501@yandex.ru

The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville equation with a piecewise-entire potential function and the discontinuity conditions for solutions on a rectifiable curve $\gamma \subset \mathbf{C}$ by the transfer matrix along this curve is studied. By the method of a unit transfer matrix the uniqueness of the solution to this problem is proved with the help of studying of the asymptotic behavior of the solutions to the Sturm–Liouville equation for large values of the spectral parameter module. The inverse problem by the ratio of elements of one column or one row of the transfer matrix is also studied.

Keywords: method of a unit transfer matrix, solution jump conditions, asymptotic behavior of solutions.

Обратные задачи для стандартного уравнения Штурма–Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1}$$

в случае вещественной переменной хорошо изучены в различных постановках. Для уравнений Штурма–Лиувилля общего вида даже с действительными коэффициентами они исследованы значительно меньше.

Уравнение Штурма–Лиувилля общего вида на отрезке можно преобразовать в стандартное уравнение Штурма–Лиувилля на кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$ известной подстановкой, что могло бы стать одним из эффективных методов исследования обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля общего вида на отрезке. К сожалению, даже прямые задачи для уравнений Штурма–Лиувилля на кривых изучены только в очень ограниченном числе случаев. Среди обратных задач на кривых до недавнего времени достаточно полно была исследована только задача о безмонодромных уравнениях Штурма–Лиувилля стандартного вида с потенциалом, суммируемым на кусочно-гладкой замкнутой кривой, являющейся границей некоторой выпуклой ограниченной области [1]. Однако требование выпуклости замкнутой кривой заметно ограничивает область возможного применения полученных в [1] результатов.

Первый шаг в направлении снятия ограничений на форму кривой в обратной задаче для уравнения (1) был сделан в работе [2] за счёт сужения класса рассматриваемых потенциалов до кусочно-целых функций, т.е. функций, которые на разных участках кривой почти всюду совпадают с различными целыми функциями комплексной переменной z. Это сужение позволило поставить обратную задачу для уравнения Штурма–Лиувилля стандартного вида по столбцу или строке передаточной матрицы вдоль не заданной непрерывной спрямляемой кривой произвольной формы (в том числе самопересекающейся) и сформулировать условия единственности её решения. При этом наряду с традиционным исследованием асимптотики решений уравнения Штурма–Лиувилля при больших значениях модуля спектрального параметра впервые был использован метод единичной матрицы.

В докладе полученные в [2, 3] результаты обобщены на случай, когда на произвольной непрерывной спрямляемой кривой γ имеется конечное число точек, в которых решения уравнения (1) с кусочно-целым потенциалом Q и (или) их производные вдоль кривой претерпевают разрывы. Причём кривая γ, потенциал Q, положение точек разрыва решений на кривой и матрицы перехода в них, а также матрицы перехода в начальной и конечной точках кривых априори неизвестны.

Обозначим: $\hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пусть на непрерывной спрямляемой кривой $\gamma \subset \mathbf{C}$, заданной параметрически функцией $z = V(t)$ $(t \in [t_0, t_f])$, определена кусочно-целая функция Q и заданы точки, в которых решения стандартного уравнения Штурма–Лиувилля (1) и (или) их производные имеют разрывы, не зависящие от параметра $\rho := \lambda^2$.

Иными словами, пусть потенциал Q ограничен на γ, и существуют целое число $N \geq 0$ и набор чисел $T = \{t_j\}_0^{N+1} : t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} \equiv t_f$ такие, что

$$Q(z) \overset{\text{п.в.}}{=} Q_m(z), \text{ если } z = V(t), \; t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (m = \overline{0, N}), \qquad (2)$$

где все Q_m — целые функции. Кроме того, пусть функции $u(z)$ и $u'(z)$ удовлетворяют условиям разрыва в точках $z_j := V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ кривой γ:

$$\begin{pmatrix} u(V(t_0+0)) \\ u'(V(t_0+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(0)} \begin{pmatrix} u(V(t_0)) \\ u'(V(t_0)) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u(V(t_n+0)) \\ u'(V(t_n+0)) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(n)} \begin{pmatrix} u(V(t_n-0)) \\ u'(V(t_n-0)) \end{pmatrix} (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1), \quad (3)$$
$$\begin{pmatrix} u(V(t_{N+1})) \\ u'(V(t_{N+1})) \end{pmatrix} = \hat{\eta}^{(N+1)} \begin{pmatrix} u(V(t_{N+1}-0)) \\ u'(V(t_{N+1}-0)) \end{pmatrix},$$

где матрицы перехода $\hat{\eta}^{(j)}$ $(j = \overline{0, N+1})$ не зависят от спектрального параметра ρ. При этом, если $N \geq 1$, то для всех чисел $n \in \{1, \ldots, N\}$ выполнены следующие условия:

$$\hat{\eta}^{(n)} \neq \hat{I} \text{ или (и) } Q_n \neq Q_{n-1} \quad (n = \overline{1, N} \text{ при } N \geq 1). \qquad (4)$$

Определение. *При выполнении условий (2) и (4) будем называть рассматриваемое на непрерывной спрямляемой кривой γ уравнение (1), дополненное условиями разрыва решений (3), уравнением класса D на кривой γ, а точки $z_j = V(t_j)$ $(j = \overline{0, N+1})$ — характеристическими точками кривой γ и уравнения (1) класса D на γ. При этом упорядоченное множество*

$$W := \{N, \{z_j, \hat{\eta}^{(j)}\}_0^{N+1}, \{Q_m\}_0^N\} \qquad (5)$$

будем называть набором характеристических данных кривой γ и уравнения (1) класса D на γ.

Определение. *Будем называть $u(z)$ решением уравнения (1) класса D на кривой γ, если функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на γ, является непрерывно-дифференцируемой во всех её точках, кроме, возможно, характеристических, и удовлетворяет всем условиям разрыва (3).*

Определение. *Пусть $u_1(z), u_2(z)$ — решения уравнения (1) класса D на кривой γ с характеристическими точками z_j $(j = \overline{0, N+1})$ и*

$$u_1(z_b) = 1, \ u_1'(z_b) = 0,$$
$$u_2(z_b) = 0, \ u_2'(z_b) = 1 \ \ (z_b \notin \{z_j\}_1^N \textit{ при } N \geq 1, \ z_b \in \gamma).$$

Назовём передаточной матрицей уравнения (1) класса D между точками z_b и z кривой γ матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_b) = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix} \quad (z \in \gamma, \ z \notin \{z_j\}_1^N \textit{ при } N \geq 1).$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками кривой.

Определение. *Набор характеристических данных* (5) *уравнения* (1) *класса* D *будем называть регулярным, если* $\det \hat{\eta}^{(0)} \neq 0$, $\det \hat{\eta}^{(N+1)} \neq 0$, *а также выполнены следующие условия*

$$\det \hat{\eta}^{(n)} = 1, \ \ \hat{\eta}^{(n)} \notin \{\pm i\hat{\sigma}_3\} \ \ (n = \overline{1, N} \ \textit{при} \ N \geq 1),$$

$$\Delta z_m := z_{m+1} - z_m \neq 0 \ \ (m = \overline{0, N}).$$

Будем называть кривую регулярной, если на ней задано уравнение (1) *класса* D *с регулярным набором характеристических данных.*

Определение. *Регулярный набор характеристических данных* (5) *уравнения* (1) *класса* D *будем называть стандартным, если* $\det \hat{\eta}^{(0)} = 1$, $\hat{\eta}^{(0)} \notin \{\pm i\hat{\sigma}_3\}$ *и выполнены следующие условия*

$$\mathrm{Re}\,\{\eta_{11}^{(n)}\} > 0, \ \mathrm{Im}\,\{\eta_{11}^{(n)}\} \geq 0 \ \ \textit{или}$$
$$\eta_{11}^{(n)} = 0, \ \mathrm{Re}\,\{\eta_{12}^{(n)}\} > 0, \ \mathrm{Im}\,\{\eta_{12}^{(n)}\} \geq 0 \ (n = \overline{0, N}).$$

Будем называть кривую стандартной, если на ней задано уравнение (1) *класса* D *со стандартным набором характеристических данных.*

Один из основных результатов доклада отражает следующая теорема единственности.

Теорема *Пусть два уравнения* (1) *класса* D *имеют соответственно стандартные наборы характеристических данных* $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ *и передаточные матрицы* $\hat{P}^{(1)}$, $\hat{P}^{(2)}$ *вдоль двух кривых* $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ *с общей начальной точкой. Тогда* $\hat{P}^{(1)}(\rho) \equiv \hat{P}^{(2)}(\rho)$ *тогда и только тогда, когда* $W^{(1)} = W^{(2)}$.

В докладе проведено обощение понятий уравнения класса D и его стандартного набора характеритсических данных на случай, когда матрицы перехода могут зависеть от спектрального параметра λ. Кроме того, исследован вопрос: какую часть стандартного набора характеристических данных уравнения класса D на кривой можно однозначно определить по отношению элементов одной строки или одного столбца передаточной матрицы вдоль этой кривой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 552–568.

[2] *Голубков А. А.* Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля в комплексной плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 144–156.

[3] *Голубков А. А.* Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2019. № 2. С. 37–41.

УДК 517.518.24, 517.518.5

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Φ-ВАРИАЦИИ

Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия),
С. С. Волосивец (Саратов, Россия)
golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Доказывается несколько критериев непрерывности функций ограниченной Φ-вариации, принадлежащих пространствам L^q на $\mathbb{R}$. Первый результат связывает непрерывность функции с поведением ее преобразования Фурье, во втором используется модуль непрерывности в $\Psi(L)$, тогда как в третьем результате рассматривается степень приближения частными интегралами Фурье. Теоремы 1 и 3 в случае $\Phi(u) = |u|^p$, $1 \le p < \infty$, были получены ранее первым автором.

Ключевые слова: функции ограниченной Φ-вариации, преобразование Фурье, непрерывность.

FOURIER TRANSFORM AND CONTINUITY OF FUNCTIONS OF BOUNDED Φ-VARIATION

B. I. Golubov (Dolgoprudnyi, Russia),
S. S. Volosivets (Saratov, Russia)
golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Several criterions for the continuity of functions of bounded Φ-variation belonging to L^q spaces on $\mathbb{R}$ are proved. The first result connects continuity of a function with behaviour of its Fourier transform, in the second one a $\Psi(L)$ modulus of continuity is used, while in the third one the degree of approximation by partial Fourier integrals is considered. Theorems 1 and 3 in the case $\Phi(u) = |u|^p$, $1 \le p < \infty$, were obtained earlier by the first author.

Keywords: functions of bounded Φ-variation, Fourier transform, continuity.

Введение

В 1924 г. Н.Винер [1] доказал критерий непрерывности 2π-периодической функции ограниченной вариации. Его исследования были продолжены С.М.Лозинским [2,3], получившим другие критерии непрерывности также для функций ограниченной вариации в терминах поведения их коэффициентов Фурье, и первым из авторов [4], установившим, что результаты Н.Винера-С.М.Лозинского справедливы для функций ограниченной p-вариации при $1 < p \le 2$, но теряют силу при $p > 2$. Для 2π-периодических функций ограниченной Φ-вариации аналогичные результаты были доказаны Э.Коэном [5].

Пусть L^1V_1 — класс функций. интегрируемых по Лебегу и имеющих ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, причем для любой точки $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x) = 2^{-1}(f(x+0) + f(x-0)), \tag{1}$$

где $f(x+0)$, $f(x-0)$ — пределы справа и слева функции f в точке x. Для $f \in L^1(\mathbb{R})$ рассмотрим преобразование Фурье и частичный интеграл Фурье

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx}\, dt, \quad S_t(f)(x) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\sin t(x-u)}{x-u}\, du,$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. В [3] С.М.Лозинским была установлена

Теорема A. *Пусть $f \in L^1 V_1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: $f \in C(\mathbb{R})$, т.е. f непрерывна на $\mathbb{R}$;*

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \int_{-t}^{t} |u \widehat{f}(u)|\, du = 0; \tag{2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (\ln t)^{-1} \int_{-t}^{t} |\widehat{f}(u)|\, du = 0; \tag{3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} t \int_{\mathbb{R}} |f(x) - S_t(f)(x)|^2\, dx = 0. \tag{4}$$

Будем писать $f \in V_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, если

$$V_p^p(f) = \sup_{-\infty < a < b < \infty} \sup_T \sum_{i=1}^{n(T)} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p < \infty,$$

где $T = \{x_i\}_{i=0}^{n(T)} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. В этом случае из результатов Н.Винера [1] следует существование $f(x+0)$ и $f(x-0)$ для любой точки $x \in \mathbb{R}$. Поэтому для функций $f \in L^2 V_p = L^2(\mathbb{R}) \cap V_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, считаем, что выполнено условие (1). Рассмотрим также класс W функций f на $\mathbb{R}$, не имеющих разрывов второго рода и удовлетворяющих равенству (1) для любого $x \in \mathbb{R}$. Напомним, что для $f \in L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \le 2$, преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$ определяется, как предел $(2\pi)^{-1/2} \int\limits_{|t| \le N} f(t) e^{-itx}\, dt$ при $N \to +\infty$ в $L^{q'}(\mathbb{R})$, где $1/q + 1/q' = 1$. В этом случае также определен частичный интеграл Фурье (см. [6, гл. 4]). Первым из авторов установлены в [7] следующие результаты.

Теорема B. *1) Если $f \in L^2 V_p$, $1 \le p < 2$, то условия $f \in C(\mathbb{R})$ и (2)–(4) равносильны.*

2) Если $f \in L^2 V_p$, $p \ge 2$, или $f \in L^2 W := L^2(\mathbb{R}) \cap W$, то каждое из условий (2)–(4) влечет непрерывность f на $\mathbb{R}$.

Назовем $\Phi(x)$ N-функцией, если $\Phi(x)$ — четная, выпуклая и строго возрастающая на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функция, такая что $\lim\limits_{u\to+\infty} \Phi(u)/u = +\infty$ и $\lim\limits_{u\to 0} \Phi(u)/u = 0$ (см. [8, § 1]). Для N-функции Φ положим

$$V_\Phi(f) = \sup_{-\infty<a<b<\infty} \sup_T \sum_{i=1}^{n(T)} \Phi(f(x_i) - f(x_{i-1}),$$

где $T = \{x_i\}_{i=0}^{n(T)}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, и определим классы $V_\Phi(\mathbb{R}) = \{f : V_\Phi(f) < \infty\}$ и $V_\Phi^*(\mathbb{R})$, состоящий из функций f, таких что $kf \in V_\Phi(\mathbb{R})$ для некоторого $k > 0$. Для N-функции Φ класс $V_\Phi^*(\mathbb{R})$ является линейным пространством, тогда как $V_\Phi(\mathbb{R})$ будет линейным пространством в том и только том случае, когда выполнено Δ_2-условие $\Phi(2u) \le C\Phi(u)$, $u \in [0, a]$, $a > 0$. Эти и другие результаты, касающиеся функций ограниченной Φ-вариации, можно найти в [9].

Как обычно, при $1 \le p < \infty$ норма в $L^p(\mathbb{R})$ задается равенством $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, а норма $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ используется в пространстве $B(\mathbb{R})$ ограниченных на $\mathbb{R}$ функций. Для $\alpha > 0$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, будем писать, что существует $D^\alpha(f) = g$, если $g \in L^p(\mathbb{R})$ и $\widehat{g}(x) = (ix)^\alpha \widehat{f}(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Здесь по определению $(ix)^\alpha = |x|^\alpha \exp(\alpha\pi i sign(x)/2)$.

С.М. Никольский [10] установил асимптотическую формулу для приближений функций ограниченной вариации частными суммами их рядов Фурье в метрике $L^p_{2\pi}$. Следующая теорема, являющаяся интегральным аналогом результата С.М.Никольского, была получена В.О.Гукевич [11] при $q \in (1, 2]$, $p = 1$ и в [7] при $1 \le p < q \le 2$.

Теорема C. *Пусть $f \in L^qV_p$, $1 \le p < q \le 2$, $\{\sigma_k\} = \{f(x_k + 0) - f(x_k - 0)\}$ является конечной или счетной последовательностью всех скачков функции f. Тогда*

$$\|f - S_t(f)\|_q = \pi^{-1} \left(\sum_k |\sigma_k|^q\right)^{1/q} \nu_q/t^{1/q} + o(t^{-1/q}), \quad t \to +\infty, \qquad (5)$$

где

$$\nu_q = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}_+} \frac{z\cos z + y\sin z}{z^2 + y^2} e^{-y}\,dy\right|^q dz\right)^{1/q}.$$

Целью настоящей работы является получение критериев непрерывности функций ограниченной Φ-вариации на прямой, которые также интегрируемы на $\mathbb{R}$ в некоторой степени. Первый из них является аналогом теоремы A и части 1) теоремы B, второй (теорема 2) является аналогом теоремы 2.6 из [5], третий использует теорему C.

1. Вспомогательные утверждения

Леммы 1 и 2 установлены в [7].

Лемма 1. *Пусть* $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ *и* $g(x) \geq 0$ *на* $\mathbb{R}_+$. *Тогда условия*

$$\lim_{t\to+\infty} t \int_t^\infty g^2(x)\,dx = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t x^2 g^2(x)\,dx = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t x g(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to+\infty} (\ln t)^{-1} \int_0^t g(x)\,dx = 0, \tag{9}$$

связаны следующим образом: (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (9).

Лемма 2. *Пусть функция* $g(x)$ *неотрицательна и интегрируема на* $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. *Тогда из условия* $\int_{\mathbb{R}_+} g(x) \sin^2 tx\,dx = o(t)$, $t \to 0$, *следует, что* $\int_t^\infty g(x)\,dx = o(t^{-1})$, $t \to +\infty$.

Лемма 3. *Пусть* $\Phi(x)$ *— N-функция и* $f \in V_\Phi^*(\mathbb{R})$. *Тогда существует* $b > 0$, *такое что*

$$\sup_{|h|\leq\delta} \int_{\mathbb{R}} \Phi(b(f(x+h) - f(x)))\,dx \leq \delta V_\Phi(bf), \quad \delta \in (0,1]. \tag{10}$$

Доказательство. По определению класса $V_\Phi^*(\mathbb{R})$ существует $b > 0$, такое что $bf \in V_\Phi(\mathbb{R})$. При $0 < h \leq \delta \leq 1$ имеем равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(b(f(x+h) - f(x)))\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[kh,(k+1)h]} \Phi(b(f(x+h) - f(x)))\,dx =$$

$$= \int_{[0,h]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(b(f(y+kh+h) - f(y+kh)))\,dy =: \int_{[0,h]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k(y)\,dy.$$

Ясно, что любая сумма вида $\sum\limits_{k=-M}^{N} \beta_k(y)$ не превосходит $V_\Phi(bf)$ и это неравенство верно для $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k(y)$. Отсюда легко следует (10) . Лемма доказана.

Следующая почти очевидная лемма приведена для полноты изложения.

Лемма 4. *Пусть* $\Phi(x)$ *— N-функция,* $1 \le q_1 < q_2 < \infty$. *Тогда* $L^{q_1}V_\Phi^* \subset L^{q_2}V_\Phi^*$.

Доказательство. Так как функция $f \in V_\Phi^*(\mathbb{R})$ ограничена, то

$$\|f\|_{q_2} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^{q_2}\,dx\right)^{1/q_2} \le \|f\|_\infty^{(q_2-q_1)/q_2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^{q_1}\,dx\right)^{1/q_2} =$$

$$= \|f\|_\infty^{1-q_1/q_2} \|f\|_{q_1}^{q_1/q_2}.$$

Лемма 5. *Пусть* $\Phi(x)$ *— N-функция,* $f \in C(\mathbb{R}) \cap V_\Phi^*(\mathbb{R})$. *Тогда f равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим $b > 0$, такое что $bf \in V_\Phi(\mathbb{R})$ и

$$V_\Phi(f, [a,b]) = \sup_T \sum_{i=1}^{n(T)} \Phi(bf(x_i) - bf(x_{i-1})),$$

где $T = \{x_i\}_{i=0}^{n(T)}$ — разбиение $[a,b]$. Тогда $V_\Phi(f, [-n,n]) \to V_\Phi(f)$ при $n \to +\infty$. Отсюда следует, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in (-\infty, n] \,\text{или}\, x, y \in [n, +\infty)\} < \varepsilon/2.$$

На $[-n,n]$ функция $f \in C(\mathbb{R})$ равномерно непрерывна и для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta \in (0,1)$, такое что для всех $x, y \in [-n,n]$ со свойством $|x-y| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Если $x \in [-n,n]$, $y \notin [-n,n]$ или наоборот, причем $|x-y| < \delta$, то

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

где $x_0 = \pm n$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдено δ, такое что для всех $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|x-y| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $\Phi(x)$ *— N-функция и* $f \in L^pV_\Phi^*$.

1. Если $\lim\limits_{u\to 0} u^2/\Phi(u) = 0$, *то каждое из условий (2)–(4) равносильно условию* $f \in C(\mathbb{R})$.

2. При выполнении условия $\limsup\limits_{u\to 0} u^2/\Phi(u) > 0$ *каждое из соотношений (2)–(4) влечет* $f \in C(\mathbb{R})$.

Доказательство. В силу леммы 4 и определения класса $V^*_\Phi(\mathbb{R})$ имеем $L^pV^*_\Phi \subset L^2W$ и достаточность любого из условий (2)–(4) для $f \in C(\mathbb{R})$ вытекает из теоремы B. В частности, мы получаем утверждение 2). Для доказательства необходимости каждого из условий (2)–(4) для $f \in C(\mathbb{R})$ запишем равенство Парсеваля-Планшереля (см. [6, гл. 3]) для $f \in L^2V^*_\Phi$, т.е.

$$4b^2\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(x)|^2\sin^2(tx/2)\,dx = \int_{\mathbb{R}}|bf(x+t/2)-bf(x-t/2)|^2\,dx,$$

где $b>0$ таково, что $V_\Phi(bf)<\infty$. В силу леммы 3 получаем

$$4b^2\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(x)|^2\sin^2(tx/2)\,dx \le$$

$$\le \sup\left\{\frac{|bf(y+u/2)-bf(y-u/2)|^2}{\Phi(bf(y+u/2)-bf(y-u/2))} : y\in\mathbb{R}, 0<|u|\le t\right\}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}}\Phi(bf(x+t/2)-bf(x-t/2))\,dx = o(1)O(tV_\Phi(bf)) = o(t),\quad t\to 0.$$

Здесь использована равномерная непрерывность функции $f \in C(\mathbb{R}) \cap V^*_\Phi(\mathbb{R})$, установленная в лемме 5. Наконец, согласно лемме 2 имеем

$$\lim_{t\to+\infty} t\int_t^\infty |\widehat{f}(x)|^2\,dx = 0,\quad \lim_{t\to+\infty} t\int_{-\infty}^{-t}|\widehat{f}(x)|^2\,dx = 0,\tag{11}$$

что соответствует условию (6) для $g(x)=|\widehat{f}(x)|$ в лемме 1. По этой лемме мы получаем, что (2) и (3) также имеют место. Наконец, для $f\in L^q(\mathbb{R})$, $1\le q\le 2$, хорошо известно, что $\widehat{S_t(f)} = \widehat{f}(y)\chi_{[-t,t]}(y)$ п.в. на $\mathbb{R}$, где χ_E — индикатор множества E. В силу равенства Парсеваля-Планшереля и (11) мы получаем

$$\|f-S_t(f)\|_2^2 = \int_{|u|>t}|\widehat{f}(u)|^2\,du = o(t^{-1}),\quad t\to+\infty,$$

т.е. (4) также верно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\Phi(x)$ *— N-функция, такая что* $\lim\limits_{u\to 0} u^2/\Phi(u) = 0$, $\alpha>0$, $1\le p\le 2$ *и* $f\in L^p(\mathbb{R})$ *имеет производную* $D^\alpha(f)\in L^pV^*_\Phi$. *Тогда условия* $D^\alpha(f)\in C(\mathbb{R})$,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_{-t}^t |u|^{1+\alpha}|\widehat{f}(u)|\,du = 0,\quad \lim_{t\to+\infty}(\ln t)^{-1}\int_{-t}^t|u|^\alpha|\widehat{f}(u)|\,du = 0,$$

и
$$\lim_{t\to+\infty} t\|D^\alpha(f)-S_t(D^\alpha(f))\|_2=0$$
равносильны.

Для доказательства следствия 1 используется теорема 1 и равенство $\widehat{g}(x)=(ix)^\alpha\widehat{f}(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$, где $g=D^\alpha(f)$.

Теорема 2. *Пусть* $1\le p\le 2$, Φ *и* Ψ *— N-функции, такие что* $\lim\limits_{t\to 0}\Psi(t)/\Phi(t)=0$ *и* $f\in L^pV_\Phi^*$. *Тогда f непрерывна на $\mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда для некоторого $b>0$ верно соотношение*
$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx=o(h),\quad h\to 0. \tag{12}$$
.

Доказательство. Пусть $f\in L^pV_\Phi^*\cap C(\mathbb{R})$ и $b>0$ таково, что $bf\in V_\Phi(\mathbb{R})$. Тогда по лемме 5 функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и в силу условия теоремы и леммы 3 получаем
$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx\le\sup_{t\in\mathbb{R},0<|u|\le h}\frac{\Psi(b(f(t+u)-f(t)))}{\Phi(b(f(t+u)-f(t)))}\times$$
$$\times\int_{\mathbb{R}}\Phi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx=o(1)O(h)=o(h),\quad h\to\infty.$$
Обратно, пусть функция $f\in L^pV_\Phi^*$ разрывна, т.е. согласно условию (1) найдется точка $x_0\in\mathbb{R}$, в которой $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|=d>0$. Найдем $\delta>0$, такое что для всех $y\in(x_0,x_0+\delta)$, $x\in(x_0-\delta,x_0)$ верно неравенство $|f(x)-f(y)|>d/2$. Тогда при $h\in(0,\delta)$ и $x\in(x_0-h,x_0)$ имеем $|f(x+h)-f(x)|>d/2$. Значит,
$$\int_{\mathbb{R}}\Psi(b(f(x+h)-f(x)))\,dx\ge h\Psi(db/2).$$
При $d>0$ и $b>0$ последнее неравенство противоречит (12), т.е. d должно равняться нулю. Противоречие с предположением $f\notin C(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1<q\le 2$, $\Phi(x)$ *— N-функция, такая что*
$$\limsup_{u\to 0}|u|^{q-\varepsilon}/\Phi(u)<\infty \tag{13}$$
для некоторого $\varepsilon>0$ и $f\in L^qV_\Phi^*$. Тогда $f\in C(\mathbb{R})$ в том и только в том случае, когда $\|f-S_t(f)\|_q=o(t^{-1/q})$, $t\to+\infty$.

Доказательство. Из условия (13) следует, что $|u|^{q-\varepsilon}\le C_1\Phi(u)$ на любом конечном отрезке. Так как $|f(x)-f(y)|$, $x,y\in\mathbb{R}$, ограничены для

$f \in V^*_\Phi(\mathbb{R})$, то $V^*_\Phi(\mathbb{R}) \subset V_p(\mathbb{R})$, $p = q-\varepsilon$. При этом из выполнения условия (13) для $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ следует его справедливость для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, поэтому можно считать $p \geq 1$. По теореме C имеет место формула (5). Если $f \in C(\mathbb{R})$, то первое слагаемое в правой части (5) отсутствует и $\|f - S_t(f)\|_q = o(t^{-1/q})$, $t \to +\infty$. Обратно, если $\|f - S_t(f)\|_q = o(t^{-1/q})$, то все скачки σ_k равны нулю, т.е. $f \in C(\mathbb{R})$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Wiener N.* The quadratic variation of a function and the Fourier coefficients // J. Math and Phys. (MTI). 1924. Vol. 3. P. 72–94.

[2] *Лозинский С. М.* Об одной теореме N. Wiener'a // ДАН СССР. 1945. Т. 49, № 8. С. 562–565.

[3] *Лозинский С. М.* Об одной теореме N. Wiener'a. II // ДАН СССР. 1946. Т. 53, № 8. С. 691–694.

[4] *Голубов Б. И.* О непрерывных функциях ограниченной p-вариации // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 305–312.

[5] *Cohen E.* On the Fourier coefficients and continuity of functions of class $\mathcal{V}^*_\Phi$ // Rocky Mountain J. Math. 1979. Vol. 9, № 2. P. 227–237.

[6] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1948. 480 с.

[7] *Голубов Б. И.* Интеграл Фурье и функции ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1968. № 11. С. 83–92.

[8] *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М. : Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958. 272 с.

[9] *Musielak J., Orlicz W.* On generalized variations (I) // Stud. Math. 1959. Vol. 18, № 1. P. 11–41.

[10] *Никольский С. М.* Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13, № 6. С. 513–532.

[11] *Гукевич В. О.* Интеграл Фурье функций ограниченной вариации на всей оси // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М. : Физматгиз, 1961. С. 60–64.

УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ БОМБИЕРИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. Гордиенко (Саратов, Россия)
valeriygor@mail.ru

Бомбиери предложил описать строение множества значений начальных коэффициентов нормированных конформных отображений круга в окрестности угловой точки, соответствующей функции Кебе. Задача Бомбиери переносится на класс ограниченных нормированных конформных отображений круга, где роль функции Кебе передается функции Пика. Вычислено число Бомбиери для пары двух нетривиальных начальных коэффициентов.

Ключевые слова: однолистная функция, число Бомбиери, функция Кебе, функция Пика.

ON BOMBIERI PROBLEM FOR BOUNDED UNIVALENT FUNCTIONS

V. G. Gordienko (Saratov, Russia)
valeriygor@mail.ru

Bombieri proposed to describe the structure of the sets of values of the initial coefficients of normalized conformalmappings of the disk in a neighborhood of the corner point corresponding to the Koebe function. The Bombieri problem is studied for the class of bounded normalized conformal mappings of the disk, where the role of the Koebe function is played by the Pick function. The Bombieri number for a pair of two nontrivial initial coefficients are calculated.

Keywords: univalent function, Bombieri number, Koebe function, Pick function.

Введение

Одним из главных объектов исследования в геометрической теории функций комплексного переменного служит класс S, состоящий из всех голоморфных и однолистных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных разложением

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Подкласс $S(M) \subset S$, $M > 1$, ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$ в $\mathbb{D}$, обладает даже более сложной структурой по сравнению с классом $S(\infty) = S$. Традиционно функция Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \in S$$

оказывается экстремальной во многих задачах на классе S. Аналогом функции Кебе для класса $S(M)$ считается функция Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Бомбиери в [1] привел доказательство локальной гипотезы Бибербаха о точной оценке $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, в классе S и поставил там же задачу о нахождении чисел

$$\sigma_{mn} := \liminf_{a_m \to m} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = \liminf_{S \ni f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \geq 2, \tag{1}$$

где f стремится к K локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Он предположил, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$ с

$$B_{mn} := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{n \sin\theta - \sin(n\theta)}{m \sin\theta - \sin(m\theta)},$$

и доказал, что $\sigma_{mn} \leq B_{mn}$ при $m = 3$ и нечетных n. Бшути и Хенгартнер в [2] показали, что гипотеза Бомбиери справедлива для класса S_R функций $f \in S$ с вещественными коэффициентами a_n, $n \geq 2$.

В целом классе S Грайнер и Рот в [3] опровергли гипотезу Бомбиери в случае $n = 2$ и $m = 3$. Они нашли точное значение числа σ_{32}

$$\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} < \frac{1}{4} = B_{32}.$$

Недавние работы [4, 5] свидетельствуют о новом интересе к различным аспектам гипотезы Бомбиери.

Формулы, теоремы

Задача о вычислении чисел Бомбиери σ_{mn}, заданных формулой (1), сводится к определению линейных функционалов на классе S, локальный экстремум которых дается функцией Кебе K, см., например, [3]. А именно,

$$\sigma_{mn} = -\inf\{\mu \in \mathbb{R}\},$$

где нижняя грань берется по всем μ, для которых локальный максимум линейного функционала

$$\operatorname{Re}(a_n + \mu a_m)$$

в классе S доставляется функцией K. Числа Бомбиери характеризуют предельные положения опорных гиперплоскостей, проходящих через критическую угловую точку граничной поверхности тела начальных коэффициентов, доставляемую функцией Кебе. При переходе от класса S к классу $S(M)$ роль угловой точки берет на себя точка, соответствующая функции Пика P_M. Строение границы множества тела начальных коэффициентов, в окрестности этой точки, тоже будет характеризоваться числами $\sigma_{mn}(M)$, которые вместо формулы (1) могут корректно задаваться с помощью линейных функционалов с функцией Пика P_M в качестве локально экстремальной функции.

Справедлива следующая теорема, подробное доказательство которой приведено в работе [6]

Теорема 1. Справедливы равенства

$$\sigma_{32}(M) = \begin{cases} \dfrac{M(e-1)}{4(Me-2e+1)}, & e \leq M \leq \infty, \\ \dfrac{M}{4(M-1)}, & 1 < M \leq e. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bombieri E.* On the local maximum property of the Koebe function // Inventiones Mathematicae. 1967. Vol. 4, iss. 1. P. 26–67.

[2] *Bshouty D., Hengartner W.* Local behavior of coefficients in subclasses of S // Contemporary Mathematics. 1985. Vol. 38. P. 77–84.

[3] *Greiner R., Roth O.* On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri // Proceedings of the American Mathematical Society. 2001. Vol. 129. P. 3657–3664.

[4] *Aharonov D., Bshouty D.* A problem of Bombieri on univalent functions // Computational Methods and Function Theory. 2016. Vol. 16, № 4. P. 677–688.

[5] *Leung Yuk – Y.* On the Bombieri numbers for the class S // The Journal of Analysis. 2016. Vol. 24, № 2. P. 229–250.

[6] *Гордиенко В. Г, Прохоров Д. В.* Задача Бомбиери для ограниченных однолистных функций // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 3. С. 364–374.

УДК 517.51

ФУНКЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

М. Г. Григорян (Ереван, Армения)
gmarting@ysu.am

Изучаются вопросы существования и описания структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах.

Ключевые слова: универсальная функция, ряд Фурье, сходимость,классические системы .

FUNCTIONS THAT ARE UNIVERSAL WITH RESPECT TO THE CLASSICAL SYSTEMS[1]

M. G. Grigoryan (Yrevan, Armenia)
gmarting@ysu.am

Are studied the questions of existence and description the structure of functions whose Fourier series for a given classical system universal in one sense or another in various functional classes

Keywords: universal function, Fourier series, convergence, classical systems.

Введение

Доклад(лекция) посвящен(а) вопросам существования и описания структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах.

Заметим, что определения понятия «универсальная функция» не существует. Обычно под этим термином понимается функция, с помощью которой можно «представить» «все» функции. При этом способ представления, а также класс представимых функций может трактоваться различным образом. Примеры универсальных функций привлекали внимание многих математиков и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати. В этих публикациях изучаются те или иные универсальные функции, а также их свойства. Причем развитие происходит как в действительных, так и в комплексных рамках. Близким является понятие универсального ряда так называют ряды, с помощью которых можно представить любую функцию (здесь также способ представления и класс представимых функций можно понимать

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1A148.

[1]This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project 18T-1A148.

различным образом). Часто такой ряд связан с какой-то функцией, например, является ее рядом Тейлора или Фурье (Фурье–Стильтеса). Понятие универсального ряда восходит к работам Меньшова и Талаляна. Универсальные ряды также изучались во многих работах и имеется значительная информация о свойствах таких рядов.

По сути первый тип универсальной функции был рассмотрен в 1929 г. Биркхофом: существует целая функция $g(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т.е. для любой целой функции $f(z)$ и числа $r > 0$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая,что последовательность сдвигов $\{g(z+n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(z)$ на круге $|z| \leq r$.

В 1935 году Марцинкевич опираясь на некоторые идеи Н. Н. Лузина, доказал существование непрерывной функций, которая универсальна относительно производных чисел (производной отношния). Если $h_n \to 0$ заранее фиксированная последовательность, то существует функция $F \in C[0,1]$ такая, что для любой измеримой функций g определенной на $[0,1]$ существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что почти всюду на $[0,1]$

$$\lim_{\to\infty} \frac{F(x+h_{n_k}) - F(x)}{h_{n_k}} = g(x).$$

В 1987г. Гроссе–Эрдман доказал существование вещественной действительной функции с универсальным рядом Тейлора: существует функция $g(x) \in C^{\infty}(R)$ с $g(0) = 0$, ряд Тейлора которой в точке $x = 0$ локально-равномерно универсален в $C(R)$, т.е. для любой функции $f(x) \in C(R)$ с $f(0) = 0$ и числа $r > 0$, существует подпоследовательность

$$S_{n_k}(g,0) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

частичных сумм ряда Тейлора функции $g(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $|x| \leq r$. Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в$M[0,1]$ в смысле сходимости почти всюду, является работа Меньшова. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, универсальные в M в обычном смысле (в случае сходимости почти всюду) были построены Талаляном. Для формулировки некоторых результатов существования универсальных рядов напомним следующие обозначения и определения. Пусть $M[0,1]$ — совокупность всех (не обязательно конечных) измеримых функций (соотв. $L^0[0,1]$) — класс всех (соотв. почти везде конечных) измеримых на $[0,1]$ функций. Под сходимостью в метрике $M[0,1]$ или в метрике $L^0[0,1]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду.

Пусть $E \subseteq [0,1]$ некоторое измеримое множество и $|E|$ — мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, $\operatorname{supp} f = \{x \in [0,1]; f(x) \neq 0\}$, $L^p(E)$ $(p > 0)$ — класс всех тех измеримых на E функций, для которых $\int_E |f(x)|^p\, dx < \infty$ и $C(E)$ — класс всех непрерывных на $E \subseteq [0,1]$ функций. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система на $[0,1]$, и пусть $c_k(U) = \int_0^1 U(x)\varphi_k(x)dx,\ k \in \mathbf{N}-$коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ функции $U \in L^1[0,1]$,($\mathbf{N}-$ совокупность всех натуральных чисел).

Пусть метрическое пространство $S-$ какое-нибудь из пространств $M[0,1]$, $L^p[0,1]$, $p \geq 0$.

Определение 1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k \in S \tag{1}$$

называется *универсальным в* S

1) *в обычном смысле*, если для каждой функции $f \in S$ существует последовательность возрастающих натуральных чисел n_k такая, что у ряда (1) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится к $f(x)$ в метрике S;

2) *в смысле перестановок*, если для каждой функции $f \in S$ члены ряда (1) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$$

сходился к функции $f(x)$ в метрике S;

3) *в смысле знаков в* S, если для каждой функции $f \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$, для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k f_k(x)$ сходится к функции $f(x)$ в метрике S.

Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в $M[0,1]$ в смысле сходимости почти всюду, является работа Д. Е. Меньшова.

Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, универсальные в M в обычном смысле (в случае сходимости почти всюду) были построены в работе А. А. Талаляном.

В последние годы нами (мной и моими соавторами-учениками) были получены некоторые результаты (см. [1–7]), связанные с существованием и описанием структуры функций, ряды Фурье которых по заданной классической системе универсальны тем или иным смыслом в различных функциональных классах. Такие функции мы назовем универсальными относительно классических систем.

Определение 2. Будем говорить, что функция $U \in L^1[0,1]$ *универсальна для класса* S *относительно системы* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$:

а) *в обычном смысле*, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в обычном смысле,

б) *в квази-обычном смысле*, если существует последовательность знаков $\{\ \delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ был бы универсальным в обычном смысле в S,

в) *в смысле перестановок*, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле перестановок,

г) *в смысле знаков своих коэффициентов Фурье по этой системе*, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле знаков.

Замечание 1. Не существует функция $U \in L^1[0,1]$, ряд Фурье которой по тригонометрической системе (по системе Уолша) был бы универсальным в классе $M[0,1]$ в обычном смысле (даже в случае, сходимости по мере). В самом деле, если существовала бы функция $U \in L^1[0,1]$, которая универсальна для класса $M[0,1]$ относительно тригонометрической системы в обычном смысле, тогда для функции $f(x) = 2U(x)$ нашлась бы подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\} \nearrow \infty$ такая, что по мере на $[0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{|n|=0}^{m_k} d_n(U) e^{2\pi n i x} = 2U(x), \quad d_n(U) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 U(x) e^{-2\pi n i x} dx$$

С другой стороны, из известной теоремы Колмогорова (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$) вытекает, что $\sum\limits_{|n|=0}^{m_k} d_n(U) e^{2\pi n i x}$ — сходится к $U(x)$ по мере на $[0,1]$. Отсюда вытекает, что $U(x) = 2U(x)$ почти всюду на $[0,1]$.

Пришли к противоречию. Значит, не существует функция $U \in L^1[0,1]$ универсальная для классов $M[0,1]$ и $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно

тригонометрической системы (соотв. относительно системы Уолша) в обычном смысле.

Сразу же возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос 1. Существует ли функция$U \in L^1[0,1)$ унивесальна для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно тригонометрической системы $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ или относительно системы Уолша *в смысле перестановок*?

Отметим, что в работах [2, 5] автором и А. Саргсяном построены интрегрируемые функций $U(x)$унивесальные для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша *в смысле знаков своих коэффициентов Фурье.*

Отметим также, что нам не известен ответ и на следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что можно было бы построить функцию $U \in L^1[0,1]$ универсальную для класса $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ или для класса$M[0,1]$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в обычном смысле?

В этой статье мы построим функцию $U \in L^1[0,1]$ такую, что после выбора подходящих знаков ($\delta_k = \pm 1$ и $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 0,1,2..$) для ее коэффициентов Фурье $\{d_k(U)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ можно достичь того, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k d_k(U) e^{2\pi kix}$ (соотв. здесь $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k d_k(U) e^{2\pi kix}$) — будет универсальным в $M[0,1]$ в обычном смысле (соотв. в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ в смысле перестановок).

А именно справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует функция $U \in L^1[0,1]$ которая является универсальной для класса$M[0,1]$ относительно тригонометрической системы $\{e^{2\pi kix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в квази-обычном смысле.*

Теорема 2. *Существуют числа$\{\varepsilon_k = \pm 1,\ k \geq 0\}$ и функция $U \in$ $\in L^1[0,1]$, таких, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k d_k(U) e^{2\pi kix}$ — универсален в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно перестановок.*

Эти результаты имеют место и для системы Уолша. Более того верны следующие теоремы

Теорема 3. *Существует функция $U \in L^1[0,1]$ ($\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon \in (0,1)$ — наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на $[0,1]$ и по $L^1[0,1]$ норме рядом Фурье–Уолша, с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса $M[0,1]$относительно системы Уолша в квази-обычном смысле.*

Теорема 4. *Существуют числа $\varepsilon_k = \pm 1$, $k \geq 0\}$ и функция $U \in L^1[0,1]$ ($\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, здесь $\varepsilon \in (0,1)$ — наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на $[0,1]$ и по $L^1[0,1]$ норме рядом Фурье–Уолша, с монотонно убывающими коэффициентами, таких, что ряд*

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ *— универсален в* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *относительно перестановок.*

Теоремы 3 и 4 следуют из более сыльной теоремы 5

Теорема 5. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ $(\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)$ *— наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на* $[0,1]$ *и по* $L^1[0,1]$ *норме рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и такая что:*

а) она универсальна для класса $M[0,1]$ *относительно системы Уолша в квази-обычном смысле;*

б) для любого $p \in (0,1)$ *существует последовательность знаков* $\{\varepsilon_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ *такая, что ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) W_k(x)$ *был бы универсальным в* $L^p[0,1]$ *относительно перестановок.*

Теорема 6. *Существует функция* $U \in L^1[0,1]$ $(\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)$ *— наперед заданное число) со сходящимся по* $L^1[0,1]$ *норме и почти всюду на* $[0,1]$ *рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и которая является универсальной для класса* $L^0[0,1]$ *относительно системы Уолша* ***в смысле знаков своих коэффициентов Фурье.***

Теорема 7. *Существуют совокупность измеримых замкнутых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $F_1 \subset ... \subset F_n \subset F_{n+1} \subset ... \subset [0,1]$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n| = |E|$ *и функция* $U \in L^1[0,1]$ $(\operatorname{supp} U \subset [0,\varepsilon]$, *здесь* $\varepsilon \in (0,1)$ *— наперед заданное число) со сходящимся почти всюду на* $[0,1]$ *и по* $L^1[0,1]$ *норме рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, таких, что функция* $U(x)$ *является универсальной для классов* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *и*$L^1(F_n)$ *для всех* $n \in N$ *относительно системы Уолша в квази-обычном смысле.*

Замечание 2. Нетрудно видеть, что теорема 2 окончательна в некотором смысле (неулучшаема), она не верна при $p \geq 1$.

В случае $p \geq 1$для системы Уолша верны следующие теоремы

Теорема 8. *Можно найти функцию* $U \in L^1[0,1]$ *такую, что после умножения члеы ее ряда Фурье–Уолша некоторой измеримой функцией* $0 < M(x) \leq 1$ *можно достичь того, что ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(U)(M(x)W_k(x))$ *был бы универсальным для пространства* $L^1[0,1]$ *относительно системы Уолша в смысле знаков.*

Теорема 9. *Существуют совокупность измеримых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $F_1 \subset ... \subset F_n \subset F_{n+1} \subset ... \subset [0,1]$ *и* $\lim_{n\to\infty} |F_n| = 1$ *таких, что для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *можно было найти функцию* $U_0(x)$ *со свойствами:*

1) $U_0(x) \in L^1[0,1]$, $\sup p(U_0) \subset [0, \varepsilon]$*;*

2) ряд Фурье–Уолша функции $U_0(x)$*сходится в метрике* L^1*и почти всюду на* $[0,1]$*;*

3) $U_0(x)$ *имеет монотонно убывающие коэффициенты Фурье–Уолша;*

4) для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ *существует последовательность знаков* $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ *для которой ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ *сходится к* $f(x)$ *по всем нормам* $L^1(E_n)$, $n \in \mathbf{N}$*;*

5) для любого $p \geq 1$ *и для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *существует последовательность чисел* $\{\delta_k = \pm 1, 0\}_{k=0}^{\infty}$, *для которой ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ *сходится к* $f(x)$ *по всем нормам* $L^p(E_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

В этой работе мы опишем структуру тех функций, которые универсальны для классов $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно системы Уолша **в квази-обычном смысле** с точки зрения широко известных классических теорем Лузина и Меньшова «Об исправлении функций». А именно доказывается следующая теорема.

Теорема 10. *Для любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *существует совокупность измеримых замкнутых множеств* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, *с* $E_1 = F_1 \subset \ldots \subset ..$ $F_n \subset F_{n+1} \subset .. \subset [0,1]$ *и* $|E_1| \geq 1 - \varepsilon$, $lim_{n\to\infty}|F_n| = |E|$,*таких, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1]$ *можно найти функцию* $g \in L^1[0,1]$, *совпадающую с* f *на* E_1 *со сходящимся по* $L^1[0,1]$ *норме рядом Фурье–Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, и такую, что она была бы универсальной для пространств для классов* $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ *и* $L^1(F_n)$, $C(F_n)$ *для всех* $n > 1 \in N$ *относительно системы Уолша как* ***в квази-обычном смысле так и в смысле перестановок.***

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grigoryan M. G.* On the universal and strong property related to Fourier–Walsh series // Banach Journal of Math. Analysis. 2017. Vol. 11, № 3. P. 698–712.

[2] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ // Journal of Func. Anal. 2016. Vol. 270, № 8. P. 3111–3133.

[3] *Grigoryan M. G., Galyan L. N.* On the universal functions // Journal of Approximation Theory. 2018. Vol. 225, P. 191–208.

[4] *Григорян М. Г.* О структуре функций, универсальных относительно классических систем // 10-й международ. симпозиум «Ряды фурье и их приложения». Ростов н/Д, 2018. С. 46–47.

[5] *Григорян М. Г., Саргсян А. А.* О структуре функций,универсальных для классов $L^p[0,1], p \in (0,1)$ // Матем.сб. 2018. Т. 209, № 1. С. 37–58.

[6] *Grigoryan M. G., Galyan L. N.* On Fourier series that are universal modulo signs // Studia Mathematica. 2019. Vol. 249. P. 215–231.

[7] *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* On the universal function for the class $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ // Positivity. 2017. Vol. 21, № 3. P. 1425–1451.

УДК 517.9

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ СЕГМЕНТНОЙ РЕГРЕССИИ[1]

А. А. Гудков, К. А. Спиридонов, С. П. Сидоров
(Саратов, Россия)
alex-good96@mail.ru

В настоящей работе для решения задачи построения выпуклого приближения к зашумленным данным предлагается использовать алгоритм построения сегментной регрессии с использованием активного множества. Показывается, что алгоритм сходится к оптимальному решению. Находится оценка его сложности.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация, активное множество, сегментная регрессия.

ON THE CONVERGENCE OF AN ALGORITHM FOR SEGMENT REGRESSION CONSTRUCTION[1]

A. A. Gudkov, K. A. Spiridonov, S. P. Sidorov
(Saratov, Russia)
alex-good96@mail.ru

In this paper, to solve the problem of constructing a convex approximation to noisy data, we propose an algorithm for constructing segment regression using the active set approach. It is shown that the algorithm converges to the optimal solution. The estimate of its complexity is found.

Keywords: Nonlinear Optimization, Active Set, Segment Regression.

Введение

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ есть вектор значений некоторой функции в точках $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть Δ^2 есть оператор взятия разделенной разности 2-го порядка:

$$\Delta^2 z_i = \frac{1}{\Delta_{i+1} + \Delta_i} \left(\frac{z_{i+2} - z_{i+1}}{\Delta_{i+1}} - \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta_i} \right).$$

Вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ называется 2-монотонным (выпуклым) по отношению к $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, если $\Delta^2 z_i \geq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n-2$.

Рассмотрим задачу построения 2-монотонной регрессии по парам точек $\{(x_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Задача построения 2-монотонной регрессии состоит в нахождении вектора $z \in \mathbb{R}^n$, имеющего наименьшую

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-37-00060).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project 18-37-00060).)

ошибку приближения к заданному вектору $y \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно 2-монотонному), при условии, что $z \in \mathbb{R}^n$ должен быть 2-монотонным по отношению к $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \to \min_{z \in \Delta_2^n(x)}, \tag{1}$$

где $\Delta_2^n(x)$ есть множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$, которые являются 2-монотонными по отношению к $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

В статье, развивая идеи работ [1], [2] и [3], мы предлагаем такой алгоритм, который

- имеет полиномиальную сложность, то есть число операций, необходимых для завершения алгоритма для заданного входного значения y из R^n, составляет $O(n^k)$ для некоторого неотрицательного целого числа k;
- решение является выпуклым;
- решение является оптимальным (условия Каруша-Куна-Такера выполнены).

Двойственный алгоритм для построения выпуклой регрессии на основе использования активного множества

Предлагаемый алгоритм использует так называемый активное множество. Активное множество S состоит из блоков $[l, r-2] \subset [1, n-2]$, таких, что $[l, r-2] \subset S$, $l-1 \notin S$, $r-1 \notin S$, and

$$S = [l_1, r_1] \cup [l_2, r_2] \cup \ldots \cup [l_{m-1}, r_{m-1}] \cup [l_m, r_m],$$

где $l_1 \geq 1$, $r_m \leq n-2$, $r_i + 3 \leq l_{i+1}$, $i \in [1, m-1]$, и m есть количество блоков. Если $r_i = l_i$, то i-й блок состоит только из одной точки.

Точки $z_{r_i}, z_{r_i+1}, \ldots, z_{l_i}, z_{l_i+1}, z_{l_i+2}$, соответствующие i-ому блоку (плюс две точки справа) лежат на линейной линии для каждого i.

На каждой итерации алгоритма выбирается активное множество $S \subset [1, n-2]$ и решается соответствующая задача оптимизации

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \to \min, \tag{2}$$

где минимум ищется среди всех $z \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих

$$\Delta_i z_{i+2} - z_{i+1}(\Delta_i + \Delta_{i+1}) + \Delta_{i+1} z_i = 0 \ \ \forall\, i \in S,\ \Delta_j = x_{j+1} - x_j. \qquad (3)$$

Существует единственное решение задачи (2)–(3). Обозначим его $z(S)$.

Двойственный алгоритм для построения выпуклой регрессии на основе использования активного множества

begin

- Ввод $y \in \mathbb{R}^n$;
- Активное множество $S = \varnothing$;
- Начальная точка $z(S) = y$;
- **while** $z(S) \notin \Delta_2^n$ **do**
  - Положить $S \leftarrow S \cup \{i:\ \Delta_i z_{i+2}(S) - z_{i+1}(S)(\Delta_i + \Delta_{i+1}) + \Delta_{i+1} z_i(S) < 0\}$;
  - Решить (2)–(3), используя точки из активного множества S;
  - Обновить $z(S)$;
- Вывод $z(S)$;

end

Вычислительная сложность двойственного алгоритма для построения выпуклой регрессии на основе использования активного множества равна $O(N^3)$. Это следует из двух замечаний:

- на каждой итерации алгоритма к активному множеству S присоединяется, по крайней мере, один индекс из $[1 : n-2]$, что означает, что число итераций цикла while не может быть больше, чем $n-2$.
- вычислительная сложность решения задачи (2)–(3) равна $O(n^2)$.

Теорема. *Для любого начального множества $S \subset S^*$, двойственный алгоритм для построения выпуклой регрессии на основе использования активного множества сходится к оптимальному решению задачи* (1) *за, самое большее, $n - 1 - |S|$ итераций.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Best M. J., Chakravarti N.* Active set algorithms for isotonic regression: A unifying framework // Mathematical Programming. 1990. Vl. 47, № 3. P. 425–439.

[2] *Burdakov O., Sysoev O.* A Dual Active-Set Algorithm for Regularized Monotonic Regression // J. Optim. Theory Appl. 2017. Vol. 172, № 3. P. 929–949.

[3] *Gudkov A. A., Mironov S. V., Sidorov S. P., Tyshkevich S. V.* A dual active set algorithm for optimal sparse convex regression // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-маем. науки. 2019. Т. 23, № 1. P. 113–130.

УДК 517.535

ОЦЕНКИ L_p-НОРМ ПРОСТЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ[1]

В. И. Данченко (Владимир, Россия)

vdanch2012@yandex.ru

Для простых рациональных дробей получены оценки L_p-норм, зависящие от полюсов этих дробей

Ключевые слова: простые рациональные дроби, L_p-оценки, аппроксимация, вычеты.

ESTIMATES OF L_p-NORMS OF SIMPLE RATIONAL FRACTIONS[1]

V. I. Danchenko (Vladimir, Russia)

vdanch2012@yandex.ru

For the L_p-norms of the simple rational fractions we obtained estimates, which depend on the poles of these fractions

Keywords: simple rational fractions, L_p - estimates, approximation, residues.

1. Простой дробью назовем рациональную функцию комплексного переменного $\sigma(z)$, имеющую конечное число простых полюсов и равную нулю на бесконечности:

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{z - z_k}, \qquad \rho_k \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В частности, при натуральных ρ_k получаются так называемые наипростейшие дроби (НД). Интерес к оценкам L_p-норм дробей (1) возник в связи с задачами о сходимости рядов НД. Известны оценки L_p-норм НД через их L_r-нормы (т.е. неравенства разных метрик). Такие оценки на ограниченных и неограниченных вещественных промежутках и при различных p и r получены, например, в работах [1], [2]. Так, в [2] показано, что при $1 < r < p \le \infty$ для НД имеем

$$\|\sigma\|^q_{L_p(\mathbb{R})} \le A(p,r)\,\|\sigma\|^s_{L_r(\mathbb{R})}\,, \qquad \text{где} \qquad p^{-1}+q^{-1}=1, \quad r^{-1}+s^{-1}=1,$$

где $A > 0$ и зависит только от указанных аргументов. Кроме того, в задачах о сходимости бесконечных НД применяются оценки L_p-норм,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект 18-01-00744).

[1]The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 1.574.2016/1.4) and the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18- 01-744).

зависящие от полюсов z_k явно (см., например, [3], [4]). В настоящей заметке приведен один простой способ получения такого рода оценок для простых дробей.

2. Случай прямой. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть простая дробь* (1) *отображает* $\mathbb{C}^-$ *в* $\mathbb{C}^+$ (*в этом случае все полюсы* z_k *лежат в открытой полуплоскости* $\mathbb{C}^+$). *Тогда при* $1 < p < 3$ *имеем:* $2\pi\,\kappa_1 \le \|\sigma\|_p^p \le 2\pi\, c\,\kappa_1$, *где*

$$\kappa_1 := \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}}\sum_{k=1}^{n}\overline{\rho_k}\sigma^{p-1}(\overline{z_k})\right), \qquad c := \operatorname{cosec}\frac{\pi(3-p)}{2},$$

и суммируются значения однозначной в нижней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^-$ *аналитической ветви*

$$\sigma^{p-1}(z) = |\sigma(z)|^{p-1}e^{i\varphi(p-1)}, \quad \varphi = \arg\,\sigma(z) \in (0,\pi), \quad z \in \mathbb{C}^-.$$

Для НД аналогичный результат получен в [5].

Доказательство. При $z \in \mathbb{C}^-$ и $\varepsilon \in (0,1)$ выделяется однозначная регулярная ветвь

$$\sigma^{\varepsilon}(z) = |\sigma(z)|^{\varepsilon}e^{i\varphi\varepsilon}, \quad \text{где} \quad 0 < \varphi = \arg\sigma(z) < \pi.$$

Функция $w(z) = e^{i\pi(1-\varepsilon)/2}\varrho^{\varepsilon}(z)$ отображает нижнюю полуплоскость в угол $\pi(1-\varepsilon)/2 < \arg w < \pi(1+\varepsilon)/2$. Поэтому при $z \in \mathbb{C}^-$ имеем

$$\operatorname{Im} w(z) \le |w(z)| = |\sigma(z)|^{\varepsilon} \le c\operatorname{Im} w(z), \qquad c := \operatorname{cosec}\frac{\pi(1-\varepsilon)}{2}. \tag{2}$$

Пусть $p = 2m+\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Учитывая (2), по теореме о вычетах находим оценку:

$$\|\sigma\|_p^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |\sigma(x)|^{2m}\,|\sigma(z)|^{\varepsilon}\,dx \le c\operatorname{Im}\left(e^{i\pi\frac{1-\varepsilon}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}|\sigma(x)|^{2m}\sigma^{\varepsilon}(x)\,dx\right) =$$
$$= c\operatorname{Im}\left(e^{i\pi\frac{1-\varepsilon}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\sigma^{m+\varepsilon}(x)\overline{\sigma^m(x)}\,dx\right) =$$
$$= 2\pi\,c\operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi\varepsilon}{2}}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=\overline{z_k}}\sigma^{m+\varepsilon}(z)\overline{\sigma^m(\overline{z})}\right).$$

Из первого равенства в (2) получается неравенство, противоположное этому неравенству при $c = 1$. В случае $p = 2m-\varepsilon$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ получаются аналогичные оценки однозначной ветви $w(z) = e^{-i\pi(1-\varepsilon)/2}\sigma^{-\varepsilon}(z)$

с заменой в (2) Im на (−Im), а из них — оценки $\|\sigma\|_p^p$. Утверждение теоремы 1 получается в частном случае $1 < p < 3$, $m = 1$ (т.е. при $p = 2\pm\varepsilon$).

2. Случай окружности. Предположим, что все полюсы простой дроби (1) лежат в единичном круге и $\rho_k > 0$. Легко проверяется, что $\mathrm{Re}\,(\xi\sigma(\xi)) > 0$ при всех ξ с $|\xi| > 1$. Значит, при $\varepsilon \in (-1, 1)$ и $|\xi| \geq 1$ можно выделить регулярную однозначную ветвь$(\xi\sigma(\xi))^\varepsilon$, значения которой лежат в угле $(-\varepsilon\pi/2, \varepsilon\pi/2)$. Следовательно, для этой ветви имеем

$$\mathrm{Re}\,\left(\xi\sigma(\xi)\right)^\varepsilon \leq |\xi\sigma(\xi)|^\varepsilon \leq c\,\mathrm{Re}\,\left(\xi\sigma(\xi)\right)^\varepsilon, \tag{3}$$

где $c = \cos^{-1}(\varepsilon\pi/2)$. Отсюда при $p = 2 + \varepsilon$ имеем

$$\|\sigma\|_p^p = \int_{|\xi|=1} |\sigma(\xi)|^2|\sigma(\xi)|^\varepsilon|d\xi| \leq c\,\mathrm{Re}\int_{|\xi|=1} |\sigma(\xi)|^2\left(\xi\sigma(\xi)\right)^\varepsilon|d\xi| =$$

$$= c\,\mathrm{Re}\int_{|\xi|=1} \sigma(\xi)\left(\xi\sigma(\xi)\right)^\varepsilon\overline{\sigma(\xi)}|d\xi| =$$

$$= c\,\mathrm{Re}\int_{|\xi|=1} \frac{\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{1+\varepsilon}}{\xi}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\rho_k\xi}{1-\xi\overline{z_k}}\right)\frac{d\xi}{i\xi} =$$

$$= c\,\mathrm{Im}\int_{|\xi|=1} \frac{\left(\xi\sigma(\xi)\right)^{1+\varepsilon}}{\xi}\left(\sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{1-\xi\overline{z_k}}\right)d\xi.$$

Из первого неравенства в (4) аналогично получается оценка $\|\sigma\|_p^p$ снизу. Вычислением последнего интеграла по теореме о вычетах получается

Теорема 2. *Пусть полюсы дроби* (1) *лежат в единичном круге и* $\rho_k > 0$. *Тогда при* $1 < p < 3$ *имеем:* $2\pi\kappa_2 \leq \|\sigma\|_p^p \leq 2\pi c\,\kappa_2$, *где*

$$\kappa_2 := \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n \rho_k\left(\frac{1}{\overline{z_k}}\sigma\left(\frac{1}{\overline{z_k}}\right)\right)^{p-1}\right), \qquad c := \sec\left(\frac{(p-2)\pi}{2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 63–80.

[2] *Данченко В. И, Додонов А. Е.* Оценки L_p-норм наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 9–19.

[3] *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 123–140.

[4] *Каюмов И. Р.* Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 10. С. 87–98.

[5] *Данченко В. И.* О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 4. С. 53–66.

UDC 517.9

ON THE EXACT SOLUTION OF FRACTIONAL SIMPLIFIED MCH EQUATION

U. Demirbilek,V. Ala, Kh. R. Mamedov, S. Goktas
(Mersin, TURKEY)
ulviyedemirbilek@gmail.com, volkanala@mersin.edu.tr,
hanlar@mersin.edu.tr, srtcgoktas@gmail.com

In this work, we consider the simplified modified Camassa-Holm (MCH) equation by applying the new extended direct algebraic method. The simplified MCH equation is given as follows:

$$D_t^{(\mu)} + \rho D_x^{(\mu)} - u_{xxt}^{(3\mu)} + p(u^3)_x^{(\mu)} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 < \mu \leq 1, \tag{1}$$

where p, ρ real parameters, D_t^{μ} is the conformable derivate operator of the order μ respect to the variable. In this study,the exact solutions of (1) using Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method (IBSEFM) are obtained and the 3D graphs acquired from the values of the solutions are given.

Keywords: IBSEF method, Conformable fractional derivative, Camassa–Holm equation.

Introduction

The present work is devoted to solving the simplified modified Camassa–Holm (MCH) equation by applying the Improved Bernoulli sub-equation function method. Several methods have been implemented to solve the simplified MCH equation by many authors [1–7] , such as sine-Gordon expansion method [1], the (G'/G)-expansion method and the generalized Riccati equation [2], modified extended tanh method [3].

The definition of conformable fractional derivative of order $\mu \in (0, 1]$, it is defined by the following expression [6]:

$$\frac{d^{\mu} f(t)}{dt^{\mu}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t + \varepsilon t^{1-\mu}\right) - f(t)}{\varepsilon}; \; f : (0, \infty] \to \mathbb{R}.$$

Also, conformable fractional derivative has the following main properties [6, 7]:

i. $\frac{d^{\mu} t^{\vartheta}}{dt^{\mu}} = \vartheta t^{\vartheta - \mu}, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$,

ii. $\frac{d^{\mu} fg}{dt^{\mu}} = f \frac{d^{\mu} g}{dt^{\mu}} g + g \frac{d^{\mu} f}{dt^{\mu}}$,

iii. $\frac{d^{\mu}(f \circ g)}{dt^{\mu}} = t^{1-\mu} g'(t) f'(g(t))$.

In this study, we will reach the exact solution of our equation by means of software by using the basic features given in [6, 7] and the method given in [8].

Solutions of fractional simplified MCH equation

Consider a nonlinear conformable fractional partial differential equation of the form

$$P\left(u, u_t^{(\mu)}, u_x^{(\mu)}, u_{xt}^{(2\mu)}, u_{xxt}^{(3\mu)}, ...\right) = 0, \tag{2}$$

where U is an unknown function, P is a polynomial of U and their derivatives and partial conformable fractional derivatives. Using the wave transformation, as:

$$u\left(x,t\right) = U\left(\xi\right), \quad \xi = \frac{x^\mu}{\mu} - r\frac{t^\mu}{\mu}, \tag{3}$$

where r is an arbitrary constant.

We use Eq. (3) to reduce Eq. (1) to the following nonlinear ordinary differential equation

$$rU'' + (\rho - r)U + sU^3 = 0. \tag{4}$$

When we apply the balance between U'' and U^3, we obtain following relationship for m, n and M :

$$M = n - m + 1.$$

Family 1. According to the balance principle, if we take $M = 3$, $n = 3$, and $m = 1$, we can write

$$U(\xi) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i F^i(\xi)}{\sum\limits_{j=0}^{m} b_j F^j(\xi)} = \frac{a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) + a_3 F^3(\xi)}{b_0 + b_1 F(\xi)} = \frac{\psi}{\phi}, \tag{5}$$

$$U'(\xi) = \frac{\psi'\phi - \phi'\psi}{\phi^2},$$

$$\vdots,$$

where $F(\xi)$ is Bernoulli differential polynomial, $F'(\xi) = \sigma F(\xi) + dF^M(\xi)$, $\sigma \neq 0, d \neq, a_3 \neq 0, b_1 \neq 0,\ M \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$. When we use Equations (5) in Equation (4), we obtain a system of algebraic equations from the coefficients of polynomial of F. By solving this algebraic system of equations with the help of software programme, it yields us the following coefficients:

case1. For $\sigma \neq d$,

$$a_0 = -\frac{i\sqrt{-p+r}a_2}{2\sqrt{2}d\sqrt{r}}; a_1 = -\frac{i\sqrt{-p+r}a_2 b_1}{2\sqrt{2}d\sqrt{r}b_0}; a_3 = -\frac{a_2 b_1}{b_0}; s = -\frac{8d^2 r b_0^2}{a_2^2}; \quad (6)$$

$\sigma = -\frac{i\sqrt{-p+r}}{\sqrt{2}\sqrt{r}}$.

Putting Equation (6) coefficients in Equation (5), we obtain the complex exponential function solution to the conformable time MCH equation as follows:

$$U_1(x,\ t) = \frac{\left(\frac{-i\sqrt{2}\sqrt{-p+r}}{d\sqrt{r}} + \frac{4}{\frac{-i\sqrt{2}d\sqrt{r}}{\sqrt{-p+r}} + exp\frac{-i\sqrt{2}\sqrt{-p+r}(-ct^{\alpha}x^{\alpha})}{\sqrt{r}\alpha}\epsilon}\right)\alpha_2}{4b_0}, \quad (7)$$

where a_2, b_0, α, d, r are constants and not zero.

As a result, we have succesfully applied the IBSEFM to the nonlinear conformable time fractional MCH equation and we obtained the complex prototype solution.Using software mathematics programme, it is constructed two and three dimensional figures of this solution according to the suitable values of these parameters.

REFERENCES

[1] *Bulut H., Sulaiman T. A., Erdogan F., Baskonus H. M.* On the new hyperbolic and trigonometric structures to the simplified MCH and SRLW equations // EurPhys J Plus, 2017, 132:350. Eur. Phys. J. Plus. 2017. Vol. 132, Article no. 350. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11619-1

[2] *Zaman M. M., Sayeda S.*, Traveling Wave Solutions for the Nonlinear Evolution Equation via the Generalized Riccati Equation and the (G'/G)-Expansion Method // World Applied Sciences Journal. 2013. Vol. 22, № 3. P. 396–407.

[3] *Khalid K. Ali, Nuruddeen R. I., Raslan K. R.* New structures for the space-time fractional simplified MCH and SRLW equations // Chaos. Solitons and Fractals. 2018. Vol. 106. P. 304–309. DOI: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.11.038

[4] *Lu B.* The first integral method for some time fractional diferential equations // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395, № 2. P. 684–693.

[5] *Bin Z.* 4 // The Sci. World J. 2013. Vol. 2013. P. 1–8.

[6] *Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M.* A new definition of fractional derivative // Pramana. 2013. Vol. 81, № 3. P. 377–384.

[7] *Eslami M., Rezazadeh H.,* The first integral method for Wu Zhang system with conformable time-fractional derivative // Calcolo. 2016. Vol. 53 № 3. P. 475–485.

[8] *Bulut H., Yel G., Baskonus H. M.* An Application of Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method to The Nonlinear Time-Fractional Burgers Equation // Turk. J. Math. Comput. Sci. 2016. № 5. P. 1–7.

УДК 517.53, 517.535

ОБ ОЦЕНКАХ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ И ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. Е. Додонов (Владимир, Россия)
art-dodonov@mail.ru

С помощью интерполяционного тождества, дополняющего результат В. Н. Русака, получена оценка производных рациональных функций типа Бернштейна–Виденского–Русака, которая применяется для получения оценки квазимногочлена с помощью ассоциированных рациональных функций.

Ключевые слова: интерполяционные тождества, оценки производных рациональных функций, оценки квазимногочленов.

ON ESTIMATES OF QUASIPOLYNOMIALS AND DERIVATIVES OF RATIONAL FUNCTIONS[1]

A. E. Dodonov (Vladimir, Russia)
art-dodonov@mail.ru

We obtain Bernshtein–Videnskii–Rusak type estimate of derivatives of rational functions by dint of interpolation equality complementary to Rusak's result. Also we obtain estimate of quasipolynomial by norm of associated rational functions by dint of this estimate of derivatives of rational functions.

Keywords: interpolation equalities, estimates of derivatives of rational functions, estimates of quasipolynomials.

При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим дроби

$$R_1(z) = P(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k}, \quad R_2(z) = Q(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\overline{z_k}}, \quad R = R_1 + R_2, \quad (1)$$

где $P(z)$, $Q(z)$ — произвольные многочлены с комплексными коэффициентами, $\deg P, \deg Q \le n$, а $z_k \in \mathbb{C}^+$ — не обязательно различные точки.

При $0 \le \varphi < \pi$, $\alpha \ne \pi/2 + \pi k$, положим

$$B(x) = \prod_{k=1}^{n}\frac{x-z_k}{x-\overline{z_k}}, \qquad \mu(x) = -i\frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\,\mathrm{Im}\, z_k}{|x-z_k|^2},$$

$$M(x) = M_{\varphi+\alpha}(x) = \mathrm{Re}\,(e^{i(\varphi+\alpha)}B(x)), \qquad N(x) = N_\varphi(x) = \mathrm{Im}\,(e^{i\varphi}B(x)),$$

и обозначим через $\xi_m = \xi_m(\varphi,\alpha)$ и $\zeta_k = \zeta_k(\varphi)$ нули функций $N_{\varphi+\alpha}$ и M_φ соответственно. Отметим, что все числа $\{\xi_m\}_{m=1}^{2n}$ (как и $\{\zeta_k\}_{k=1}^{2n}$) вещественные и попарно различные.

[1]Работа выполнена в рамках эффективного контракта ВлГУ.
[1]The article is done under the effective contract of Vladimir State University.

С помощью интерполяционного тождества, полученного В. Н. Русаком в монографии [1] для дроби того же вида, что и $R(x)$, но с дополнительным условием вещественнозначности на $\mathbb{R}$, получается

Лемма. *Для дроби вида* (1) *имеет место равенство*

$$R_1'(\xi_m)e^{-i\alpha} + R_2'(\xi_m)e^{i\alpha} = \sum_{k=1}^{2n} R(\zeta_k) \cdot \frac{N(\zeta_k)M(\xi_m) + \sin\alpha}{\mu(\zeta_k)(\xi_m - \zeta_k)^2}.$$

Будем обозначать

$$\mathcal{R}(\varphi) = \max_{1 \le k \le 2n} |R(\zeta_k)|, \qquad \|R\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |R(x)|.$$

С помощью леммы методами монографии [1] получается

Теорема 1. *При любых $x, \alpha \in \mathbb{R}$ для рациональных функций вида* (1) *имеют место неравенства*

$$\left| R_1'(x)e^{-i\alpha} + R_2'(x)e^{i\alpha} \right| \le \mu(x)\mathcal{R}(\varphi) \le \mu(x)\|R\|, \tag{2}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — такое число, что x — нуль функции $N_{\varphi+\alpha}$.

Оценка (2) экстремальна: для дробей $R(x) = B(x)$, $R_1(x) \equiv 1$, $R_2(x) = B(x) - 1$ с одной стороны имеем

$$\left| R_1'(x)e^{-i\alpha} + R_2'(x)e^{i\alpha} \right| = |B'(x)|,$$

а с другой стороны

$$\mu(x)\|R\| = \mu(x) = \left| \frac{B'(x)}{B(x)} \right| = |B'(x)|,$$

так что в этом случае (2) обращается в равенство.

Из (2) методами работы [2] получается оценка квазимногочлена

$$\Omega(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} p_{s,k}\lambda^s \right) e^{iz_k\lambda}, \qquad p_{s,k} \in \mathbb{C}, \quad z_k \in \mathbb{C}^+.$$

с помощью ассоциированных с ним рациональных функций

$$\rho_1(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m} \frac{\hat{p}_{s,k} z^s}{(z - z_k)^{m+1}}, \qquad \rho_2(z) = Q(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - \overline{z_k})^{m+1}}, \tag{3}$$

где при каждом k коэффициенты $\{\hat{p}_{s,k}\}_{s=0}^{m}$ являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=j}^{m} \frac{C_m^j i^{m-j} s! z_k^{s-j}}{(s-j)!} \hat{p}_{s,k} = m! p_{m-j,k}, \qquad j = 0, 1, \ldots, m,$$

а $Q(z)$ — произвольный многочлен, $\deg Q \leq mn$. Именно, справедлива

Теорема 2. *Для любого вещественного* $\lambda > 0$ *и рациональных функций вида* (3) *справедливо неравенство*

$$|\Omega(\lambda)| \leq \frac{n(m+1)}{\lambda} \inf_{\rho_2} \|\rho_1 + \rho_2\|\,, \tag{4}$$

где точная нижняя грань берется по всем дробям ρ_2 *вида* (3).

Неравенство (4) обобщает оценки экспоненциальных сумм, полученные в [3]. Примеры сумм $\Omega(\lambda)$, для которых неравенства типа (4) существенно учитывают взаимное «погашение» гармонических слагаемых, приводились в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск : Изд-во БГУ, 1979. 176 с.

[2] *Данченко В. И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 4. С. 33–52.

[3] *Danchenko V. I., Dodonov A. E.* Estimates for exponential sums. Applications // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 188, № 3. P. 197–206.

УДК 517.53, 517.535

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$[1]

А. Е. Додонов (Владимир, Россия)
art-dodonov@mail.ru

Приводятся критерии и необходимые условия сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$.

Ключевые слова: наипростейшие дроби, ряды наипростейших дробей, условия сходимости.

CONVERGENCE CONDITIONS FOR SERIES OF SIMPLE PARTIAL FRACTIONS[1]

A. E. Dodonov (Vladimir, Russia)
art-dodonov@mail.ru

Criteria and necessary conditions for the convergence of series of simple partial fractions are given.

Keywords: simple partial fractions, series of simple partial fractions, conditions of convergence.

В работах [1]– [4] рассматривалась сходимость в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, рядов наипростейших дробей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k \neq 0. \tag{1}$$

В частности, В. И. Данченко в работе [2] было получено следующее необходимое условие сходимости ряда (1) к некоторой функции ρ в $L_p(\mathbb{R})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q+\varepsilon}} \leq \frac{A(p, \|\rho\|_{L_p(\mathbb{R})})}{\varepsilon^{1/q}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2}$$

а И. Р. Каюмовым в работе [4] для рядов вида (1) с полюсами, лежащими при фиксированном $\alpha > 0$ в угле $V_\alpha = \{z : \ |z| \leq \alpha|y|\}$, занумерованными в порядке возрастания $|y_k|$, было получено необходимое и достаточное условие сходимости в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p-1}}{|y_k|^{p-1}} < \infty. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена в рамках эффективного контракта ВлГУ.
[1]The article is done under the effective contract of Vladimir State University.

Нами доказано следующее необходимое условие сходимости в $L_p(\mathbb{R})$ ряда (1).

Теорема 1. *Пусть ряд наипростейших дробей* (1) *сходится в* $L_p(\mathbb{R})$ *к некоторой функции* ρ. *Тогда при* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{(1+\varepsilon)/q}(|z_k|+1)} < \frac{A(p, \|\rho\|_{L_p(\mathbb{R})})}{\varepsilon^{1/q}}. \tag{4}$$

Очевидно, условие (4) сильнее условия (2). При $2 \le p < 3$ существенно усилить теорему 1 нельзя, поскольку существует такой сходящийся в $L_p(\mathbb{R})$ ряд наипростейших дробей, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{1/p-\delta}(|z_k|+1)} = \infty, \qquad \delta > 0.$$

Нами получен также критерий сходимости в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, ряда (1) с полюсами из угла $V_\alpha \cap \mathbb{C}^+$.

Теорема 2. *Пусть* $z_k \in V_\alpha \cap \mathbb{C}^+$, $1 < p < 2$. *Тогда для сходимости ряда* (1) *в* $L_p(\mathbb{R})$ *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $n \in \mathbb{N}$ *было выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{y_k + y_j} \right)^{p-1} \le A(p, \{z_k\}). \tag{5}$$

Отметим, что из условия (5) вытекает и условие (3) при $1 < p < 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем., 2009. Т. 73, № 2. С. 123–140.

[2] *Данченко В. И.* О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 7. С. 53–66.

[3] *Каюмов И. Р.* Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 10. С. 87–98.

УДК 517.54

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ ХОРДОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА[1]

А. В. Жердев (Саратов, Петрозаводск, Россия)
jerdevandrey@gmail.com

Рассмотрена задача описания множества $\{g(i,T)\}$ значений решений хордового уравнения Лёвнера с ограничением на управляющую функцию $|\lambda(t)| \leq c$. Использованы методы оптимального управления и принцип Понтрягина.

Ключевые слова: множество значений, уравнение Лёвнера, принцип максимума Понтрягина.

ON A VALUE RANGE OF SOLUTIONS TO THE CHORDAL LOEWNER EQUATION[1]

A. V. Zherdev (Saratov, Petrozavodsk, Russia)
jerdevandrey@gmail.com

We consider a value range $\{g(i,T)\}$ of solutions to the chordal Loewner equation with the restriction $|\lambda(t)| \leq c$ on the driving function. We use reachable set methods and the Pontryagin maximum principle.

Keywords: Value range, Loewner equation, Pontryagin maximum principle.

Одной из типичных задач геометрической теории функция является проблема отыскания множества значений $\{f(z_0)\}$ для различных классов аналитических функций.

Обозначим $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathcal{H}(T)$, $T > 0$ - класс всех конформных отображений $g : \mathbb{H}\backslash K \to \mathbb{H}$, нормированных в окрестности бесконечности соотношением $g(z) = z + \frac{2T}{z} + O(|z|^{-2})$. Здесь $K \subset \mathbb{H}$ - так называемый "хал"(hull), это означает что $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ и $\mathbb{H}\backslash K$ есть односвязная область. Решения хордового уравнения Лёвнера

$$\frac{dg(z,t)}{dt} = \frac{2}{g(z,t) - \lambda(t)},\ g(z,0) = z,\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ - вещественнозначная непрерывная функция (управляющая функция), образуют всюду плотный подкласс в классе $\mathcal{H}(T)$. Таким образом, проблема отыскания множества значений $\{g(z_0) : g \in \mathcal{H}(T)\}$, $z_0 \in \mathbb{H}$, сводится к описанию множества $\{g(z_0, T)\}$ достижимости уравнения (1). Без потери общности можно положить $z_0 = i$. Множество

$$D(T) = \{g(i,T) : g \text{ решение } (1)\}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

[1]The article is done with the financial support of the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01229).

было описано в работе [1]. Продолжая это исследование, мы рассматриваем задачу описания множества значений

$$D_c(T) = \{g(i,T) : g \text{ решение } (1),\ |\lambda(t)| \le c\},$$

таким образом, мы добавили ограничение $|\lambda(t)| \le c$. Мы используем методы теории оптимального управления и prицип максимума Понтрягина в качестве основных инструментов для решения указанной задачи (см., например [2, 3]).

Хотя множество $D(T)$ было описано в [1], мы приводим другое описание $D(T)$ в декартовых координатах (X, Y).

Теорема 1. *Граница области $D(T)$, $T > 0$ может быть задана уравнением*

$$2X^2 = \log Y(1 - 4T - Y^2). \tag{2}$$

Легко видеть, что при $T \le \frac{1}{4}$ область $D(T)$ ограничена и ее граница пересекает мнимую ось в точках $y = \sqrt{1-4T}$, $y = 1$. С этого момента мы будем рассматривать только этот случай.

Можно показать, что все точки некоторой дуги на $\partial D(T)$ в окрестности точки $(0, \sqrt{1-4T})$ доставляются управляющими функциями со значениями в интервале $[-c, c]$, следовательно это дуга лежит на границе $\partial D_c(T)$. Это утверждение содержится в следующей теореме.

Лемма 1. *Сегмент границы $\partial D_c(T)$ задается уравнением* (2), $Y \in [1 - 4T, Y_0]$, *где Y_0 - решение одного из уравнений:*

$$2c^2 \log Y + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \ge T - \frac{1-e^{-4}}{4}, \tag{3}$$

$$\frac{2c^2 \log Y}{(1+\log Y)^2} + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \le T - \frac{1-e^{-4}}{4}. \tag{4}$$

Заметим, что если $c^2 = T - \frac{1-e^{-4}}{4}$ оба уравнения (3), (4) имеют общий корень $Y_0 = e^{-2}$.

Следующая теорема описывает искомое множество $D_c(T)$ при условии $c^2 \ge T - \frac{1-e^{-4}}{4}$.

Теорема 2. *Пусть $c^2 \ge T - \frac{1-e^{-4}}{4}$, $T \le \frac{1}{4}$ и пусть кривые $l_1 - l_4$ определены следующим образом:*

1. Кривая l_1 задана уравнением (2), $Y \in [1-4T, Y_0]$, *Y_0 единственное решение* (3).

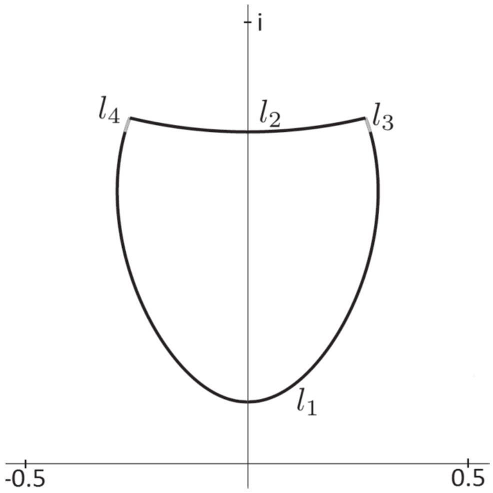


Рис. 1: Граница множества значений $D_c(T)$, T=0.245, c=1

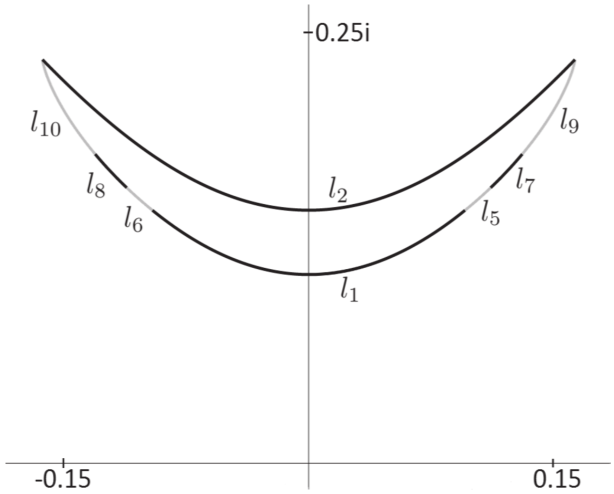


Рис. 2: Граница множества значений $D_c(T)$, T=0.247, c=0.05

2. Кривая l_2 задана решениями (X, Y), $X + iY = z$, $\mu \in [0, 1]$ уравнения

$$z^2 + 1 - 2c(2\mu - 1)(z - i) + 8\mu c^2(\mu - 1) \ln \frac{z + c(2\mu - 1)}{i + c(2\mu - 1)} = 4T.$$

3. Кривая l_3 задана системой

$$\begin{cases} 2p^2 \log \dfrac{Yp}{c} + Y^2 - p^2 = 1 - 4T - c^2, \\ X = -c + p(1 - \log \dfrac{Yp}{c}), \end{cases} \tag{5}$$

где $p \in [c, p_0]$ и

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(4T + c^2 - 1)^2 + 4c^2} + (4T + c^2 - 1))}.$$

Кривая l_4 симметрична кривой l_3 относительно мнимой оси.

В случае, если уравнение

$$-4pc + \frac{c^2}{p^2} \exp\left(-\frac{4c}{p}\right) - p^2 = 1 - 4T - c^2 \tag{6}$$

имеет два различных решения $p_1 < p_2$ в интервале (c, p_0) мы также определим кривые $l_5 - l_{10}$.

4. Кривая l_5 задана системой (5), $p \in [c, p_1]$. Кривая l_6 симметрична l_5 относительно мнимой оси.

5. Кривая l_7 задана системой

$$\begin{cases} 4cp + (X-c)^2 - Y^2 - 4T = c^2 - 1, \\ -p \log \dfrac{(X-c)Y}{c} = 2c, \end{cases}$$

где $p \in [p_1, p_2]$. Кривая l_8 симметрична l_7 относительно мнмимой оси.

6. Кривая l_9 задана системой (5), $p \in [p_2, p_0]$. Кривая l_{10} симметрична l_9 относительно мнмимой оси.

Возможны два случая:

(1) $D_c(T)$ ограничена кривыми $l_1, l_2, l_5 - l_{10}$, если (6) имеет два различных решения $p_1 < p_2$ в интервале (c, p_0).

(2) $D_c(T)$ ограничена кривыми $l_1 - l_4$, если (6) имеет не более одного решения в интервале (c, p_0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Prokhorov D., Samsonova K.* Value range of solutions to the chordal Loewner equation. // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 428, №. 2. P. 910–919.

[2] *Prokhorov D.* Sets of values of systems of functionals in classes of univalent functions. // Mat. Sb., 1990. Vol. 181, №. 12. P. 1659–1677. English translation: Math. USSR Sb. 1992. Vol. 71, № 2. P. 499–516.

[3] *Prokhorov D.* Reachable Set Methods in Extremal Problems for Univalent Functions. Saratov : Saratov Univ. 1993.

УДК 517.9

О ГЛОБАЛЬНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Н. В. Зайцева (Казань, Россия)
n.v.zaiceva@yandex.ru

Для двумерного гиперболического уравнения с двумя сдвигами по пространственной переменной построено однопараметрическое семейство глобальных классических решений.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение.

ON GLOBAL CLASSICAL SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS[1]

N. V. Zaitseva (Kazan, Russia)
n.v.zaiceva@yandex.ru

A one-parametric family of global classical solutions of a two-dimensional hyperbolic equation with two translations of the spatial variable is constructed.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution.

В настоящее время достаточно полно и глубоко изучены задачи для дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях (см., напр., [1–4] и имеющуюся там библиографию), которые не могут быть описаны классическими моделями математической физики, но имеющие большое значение в различных приложениях. В случае неограниченных областей рассмотрены задачи для параболических [5] и эллиптических уравнений [6–10]. В данной работе исследуется дифференциально-разностное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - h_1, t) + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - h_2, t), \tag{1}$$

где a_j, h_j $(j = 1, 2)$ — заданные вещественные числа, при этом $a_1 + a_2 > 0$, на параметры h_1 и h_2 никакие условия соизмеримости не накладываются.

Применив классическую схему Гельфанда–Шилова, доказана следующая

[1]Автор выражает глубокую благодарность Региональному научно-образовательному математическому центру Казанского (Приволжского) федерального университета за финансовую поддержку (проект № 0212/02.12.10179.001).

[1]The author is grateful to the Regional scientific and educational mathematical center of Kazan (Volga region) federal university (project no. 0212/02.12.10179.001).

Теорема. *Функция*

$$G(x,t;\xi) = \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} + \\ + \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)}$$

удовлетворяет уравнению (1) *при любом вещественном значении параметра* ξ. *Здесь*

$$\rho(\xi) = \left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\left(h_1 - h_2\right)\xi\right)^{1/4},$$
$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{a_1\sin h_1\xi + a_2\sin h_2\xi}{a_1\cos h_1\xi + a_2\cos h_2\xi}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71, вып. 5 (431). С. 3–112.

[2] *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. мат. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

[3] *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II // Соврем. мат. Фундам. направл. 2009. Т. 33. С. 3–179.

[4] *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional-differential equations and applications. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1997. 293 p.

[5] *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 52. С. 3–143.

[6] *Муравник А. Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 5. С. 747–762.

[7] *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач // Соврем. мат. Фундам. направл. 2017. Т. 63, № 4. С. 678–688.

[8] *Муравник А. Б.* О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2016. Т. 60. С. 102–113.

[9] *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Матем. заметки. 2016. Т. 100, вып. 4. С. 566–576.

[10] *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. Vol. 12, № 6. P. 130–143.

УДК 517.984

СВОЙСТВА ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
ignatievmu@info.sgu.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений $y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y$, где матрицы $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$ и A постоянны, $q(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$. Устанавливается ряд свойств матрицы сопряжения для решений типа Вейля на прямых вида $\{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}$, $j \neq k$.

Ключевые слова: спектральная теория, обратные задачи, системы с особенностью.

PROPERTIES OF SCATTERING DATA OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A SINGULARITY[1]

M. Yu. Ignatiev (Saratov, Russia)
ignatievmu@info.sgu.ru

We consider differential system $y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y$, where the matrices $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$ and A are constant, $q(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$. Some properties of conjugation matrix for the Weyl-type solutions on the lines of the form $\{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}$, $j \neq k$ are established.

Keywords: spectral theory, inverse problems, systems with a singularity.

Предположим, что постоянные комплексные $n \times n$, $n > 2$ матрицы A, B удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1. *Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $Re\mu_1 < Re\mu_2 < \cdots < Re\mu_n$, $Re\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.*

Условие 2. *$B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, элементы $b_1, \ldots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что $\sum_{j=1}^{n} b_j = 0$.*

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Представим множество $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ в виде $\mathbb{C}\setminus\Sigma = \bigcup_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$ объединения непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$. В каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ существует

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00102).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 19-01-00102).

перестановка $R_1, \ldots, R_n$ чисел $b_1, \ldots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \cdots < \mathrm{Re}(R_n z)$ при $z \in \mathcal{S}_\nu$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dz} = (B + z^{-1}A)y. \tag{1}$$

При выполнении Условия 1 система (1) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида $c_k(z) = z^{\mu_k}\hat{c}_k(z)$, $k = \overline{1,n}$, где $\hat{c}_k(z)$ – целые функции. При выполнении Условия 2 система (1) имеет в каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$ фундаментальную систему решений $\{e_k(z)\}_{k=1}^n$, такую, что:

$$e_k(z) = \exp(zR_k)(\mathfrak{f}_k + O(z^{-1})),\ z \to \infty,\ z \in \mathcal{S}_\nu.$$

Здесь $(\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}$ – матрица перестановок, такая что $(R_1, \ldots, R_n) = (b_1, \ldots, b_n)\mathfrak{f}$.

Предположим, далее, что выполнено также следующее условие.

Условие информативности. *Для каждого из секторов $\mathcal{S}_\nu$ и для всех $k = \overline{2,n}$ числа $\Delta_{0k} := \det(e_1(z), \ldots, e_{k-1}(z), c_k(z), \ldots, c_n(z))$, $z \in \mathcal{S}_\nu$ отличны от* 0.

В дальнейшем рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{2}$$

со спектральным параметром ρ, где матрица-функция $q(x)$ удовлетворяет условиям: $q_{kj} \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $p > 2$ для всех k, j, $q_{kk}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$.

Определение. Пусть $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ фиксированы. Решение $\Psi_k(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$ системы (2) называется k-м решением типа Вейля, если оно удовлетворяет условиям:

$$\Psi_k(x,\rho) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,\ \Psi_k(x,\rho) = \exp(\rho x R_k)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Вопросы построения и исследования свойств решений типа Вейля подробно изучались в работе [1]. Известно, в частности, что k-е решение типа Вейля существует и единственно для всех таких $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, для которых $\Delta_k(\rho) \neq 0$. Здесь $\Delta_k(\rho)$ – характеристическая функция краевой задачи, образованной системой (2) и краевыми условиями

$$y(x) = O\left(x^{\mu_k}\right), x \to 0,\ y(x) = o(\exp(\rho x R_k)), x \to \infty.$$

Обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ (здесь предполагается, что нумерация секторов осуществляется в направлении против часовой стрелки и $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Если некоторая функция $f(\rho)$ определена при $\rho \in \mathcal{S}_\nu \cup \mathcal{S}_{\nu+1}$, то через $f^{\pm}(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ обозначим пределы

$$f^-(\rho) = \lim_{\xi\to\rho,\xi\in\mathcal{S}_\nu} f(\xi),\ f^+(\rho) = \lim_{\xi\to\rho,\xi\in\mathcal{S}_{\nu+1}} f(\xi).$$

Известно, в частности, что предельные значения $\Delta_k^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют для всех k, ν.

Определим Σ_ν^1 как множество таких $\rho \in \Sigma_\nu$, для которых

$$\prod_{k=2}^{n} \Delta_k^\pm(\rho) \neq 0.$$

Для любого $\rho \in \Sigma_\nu^1$ существуют предельные значения $\Psi^\pm(x,\rho)$, где $\Psi(x,\rho) := (\Psi_1(x,\rho),\ldots,\Psi_n(x,\rho))$. Поскольку каждая из матриц $\Psi^-(x,\rho)$, $\Psi^+(x,\rho)$ удовлетворяет системе (2), для каждого $\rho \in \Sigma^1 := \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \Sigma_\nu^1$ определена (единственная) матрица (*матрица сопряжения*) $v(\rho)$ такая, что $\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho)v(\rho)$.

Обозначим через $\Pi(\rho)$, $\rho \in \Sigma \setminus \{0\}$ матрицу перестановок такую, что $\mathfrak{f}^+(\rho) = \mathfrak{f}^-(\rho)\Pi(\rho)$. Заметим, что при выполнении Условия 2 матрица $\Pi(\rho)$ – блочно-диагональная, причём диагональные блоки имеют либо размер 1×1 и равны 1 («тривиальные блоки»), либо размер 2×2 («нетривиальные блоки»).

Теорема 1. *Для каждого $\rho \in \Sigma^1$ матрица $v(\rho)$ является нижнетреугольной и блочно-диагональной, причём нетривиальные диагональные блоки расположены в тех же строках и столбцах, что нетривиальные диагональные блоки матрицы $\Pi(\rho)$. Каждый нетривиальный диагональный блок матрицы $v(\rho)$ имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

причём $v_{kk}v_{k+1,k+1} = -1$.

Обозначим через $v_0(\rho)$ матрицу сопряжения, соответствующую «простейшей» системе вида (2) с $q = 0$.

Теорема 2. *При $\rho \to \infty$, $\rho \in \Sigma^1$ $v(\rho) - v_0(\rho) \to 0$. Если, кроме того, $\lim\limits_{\rho\to 0,\rho\in\mathcal{S}_\nu} \prod\limits_{k=2}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0$ для всех $\nu = \overline{1,N}$, то*

$$\lim_{\rho\to 0,\rho\in\Sigma^1} (v(\rho) - v_0(\rho)) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ignatyev M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. Vol. 71. P. 1531–1555.

УДК 517.54

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМУМОВ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ И ОБОБЩЁННЫХ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ[1]

А. В. Казанцев, М. И. Киндер (Казань, Россия)
avkazantsev63@gmail.com, mkinder@rambler.ru

Установлены новые условия единственности критической точки конформного радиуса. Исследуется проблема существования критических точек для новых конструкций обобщённых приведенных модулей.

Ключевые слова: конформный радиус, обобщенный приведенный модуль.

PROPERTIES OF EXTREMA OF CONFORMAL RADII AND GENERALIZED REDUCED MODULI[1]

A. V. Kazantsev, M. I. Kinder (Kazan, Russia)
avkazantsev63@gmail.com, mkinder@rambler.ru

New conditions for the uniqueness of the critical point of the conformal radius are established. We study the problem of the existence of critical points for new constructions of generalized reduced moduli.

Keywords: generalized reduced modulus, conformal radius.

Единственность критической точки конформного радиуса

Через H обозначим класс функций, голоморфных в $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, через H^∞ — пространство функций $F \in H$, ограниченных в D; $\|F\|_\infty = \sup_{\zeta\in D} |F(\zeta)|$ — норма элемента $F \in H^\infty$. Справедлива

Теорема 1. *Голоморфная в D функция $f(\zeta) = \zeta + \ldots$, удовлетворяющая условию*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \le 2, \quad \zeta \in D, \tag{1}$$

имеет единственную (не обязательно нулевую) критическую точку конформного радиуса

$$h_f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\,|f'(\zeta)| \tag{2}$$

в круге D. Постоянная 2 в (1) неулучшаема; одновременное нарушение условия (1) и единственности критической точки функции h_{f_b}

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

[1]This work was funded by the subsidy of the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan, Grant 18-41-160017.

при движении вдоль лучей Хорнича $f_b(\zeta) = \int_0^\zeta f'(t)^b\,dt$ с ростом b, где $||\, f''/f'\,||_\infty = 1$, происходит только в случае функции $f(\zeta) = \int_0^\zeta e^{t^2/2}\,dt$ и её вращений.

Пусть A — подкласс H, состоящий из функций f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, H_0 — класс функций $f \in A$, локально однолистных в D. Регулярный класс Гахова G_1 состоит из всех функций $f \in H_0$, для которых уравнение Гахова

$$f''(\zeta)\,/\,f'(\zeta) = 2\,\overline{\zeta}\,/\,(1 - |\,\zeta\,|^2), \tag{3}$$

имеет единственный корень в D, являющийся максимумом функции (2).

Рассмотрим отображение $P : H_0 \to H : f \mapsto F = f''\,/\,f'$. Пусть $\Delta = \{\, F \in H^\infty : ||\,F\,||_\infty \le 2\,\}$ и $C = P(G_1) \cap H^\infty$; через $Fr_{H^\infty}C$ обозначается граница множества C в пространстве H^∞. Теорема 1 означает выполнение неулучшаемого включения $\Delta \subset P(G_1)$. Использование погружения $P_{H^\infty} : P^{-1}(H^\infty) \to H^\infty$ позволяет усилить утверждение о неулучшаемости из теоремы 1. Справедлива

Теорема 2. *Имеет место соотношение*

$$\Delta \cap Fr_{H^\infty}C = \{\, F(\zeta) = 2\varepsilon\zeta : |\,\varepsilon\,| = 1\}\,.$$

Рассмотрим теперь другой подход к неулучшаемости условия единственности (1). Пусть k_f — число критических точек функции (2), лежащих в D. Если $X \subset H_0$, то $\tilde{X}$ определяется как подкласс всех функций f из X с нулевым корнем уравнения (3), т.е. с условием $f''(0) = 0$. При выполнении последнего неравенство (1) можно записать в виде подчиненности

$$f''(\zeta)\,/\,f'(\zeta) \prec F(\zeta) = 2\zeta, \quad \zeta \in D. \tag{4}$$

Из результатов [1] следует, в частности, такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in \tilde{H}_0$ удовлетворяет условию (3). Тогда $f \in \tilde{G}_1$. Кроме того, имеет место эффект Новикова–Хохлова, заключающийся в том, что мажоранту единственности, $F(D) = 2D$, нельзя звездообразно расширить. Это значит, что если голоморфная в D функция H с $H'(0) \ne 0$ удовлетворяет условию $H\,/\,H'(0) \in S^*$ и если $F(D) \subsetneqq H(D)$, то существует функция $g \in \tilde{H}_0$ с $g''\,/\,g' \prec H$ в D и $k_g > 1$.*

Обобщённые приведенные модули

Пусть D — конечносвязная ограниченная плоская область, и пусть $F(w, w_0) = (w - w_0)f(w, w_0)$, $f(w_0, w_0) \ne 0$, — функция, отображающая D на каноническую область в виде единичного круга с центром в начале координат и с разрезами предписанной формы: круговыми концентрическими дугами, радиальными разрезами, а также их различными комбинациями.

Обобщенным приведенным модулем области D относительно заданной канонической области называется функция

$$M(w) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\, f(w,w)\,|.$$

Конформным радиусом области D в точке w будем называть функцию

$$R(w) = \exp\left(2\pi M(w)\right).$$

Критические точки обобщённого приведённого модуля, очевидно, совпадают с критическими точками конформного радиуса области D и являются корнями уравнения

$$\partial M(w)/\partial w = 0. \tag{5}$$

В этой части статьи мы приводим результаты, связанные с исследованием критических точек обобщённых приведённых модулей двусвязных областей относительно различных канонических областей.

Круг с круговым концентрическим разрезом

Если в качестве канонической области выбран единичный круг с круговыми концентрическими разрезами, то количество критических точек функции $M = M(w)$ не меньше порядка связности области D [2].

В качестве примера найдём обобщённый приведённый модуль кольца $E_q = \{\, w \,|\, q < |\, w\,| < 1\,\}$ относительно единичного круга с разрезом вдоль дуги с центром в начале координат. Функция $F(w, w_0)$, осуществляющая конформное и однолистное отображение E_q на область указанного типа, имеет вид (см. например, [3, с. 233]):

$$F(w,w_0) = \frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-q^{2k}w/w_0)(1-q^{2k}w_0/w)}{(1-q^{2k}w\overline{w}_0)(1-q^{2k}/(w\overline{w}_0))}\right].$$

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом равен $M(w) = \frac{1}{2\pi}\ln R(w)$, где $R(w)$ — конформный радиус в точке w, с точностью до постоянного сомножителя равный

$$R(w) = (1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}r^{-2}), \quad r = |\, w\,|,$$

Критические точки обобщённого приведённого модуля кольцевой области E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом находятся из уравнения (5):

$$\frac{r^2}{1-r^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2}-\frac{q^{2k}\,/\,r^2}{1-q^{2k}\,/\,r^2}\right]=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{2k}(r^4-q^2)}{(1-q^{2k}r^2)(r^2-q^{2k+2})}=0\,.$$

Теорема 4. *Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с круговым концентрическим разрезом имеет бесконечное количество критических точек, расположенных на окружности $|\,w\,|=\sqrt{q}$.*

Единичный круг с радиальным разрезом

Найдем обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом. Обозначим через $F(w,w_0)$ функцию, которая конформно и однолистно отображает E_q на область указанного типа, при этом для удобства будем считать, что радиальный разрез расположен на вещественной оси. Функция $F(w,w_0)$ имеет вид

$$F(w,w_0)=\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0w}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(1-q^{2k}w\,/\,w_0)(1-q^{2k}w_0\,/\,w)}{(1-q^{2k}w\overline{w}_0)(1-q^{2k}\,/\,(w\overline{w}_0))}\right]^{(-1)^k}.$$

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно этой области равен $M(w)=\frac{1}{2\pi}\ln R(w)$, где $R(w)$ — конформный радиус в точке w, с точностью до постоянного сомножителя равный

$$R(w)=(1-r^2)\prod_{k=1}^{\infty}\left[(1-q^{2k}r^2)(1-q^{2k}r^{-2})\right]^{(-1)^k},\quad r=|\,w\,|.$$

Уравнение (5) для нахождения критических точек обобщённого приведённого модуля области E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом

$$\frac{r^2}{1-r^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{q^{2k}r^2}{1-q^{2k}r^2}-\frac{q^{2k}\,/\,r^2}{1-q^{2k}\,/\,r^2}\right]=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{2m}+r^{-2m}q^{2m}}{1+q^{2m}}=0.$$

не имеет решений.

Теорема 5. *Обобщённый приведённый модуль кольца E_q относительно единичного круга с радиальным разрезом не имеет критических точек.*

Обобщённый приведённый модуль кольца E_q можно исследовать также относительно других канонических двусвязных областей специального вида, у которых внутренний контур — круговой или радиальный разрез, а внешний — звездообразная кривая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kazantsev A. V.* Hohlov effects for pre-Schwarzian derivatives of functions in the Gakhov class // Lobachevskii J. Math. 2019. Vol. 40, № 9. P. 1324–1329.

[2] *Киндер М. И.* О числе решений уравнения Ф. Д. Гахова в случае многосвязной области // Изв. вузов. Матем. 1984. № 8. С. 69–72.

[3] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970. 304 с.

УДК 517.5

СВОЙСТВО ФАТУ ДЛЯ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЕДИНИЦ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Г. А. Карагулян (Ереван, Армения),
И. Н. Катковская (Минск, Беларусь),
В. Г. Кротов (Минск, Беларусь),
М. Х. Сафарян (Ереван, Армения)
g.karagulyan@gmail.com, krotov@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой. Приводятся условия на ядра $\varphi_t : X \times X \to \mathbb{R}$, $t \in (0, 1]$, интегральных операторов, при которых они образуют аппроксимативную единицу. Основные утверждения описывают свойство Фату (сходимость почти всюду вдоль некоторого семейства областей подхода к границе $X \times (0, 1]$) для таких операторов.

Ключевые слова: аппроксимативные единицы, метрические пространства смерой, свойство Фату.

FATOU PROPERTY FOR APPROXIMATIONS OF IDENTITY ON METRIC MEASURE SPACES

G. A. Karagulyan (Erevan, Armenia),
I. N. Katkovskaya (Minsk, Belarus),
V. G. Krotov (Minsk, Belarus),
M. H. Safaryan (Erevan, Armenia)
g.karagulyan@gmail.com, krotov@bsu.by

Let (X, d, μ) be a metric measure space. The conditions on the kernels of $\varphi_t : X \times X \to \mathbb{R}$, $t \in (0, 1]$, integral operators for which they form an approximative unit are given. The main statements describe the Fatou property (convergence almost everywhere along some family areas of approach to the boundary $X \times (0, 1]$) for such operators.

Keywords: approximations of identity, Metric measure spaces, Fatou property.

Пусть X — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ, причем мера каждого шара $B \subset X$ положительна и конечна. Будем использовать обозначения

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

для открытого шара с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$,

$$f_B = \fint_B f \, d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$.

Для $p \in [1, \infty]$ используем стандартное обозначение

$$\|f\|_{L^p(X)} = \|f\|_p := \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \|f\|_\infty := \inf\{A : \mu\{|f| > A\} = 0\}, \quad p = \infty.$$

$L^p(X)$ означает множество (классов эквивалентности) измеримых функций, для которых эта величина конечна.

Мы будем предполагать, что выполнено условие удвоения: существует такое число $a_\mu > 0$, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad r > 0. \tag{1}$$

Кроме того, нам понадобится следующее условие на меру μ: существуют постоянные $C_1, C_2 > 1$

$$\mu(B(x, C_1 r)) \geq C_2 \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \ r > 0, \tag{2}$$

которое не представляется очень ограничительным.

Запись $A \lesssim B$ всегда будет означать, что $A \leq cB$, где c — некоторая положительная постоянная, зависящая, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны.

Мы рассматриваем семейства интегральных операторов

$$\Phi_t f(x) = \int\limits_X \varphi_t(x, z) f(z) \, d\mu(z),$$

где ядра $\varphi_t : X \times X \to \mathbb{R}$, $t > 0$, образуют аппроксимативную единицу, то есть удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi_t \in L^\infty(X \times X)$,

$$\int\limits_X \varphi_t(x, z) \, d\mu(z) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in X, \ t > 0,$$

2) для любого $\delta > 0$

$$\sup_{d(x,y) > \delta} \varphi_t^*(x, y) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0,$$

где

$$\varphi_t^*(x, y) := \sup\{|\varphi_t(x, z)| : d(x, y) \leq d(x, z)\},$$

3) $C_\varphi := \sup\limits_{t \in (0,1)} \sup\limits_{x \in X} \|\varphi_t^*(x, \cdot)\|_{L^1(X)} < \infty$.

Пусть задана функция $\lambda : (0,1] \to (0,1]$, $\lambda(+0) = 0$, порождающая области подхода к «границе» абстрактного полупространства $X \times (0,1]$

$$D_\lambda(x) = \{(y,t) \in X \times (0,1] : d(x,y) < \lambda(t)\}, \quad x \in X.$$

Предел функции, заданной на $X \times (0,1]$, вдоль области $D_\lambda(x)$ будем обозначать $D_\lambda(x) - \lim$. Введем еще максимальный оператор Фату, соответствующий этим областям

$$\mathcal{N}_\lambda u(x) := \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in D_\lambda(x)\}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2). *Тогда если функция* λ *такова, что*

$$C_\lambda := \sup_{x \in X} \|\varphi_t^*(x,\cdot)\|_{L^\infty(X)}\, \mu(B(x,\lambda(t))) < \infty. \tag{3}$$

Тогда

$$\mu\left(\{\mathcal{N}_\lambda(\Phi_t f) > A\}\right) \lesssim \frac{C_\lambda}{A} \|f\|_{L^1(X)}, \quad A > 0,\ f \in L^1(X).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (2). *Тогда если функция* λ *удовлетворяет условию* (3), *то для любой функции* $f \in L^1(X)$

$$D_\lambda(x) - \lim \Phi_t f = f(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in X.$$

Теорему 2 можно уточнить следующим образом. Будем говорить, что $x \in X$ является точкой Лебега функции $f \in L^1(X)$, если

$$\lim_{t \to +0} \fint_{B(x,t)} |f(y) - f(x)|\, d\mu(y) = 0.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1), (2) *и функция* λ *удовлетворяет условию* (3). *Тогда для любой функции* $f \in L^1(X)$ *соотношение*

$$D_\lambda(x) - \lim \Phi_t f = f(x)$$

выполнено в каждой точке Лебега $x \in X$.

В силу условия удвоения для любой функции $f \in L^1(X)$ почти все точки $x \in X$ являются точками Лебега [1, §2.7] (для этого еще необходима плотность непрерывных функций в $L^1(X)$), что обеспечивается регулярностью меры μ).

Утверждения типа теорем 1–3 для «радиальной» и «некасательной» сходимости хорошо известны для аппроксимативных единиц на $\mathbb{R}^n$ вида $f * \varphi_t$, где $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$ (см., например, [2, глава 3, §2]).

В случае $X = [-\pi, \pi]$ подобные утверждения были получены в [3] для ядер сверточного вида $\varphi_t(x - y)$. Они содержали как следствие 1) некасательное граничное поведение интегралов Пуассона в круге и 2) касательное (с логарифмическим порядком касания) граничное поведение для свертки с корнем квадратным из этого ядра, которое изучались ранее в [4] и [5]).

Результаты из [4] и [5]) были перенесены на пространства однородного типа в [6] и [7]. В частности в [7] в качестве иллюстрирующих примеров рассматривались операторы, ядрами которых были нормированные степени многомерных ядер Пуассона:

$$p(x,\theta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \theta|^n}, \quad |x| < 1,\ |\theta| = 1$$

для единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см, например, [8, глава 2, §1]) и

$$p(z,\zeta) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \zeta\rangle|^{2n}} \quad |z| < 1,\ |\zeta| = 1$$

(инвариантное ядро Пуассона) для единичного шара в $\mathbb{C}^n$ (см, например, [9, глава 3, §3]).

Указанные работы и послужили поводом для нашей заметки — в них рассматривались ядра конкретного вида или структуры. Мы же хотели выделить те общие свойства ядер, которые позволяют рассматривать интегральные операторы с этими ядрами как аппроксимативные единицы с различным граничным поведением, не обязательно «некасательным».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. Berlin : Springer-Verlag. 2001. 140 p.

[2] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир. 342 с.

[3] *Karagulyan G. A., Safaryan M. H.* On Generalizations of Fatou's Theorem for the Integrals with General Kernels // J. Geom. Anal. 2014. Vol. 25. № 3. P. 1459–1475.

[4] *Sjögren P.* Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique // Lect. Notes in Math. 1984. Vl. 1096. P. 544–548.

[5] *Ronning J.-O.* Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Math. Scand. 1997. Vol. 81. P. 219–235.

[6] *Катковская И. Н., Кротов В. Г.* О касательном граничном поведении потенциалов // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 1997. Т. 2. С. 63–72.

[7] *Катковская И. Н., Кротов В. Г.* Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона // Матем. заметки. 2004. Т.75, № 4. С. 580–591.

[8] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 331 с.

[9] *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М. : Мир, 1984. 455 с.

УДК 517.518.43

О МНОЖЕСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА–ДЖАФАРЛИ [1]

Т. Д. Козловская (Москва, Россия)
tdkozl2018@mail.ru

Доказывается теорема: объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы.

Ключевые слова: группа целых p-адических чисел, нуль-мерная группа, характеры групп, система Виленкина–Джафарли, U_r-множества.

ON SETS OF RELATIVE UNIQUENESS FOR THE VILENKIN–DZHAFARLI SYSTEM[1]

T. D. Kozlovskaya (Moscow, Russia)
tdkozl2018@mail.ru

We prove a theorem: the union of countable many closed U_r-sets ($r > 2$) for the Vilenkin–Dzhafarli system is again U_r-set for this system.

Keywords: group of p-adic intergers, zero-dimensional group, characters of a group, Vilenkin–Dzhafarli system, U_r-sets.

Группа $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел (p — простое число) определяется следующим образом. Элементами этой группы являются последовательности

$$g = (x_0, x_1, ..., x_n, ...),$$

где x_n может принимать значения $0, 1, ..., p-1$. Топология задается подгруппами

$$G_n = \{g \in \mathbb{Z}_p,\ x_j = 0 \text{ для } j = 0, 1, ..., n-1\}.$$

$$\mathbb{Z}_p = G_0 \supset G_1 \supset ... G_n \supset ... \ .$$

Если $a = (a_0, ..., a_n, ...)$, $b = (b_0, ..., b_n, ...)$, $a^{(k)}, b^{(k)}$ — последовательности финитных элементов — «срезок» элементов a и b соответственно, то будем считать

$$a\dot{+}b \equiv \lim_{k\to\infty}(a^{(k)} + b^{(k)}),$$

где предел понимается в смысле сходимости в топологическом пространстве $\mathbb{Z}_p$.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

Множество $G = \mathbb{Z}_p$ с введённой топологией и операцией сложения является компактной коммутативной нуль-мерной топологической группой.

Смежные классы группы G по подгруппе G_n будем обозначать K_j^n, $j = 0, 1, ..., p^n - 1$.

Группу характеров Γ для группы $\mathbb{Z}_p$ образует так называемая система Виленкина-Джафарли.

$$\gamma_n(g) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=0}^{s} \frac{t_k}{p^{k+1}} \sum_{j=0}^{s} x_j p^j\right).$$

Здесь $n = \sum\limits_{k=0}^{s} t_k p^k, \quad 0 \le t_k \le p - 1.$

Система Виленкина–Джафарли является ортонормированной (см. [1]).

Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k \tag{1}$$

— ряд по системе Γ.

Множество E в области определения системы функций называется *множеством единственности*, или *U-множеством*, для этой системы, если из сходимости к нулю всюду вне E ряда по этой системе вытекает, что все его коэффициенты равны нулю. Если в определении множества единственности наложить на коэффициенты ряда a_n условие $a_n \in l^r$ $(1 \le r < \infty)$, то получим определение *U_r-множества*.

В работе [2] было доказано, что объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств $(r > 2)$ для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы.

В настоящей работе аналогичный результат доказан для системы Виленкина–Джафарли:

Теорема 1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств $(r > 2)$ для системы Джафарли является U_r-множеством для этой системы.*

Доказательство предваряет несколько лемм. В их доказательстве используем интегральное представление для частичных сумм ряда Фурье функции $f \in L(G)$ по системе характеров компактной нуль-мерной коммутативной группы G (см. [1]):

$$S_n(f; g) = \int\limits_G f(g \dot{-} u) D_n(u) d\mu(u), \tag{2}$$

μ — мера Хаара на группе G, $D_n(u)$ — ядро Дирихле для этой системы.

Используем также оценку ядра $D_n(g)$ для системы Виленкина–Джафарли (см. [1]):

$$D_{p^s}(g) = \begin{cases} p^s, \text{если}\, g \in G_s; \\ 0, \text{если}\, g \in \mathbb{Z}_p \setminus G_s. \end{cases} \qquad (3)$$

Нам понадобится также некоторый аналог теоремы Валле-Пуссена, доказанный в работе [3] (теорема 4.2). Приведем частный случай этой теоремы.

Теорема А. *Пусть частичные суммы* $S_{p^n} = \sum\limits_{k=0}^{p^n-1} a_k \gamma_k$ *ряда* (1) *почти всюду на* G *сходятся к суммируемой функции* f, *и выполнены условия*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \overline{\lim_{n\to\infty}} |S_{p^n}(g)| < +\infty$$

всюду, кроме счетного множества. Тогда ряд (1) *является рядом Фурье функции* f *по системе* Γ.

Лемма 1. *Пусть* $2 \le r < \infty$, *измеримое множество* $E \subset \mathbb{Z}_p$ *и является* U_r*-множеством для системы характеров группы* $\mathbb{Z}_p$. *Тогда мера Хаара множества* E *равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что $\mu(E) > 0$. Зафиксируем число ε: $0 < \varepsilon < \mu(E)$. Множество CE можно покрыть объединением D счетного множества смежных классов K_j^n так, что $\mu(CE) < \mu(D) < \mu(CE) + \varepsilon$. Тогда $\mu(CD) > \mu(E) - \varepsilon > 0$. Получим замкнутое множество $F = CD \subset E$, $\mu(F) > 0$.

Построим нетривиальный ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l \gamma_l$ по рассматриваемой системе характеров Γ с коэффициентами из l^r, сходящийся к нулю всюду вне множества E. Характеристическая функция χ_F замкнутого множества F принадлежит $L_2(G)$; поэтому ее коэффициенты Фурье по системе Γ $c_l(\chi) \in l^2 \subset l^r$, $r > 2$, и $c_0 = \mu(F) > 0$. Пусть $g \in CF$. Тогда существует смежный класс $K^{n_0} \subset CF$ такой, что $g \in K^{n_0}$; ясно, что для всех $n > n_0$ элемент g входит в некоторый смежный класс K^n.

Согласно (2), (3) имеем

$$S_{p^n}(\chi_F; g) = \int\limits_G \chi_F(g \dot{-} u) D_{p^n}(u) d\mu(u) = p^n \int\limits_{G_n} \chi_F(g \dot{-} u) d\mu(u).$$

Так как $g \in K^n$, $u \in G_n$, то и $g \dot{-} u \in K^n$; значит, $\chi_F(g \dot{-} u) = \chi_F(g) = 0$, и $S_{p^n}(\chi_F; g) = 0$ для всех $n \ge n_0$, всех $g \in CF$.

Итак, подпоследовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l(\chi)\gamma_l \ S_{p^n}(\chi, g)$$

сходится к нулю в любой точке открытого множества CF. Согласно [4] (теорема 3.4) из этого следует, что рассматриваемый ряд сходится к нулю на CF.

Нуль-рядом Виленкина–Джафарли назовем всякий нетривиальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k(g)$, сходящийся почти всюду на $\mathbb{Z}_p$ к нулю.

Пусть $S_n(g)$ — последовательность частичных сумм нуль-ряда. Множество элементов группы $\mathbb{Z}_p$, где нуль-ряд не сходится к нулю, будем называть *ядром нуль-ряда.* Множество элементов, где

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(g)| = +\infty,$$

будем называть *приведенным ядром нуль-ряда.*

Порцией $\delta(E)$ множества $E \subset G$ назовём множество $E \bigcap K^n$, где K^n — некоторый смежный класс группы G по подгруппе G_n.

Лемма 2. *Пусть $\delta(B)$ — непустая порция ядра B нуль-ряда Виленкина–Джафарли, N — приведенное ядро этого нуль-ряда. Существует другой нуль-ряд Виленкина–Джафарли, для которого соответственно ядром и приведенным ядром являются порции $\delta(B)$ и $\delta(N)$ ядра и приведенного ядра исходного нуль-ряда.*

Доказательство. Пусть рассматриваемая порция ядра B нуль-ряда есть пересечение ядра B и смежного класса K^n. Характеристическая функция любого смежного класса может быть представлена как полином по системе характеров Г. Согласно теореме локализации для нульмерных групп (см. теорему 3.2 из [4]) формальное произведение

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l\gamma_l \tag{4}$$

этого полинома и данного нуль-ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\gamma_i$ равномерно сходится к нулю вне K^n и равномерно равносходится с данным нуль-рядом на K^n. Значит, ряд (4) сходится к нулю почти всюду на $G = \mathbb{Z}_p$, но не всюду: в точках множества $\delta(B)$ ряд (4) не сходится к нулю. Итак, ряд (4) — нуль-ряд; из теоремы локализации ясно, что $\delta(B)$ и $\delta(N)$ — его ядро B_1 и приведенное ядро N_1 соответственно.

Лемма 3. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является несчетным множеством.*

Доказательство. Предположим, что приведенное ядро нуль-ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k$ счетное. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|S_{p^n}(g)| < +\infty$$

всюду, кроме счетного множества. Кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$ (для этого достаточно сходимости ряда хотя бы в одной точке $g \in G$). Таким образом, применима теорема A с $f = 0$. Значит, $c_k = 0$ для всех k, что невозможно, так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k$ является нуль-рядом.

Лемма 4. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является множеством второй категории на себе.*

Доказательство. Пусть N — приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли:

$$N = \{g \in \mathbb{Z}_p : \overline{\lim_{n\to\infty}}|S_n(g)| = +\infty\}.$$

Согласно лемме 3 N — несчетное множество. Так как функции $S_n(g) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\gamma_k(g)$ непрерывны, множества

$$N_k = \{g \in \mathbb{Z}_p : |S_n(g)| > k \text{ для некоторого } n\}$$

являются открытыми. Ясно, что $N = \bigcap\limits_k N_k$, т.е. N типа G_δ. Известно, что несчетное множество типа G_δ является множеством второй категории на себе (см., например, [5, с. 548]).

Лемма 5. *Пусть B — ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли. Существует замкнутое множество P, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

Доказательство. Пусть N — приведенное ядро рассматриваемого нуль-ряда, P — множество всех его точек конденсации. Поскольку N несчетно, то P замкнуто. Предположим, что определяемая некоторым смежным классом K^n из открытого множества CP порция $\delta(B)$ непустая. Используя леммы 2 и 3 получаем, что $\delta(B)$ содержит несчетное множество $\delta(N)$. Но множество $N \setminus P$ не более чем счетно. Из полученного противоречия вытекает, что $B \subset P$.

Пусть теперь $\delta(P)$ — любая непустая порция множества P. Так как любая точка P есть точка конденсации приведенного ядра N, то $\delta(N)$ непусто, а тогда и $\delta(B)$ непусто.

Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых U_r-множеств для системы Виленкина–Джафарли, $2 < r < \infty$, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Согласно лемме 1 имеем $\mu(E_j) = 0$ $(j = 1, 2, ...)$. Предположим, что существует нетривиальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k, \quad a_k \in l^r, \tag{5}$$

сходящийся к нулю всюду вне E.

Хотя бы одно множество E_{j_0} плотно на некоторой порции $\delta(P)$, где P — замкнутое множество из леммы 5. Действительно, если бы это было неверно, то $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность нигде не плотных на P множеств, а E — множество первой категории на P; значит, приведенное ядро N нуль-ряда (5) и подавно первой категории на P и на себе. Получили противоречие с леммой 4.

Итак, замкнутое множество E_{j_0} плотно на некоторой порции $\delta(P)$, а потому содержит $\delta(P)$. Согласно лемме 5 имеем $\delta(B) \subset \delta(P)$ где $\delta(B)$ — соответствующая порция ядра B нуль-ряда (5). Множество $\delta(B)$ является U_r-множеством как подмножество U_r-множества E_{j_0}.

С другой стороны, согласно лемме 2 порция $\delta(B)$ является ядром нового нуль-ряда (4). Теперь ряд (4) является формальным произведением исходного нуль-ряда (5) и полинома по системе Виленкина–Джафарли с коэффициентами b_n (характеристической функции χ_{K^n}). Коэффициенты ряда (4) имеют вид

$$c_l = \sum_{n=0}^{m} b_n a_{k(l,n)},$$

где индекс $k(l,n)$ определяется равенством $\gamma_l \gamma_n^{-1} = \gamma_{k(l,n)}$ (см. [4]). При этом $c_l \in l^r$ как линейная комбинация последовательностей из l^r. Итак, множество $\delta(B)$ как ядро нуль-ряда с коэффициентами из l^r является и M_r-множеством.

Полученное противоречие доказывает, что E — U_r-множество для системы функций Виленкина–Джафарли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981.

[2] *Козловская Т. Д.* Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вестн. МГТУ «Станкин». 2012. № 1 (18). С. 85–88.

[3] *Skvortsov V. A., Tulone F.* Kurzweil–Henstock type integral on zero-dimensional group and some of its applications // Czechoslovak Math. J. 2008. Vol. 58. P. 1167–1183.

[4] *Skvortsov V. A.* On M_0-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional group // Tatra Mt. Math. Publ. 2014. Vol. 62. P. 165–174.

[5] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I М. : Мир, 1965.

УДК 517.5

О НЕРАВЕНСТВАХ РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ[1]

М. А. Комаров (Владимир, Россия)
kami9@yandex.ru

В работе получены неравенства разных метрик типа Джексона–Никольского для наипростейших дробей (логарифмических производных многочленов) и их производных на произвольных областях комплексной плоскости. Также получены новые неравенства разных метрик для таких функций на сегментах действительной оси.

Ключевые слова: логарифмическая производная многочлена, наипростейшая дробь, неравенства Джексона–Никольского.

ON INEQUALITIES BETWEEN DIFFERENT METRICS FOR SIMPLEST FRACTIONS[1]

M. A. Komarov (Vladimir, Russia)
kami9@yandex.ru

We obtain the Jackson–Nikolskii type inequalities between different metrics for simplest fractions (i.e., for the logarithmic derivatives of polynomials) and their derivatives on an arbitrary domains of the complex plane. We also obtain some new inequalities between different metrics for such functions on a segments of the real axis.

Keywords: logarithmic derivative of a polynomial, simplest fraction, Jackson–Nikolskii inequalities.

Введение

Наипростейшей дробью (НД) порядка n, $n = 1, 2, \dots$, называется рациональная функция вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z, z_k \in \mathbb{C},$$

т.е. логарифмическая производная многочлена с нулями к точках z_k. Задача построения неравенств разных метрик, хорошо известная для случая полиномов по классическим работам Д. Джексона, С. М. Никольского и других авторов, в последнее время активно исследуется для случая рациональных функций и, в том числе, для НД и их производных (см. статьи [1–5] и библиографию в них). Большинство полученных результатов такого рода для НД относится к случаю окружностей и прямых и их сегментов. При этом, в отличие от случая многочленов, оценки для

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00312 мол а).
[1]The work is done with the financial support of RFBR (project № 18-31-00312 mol a).

НД как правило нелинейны относительно сравниваемых норм, могут не зависеть от длины сегмента либо от порядка НД и иметь другие особенности [1,2]. Некоторые авторы получали оценки L_p-норм НД посредством специальных сумм, явно зависящих от полюсов НД (см., например, [3,4]).

В данной работе мы впервые исследуем неравенства разных метрик для НД и их производных на произвольных областях E комплексной плоскости, а также получим новые неравенства в случае сегментов действительной оси. Основной метод состоит в применении известных оценок сверху [6–8] меры пересечения множества E с множеством тех точек, в которых модуль $|\rho_n(z)|$ больше заданного числа $\delta > 0$.

1. Основные результаты

Далее для произвольной НД ρ_n полагаем

$$\|\rho_n\| := \|\rho_n\|_{L^\infty[-1,1]}, \qquad \|\rho_n\|_p := \|\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (1 < p \leq \infty).$$

2. Неравенства разных метрик на отрезке

С помощью результатов работы [7] получается следующая

Теорема 1. *Пусть все полюсы $z_1, \dots, z_n$ НД ρ_n принадлежат верхнему единичному полукругу $D^+ = \{z : |z| \leq 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Тогда при $0 < q < p \leq \infty$ и $n \geq 35e\|\rho_n\|$*

$$\|\rho_n\|_{L^p[-1,1]} \leq \|\rho_n\|_{L^q[-1,1]} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Отметим, что до настоящего времени для отрезка была известна лишь следующая точная по порядку оценка [1, теорема 4]: *если НД ρ_n вещественнозначна, то при $r > 0$ и достаточно больших n*

$$\|\rho_n\| \leq 2 \cdot 32^{1/r} \cdot n^{2/r} \|\rho_n\|_{L^r[-1,1]}.$$

В отличие от этой, оценка (1) (очевидно, также точная по порядку) содержит множитель, не зависящий от n.

3. Неравенства разных метрик в областях

С помощью результатов работы [6], восходящих к методу покрытий А. Картана, получается следующая

Теорема 2. *Для любой ограниченной либо неограниченной области $E \subset \mathbb{C}$ и любой НД $\rho_n(z)$ при $p > 2$*

$$\|\rho_n\|^p_{L^p(E)} \le 16\pi n^2 \frac{p}{p-2} \|\rho_n\|^{p-2}_{L^\infty(E)}. \tag{2}$$

Оценка точна по порядку величины n, что показывает

Пример 1. Пусть $\rho(z) = n/z$, $E = \mathbb{C}\setminus\{|z| \le \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$. Тогда

$$\|\rho\|^p_{L^p(E)} = \frac{2\pi n^p}{(p-2)\varepsilon^{p-2}} = \frac{2\pi n^2}{p-2}\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{p-2} = \frac{2\pi n^2}{p-2}\|\rho\|^{p-2}_{L^\infty(E)}.$$

Аналогично, при помощи оценок [6], но уже для произвольного $p > 1$, получается обобщение теоремы 2 на производные $\rho_n^{(s)}(z)$ любого порядка.

Теорема 3. *Для любой ограниченной либо неограниченной области $E \subset \mathbb{C}$, любой НД $\rho_n(z)$, $p > r := 2/(s+1)$ и $s = 1, 2, \ldots$*

$$\|\rho_n^{(s)}\|^p_{L^p(E)} \le \frac{4\pi p}{p-r}(s!A_{s,n})^r \cdot \|\rho_n^{(s)}\|^{p-r}_{L^\infty(E)}, \tag{3}$$

где $r \le 1$, $A_{1,n} = n\ln(en)$, $A_{s,n} = \big((s+1)n^{(s+1)/2} - 2n\big)/(s-1)$ $(s \ge 2)$.

Отметим, что при $s = 1$ множитель в (3) равен $4\pi n\ln(en)p/(p-1)$, а при $s \ge 2$ он оценивается сверху величиной $A(p,s)n$.

4. Неравенства разных метрик на сегментах оси $\mathbb{R}$

Константу в (3) удаётся уточнить в случае оценок на сегментах прямой.

Теорема 4. *Для любого ограниченного либо неограниченного сегмента $E \subseteq \mathbb{R}$, любой НД $\rho_n(z)$, $p > r := 1/(s+1)$ и $s = 1, 2, \ldots$*

$$\|\rho_n^{(s)}\|^p_{L^p(E)} \le \frac{4p}{p-r}(s!B_{s,n})^r \cdot \|\rho_n^{(s)}\|^{p-r}_{L^\infty(E)}, \tag{4}$$

где $r < 1$, $B_{s,n} = \big((s+1)n^{s+1} - n\big)/s < (rs)^{-1}n^{1/r}$.

Далее, с помощью весьма простого технического приёма мы заметно уточняем константу в теореме 4.5 из [5] (неравенство разных метрик для НД на всей прямой $\mathbb{R}$). А именно, верна

Теорема 5. *Для любой НД $\rho_n(z)$ и любых $1 < q < p \le \infty$*

$$\|\rho_n\|_p \le 2^{1-q'/p'}\left(\frac{m_q}{\pi}\right)^{q'(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+h_q)^{q'(p-q)/p}\|\rho_n\|_q^{q'/p'},$$

где m_q — *натуральное число из промежутка* $[q/2, q/2+1)$,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}, \qquad h_q=\begin{cases}\tan(\pi/2q), & 1<q\le 2,\\ \cot(\pi/2q), & 2\le q<\infty.\end{cases}$$

При любом конечном p эта оценка точнее результата [5], где величина $1+h_q\ge 2$ возводится в степень $q'(p-1)/p$, большую, чем $q'(p-q)/p$.

В заключение скажем, что известные оценки меры множества тех $x\in\mathbb{R}$, где $|\rho_n(x)|>\delta$ $(\delta>0)$, обобщаются на случай сумм вида

$$f_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{z-z_k}, \qquad z_k, p_k\in\mathbb{C} \tag{5}$$

(некоторые обобщения см., например, в [8, Sec. 7.2]). Отсюда получается

Теорема 6. *Для любых комплексных* z_k *и* $p_k=\alpha_k+i\beta_k$, *любого ограниченного либо неограниченного сегмента* $E\subseteq\mathbb{R}$ *и любого* $p>1$

$$\|f_n\|^p_{L^p(E)}\le 16\nu(f_n)\frac{p}{p-1}\|f_n\|^{p-1}_{L^\infty(E)}, \qquad \nu(f_n):=\sum|\alpha_k|+\sum|\beta_k|.$$

Оценку нельзя значительно улучшить, что показывает

Пример 2. Для $f_n(z)=\rho(z)=n/z$ и $E=E_0=[\varepsilon,+\infty)$ $(\varepsilon>0)$

$$\|\rho\|^p_{L^p(E_0)}=\frac{n^p\varepsilon^{1-p}}{p-1}=\frac{n(n/\varepsilon)^{p-1}}{p-1}=\frac{\nu(\rho)\|\rho\|^{p-1}_{L^\infty(E_0)}}{p-1}.$$

Теоремы 2 и 3 (соответственно, теоремы 4 и 6) остаются в силе для произвольного множества $E\subset\mathbb{C}$ $(E\subset\mathbb{R})$, локально измеримого по плоской (линейной) мере Лебега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Данченко В. И., Додонов А. Е.* Оценки L_p-норм наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 9–19.

[2] *Danchenko V. I., Danchenko D. Ya.* Nikolskii type inequalities for simple partial fractions // Комплексный анализ и его приложения: материалы VII Петрозаводской международной конференции (Петрозаводск, 29 июня – 5 июля 2014 г.). Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 33–37.

[3] *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. С. 123–140.

[4] *Каюмов И. Р.* Интегральные оценки наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем. 2012. № 4. С. 33–45.

[5] *Chunaev P. V., Danchenko V. I.* Quadrature formulas with variable nodes and Jackson–Nikolskii inequalities for rational functions // J. Approx. Theory. 2018. Vol. 228. P. 1–20.

[6] *Macintyre A. J., Fuchs W. H. J.* Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 162–168.

[7] *Говоров Н. В., Лапенко Ю. П.* Оценки снизу модуля логарифмической производной многочлена // Матем. заметки. 1978. Т. 23. С. 527–535.

[8] *Borwein P., Erdélyi T.* Polynomials and Polynomial Inequalities. N. Y. : Springer-Verlag, 1995.

УДК 517.518.34

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КМА НА ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБРАЗУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

Н. Е. Комиссарова (Саратов, Россия)
nataliyakomissarov@yandex.ru

В данной работе мы построим нестационарный кратно масштабный анализ и всплесковый ортонормированный базис на произвольной локально компактной нуль-мерной группе с произвольной образующей последовательностью, т. е. в случае, когда порядки смежных классов — различные простые числа. В данном случае НКМА порождается последовательностью функций, а всплесковый базис — последовательностью всплеск-функций.

Ключевые слова: нульмерные группы, кратно масштабный анализ, всплесковые базисы.

NON-STATIONARY MRA ON LOCALLY COMPACT ZERO-DIMENSIONAL GROUPS WITH ARBITRARY GENERATION SEQUENCE

N. E. Komissarova (Saratov, Russia)
nataliyakomissarov@yandex.ru

We construct non-stationary multiresolution analysis and orthonormal wavelet basis for locally compact zero-dimensional group with arbitrary generation sequence. In this case MRA is generated by the sequence of refinable functions and wavelet basis — by the sequence of wavelet functions.

Keywords: zero dimensional group, multiresolution analisys, wavelet basis.

1. Локально компактные группы, топология, характеры

В работе [1] была рассмотрена задача построения ортогональных всплесковых базисов на произвольных локально компактных нульмерных группах, для которых порядки смежных классов совпадают и равны некоторому простому числу. Рассмотрим несколько более общую ситуацию, когда порядки смежных классов могут быть различными.

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально компактная абелева группа, топология в которой задана счётной системой открытых подгрупп:

$$\cdots \supset G_{-n} \supset \cdots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \dots ,$$

таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} G_n = 0$ (0-нулевой элемент группы G).

$$G_N \supset G_{N+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \dots .$$

Так как каждая группа G_n компактна, то каждая фактор-группа G_n/G_{n+1} конечна, и пусть p_n — её порядок. Можно считать, что p_n — простые числа.

Определим далее числа $(\mathbf{m}_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ следующим образом:

$$\mathbf{m}_0 = 1,\ \mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n \cdot p_n\ .$$

Ясно, что при $n \geq 1$ $\mathbf{m}_n = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$, $\mathbf{m}_{-n} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}\dots p_{-n}}$. На каждом смежном классе $G_n \dot{+} g$ мера μ определена равенством $\mu(G_n \dot{+} g) = \mu G_n = 1/\mathbf{m}_n$. Таким образом, если $n \in \mathbb{N}$ и $p_n = p$, то $\mu G_n \cdot \mu G_{-n} = 1$.

При каждом $N \in \mathbb{Z}$ выберем элементы $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ и зафиксируем их. Тогда любой элемент $x \in G$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n \, (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

причём в этой сумме слагаемых с отрицательными номерами конечное число, т. е.

$$x = \sum_{n=-N}^{+\infty} a_n g_n \ (a_n = \overline{0, p_n - 1}, a_n \neq 0).$$

Систему элементов (g_n) будем называть базисной.

Пусть далее X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения, $G_n^{\perp}$ — аннулятор группы G_n, т. е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall x \in G_n, \chi(x) = 1\}$.
Каждый аннулятор $G_n^{\perp}$ есть группа относительно умножения, $G_n^{\perp}$ образуют возрастающую последовательность:

$$\dots \subset G_{-n}^{\perp} \subset \dots \subset G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \dots \subset G_n^{\perp} \subset \dots,$$

такую, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = X, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} G_n^{\perp} = 1,$$

причём фактор-группа $G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp}$ имеет порядок p_n. $x \in G$ является характером группы X и G_n есть аннулятор группы $G_n^{\perp}$.

Обозначим

$$H_n = \left\{ q \in G : q = \sum_{j=N}^{n-1} a_j g_j, N \in \mathbb{Z}, a_j = \overline{0, p_n - 1} \right\}.$$

2. Нестационарный кратно масштабный анализ на локально компактной нуль-мерной группе

Определение. Нестационарным кратно масштабным анализом(НКМА) будем называть совокупность замкнутых подпространств $V_j \subset L_2(G)$, для которых справедливы следующие аксиомы:

A1. $V_j \subset V_{j+1}$.

A2. $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(G)$.

A3. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = 0$.

A4. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдутся функции $\varphi_j^{(n)}(x); j = \overline{1, k_n}$, и множества H_n такие, что система $\left(\varphi_j^{(n)}(x\dot{-}h);\ j = \overline{1, k_n},\ h \in H_n\right)$ образует ортонормированный базис в V_n.

Для построения кратно масштабного анализа выберем функции $\varphi^{(n)}_{j_n, j_{n+1}} \in L_2(G)$ следующим образом.

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}_{j_n,0} &= \sqrt{m_{n+1}}\,\mathbf{1}_{G_{n+1}\dot{+}j_n g_n}(x),\ j_n = \overline{0, p_n-2}, \\ \varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}} &= \sqrt{m_{n+2}}\,\mathbf{1}_{G_{n+2}\dot{+}j_{n+1}g_{n+1}\dot{+}(p_n-1)g_n}(x),\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1}-1}, \\ supp\,\varphi^{(n)}_{j_n,j_{n+1}} &\subset G_n, \end{aligned}$$

и положим

$$\begin{gathered} V_n = \overline{\operatorname{span}\left\{\varphi^{(n)}_{j_n,0}(x\dot{-}h_n), \varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}(x\dot{-}h_n)\right\}}, \\ j_n = \overline{0, p_n-2},\ j_{n+1} = \overline{0, p_{n+1}-1},\ h_n \in H_n\,. \end{gathered}$$

Теорема 1. *Совокупность подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ образует НКМА.*

3. Всплесковые базисы

Основным свойством КМА является возможность на их основе строить базисы всплесков [2]. Опишем конструкцию пространств всплесков.

Пусть $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — НКМА с масштабирующей последовательностью $\left(\varphi^{(n)}_{j_n,0},\ \varphi^{(n)}_{p_n-1,j_{n+1}}\right)$. Обозначим W_n — ортогональное дополнение к V_n в пространстве V_{n+1}, т. е. $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$ и $V_n \perp W_n$. Причём

1. $W_n \perp W_m, n \neq m$;

2. $L_2(G) = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$.

Определим пространства W_n следующим образом. Сначала определим функции

$$\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+1}} \cdot r_{n+1}^{\alpha_{n+1}}(x \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n)\, \mathbf{1}_{G_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x),$$
$$\alpha_{n+1} = \overline{1, p_{n+1}-1},\ j_n = \overline{0, p_n-2},\ h_n \in H_n,$$

$$\psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x) = \sqrt{\mathbf{m}_{n+2}} \cdot r_{n+2}^{\alpha_{n+2}}(x \dot{-} (p_{n+1}-1) g_{n+1} \dot{-} j_n g_n \dot{-} h_n) \cdot$$
$$\cdot\, \mathbf{1}_{G_{n+2} \dot{+} (p_{n+1}-1) g_{n+1} \dot{+} j_n g_n \dot{+} h_n}(x),$$
$$\alpha_{n+2} = \overline{1, p_{n+2}-1},\ j_n = \overline{0, p_n-1},\ h_n \in H_n,$$

$$W_n = \overline{\operatorname{span}\left\{\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right\}}.$$

Получим последовательность подпространств $(W_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Теорема 2. *Функции* $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right), j_n = \overline{0, p_n-1}, h_n \in H_n, \alpha_{n+1} = \overline{1, p_{n+1}-1}, \alpha_{n+2} = \overline{1, p_{n+2}-1}$ *образуют ортонормированную последовательность.*

Итак, функции $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x)\right)$ образуют ортонормированную систему, а значит и ортонормированный базис в W_n. В силу $L_2(G) = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{+\infty} W_n$ последовательность $\left(\psi^{(n)}_{j_n,0,h_n,\alpha_{n+1}}(x),\ \psi^{(n)}_{j_n,p_{n+1}-1,h_n,\alpha_{n+2}}(x), n \in \mathbb{Z}\right)$ — ортонормированный базис в $L_2(G)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ и всплесковые базисы на нульмерных группах // Матем.сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.

[2] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2006. 616 с.

УДК 517.53

ОЦЕНКА МОДУЛЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ[1]

Е. Г. Компанеец, В. В. Старков (Петрозаводск, Россия)
g_ek@inbox.ru, vstarv@list.ru

Получена точная оценка производных высших порядков для произвольных комплексных многочленов, улучшающая ранее известные оценки.

Ключевые слова: многочлен, производная, неравенство, дифференциальный оператор.

ESTIMATE OF HIGHER ORDER DERIVATIVES FOR POLYNOMIALS[1]

E. G. Kompaneets, V. V. Starkov (Petrozavodsk, Russia)
g_ek@inbox.ru, vstarv@list.ru

We obtain a sharp upper estimate for higher order derivatives of arbitrary complex polynomials. The estimate improves known results in this direction.

Keywords: polynomial, derivative, inequality, differential operator.

Обозначим $\mathcal{P}_n$ множество всех многочленов степени, не превосходящей $n \in \mathbb{N}$.

В 1887 Д.И. Менделеев [1, § 86] поставил следующую проблему: для многочлена f, $\deg f = 2$, удовлетворяющего условию $|f(x)| \le M$ для $x \in [a; b]$, оценить $|f'(x)|$ для $x \in [a; b]$. В книге В.И. Смирнова и Н.А. Лебедева [2, с. 340] эта проблема сформулирована в более общем виде и названа **проблемой Менделеева**: *пусть $B \subset \mathbb{C}$ — компакт, $f(z)$ — многочлен, $\deg f = n \ge 1$, удовлетворяющий условию $|f(z)| \le M$ для $z \in B$. Дать наилучшую оценку $|f'(z)|$ для $z \in B$.*

Для вещественных многочленов и компакта $B = [a; b]$ проблему Менделеева решил А.А. Марков.

Теорема A [3]. *Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(x)| \le M$ для $x \in [a; b]$. Тогда*

$$|f'(x)| \le \frac{2n^2 M}{b-a}.$$

Равенство достигается только для функций

$$f(x) = \pm M T_n \left(\frac{2x-a-b}{b-a} \right),$$

где $T_n = \cos(n \arccos x)$ — многочлены Чебышева.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01229).
[1]This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01229.

В.А. Марков в 1892 получил аналогичный результат для производной k-го порядка вещественных многочленов, $1 \le k \le n$.

Обозначим $\mathbb{D}$ единичный круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. В.И. Смирнов решил проблему Менделеева для комплексных многочленов и компакта $B = \partial\mathbb{D}$.

Теорема B [4]. *Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(z)| \le M$ на $\partial\mathbb{D}$. Тогда на $\partial\mathbb{D}$*

$$|f'(z)| \le Mn.$$

Равенство достигается только для функции $f(z) = e^{i\gamma}z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Теорему B можно переформулировать следующим образом:

Теорема B′. *Пусть $f \in \mathcal{P}_n$ и $|f(z)| \le |Mz^n|$ на $\partial\mathbb{D}$. Тогда*

$$|f'(z)| \le |(Mz^n)'| \quad \text{на } \partial\mathbb{D}.$$

Равенство достигается только для функции $f(z) = e^{i\gamma}z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

С.Н. Бернштейн обобщил Теорему B′, заменив многочлен Mz^n на произвольный многочлен F, $\deg F = n$. А именно, он получил следующий результат:

Теорема C [5]. *Пусть f и F — многочлены, удовлетворяющие условиям*

$$(*) \begin{cases} 1)\ \deg f \le \deg F = n, \\ 2)\ \text{нули многочлена } F \text{ лежат в } \overline{\mathbb{D}}, \\ 3)\ |f(z)| \le |F(z)| \text{ на } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Тогда

$$|f'(z)| \le |F'(z)| \quad \text{для } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}.$$

Для $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ равенство реализуется тогда и только тогда, когда $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Теорема C показывает, что при выполнении условий $(*)$ оператор дифференцирования сохраняет неравенства между многочленами: если на $\partial\mathbb{D}$ имеет место неравенство $|f(z)| \le |F(z)|$ для самих многочленов f и F, то на $\partial\mathbb{D}$ аналогичное неравенство верно и для их производных.

Еще одним оператором такого типа является оператор В. И. Смирнова $S_\alpha[f] = zf'(z) - n\alpha f(z)$, где α принадлежит множеству $\Omega_{|z|}$—образу круга $\{t \in \mathbb{C} : |t| < |z|\}$ под действием функции $\psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$.

Теорема D [2, гл.V, § 1, с. 356]. *Пусть f и F — многочлены, удовлетворяющие условиям $(*)$. Тогда для $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$*

$$|S_\alpha[f](z)| \le |S_\alpha[F](z)| \tag{1}$$

для всех $\alpha \in \overline{\Omega_{|z|}}$.

Для $\alpha \in \Omega_{|z|}$ *в (1) реализуется равенство в точке* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *тогда и только тогда, когда* $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Дальнейшим исследованиям операторов, сохраняющих неравенства между многочленами, посвящено большое количество работ, см., например, работы [6] – [10] и их библиографию.

Для многочлена $g(z)$ и $r > 0$ обозначим $M(r, g) = \max\limits_{|z|=r} |g(z)|$.

С помощью неравенства В.И. Смирнова (1) для $f \in \mathcal{P}_n$ мы получили точные оценки для $|f^{(k)}(z)|$, $1 \le k \le n$, в терминах $|f(z)|$ и $M(r, f)$.

Теорема 1 [10]. *Пусть* $f \in \mathcal{P}_n$, $r > 0$ *и* $1 \le k \le n$. *Тогда для* $|z| \ge r$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{n!}{(n-k)!(r+|z|)^k} \cdot \left[|f(z)| + M(r,f) \frac{|z|^{n-k}}{r^{n-k}} \left(\left(\frac{|z|}{r} + 1 \right)^k - \frac{|z|^k}{r^k} \right) \right].$$

Равенство достигается для $f(z) = z^n$.

Следствие 1 [10]. *Для* $f \in \mathcal{P}_n$, $r > 0$ *и* $1 \le k \le n$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{n!}{(n-k)! 2^k r^k} \left[|f(z)| + M(r,f)(2^k - 1) \right], \quad |z| = r.$$

Равенство достигается для $f(z) = z^n$.

Замечание. *В частном случае* $r = 1$ *Следствие 1 улучшает следующее неравенство Бернштейна [11, с. 169]: для* $f \in \mathcal{P}_n$ *и* $1 \le k \le n$

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{n!}{(n-k)!} M(1, f), \quad |z| = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Менделеев Д. И.* Исследование водных растворов по удельному весу. С. - Петербург : Тип. В. Демакова, 1887.

[2] *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1964. 440 с.

[3] *Марков А. А.* Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Изв. АН. 1889. Т. 62. С. 1–24.

[4] *Smirnoff V. I.* Sur quelques polynomes aux propriétés extrémales // Зап. Харьк. Матем. о-ва. 1928. Т. 4, № 2. С. 67–72.

[5] *Bernstein S.,* Sur la limitation des dérivées des polynomes // C.R. Acad. Sci. 1930. Vol. 190. P. 338–341.

[6] *Rahman Q. I., Schmeisser G.* Analytic theory of polynomials. N. Y. : Oxford Univ. Press, 2002.

[7] *Wali S. L., Shah W. M., Liman A.* Inequalities concerning B-operators // Probl. Anal. Issues Anal. 2016. Vol. 5(23), № 1. P. 55–72. DOI: https://doi.org/10.15393/j3.art.2016.3250

[8] *Ганенкова Е. Г., Старков В. В.* Преобразование Мебиуса и неравенство В. И. Смирнова для многочленов // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 228–239. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11858

[9] *Ganenkova E. G., Starkov V. V.* Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials // J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 476, № 2. P. 696–714. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.006

[10] *Kompaneets E. G., Starkov V. V.* Generalization of the Smirnov operator and differential inequalities // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, № 12. P. 2043–2051.

[11] *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1937. 209 с.

УДК 517.5

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РАНГАХ УСТОЙЧИВЫХ МАТРИЦ

Б. В. Коноплев (Саратов, Россия)
borikon@bk.ru

Обобщенным рангом (функцией ранга) матрицы A называется $\mathrm{rank}(A, k)$, равный минимальному рангу матрицы, получаемой из A изменением не более k ее элементов. Для произвольных матриц дается верхняя оценка $\mathrm{rank}(A, k)$. В случае устойчивых матриц установлены неулучшаемая гладкая нижняя оценка и точная формула для $\mathrm{rank}(A, k)$.

Ключевые слова: матрица, ранг, Л Г. Валиант, устойчивая матрица, обобщенный ранг (функция ранга) матрицы, верхняя и нижняя оценка.

ON GENERALIZED RANKS OF RIGID MATRICES

B. V. Konoplev (Saratov, Russia)
borikon@bk.ru

Minimal rank of a matrix obtained from a given matrix A by changing of less than k entries is called its generalized rank (rank function): $\mathrm{rank}(A, k)$. For arbitrary matrices an upper bound of $\mathrm{rank}(A, k)$ is given. In the case of rigid matrices, an unimprovable smooth lower bound and a precise formula for $\mathrm{rank}(A, k)$ are set.

Keywords: matrix, rank, L. G. Valiant, igid matrix, generalized rank (rank function) of a matrix, upper and lower bound.

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n \times n$, $n \geq 2$ над некоторым полем F. Под $\mathrm{rank}(A)$ будем понимать ранг этой матрицы в традиционном смысле. Ранг нулевой матрицы считаем равным нулю. Плотностью матрицы A назовем $\mathrm{dens}(A) = |\,\mathrm{supp}(A)|$, то есть количество ее ненулевых элементов.

В 1977 году Л. Г. Валиант [1] ввел понятие функции устойчивости (жесткости) матрицы от аргумента r, определяемое как минимальное число изменений элементов матрицы A, необходимое для получения матрицы ранга не выше r:

$$\mathrm{rig}(A, r) = \min_B \{\mathrm{dens}(B) \,\big|\, \mathrm{rank}(A - B) \leq r\},$$

где B пробегает все матрицы размера $n \times n$, а r изменяется от 0 до n.

Нетрудно видеть, что дискретная функция $\mathrm{rig}(A, r)$ невозрастающая для всех матриц A.

Как отметил Валиант, для всех значений r выполняется неравенство

$$\mathrm{rig}(A, r) \leq (n - r)^2.$$

Он же доказал существование над каждым бесконечным полем при любом n матриц, достигающих при всех r максимальной устойчивости $(n - r)^2$. Будем называть такие матрицы *устойчивыми.* Значения их функции устойчивости при возрастании r образуют регрессию ряда из квадратов: 0, 1, 4, 9, ..., n^2.

С. Ф. Лукомский сообщил нам о задаче, предложенной В. Н. Темляковым в сентябре 2018 года на международной конференции «High-Dimensional Approximation and Discretization»:

Определение 1. *Обобщенным рангом (функцией ранга) произвольной матрицы A при каждом $0 \le k \le n^2$ называется*

$$\operatorname{rank}(A, k) = \min_B \{\operatorname{rank}(A - B) \bigm| \operatorname{dens}(B) \le k\}.$$

Задача. Построить в явном виде устойчивые матрицы, для которых

$$\operatorname{rank}(A, n^{1+\delta}) \ge \delta n, \quad 0 \le \delta \le 1. \tag{1}$$

Покажем, что для произвольных матриц A условие (1) может выполняться лишь отчасти при росте δ от 0 до некоторого значения; затем неравенство меняется в противоположную сторону.

Изучим, как изменяется обобщенный ранг матрицы с ростом k от 0 до n^2.

Рассмотрим

$$\operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A, r)).$$

Сравнивая определение функции устойчивости и определение 1, получаем оценку

$$\operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A, r)) \le r, \quad 0 \le r \le n. \tag{2}$$

Можно показать, что дискретная функция $\operatorname{rank}(A, k)$ невозрастающая; поэтому (2) приводит к неравенствам

$$\operatorname{rank}(A, (n-r)^2) \le \operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A, r)) \le r$$

и

$$\operatorname{rank}(A, r^2) \le \operatorname{rank}(A, \operatorname{rig}(A, n-r)) \le n - r, \quad 0 \le r \le n. \tag{3}$$

Оценка (3) означает, что график функции $\operatorname{rank}(A, k)$ расположен не выше графика ступенчатой функции $n - [\sqrt{k}]$. Отсюда для любой матрицы A справедлива верхняя оценка

$$\operatorname{rank}(A, k) \le n - [\sqrt{k}], \quad 0 \le k \le n^2.$$

Теперь обратимся к неравенству (1). Обозначим $k = n^{1+\delta}$, тогда

$$\delta = \log_n \frac{k}{n}, \quad n\delta = \log_n \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

При $\delta = 0$ правая часть (1) равна 0, и неравенство очевидно выполняется. Затем правая часть (1) растет до своего наибольшего значения n при $\delta = 1$, где неравенство очевидно не выполняется, так как левая часть равна 0. На этом пути логарифмическая кривая роста правой части (1) пересекает ступенчатый график, и неравенство перестает выполняться.

Для устойчивой матрицы $\mathrm{rig}(A, r) = (n - r)^2$, причем для любых матриц B с $\mathrm{dens}(B) \leq (n-r)^2$ будет $\mathrm{rank}(A - B) \geq r$, так как, если бы ранг понижался до $r_0 < r$, то вместо положенных $(n - r_0)^2$ изменений он достигался бы за меньшее их число $\leq (n - r)^2$, что противоречит устойчивости A. Откуда, используя (3),

$$\begin{gathered} \mathrm{rank}(A, \mathrm{rig}(A, r)) = \mathrm{rank}(A, (n-r)^2) = \\ = \min_B \{\mathrm{rank}(A - B) \bigm| \mathrm{dens}(B) \leq (n-r)^2\} \geq r, \\ \mathrm{rank}(A, r^2) = \mathrm{rank}(A, \mathrm{rig}(A, n-r)) = n - r. \end{gathered} \tag{4}$$

Из (4) следует, что для устойчивой матрицы A точки графика дискретной функции $\mathrm{rank}(A, k)$ при k от 0 до n^2 лежат на графике вышеупомянутой ступенчатой функции $n - [\sqrt{k}]$, что приводит к точной формуле

$$\mathrm{rank}(A, k) = n - [\sqrt{k}], \quad 0 \leq k \leq n^2,$$

Можно показать, что для любой матрицы A справедливо

$$\mathrm{rig}(A, \mathrm{rank}(A, k)) \leq k, \quad 0 \leq k \leq n^2,$$

Следовательно, для устойчивых матриц имеет место гладкая нижняя оценка

$$n - \sqrt{k} \leq \mathrm{rank}(A, k), \quad 0 \leq k \leq n^2 \tag{5}$$

Эта оценка неулучшаема, так как для $k = r^2$ имеет место равенство.

Для неустойчивых матриц оценка (5) не верна.

При $k = n^{1+\delta}$ оценка (5) для устойчивых матриц приобретает вид

$$\mathrm{rank}(A, n^{1+\delta}) \geq n - n^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Valiant L. G.* Graph-theoretic arguments in low-level complexity // Mathematical Foundations of Computer Science 1977 (MFCS 1977). Lecture Notes in Computer Science. Vol. 53. Berlin, Heidelberg : Springer, 1977. P. 162–177. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-08353-7_135.

УДК 517.518.126

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА МАСШТАБНЫХ ФУНКЦИЙ НА СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ХЕНСТОКА – КУРЦВЕЙЛЯ

С. Н. Копылов (Москва, Россия)
ksergei16@yandex.ru

Рассматриваются свойства интеграла Хенстока–Курцвейля при наложении ограничений на масштабную функцию. Представлено доказательство утверждения о связи классов интегрируемых функций и классов масштабных функций в ряде частных случаев.

Ключевые слова: теория функций, теория интегрирования, интеграл Хенстока–Курцвейля.

ABOUT EFFECT OF GAUGE FUNCTIONS ON PROPERTIES OF THE HENSTOCK – KURZWEIL INTEGRAL

S. N. Kopylov (Moscow, Russia)
ksergei16@yandex.ru

Investigation of the Henstock–Kurzweil integral properties with a gauge under imposed restrictions is given. The statement about connection between classes of integrable functions and classes of gauges is proved in a number of particular cases

Keywords: real analysis,theory of integration, gauge integral.

Одним из обобщений интеграла Лебега на отрезке является интеграл Хенстока–Курцвейля. Его конструкция схожа с конструкцией интеграла Римана, однако определение использует понятия масштабной функции и δ-разбиения. Необходимое и достаточное условие интегрируемости в смысле Хенстока–Курцвейля [1] определяет класс интегрируемых функций. Ограничив выбор масштабных функций, можно получить сужение интеграла Хенстока–Курцвейля на более узкий класс функций. Данная работа представляет собой исследование свойств интеграла Хенстока–Курцвейля при некоторых ограничениях на класс масштабных функций.

Определение 1. Пусть $[a, b]$ — отрезок, а $\delta(x)$ — положительная функция, определенная на нем. Система $\tau = \{(\xi_i, \Delta_i)\}_{i=1}^{n}$ называется *δ-разбиением Хенстока*, если выполняются следующие условия:

1. $\xi_i \in \Delta_i \subset \big(\xi_i - \delta(\xi_i),\ \xi_i + \delta(\xi_i)\big)$ для всех $i = 1, \dots, n$
2. $\{\Delta_i\}_{i=1}^{n}$ - система неперекрывающихся отрезков
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i = [a, b]$

Существование такого разбиения немедленно следует из леммы Гейне–Бореля о конечном покрытии. Функцию $\delta(x)$ обычно называют масштабом.

Определение 2. *Интеграл Хенстока–Курцвейля.* Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нём в смысле Хенстока–Курцвейля со значением I, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta(x) > 0$, что для любого δ-разбиения $\tau = \{(\xi_i, \Delta_i)\}_{i=1}^n$ выполняется следующее неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i| - I \right| < \varepsilon.$$

Пишут $(\mathcal{H}) \int\limits_a^b f(x)\, dx = I$.

В определении выше ничего не сказано о выборе масштабных функций. Тем не менее, если ограничиться выбором масштабных функций только лишь из одного класса, то можно получить сужение интеграла Хенстока–Курцвейля. Например, ограничившись выбором только лишь непрерывных масштабных функций, класс интегрируемых функций будет совпадать с таким для интеграла Римана. Из работы Пфеффера [2] следует, что ограничившись выбором полунепрерывных сверху масштабных функций, класс интегрируемых функций не изменится. Следующая теорема относится к тому же направлению исследований.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $1 \le p \le \infty$, ограничившись в выборе масштабных функций $\delta(x)$ такими функциями, что $\frac{1}{\delta(x)} \in L_p([a, b])$, получим конструкцию интеграла, класс интегрируемых функций которого целиком лежит в $L_p([a, b])$.*

Вопрос о том, совпадает ли упомянутый класс интегрируемых функций с $L_p([a, b]$ остаётся открытым в случае $1 \le p < \infty$. В случае $p = \infty$ вопрос разрешается отрицательно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П., Скворцов В.А., Солодов А.П.* Обобщённые интегралы. М. : Книжный дом «Либроком», 2011. 280 с.

[2] *Pfeffer W. F.* A note on the generalized Riemann integal // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103, № 4,. С. 1161–1166.

УДК 517.95

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Приводятся доказательства полученных ранее результатов в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом и закрепленными концами при минимальных требованиях на начальные данные.

Ключевые слова: волновое уравнение, закрепленные концы, классическое решение.

ON THE MIXED PROBLEM FOR NON-HOMOGENEOUS WAVE EQUATION

V. V. Kornev, A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

The proofs are given of the results derived earlier in the mixed problem for non-homogeneous wave equation with a summable potential and fixed end points is derived in the form of the series under minimal conditions on initial data.

Keywords: wave equation, fixed end points, classic solution.

В данной работе приводятся доказательства теорем из [1].

Рассмотрим смешанную задачу

$$u''_{tt}(x,t) = u''_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x,t \in Q = [0,1] \times [0,T], \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L(Q)$. В дальнейшем считаем, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены на $[-1,1]$ нечетным образом, а затем 2 — периодически на всю ось, $q(x)$ продолжена четным образом на $[-1,1]$ и 2 — периодически на всю ось.

Под решением (1), (2) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (2), у которой $u'_t(x,t)$ и $u'_x(x,t)$ абсолютно непрерывны по t и x соответственно и которая удовлетворяет (1) почти всюду. Через Π обозначим множество суммируемых в Q функций $f(x,t)$, нечетных и 2 — периодических по $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right), \quad u_2(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau,$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\tau,$$

где "волна"означает, что функция $\widetilde{g}(\eta,\tau)$ — нечетная и 2 — периодическая по $\eta \in \mathbb{R}$, $\widetilde{g}(\eta,\tau) = g(\eta,\tau)$ при $\eta,\tau \in Q$.

Лемма 1. *Если $u(x,t)$ — решение задачи (1), (2) при $q(x) = 0$, то*

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t),$$

причем $u_1(x,t)$ — решение (1), (2) при $q(x) = \psi(x) = f(x,t) = 0$, $u_2(x,t)$ – решение при $q(x) = \varphi(x) = f(x,t) = 0$, $u_3(x,t)$ — решение при $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$.

Справедливость этой леммы следует из результатов работы [2].

Лемма 2. *Пусть $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$, $f(x,t) \in L(Q)$, почти при каждом x $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t и $f'_t(x,t) \in L(Q)$. Тогда $u_3(x,t)$ — решение задачи (1), (2).*

Эта лемма совпадает с теоремой 3 из [2].

Теорема 1. *Если решение задачи* (1), (2) *существует, то оно является решением уравнения*

$$u(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\eta)\widetilde{u}(\eta,\tau)d\eta = F(x,t), \tag{3}$$

где $F(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$.

Справедливость этой теоремы вытекает непосредственно из лемм 1, 2.

Введем в рассмотрение оператор $B : C(Q) \to C(Q)$, действующий по формуле

$$Bv = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\eta)v(\eta,\tau)d\eta,$$

где непрерывная в Q функция $v(x,t)$ продолжена соответствующим образом и в интеграле рассматривается как $v(x,t) \in \Pi$.

Уравнение (3) запишем в виде

$$u(x,t) = Bu + F(x,t). \tag{4}$$

Теорема 2. *При $F(x,t) \in C(Q)$ уравнение* (4) *имеет единственное непрерывное решение, которое определяется формулой*

$$u(x,t) = F(x,t) + BF + B^2F + \ldots . \tag{5}$$

Доказательство. Из оценок, полученных в лемме 16 в работе [2], следует, что B является линейным ограниченным оператором, причем некоторая его степень является сжимающим оператором в $C(Q)$ (отсюда следует единственность решения уравнения (4)), и ряд (5) сходится абсолютно и равномерно в Q. Обозначим его сумму $w(x,t)$. Тогда

$$w(x,t) = F(x,t) + BF + B^2F + \ldots = F(x,t) +$$

$$+ B\left(F(x,t) + BF + B^2F + \ldots\right) = F(x,t) + Bw.$$

Следовательно, $w(x,t)$ — решение (4).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Предположим, что* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ — *абсолютно непрерывны,* $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда задача* (1), (2) *имеет решение, которое определяется по формуле* (5).

Доказательство. Непосредственная проверка, а также лемма 2, показывают, что при сделанных предположениях функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ имеют тот же смысл, что и в лемме 1. Следовательно $F(x,t)$ есть решение задачи (1), (2) при $q(x) = 0$. Обозначим сумму ряда (5) как $w(x,t)$. По теореме 2 справедливо тождество

$$w(x,t) \equiv F(x,t) + Bw. \tag{6}$$

По лемме 2 функция Bw является решением задачи (1), (2) при $q(x) = 0$, $f(x,t) = -q(x)w(x,t)$ и нулевых краевых и начальных условиях. Следовательно, почти всюду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right) w(x,t) = f(x,t) - q(x)w(x,t),$$

и выполняются условия $w(0,t) = w(1,t) = 0$, $w(x,0) = \varphi(x)$, $w'_t(x,0) = = \psi(x)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения // Понтрягинские чтения – XXIX : материалы международн. конф., посвящ. 90-летию В. И. Ильина (Москва, 2–6 мая 2018). М. : Изд-во МАКС-Пресс, 2018. С. 132–133.

[2] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300, DOI: https://doi.org/10.1134/s004446691902009/

УДК 517.9

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА В МОДЕЛЬНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. М. Королев (Москва, Россия)
korolevgm95@mail.ru

Рассматривается многомерная нелокальная по времени задача для уравнения теплопроводности. Указаны точные экспоненциальные классы единственности решения. Установлена разрешающая формула с функцией Грина, исследованной вблизи нуля и на бесконечности. Оценки функции Грина дают возможность обосновать разрешимость нелокальной задачи в той же шкале экспоненциальных пространств.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальная задача, функция Грина, асимптотическое разложение, экспоненциальные классы функций.

ESTIMATES OF THE GREEN'S FUNCTION IN MODEL NONLOCAL PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

G. M. Korolev (Moscow, Russia)
korolevgm95@mail.ru

Multi-dimensional nonlocal in time problem for the heat equation is considered. An exact description of the uniqueness classes is given. We establish a resolving formula with Green's function investigated near zero and at infinity. Estimates of the Green's function make it possible to prove solvability of a nonlocal problem on the same scale exponential spaces.

Keywords: heat equation, nonlocal in time problem, Green's function, asymptotic expansion, exponential classes of functions.

Рассматриваем многомерную нелокальную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$.

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и число $T > 0$ считаем заданными. Нелокальное условие выражает усреднение функции $u(x,t)$ по ее значениям в начальный и финальный моменты времени. Близкие к (1) задачи рассматривались в [1, 2]. Проводя исследование, мы пользуемся схемой, разработанной в [3–5]. Некоторые детали подробнее приводятся в наших прежних публикациях [6, 7].

Так, в частности, для задачи (1) найдены экспоненциальные классы единственности решения с оценкой

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp\left(\sigma|x|\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где M — положительная константа, зависящая от функции $u = u(x,t)$, а показатель σ удовлетворяет условию $\sigma < \sigma_0(T) \equiv \sqrt{\pi/2T}$.

Решение задачи (1) с учетом (2) представимо формулой Пуассона

$$u(x,t)|_{0<t\leqslant T} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy.$$

При этом начальное условие $u_0(x) \equiv u(x,0)$ выражается формулой

$$u_0(x) = \varphi(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\, \varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Здесь $g_T(x)$ — функция Грина задачи (1), имеющая вид

$$g_T(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\exp\left(|\xi|^2\, T\right) + 1} \exp\left(i\xi x\right) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Данный интеграл не вычисляется в явном виде, и потому важен следующий результат.

Теорема. *Для функции $g_T(x)$, определенной формулой* (4), *справедливо разложение в ряд по первым функциям Ханкеля*

$$g_T(x) = \frac{(\pi|x|)^{-\nu}}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\right), \tag{5}$$

со значением $\nu = (n-2)/2$ и числами

$$z_k \equiv \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2T}}\,(1+i), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{6}$$

Ряд (5) *сходится всюду при $|x| \neq 0$.*

Отсюда, с использованием асимптотики функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(iz - \frac{\pi i}{4}\,(2\nu+1)\right)\left(1 + O(|z|^{-1})\right), \quad |z| \to \infty,$$

взятой на луче $\arg z = \pi/4$, получено представление функции Грина

$$g_T(x) = (2|x|)^{-(n-1)/2}\, (\pi\, T)^{-(n+1)/4} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\, |x|\right) \times$$
$$\times \left[\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\, |x| - \frac{\pi}{8}(n+1)\right) + O\left(|x|^{-1}\right)\right], \quad |x| \to \infty. \tag{7}$$

Основной компонент в (7) соответствует значению z_0 из формулы (6).

Разложение функции Грина, удобное вблизи нуля, имеет вид

$$g_T(x) = \frac{1}{(4\pi T)^{n/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - \frac{C_n}{2^k}\right) \zeta\left(k + \frac{n}{2}\right) \left(\frac{|x|^2}{4T}\right)^k, \qquad (8)$$

где $C_n = 2^{-(n-2)/2}$, а $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, и $0 \cdot \zeta(1+0) = 1$.

Полагая $n = 1$ и $T = 1$, получаем из (7) и (8) соответствующие выражения для одномерной функции Грина

$$g_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|x|\right) \left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|x| + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(|x|^{-1}\right)\right],$$

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2^k}\right) \zeta\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Последние две формулы полезны при проведении численных расчетов.

Кроме того, используя найденные оценки функции Грина, планируется обосновать разрешимость нелокальной задачи (1) в экспоненциальных классах (2) при прежнем ограничении $\sigma < \sigma_0(T) \equiv \sqrt{\pi/2T}$. Центральный момент здесь — анализ разрешающей формулы (3).

Автор выражает признательность своему научному руководителю Тихонову Ивану Владимировичу за полезные замечания и конструктивные предложения при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Вабищевич П. Н.* Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 7. С. 1193–1199.

[2] *Кангужин Б. Е.* О единственности решения нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова / Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 130–132.

[3] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Докл. АН. 2003. Т. 389, №4. С. 465–467.

[4] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 3. С. 396–405.

[5] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 9. С. 71–102.

[6] *Королев Г. М.* Специальная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2018 : материалы научн. конф., 9–13 апреля 2018 г. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. С. 96–100.

[7] *Королев Г. М.* Об одной задаче с нелокальным усреднением для многомерного уравнения теплопроводности // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 168–171.

УДК 517.518.82

СУММЫ ТИПА РЭЛЕЯ ДЛЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО СО СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ[1]

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Изучается уравнение вида

$$a\,z\,J'_\nu(z)\,+\,b\,J_\nu(z)=0,\qquad z\in\mathbb{C},$$

с параметрами ν, a, $b\in\mathbb{C}$, $|a|+|b|>0$, и функцией Бесселя $J_\nu(z)$. Доказана серия специальных суммационных соотношений, действующих для корней уравнения при различных сочетаниях параметров. Полученные результаты согласуются с теорией классических сумм Рэлея, вычисляемых по нулям функции Бесселя. Подобные уравнения возникают в спектральной задаче с наклонной производной для оператора Лапласа.

Ключевые слова: задача с наклонной производной, оператор Лапласа, функции Бесселя, нули функций Бесселя, суммы типа Рэлея.

SUMS OF RAYLEIGH TYPE FOR THE ROOTS OF THE EQUATION ASSOCIATED WITH THE SPECTRAL PROBLEM[1]

A. B. Kostin, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

We study equation of the form

$$a\,z\,J'_\nu(z)\,+\,b\,J_\nu(z)=0,\qquad z\in\mathbb{C},$$

with parameters ν, a, $b\in\mathbb{C}$, $|a|+|b|>0$, and the Bessel function $J_\nu(z)$. A series of special summation relations is proved that are valid for the roots of the equation for various combinations of parameters. The results are consistent with the theory of classical Rayleigh sums calculated from the zeros of the Bessel function. Similar equations arise in the spectral problem with an oblique derivative for the Laplace operator.

Keywords: oblique derivative problem, Laplace operator, Bessel functions, zeros of Bessel functions, sums of Rayleigh type.

В работе [1] изучался вопрос о расположении на комплексной плоскости собственных значений $\lambda=\mu^2$ следующей спектральной задачи для оператора Лапласа в круге:

$$\Delta w+\mu^2 w=0\ \text{ в }\ D=\left\{(x,\,y)\mid x^2+y^2<1\right\},\ \ \frac{\partial w}{\partial \ell}=0\ \text{ на }\ \partial D. \qquad (1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\mu^2\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр, ℓ — направление, составляющее фиксированный угол $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$ с внешней нормалью n к ∂D. Наш интерес к этой тематике был стимулирован

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).
[1]The article is done with the financial support of RFBR(project № 18-01-00236).

известной статьей [2], в которой доказано отсутствие свойства базисности в $L_2(D)$ у системы корневых функций задачи (1). В [2] (см. также [1]) показано, что все собственные значения спектральной задачи (1) описываются корнями уравнений вида

$$\mu\, J_n'(\mu)\cos\alpha + i\, n\, J_n(\mu)\sin\alpha \;=\; 0, \tag{2}$$

с параметрами $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ и функцией Бесселя $J_n(\mu)$ переменной $\mu \in \mathbb{C}$.

Если $0 < |\alpha| < \pi/2$, то из общей теории целых функций и результатов работы [1] вытекает, что при фиксированном $n \neq 0$ уравнение (2) имеет бесконечное счетное множество нетривиальных корней. Все они являются простыми, не попадают на действительную и мнимую оси, располагаясь симметрично относительно точки $\mu = 0$.

В докладе будут представлены результаты о вычислении сумм четных степеней обратных величин нетривиальных корней уравнения вида (2) и его естественного обобщения. Для описания характера этих результатов введем четную целую функцию экспоненциального типа

$$L(\mu; n, \alpha) \equiv \frac{\mu\, J_n'(\mu)\cos\alpha + i\, n\, J_n(\mu)\sin\alpha}{(\mu/2)^n}, \quad \mu \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

При $\mu \neq 0$ уравнение (2) равносильно уравнению $L(\mu; n, \alpha) = 0$ с совпадением кратностей корней. Функция (3) имеет бесконечное счетное множество корней. Обозначим это множество через $\{\pm\mu_{n,\,k}(\alpha)\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\mu_{n,\,k}(\alpha)$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re}\mu > 0$, упорядочены по возрастанию модулей, и $\mu_{n,\,k}(\alpha) \to \infty$ при $k \to \infty$. Очевидная цепочка соотношений

$$L(\mu; n, \alpha) = 0 \Leftrightarrow L(\overline{\mu}; n, -\alpha) = 0 \Leftrightarrow L(\overline{\mu}; -n, \alpha) = 0 \Leftrightarrow L(\mu; -n, -\alpha) = 0$$

позволяет ограничиться изучением корней $\mu \in \mathbb{C}$ уравнения

$$L(\mu; n, \alpha) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in [0, \pi/2]. \tag{4}$$

В ходе нашего исследования корней уравнения (4) (см. [1]) были получены явные формулы для сумм специальной структуры, содержащих корни $\mu_{n,\,k}(\alpha)$. В частности, найдено соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{n,\,k}^2(\alpha)} = \frac{n + 2\cos^2\alpha}{4n(n+1)} - i\,\frac{\sin 2\alpha}{4n(n+1)} = \frac{n + 1 + e^{-2\alpha i}}{4n(n+1)}, \tag{5}$$

выполненное для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in [0, \pi/2]$. При $\alpha = \pi/2$ формула (5) дает выражение

$$\sigma^{(2)}(n) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,\,k}^2} = \frac{1}{4(n+1)}$$

для первой из классических *сумм Рэлея* (см. [3–5])

$$\sigma^{(2m)}(n) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,k}^{2m}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

где $j_{n,k}$ — положительные корни функции Бесселя $J_n(\mu)$. При $\alpha = 0$ формула (5) также хорошо известна (см. [6–8]) и принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{j'}_{n,k}^{2}} = \frac{n+2}{4n(n+1)},$$

где $j'_{n,k}$ — положительные корни производной $J'_n(\mu)$ функции Бесселя.

В процессе получения основных суммационных соотношений вида (5) авторы обнаружили большое количество работ [3–12] на близкую тему. В цитированных исследованиях представлен ряд формул для сумм натуральных (четных) степеней обратных величин корней уравнения типа (4), но, как правило, без явного описания области изменения параметров в формулах и без обоснования ряда ключевых моментов вывода. На наш взгляд, в изложении этих вопросов наиболее последовательны П. Л. Капица [7] и Н. Н. Мейман [8], рассмотревшие уравнения

$$J_\nu(z) = 0, \quad \nu > -1, \tag{6}$$

$$z\, J'_\nu(z) - H\, J_\nu(z) = 0, \quad \nu + 1/2 \geqslant 0, \quad H \geqslant 0. \tag{7}$$

В (6), (7) даны ограничения на параметры из работы [7]. Эти ограничения гарантируют вещественность корней и сходимость интегралов в методе Капицы. В статье [8], написанной под несомненным влиянием [7], но содержащей новый подход, относительно параметров сказано лишь, что ν отлично от целого отрицательного числа, и можно считать $\nu \neq H$. При этом не ясно, допускаются ли в формулах из [8] комплексные значения ν и H. В других известных нам работах на эту тему анализ и описание допустимых значений параметров или отсутствуют или проведены не достаточно полно. Отметим также, что уравнение (6) с произвольным комплексным ν изучалось в классическом трактате [4, гл. 15]. Там обосновано существование бесконечного счётного множества корней, показано, что все корни лежат в некоторой горизонтальной полосе, и приведены выражения для сумм Рэлея $\sigma^{(2m)}(\nu)$ при $m = 1, 2, 3, 4, 5$, но без указания ограничений на параметр ν.

Указанные обстоятельства дают повод рассмотреть обобщение уравнения (2) в виде

$$azJ'_\nu(z) + bJ_\nu(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

с параметрами ν, a, $b \in \mathbb{C}$ такими, что $|a| + |b| > 0$.

Корни $z \neq 0$ уравнения (8) будем называть *нетривиальными*.

Зафиксируем произвольные ν, a, $b \in \mathbb{C}$, $|a| + |b| > 0$. Нетривиальные корни уравнения (8) расположены в некоторой горизонтальной полосе на плоскости $\mathbb{C}$ симметрично относительно точки $z = 0$. Обозначим эти корни $\pm\mu_{\nu,k}(a, b) \equiv \pm\mu_{\nu,k}$, $k \in \mathbb{N}$, где $\mu_{\nu,k}$ — корни (8), лежащие в $\{\operatorname{Re} z > 0\} \cup \{\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ и занумерованные в порядке возрастания модуля. Тогда $\mu_{\nu,k} \to \infty$, $\operatorname{Re}\mu_{\nu,k} \to +\infty$ при $k \to \infty$. По аналогии с классическими суммами Рэлея [3] определим *суммы типа Рэлея*

$$\eta^{(r)}(\nu, a, b) \equiv \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(\pm\mu_{\nu,k}(a, b))^r}, \qquad r \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Введём целую четную функцию

$$L(z) = L(z; \nu, a, b) \equiv \frac{azJ'_\nu(z) + bJ_\nu(z)}{(z/2)^\nu}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

нули которой совпадают с нетривиальными корнями уравнения (8). Показатель сходимости последовательности корней функции $L(z)$ равен единице. Поэтому ряд (9) в общем случае сходится абсолютно лишь при $r > 1$. При всех нечетных $r = 2m - 1$ сумма $\eta^{(2m-1)}(\nu; a, b)$ ряда (9) равна нулю, а при четных $r = 2m$ имеем формулу

$$\eta^{(2m)}(\nu, a, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{\nu,k}^{2m}(a, b)}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Для всех значений $m \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ справедливы рекуррентные формулы Меймана (ср. с [8]; см. также [5])

$$\sigma^{(2m+2)}(\nu) = \frac{1}{m + \nu + 1} \sum_{p=1}^{m} \sigma^{(2p)}(\nu)\, \sigma^{(2m+2-2p)}(\nu), \tag{10}$$

где $\sigma^{(2)}(\nu) = 1/(4(\nu + 1))$. Мы выводим аналогичные соотношения

$$\eta^{(2)}(\nu, a, b) = \frac{a}{2(a\nu + b)} - \frac{a\nu - b}{a\nu + b}\, \sigma^{(2)}(\nu) \equiv \frac{a\nu + b + 2a}{4(\nu + 1)(a\nu + b)},$$

$$\eta^{(2m+2)}(\nu, a, b) = \frac{2a}{a\nu + b} \sum_{p=1}^{m} \sigma^{(2p)}(\nu)\, \eta^{(2m+2-2p)}(\nu, a, b) - \frac{a\nu - b}{a\nu + b}\, \sigma^{(2m+2)}(\nu),$$

справедливые для $m \in \mathbb{N}$ при всех значениях ν, a, $b \in \mathbb{C}$ таких, что $a\nu + b \neq 0$ и $\nu \notin \{-1, -2, \ldots\}$. Случаи $a\nu + b = 0$, $\nu \in \{-1, -2, \ldots\}$ рассматриваются отдельно. Используя новые соотношения и (10), находим,

например,
$$\eta^{(6)}(\nu, a, b) = \frac{2a^2(\nu+1)(5a\nu+8a+3b)+(a\nu+b+2a)^3}{2^5(\nu+1)^3(\nu+2)(\nu+3)(a\nu+b)^3},$$
где $c = a\nu + b + 2a$; ν, a, $b \in \mathbb{C}$, $a\nu + b \neq 0$, $\nu \notin \{-1, -2, \ldots\}$.

Получены также рекуррентные формулы для сумм $\eta^{(2m)}(\nu, a, b)$ через такие же суммы, но более низких порядков.

Приведем еще формулу для специальной двойной суммы
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,m}^2 - \mu_{n,k}^2(\alpha)} = \frac{n+2+i\,n\,\operatorname{tg}\alpha}{8(n+1)}.$$
При $\alpha = 0$ формула записывается в виде
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,m}^2 - j_{n,k}'^2} = \frac{n+2}{8(n+1)}$$
и авторам в литературе не встречалась.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kostin A. B., Sherstyukov V. B.* On complex roots of an equation arising in the oblique derivative problem // IOP Conf. Series: Journal of Physics : Conf. Series, 2017. Vol. 788. P. 1–7. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/788/1/012052

[2] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной // Дифференциальные уравнения, 1994. Т. 30, № 1. С. 128–143.

[3] *Rayleigh* Note on the Numerical Calculation of the Roots of Fluctuating Functions // Proc. London Math. Soc. 1874. Vol. 5. P. 119–124.

[4] *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Наука, 1949.

[5] *Kishore N.* The Rayleigh Function // Proc. London Math. Soc., 1963. Vol. 14. P. 527–533.

[6] *Lamb H.* Note on the Induction of Electric Currents in a Cylinder placed across the Lines of Magnetic Force // Proc. London Math. Soc., 1884. Vol. 15. P. 270–274.

[7] *Капица П. Л.* Вычисление сумм отрицательных четных степеней корней Бесселевых функций // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 4. С. 561–564.

[8] *Мейман Н. Н.* О рекуррентных формулах для степенных сумм нулей Бесселевых функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 2. С. 190–193.

[9] *Керимов М. К.* Функция Рэлея теория и методы вычисления // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39, № 12. С. 1962–2006.

[10] *Kerimov M. K.* Overview of some new results concerning the theory and applications of the Rayleigh special function // Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, № 9. P. 1454–1507.

[11] *Kishore N.* A Class of Formulas for the Rayleigh Function // Duke Math. J. 1967. Vol. 34, № 3. P. 573–579.

[12] *Muldoon M. E., Raza A.* Convolution Formulas for Functions of Rayleigh Type // J. Phys. A: Math. Gen. 1998. Vol. 31. P. 9327–9330.

УДК 517.5

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ[1]

О. А. Кривошеева (Уфа, Россия)
kriolesya2006@yandex.ru

В работе изучается проблема фундаментального принципа для инвариантного подпространства аналитических функций в неограниченной выпуклой области. Получен критерий того, когда каждую функцию из замкнутого подпространства инвариантного относительно оператора дифференцирования можно представить рядом экспоненциальных мономов.

Ключевые слова: Инвариантное подпространство, фундаментальный принцип, неограниченная область.

FUNDAMENTAL PRINCIPLE IN INVARIANT SUBSPACE IN UNBOUNDED DOMAIN[1]

O. A. Krivosheeva (Ufa, Russia)
kriolesya2006@yandex.ru

In the paper fundamental principle problems for invariant subspace of analytic functions in a unbounded convex domain are studied. A criterion for every function from closed subspace and invariant with respect to the differentiation operator may be represented by series of exponential monomials is obtained.

Keywords: invariant subspace, fundamental principle, unbounded domain.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$.

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset D$, и $W \subset H(D)$ — нетривиальное ($W \neq \{0\}, H(D)$) замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования. Спектр этого оператора в подпространстве W является не более чем счетным множеством $\{\lambda_k\}$ ([1], гл.II, §7). Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W. Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием $W(\Lambda, D)$ (в пространстве $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. В этой связи отметим, что проблема спектрального синтеза в случае одной переменной полностью решена в работах [1] и [2]. Если D — неограниченная выпуклая область, то всегда верно равенство $W = W(\Lambda, D)$ ([5], теорема 8.2).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00029).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-31-00029).)

Следующим шагом на пути к представлению всех функций из $W(\Lambda, D)$ является решение проблемы фундаментального принципа. Первым результатом в рамках этой проблемы является фундаментальный принцип Л. Эйлера для пространств решений линейных однородных дифференциальных уравнений конечного порядка с постоянными коэффициентами. Любое такое решение записывается в виде конечной суммы $\sum z^n \exp(\lambda_k z)$, где λ_k — корни характеристического многочлена с кратностью n_k и n меняется в пределах от 0 до $n_k - 1$. В случае, когда спектр подпространства W бесконечен, задача представления значительно усложняется. Идеальным вариантом представления функции $g \in W$, безусловно, является ряд

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \tag{1}$$

равномерно сходящийся на компактных подмножествах плоскости. Если каждая $g \in W$ представляется рядом (1), то говорят, что в W имеет место фундаментальный принцип.

Отметим, что в случае, когда D — ограниченная область, проблема фундаментального принципа полностью решена. При этом был получен критерий справедливости фундаментального принципа в $W(\Lambda, D)$, который формулируется в терминах простых геометрических характеристик: индекса конденсации (его определим ниже), угловой плотности последовательности Λ и длины дуги границы области D.

Также был получен критерий справедливости фундаментального принципа в случае всей плоскости. Критерий формулируется только при помощи индекса конденсации.

Все указанные выше результаты, касающиеся решения проблемы фундаментального принципа, были получены автором совместно с А. С. Кривошеевым. С ними можно ознакомится в работах [3–7].

Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\{\bar{\lambda}_{k_j}/|\lambda_{k_j})|\}_{j=1}^{\infty}$ ($\bar{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной окружности $S(0,1)$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi) = \sup_{z \in D} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

— ее опорная функция. Положим

$$J(D) = \{e^{i\varphi} \in S(0,1) : h(\varphi, D) = +\infty\}.$$

Если D — ограниченная область, то $J(D) = \emptyset$. В случае неограниченной области возможны следующие ситуации: 1) $J(D) = S(0,1)$, т.е. $D = \mathbb{C}$, 2) D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}\}$, 3) D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : b < \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}$ и $J(D) = S(0,1) \setminus \{e^{i\varphi}, e^{i\varphi+\pi}\}$, 4) в остальных случаях $J(D)$ является дугой единичной окружности, которая опирается на угол раствора не меньше чем π.

Пусть $n(r,\Lambda)$ — число точек λ_k с учетом их кратностей n_k, которые попадают в круг $B(0,r)$. Верхней плотностью последовательности Λ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Также, следуя работе [3], положим

$$q_\Lambda(z,w,\delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k},$$

$$q_\Lambda^k(z,\delta) = \prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|), m\neq k} \left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m}.$$

Модуль функции $q_\Lambda(z,w,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w,\delta|w|)$ около точки z. Если $B(w,\delta|w|)$ не содержит ни одной λ_k ($\lambda_m \neq \lambda_k$), считаем, что $q_\Lambda(z,w,\delta) \equiv 1$. Величина $\ln|q_\Lambda(z,w,\delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от точек $\lambda_k \in B(w,\delta|w|)$ до точки z. Положим

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|}.$$

Величина S_Λ называется индексом конденсации (А.С. Кривошеева). Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна-Леонтьева.

Следующий результат распространяет решение проблемы фундаментального принципа в случае всей плоскости на произвольные неограниченные области.

Теорема. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ имеет конечную верхнюю плотность $\bar{n}(\Lambda)$, D — неограниченная выпуклая область. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) во всей плоскости;

2) $\Xi(\Lambda) \subset J(D)$, $S_\Lambda > -\infty$.

Замечание. Если $\bar{n}(\Lambda) < \infty$, то по теореме Абеля для рядов экспоненциальных мономов (см. [8]) из сходимости ряда (1) во всей плоскости следует его абсолютная сходимость и равномерная сходимость на компактах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Красичков-Терновский И. Ф.* Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях // Докл. АН СССР. — 1971 Т. 197, № 1. С. 29–31.

[2] *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972 Т. 87(129), № 4. С. 459–489.

[3] *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. матем. 2004 Т. 68, № 2. С. 71–136.

[4] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 12. С. 49–104.

[5] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 684–697.

[6] *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Базис в инвариантном подпространстве целых функций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 2. С. 132–195.

[7] *Кривошеева О. А.* Ряды экспоненциальных многочленов: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 2018. 174 с.

[8] *Кривошеева О. А.* Область сходимости рядов экспоненциальных мономов // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 2. С. 43–56.

УДК 517.518

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ШВАРЦА И КРУГИ ОДНОЛИСТНОСТИ ПОДКЛАССА ОГРАНИЧЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

О. С. Кудрявцева (Волгоград, Россия)
Kudryavceva_OS@mail.ru

В классе голоморфных функций, отображающих единичный круг в себя и имеющих внутреннюю и две граничные неподвижные точки, получено описание множества значений производной в нуле в терминах угловых производных в граничных неподвижных точках. Также на этом классе функций найдены круги однолистности.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, области однолистности.

INEQUALITY OF SHWARZ TYPE AND DISKS OF UNIVALENCE FOR SUBCLASS OF BOUNDED HOLOMORPHIC FUNCTIONS [1]

O. S. Kudryavtseva (Volgograd, Russia)
Kudryavceva_OS@mail.ru

In the class of holomorphic functions that mapping the unit disk into itself and having an inner and two boundary fixed points, the range of values for derivative at zero in terms of angular derivatives at the boundary fixed points is given. Also on this class of functions the disks of univalence are found.

Keywords: holomorphic mapping, fixed points, angular derivative, domains of univalence.

Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность голоморфных функций, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя. Из классической леммы Шварца [1] следует, что для функции f, принадлежащей классу $\mathcal{B}$ и сохраняющей начало координат, справедливо неравенство

$$|f'(0)| \leqslant 1, \tag{1}$$

равенство в котором достигается в случае тождественного отображения.

В. В. Горяйнов получил описание множества значений $f'(0)$ на подклассе функций, которые, кроме начала координат, оставляют неподвижной граничную точку $z = 1$ и имеют в ней конечную угловую производную $f'(1)$. При этом множество значений $f'(0)$ установлено в зависимости от угловой производной $f'(1)$. Более точно, обозначим

$$\mathcal{B}[0,1] = \left\{ f \in \mathcal{B}\colon f(0) = 0,\ \angle\lim_{z\to 1} f(z) = 1,\ \angle\lim_{z\to 1} f'(z) = f'(1) < \infty \right\}.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

Теорема A ([2]). *Пусть* $f \in \mathcal{B}[0,1]$ *и* $f'(1) = \alpha > 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left| f'(0) - \frac{1}{\alpha} \right| \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha}. \tag{2}$$

При этом равенство достигается на функции

$$f(z) = z\frac{\alpha z - (\alpha - 2)}{\alpha - (\alpha - 2)z}. \tag{3}$$

В данной работе получено уточнение множества значений $f'(0)$ в случае, когда существует вторая неподвижная граничная точка $z = -1$ и $f'(-1) < \infty$. Обозначим

$$\mathcal{B}[-1,0,1] = \left\{ f \in \mathcal{B}[0,1] \colon \angle \lim_{z\to -1} f(z) = -1, \angle \lim_{z\to -1} f'(z) = f'(-1) < \infty \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{B}[-1,0,1]$ *и* $f'(1) = \alpha > 1$, $f'(-1) = \beta > 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\left| f'(0) - \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - 1} \right| \leqslant 1 - \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - 1}. \tag{4}$$

При этом равенство достигается на функции

$$f(z) = z\,\frac{(1 - \alpha\beta)z^2 + 2(\alpha - \beta)z + \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 3}{\big(\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 3\big)z^2 + 2(\alpha - \beta)z + 1 - \alpha\beta}.$$

Заметим, что предельный переход в неравенствах (2), (4) при $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ приводит к неравенству (1).

Классическая теорема Э. Ландау утверждает, что на классе $\mathcal{B}_N[0]$, состоящем из функций, сохраняющих точку $z = 0$ и у которых модуль производной в точке $z = 0$ отделен от нуля:

$$\mathcal{B}_N[0] = \{ f \in \mathcal{B} \colon f(0) = 0,\, |f'(0)| \geqslant 1/N \}, \quad N > 1,$$

наибольшей областью однолистности является круг.

Теорема B ([3]). *Пусть* $f \in \mathcal{B}_N[0]$. *Тогда* f *однолистна в круге* $|z| < R(N)$, *где* $R(N) = N - \sqrt{N^2 - 1}$. *При этом для каждого* $\varkappa$, $|\varkappa| = 1$, *функция*

$$f_\varkappa(z) = z\,\frac{\varkappa - Nz}{N\varkappa - z}$$

принадлежит классу $\mathcal{B}_N[0]$ *и имеет в точке* $z(\varkappa) = \varkappa R(N)$ *нулевую производную.*

Следствиями теоремы Э. Ландау с учетом неравенств (2), (4) являются результаты о кругах однолистности на подклассах $\mathcal{B}[0]$, имеющих граничные неподвижные точки с конечными угловыми производными.

Теорема C ([2]). *Пусть* $f \in \mathcal{B}[0,1]$ *и* $f'(1) = \alpha$, $1 < \alpha < 2$. *Тогда* f *однолистна в круге*

$$|z| < \frac{1-\sqrt{\alpha-1}}{1+\sqrt{\alpha-1}}.$$

При этом функция (3) принадлежит классу $\mathcal{B}[0,1]$, $f'(1) = \alpha$ *и имеет нулевую производную в точке* $z_\alpha = -(1-\sqrt{\alpha-1})/(1+\sqrt{\alpha-1})$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{B}[-1,0,1]$ *и* $f'(1) = \alpha > 1$, $f'(-1) = \beta > 1$. *Тогда при* $\alpha \leqslant 2$ *и любом* β, *а также при* $\alpha > 2$ *и* $\beta < (3-2\alpha)/(2-\alpha)$ *функция* f *однолистна в круге*

$$|z| < \frac{\alpha\beta - 1 - 2\sqrt{(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha+\beta-2)}}{2(\alpha+\beta) - \alpha\beta - 3}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с.

[2] *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017 Т. 208, № 3. С. 54–71.

[3] *Landau E.* Der Picard—Schottkysche Satz und die Blochsche Konstant // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl 1926. Vol. 32, P. 467–474.

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА СТРУКТУРАХ ИЗ ОТРЕЗКОВ[1]

М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)
kuznetsovama@info.sgu.ru

Рассмотрены дифференциальные операторы Штурма – Лиувилля на структурах, состоящих из конечного числа отрезков, со спектральным параметром в условиях склейки. Мы исследовали свойства спектральных характеристик данных операторов и получили асимптотические формулы для собственных значений и весовых чисел. Также доказана теорема единственности восстановления оператора по спектральным данным трех типов: двум спектрам; одному спектру и весовым числам; функции Вейля.

Ключевые слова: операторы Штурма – Лиувилля, замкнутые множества, асимптотические формулы, обратные спектральные задачи.

SPECTRAL ANALYSIS OF STURM – LIOUVILLE OPERATORS ON THE SEGMENT STRUCTURES[1]

M. A. Kuznetsova (Saratov, Russia)
kuznetsovama@info.sgu.ru

In the paper, Sturm–Liouville differential operators on structures consisting of a finite number of segments with a spectral parameter in matching conditions are considered. We study properties of their spectral characteristics and obtain asymptotic formulae for eigenvalues and weight numbers. Uniqueness theorem is proved as well for recovering an operator from the spectral data of three types: two spectra; the spectrum and the weight numbers; Weyl function.

Keywords: Sturm–Liouville operators, closed sets, asymptotic formulae, inverse spectral problems.

Введение

Дифференциальные уравнения на графах возникают при моделировании различных процессов (примеры и основы теории см. в [2, 3]). В работе рассматривается граф-цепочка Γ, состоящий из вершин $\{v_l\}_{l=1}^{N+1}$ и неориентированных ребер $e_k = (v_k, v_{k+1})$, $k = \overline{1, N}$, где N — натуральное число. Обозначим длину e_k числом $d_k > 0$ и зададим параметризацию $x_k \in [0, d_k]$ так, что $x_k = 0$ соответствует вершине v_k, а $x_k = d_k$ — вершине v_{k+1}. Тогда уравнение Штурма – Лиувилля на Γ записывается следующим образом:

$$-y_k''(x_k) + q_k(x_k)y_k(x_k) = \lambda y_k(x_k), \quad x_k \in (0, d_k),\ k = \overline{1, N}, \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 19-71-00009).
[1]This work was supported by Grant 19-71-00009 of the Russian Science Foundation.

где $q = [q_k]_{k=1}^N$ — вещественный потенциал, $q_k \in C[0, d_k]$, $y = [y_k]_{k=1}^N$ — решение, а k-е компоненты определены на ребре e_k.

В качестве условий склейки возьмем

$$\left.\begin{aligned} y_{l+1}(0) &= \alpha_{11}^l(\lambda)y_l(d_l) + \alpha_{12}^l(\lambda)y_l'(d_l), \\ y_{l+1}'(0) &= \alpha_{21}^l(\lambda)y_l(d_l) + \alpha_{22}^l(\lambda)y_l'(d_l), \end{aligned} \quad l = \overline{1, N-1}, \right\} \tag{2}$$

с коэффициентами $\alpha_{11}^l(\lambda) := 1$, $\alpha_{12}^l(\lambda) := t_l$, $\alpha_{21}^l(\lambda) := t_l(q_l(d_l) - \lambda)$, $\alpha_{22}^l(\lambda) := 1 + t_l^2(q_l(d_l) - \lambda)$, где $t_l > 0$, $l = \overline{1, N-1}$.

Уравнения (3) вместе с условиями склейки (2) эквивалентны следующему уравнению с Δ-производными на замкнутом множестве, состоящем из N отрезков:

$$-y^{\Delta\Delta}(x) + q(x)y(\sigma(x)) = \lambda y(\sigma(x)), \quad x \in \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k],$$

где $b_k = a_k + d_k$, $k = \overline{1, N}$, $a_{l+1} = b_l + t_l$, $l = \overline{1, N-1}$. Определения $\sigma(x)$ и Δ-производной даны в [3] и [1].

1. Свойства спектральных характеристик

Обозначим L_j краевую задачу для (3), (2) с краевыми условиями

$$y^{(j)}(v_1) := y_1^{(j)}(0) = 0, \quad y(v_{N+1}) := y_N(d_N) = 0, \quad j = 0, 1.$$

Пусть $S = [S_k(x_k, \lambda)]_{k=1}^N$ и $C = [C_k(x_k, \lambda)]_{k=1}^N$ являются решениями (3), (2) с начальными условиями

$$S_1'(0, \lambda) = C_1(0, \lambda) = 1, \; S_1(0, \lambda) = C_1'(0, \lambda) = 0.$$

Введем целые функции

$$\Theta_0(\lambda) := S_N(d_N, \lambda), \; \Theta_1(\lambda) := C_N(d_N, \lambda).$$

Для $j = 0, 1$ собственные значения $\{\lambda_{nj}\}_{n \geq 1}$ краевой задачи L_j совпадают с нулями целой функции $\Theta_j(\lambda)$, которая является характеристической функцией L_j. Из вещественности q следует, что эти нули — простые и вещественные. Кроме того, $\Theta_0(\lambda)$ и $\Theta_1(\lambda)$ не имеют общих нулей.

Пусть $\Phi = [\Phi_k(x_k, \lambda)]_{k=1}^N$ является решением (3), (2) при условиях

$$\Phi_1'(0, \lambda) = 1, \quad \Phi_N(d_N, \lambda) = 0.$$

Назовем $M(\lambda) := \Phi_1(0, \lambda)$ функцией Вейля. Нетрудно проверить, что

$$\Phi = S + M(\lambda)C, \quad M(\lambda) = -\frac{\Theta_0(\lambda)}{\Theta_1(\lambda)}.$$

Введем весовые числа

$$\alpha_n := \underset{\lambda=\lambda_{n1}}{Res}\, M(\lambda) = -\frac{\Theta_0(\lambda_{n1})}{\Theta_1'(\lambda_{n1})}, \quad n \geq 1.$$

Можно показать, что $\alpha_n > 0$ при $n \in \mathbb{N}$.

Функция Вейля $M(\lambda)$, спектры $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}, j = 0, 1$, и весовые числа $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ называются спектральными характеристиками.

При выводе асимптотических формул для спектральных характеристик необходимо условие соизмеримости длин ребер:

$$d_k = rx_k,\ x_k \in \mathbb{Q}, \quad k = \overline{1, N},\ \text{для некоторого } r > 0. \tag{3}$$

Условие соизмеримости ребер графа используется также в [5].

Теорема 2. *Каждый спектр состоит из $N+1$ части:*

$$\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1} = \Lambda_j \bigcup \Big(\bigcup_{k=1}^{N} \{(\rho_{nj}^{(k)})^2\}_{n\geq 1} \Big), \quad j = 0, 1,$$

где Λ_j — конечное множество из $N + j\,\mathrm{sign}(N-1) - 1$ элементов,

$$\rho_{nj}^{(k)} = \frac{\pi(n - \delta_k^{j\delta(1,k)})}{d_k} + r_{nj}^{(k)}, \quad r_{nj}^{(k)} = o(1), \quad \delta_k^j \in \Big\{0, \frac{1}{2}\Big\},\ \delta_k^1 + \delta_k^0 = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Обозначим

$$z_k := \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\int_0^{d_k} q_k(x)\,dx + \sum_{l=\max(1,k-1)}^{\min(k,N-1)} t_l^{-1}\Big), \quad k = \overline{1, N}.$$

Если выполнено (3) *и числа z_k, $k = \overline{1, N}$, различны, то в* (4)

$$r_{nj}^{(k)} = \frac{z_k + \kappa_{nkj}}{n},\ \{\kappa_{nkj}\}_{n\geq 1} \in l^2, \quad k = \overline{1, N}.$$

Теорема 3. *Обозначим*

$$\alpha_n^k := \underset{\lambda=(\rho_{n1}^{(k)})^2}{Res} M(\lambda).$$

Если выполнено (3) *и числа z_k, $k = \overline{1, N}$, различны, то*

$$\alpha_n^k = \begin{cases} \dfrac{2}{d_1}\Big(1 + \dfrac{\kappa_{nk2}}{n}\Big), & k = 1, \\ \dfrac{\kappa_{nk2}}{n}, & k > 1, \end{cases} \qquad \{\kappa_{nk2}\}_{n\geq 1} \in l^2.$$

2. Обратные задачи

Рассмотрим три следующих обратных задачи.

Обратная задача 1. По $M(\lambda)$ восстановить q.

Обратная задача 2. По $\{\lambda_{nj}\}_{n\ge1}$, $j=0,1$, восстановить q.

Обратная задача 3. По $\{\lambda_{n1}\}_{n\ge1}$ и $\{\alpha_n\}_{n\ge1}$ восстановить q.

Данные три задачи эквивалентны: по входным данным одной задачи можно восстановить входные данные любой другой задачи. В частности,

$$M(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\lambda-\lambda_{n1}}.$$

Кроме краевой задачи L_0, зассмотрим задачу $\tilde{L}_0$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde{q}$. Пусть символ γ обозначает объект, относящийся к L_0, тогда $\tilde{\gamma}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}_0$.

Используя метод спектральных отображений [5], мы доказали теорему единственности решения обратных задач 1–3.

Теорема 4. *Если выполнено одно из следующих условий, то* $q=\tilde{q}$:

1. $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$;
2. $\{\lambda_{nj}\}_{n\ge1}=\{\tilde{\lambda}_{nj}\}_{n\ge1}$, $j=0,1$;
3. $\{\lambda_{n1}\}_{n\ge1}=\{\tilde{\lambda}_{n1}\}_{n\ge1}$ *и* $\{\alpha_n\}_{n\ge1}=\{\tilde{\alpha}_n\}_{n\ge1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Berkolaiko G., Kuchment P.* Introduction to Quantum Graphs. Providence, RI : AMS, 2013. 270 p.

[2] *Покорный Ю. В, Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.

[3] *Yurko V.* Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators on closed sets // Tamkang journal of mathematics. 2019. Vol. 50, № 3. P. 199–206.

[4] *Bohner M., Peterson A.* Dynamic Equations on Time Scales. Boston, MA : Birkhäuser, 2001. 358 p.

[5] *Bondarenko N. P.* An inverse problem for Sturm – Liouville operators on trees with partial information given on the potentials // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. Vol. 42. P. 1512–1528.

[6] *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов : Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 365 с.

УДК 517.96,517.984

КЛАССИЧЕСКОЕ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ И ОДНОПОРЯДКОВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ С ПРОИЗВОДНОЙ

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KhromovAP@info.sgu.ru

С помощью идей Эйлера об использовании расходящихся рядов получены необходимые и достаточные условия существования классичесоего решения смешанной задачи для волнового уравнения и обобщенное решение с суммируемой начальной функцией.

Ключевые слова: метод Фурье, расходящиеся ряды, волновое уравнение.

CLASSICAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF THE MIXED PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS EQUATION WITH ZERO INITIAL SPEED AND SINGLE-ORDER BOUNDARY CONDITIONS WITH A DERIVATIVE

V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KhromovAP@info.sgu.ru

Using Euler's ideas about using divergent series, the necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the wave equation and a generalized solution with a summable initial function are obtained.

Keywords: Fourier method, divergent series, wave equation.

Рассматрим задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — комплекснозначные функции, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не выходят за рамки $L[0,1]$, комплекснозначная $f(x,t) \in L[Q_T]$, $Q_T = \{x,t|\ x \in [0,1],\ t \in [0,T]\}$ при любом $T > 0$.

Применяем новый прием в методе Фурье, основанный на использовании расходящихся рядов в понимании Эйлера [1] (важная информация о расходящихся рядах приведена также в [2]), позволяющий получать новые результаты, избегая при этом дополнительных трудностей, возникающих при обосновании промежуточных утверждений.

Формальное решение по методу Фурье берем в виде [3]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} +$$
$$+ \int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Big]\,d\lambda, \tag{4}$$

где $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \ge 0$, R_λ — резольвента опертора $Ly = -y'' + q(x)y$, $y'(0) = y'(1) = 0$, $r > 0$ и достаточно велико, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde\gamma_n = \{\rho|\ |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано, контуры $|\lambda| = r$ и γ_n при $n \ge n_0$ не пересекаются, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Обозначим $Z(x,t,\varphi)$ ряд (4) при $\psi(x) = f(x,t) = 0$. Тогда формальный ряд (4), как и в [2, формула (8)] использованием расходящихся рядов приводится к виду

$$u(x,t) = Z(x,t,\varphi) + \int\limits_0^t Z(x,t,\psi)\,d\tau + \int_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{5}$$

Важность формулы (5) в том, что в формальном решение неоднородной задачи (1)–(3) участвует лишь формальное решение такой однородной задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - q(x)u(x,t), \tag{6}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0), \tag{7}$$
$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \tag{8}$$

но при различных $\varphi(x)$.

Рассматриваем задачу (6)–(8).

Аналогично [4], с помощью рекомендаций А. Н. Крылова [5], идей Эйлера о расходящихся рядах и формулы (5), от ряда $Z(x,t,\varphi)$ переходим к ряду

$$A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t),$$

где

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t) + \tilde\varphi(x-t)],$$

$$a_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde f_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad n=1,2,\dots,$$
$$f_n(x,t)=-q(x)a_n(x,t), \quad n=0,1,\dots,$$

$\tilde\varphi(x)$ есть четное 2-периодическое продолжение на всю ось функции $\varphi(x)$, $x\in[0,1]$, $\tilde f_n(\eta,\tau)$ — четная 2-периодическая по η и $\tilde f(\eta,\tau)=f_n(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)\in L[0,1]$ и пусть $T>0$, произвольно и m — наименьшее натуральное число, такое, что $T\le m$. Тогда*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]}\le M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n=1,2,\dots,$$

где $M_1=\|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2=(2m+1)\|q\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1\le C_T\|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Если $\varphi(x)\in L[0,1]$, то ряд $A_1(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T с экспоненциальной скоростью.*

Теорема 2. *Для того, чтобы существовало классическое решение задачи (6)–(8), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$. Это решение дается формулой $u(x,t)=A(x,t)$. Оно является единственным среди решений из класса $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$.*

Теорема 3. *Если $\varphi(x)\in L[0,1]$ и $u_h(x,t)$ есть классическое решение задачи (6)–(8) для $u_h(x,t)$ с $\varphi_h(x)$ вместо $\varphi(x)$ и $\lim\limits_{h\to0}\|\varphi_h-\varphi\|_1=0$, то $\lim\limits_{h\to0}\|u_h(x,t)-A(x,t)\|_{L[Q_T]}=0$.*

Таким образом, $u(x,t)=A(x,t)$ является обобщенным решением задачи (6)–(8).

Подробные доказательства подобных теоремам 1–3 для задачи (6), (7) с граничными условиями $u(0,t)=u(1,t)=0$ приведены в [4, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[2] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зим. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. **??**–439.

[3] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, вып. 2. С. 286–300. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919020091

[4] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

[5] *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

[6] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: https://doi.org/10.1134/s0374064119050121

УДК 517.518

О ДОПУСТИМОМ РОСТЕ ЛАКУН В СИСТЕМЕ УОЛША

С. В. Левизов (Владимир, Россия)
levizov@rambler.ru

исследуются условия, при которых для слабо лакунарных подсистем системы Уолша выполняется (или не выполняется) предельное соотношение вида закона повторного логарифма

Ключевые слова: система Уолша–Пэли, слабая лакунарность, закон повторного логарифма.

ABOUT THE PERMISSIBLE GROWTH OF LACUNES IN WALSH'S SYSTEM

S. V. Levizov (Vladimir, Russia)
levizov@rambler.ru

The conditions, under which the law of the iterated logarithmis for the weakly lacunary subsystems of the Walsh's system is valid (or not), are considered.

Keywords: Walsh–Paley's system, weakly lacunarity, law of the iterated logarithm.

Для системы функций Уолша (в нумерации Пэли) $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 \le x \le 1$ (подробное определение см., например, в [1]) рассматривается подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$, где $\{n(k)\}$ — некоторая возрастающая последовательность номеров.

Говорят, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если имеет место равенство:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} (2N \log\log N)^{-1/2} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n(k)}(x) = 1 \quad \text{почти всюду.} \tag{1}$$

В [2] было доказано, что если последовательность $\{n(k)\}$ является лакунарной, т.е.

$$\frac{n(k+1)}{n(k)} > c > 1 \quad \text{для некоторого c,} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то равенство (1) имеет место.

В дальнейшем этот результат обобщался (см. [3–5]) на случай так называемой слабой лакунарности, когда

$$\frac{n(k+1)}{n(k)} \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty; \quad \text{точнее,} \quad \frac{n(k+1)}{n(k)} > 1 + \frac{c}{k^\alpha}$$

для некоторого $c > 0$ и $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Показатель α, регулирующий размеры лакун (пробелов) в последовательности $\{n(k)\}$, является «достаточным» для выполнения (1), если $\alpha < \frac{1}{2}$. В то же время ЗПЛ может выполняться и в случае более «густых» (с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$) последовательностей $\{n(k)\}$, если они подчинены условию "нерегулярной"лакунарности (см. об этом в [5]).

В критическом случае (для «рубежа» $\alpha = \frac{1}{2}$) обычно рассматривается лакунарность вида $\frac{n(k+1)}{n(k)} > 1 + \frac{c_k}{\sqrt{k}}$, где $\{c_k\}$ — неограниченная, монотонно возрастающая (но не быстрее, чем $\sqrt{k}$) последовательность. Оказывается, равенство (1) начинает «пропадать», если последовательность $\{n(k)\}$ растёт не слишком быстро, создавая сравнительно небольшие пробелы в номерах последовательности $\{n(k)\}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Существует последовательность* $\{n(k)\}$, *для которой*

$$\frac{n(k+1)}{n(k)} > 1 + \frac{\log(\log k)}{\sqrt{k}}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (\text{"регулярная"лакунарность}),$$

и такая, что при этом для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ *закон повторного логарифма не выполняется, т.е. равенство* (1) *не имеет места.*

Этот факт уточняет результат, полученный в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Серия математическая, матем. анализ, М.: ВИНИТИ, 1971. С. 147–202.

[2] *Revesz P., Wschebor M.* On the statistical properties of the Walsh functions // Publ. Math. Ins. Hung. Acad. Sci. Ser. A. 1964. Vol. 9, Fasc. 3. P. 543–554.

[3] *Foldes A.* Further statistical properties of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1972. Vol. 7. P. 147–153.

[4] *Takahashi S.* A statistical property of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1975. Vol. 10. P. 93–98.

[5] *Левизов С. В.* ЗПЛ для лакунарных рядов по системе Уолша // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 69–77.

[6] *Курбыко И. Ф., Левизов С. В.* Критический случай лакунарности в ЗПЛ для рядов по системе Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й международн. Саратовской зимней школы. Саратов : Изд-во ООО «Научная книга», 2018. С. 172–173.

УДК 517.984, 517.956.32

МЕТОД А. П. ХРОМОВА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА

И. С. Ломов (Москва, Россия)
lomov@cs.msu.ru

Установлен критерий существования (единственного) классического решения смешанной задачи для телеграфного уравнения с суммируемым потенциалом. Рассмотрен случай периодических краевых условий. Решение получено в явном виде: оно записывается как ряд, представляющий собой обобщенную формулу Даламбера. Ряд сходится с экспоненциальной скоростью. При нулевом потенциале этот ряд переходит в обычную формулу Даламбера. Получены условия существования обобщенного решения задачи.

Ключевые слова: метод Фурье, резольвента оператора, формула Даламбера, спектр оператора, телеграфное уравнение, расходящиеся ряды.

A. P. KHROMOV'S METHOD FOR SOLVING A MIXED PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION. A GENERALIZED FORMULA OF D'ALEMBERT

I. S. Lomov (Moscow, Russia)
lomov@cs.msu.ru

A criterion is established for the existence of a (unique) classical solution to the mixed problem for a telegraph equation with a summable potential. The case of periodic boundary conditions is considered. The solution is obtained in an explicit form: it is written as a series, which is a generalized one of d'Alembert formula. Row converges with exponential rate. At zero potential, this series goes over to the usual d'Alembert formula. The conditions for the existence of a generalized solution to the problem are obtained.

Keywords: Fourier method, operator resolvent, d'Alembert formula, operator spectrum, telegraph equation, divergent series.

1. Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u^{(l)}(0,t) = u^{(l)}(1,t), \quad l = 0,1,\ t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где функции $q(x), \varphi(x)$– комплекснозначные, $q(x), \varphi(x) \in L(0,1)$, суммируемые функции.

Требуется решить две задачи: 1) найти точные условия существования и единственности классического решения задачи (1)–(3); 2) показать, что при перечисленных выше условиях на данные задачи классическое решение переходит в обобщенное решение задачи.

Классическим решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $\overline{Q} = [0,1] \times [0,\infty)$, причем функции $u'_x(x,t), u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны соответственно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$, удовлетворяющую почти всюду в Q уравнению (1) и условиям (2), (3).

Из приведенного определения следует, что необходимыми условиями существования классического решения задачи (1)–(3) являются следующие условия на $\varphi(x)$: функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$, $\varphi''(x) \in L(0,1)$ и $\varphi^{(l)}(0) = \varphi^{(l)}(1)$ для $l = 0,1$.

Для исследования задачи применяем метод А. П. Хромова [1–3], модифицировавшего метод Фурье путем использования резольвентного метода, привлечения идеи А. Н. Крылова [4] об ускорении сходимости рядов Фурье, связанных с дифференциальными операторами и применившего идею Л. Эйлера о работе с расходящимися рядами.

Ранее А. П. Хромовым и его учениками этот метод был применен к исследованию первой краевой задачи [1–3, 5, 6], при этом в работах [2, 3, 6] получен критерий существования классического решения задачи. Получены и условия существования обобщенного решения. В [5] исследована периодическая задача (1)–(3) с дополнительными условиями гладкости на данные задачи. В работе [3] впервые применен подход Л. Эйлера использования расходящихся рядов.

Первый результат данной работы сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1)–(3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и $\varphi^{(l)}(0) = \varphi^{(l)}(1)$ при $l = 0,1$. Это решение дается формулой*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{4}$$

где

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)], \tag{5}$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

$\tilde{\varphi}(x)$ есть 1-периодическое продолжение функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю прямую, $\tilde{f}_n(\eta,\tau)$ — 1-периодическая по η функция, $\tilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) \equiv -q(x)a_n(x,t)$ при $\eta \in [0,1]$, $n = 0,1,2,\ldots$.

2. Формализм метода

Продемонстрируем здесь процесс получения ряда $A(x,t)$ (4).

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье берем в виде ([2, 3, 6])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\oint\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\oint\limits_{\gamma_n}\Bigg)(R_\lambda\varphi)\cos\varrho t\,d\lambda, \tag{7}$$

где $R_\lambda = ((l - \lambda E)^{-1})$ — резольвента оператора L, действующего в $L_2(0,1)$, связанного с задачей (1)–(3):

$$L:\ ly = -y''(x) + q(x)y(x),\ \ y^{(l)}(0) = y^{(l)}(1),\ l = 0,1,$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, E – единичный оператор, $\lambda = \varrho^2$, $\operatorname{Re}\varrho \geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\varrho :\ |\varrho - 2\pi n| = \delta\}$, $n \geq n_0$, число $\delta > 0$ и достаточно мало, число $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, n_0 такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению λ_n оператора L и все γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$.

Для получения формулы (4) проведем формальные преобразования представления (7) решения $u(x,t)$ задачи (1)–(3). При этом на данные задачи налагаем минимальные требования: q, $\varphi \in L(0,1)$, $f(x,t) \in L(Q_T)$, $Q_T = (0,1)\times(0,T)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Нам потребуется далее задача, получаемая из задачи (1)–(3) при замене уравнения (1) на неоднородное уравнение

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t)\in Q. \tag{8}$$

Формальное решение задачи (8), (2), (3) имеет вид ([2])

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\oint\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\oint\limits_{\gamma_n}\Bigg)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\varrho t +$$

$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\varrho(t-\tau)}{\varrho}\,d\tau\Bigg]d\lambda, \tag{9}$$

где $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что резольвента R_λ оператора L применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Обозначим через $Z(x,t,\varphi)$ ряд (7) — формальное решение задачи (1)–(3). Как показал А. П. Хромов [7], используя теорию расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера, ряд (9) можно преобразовать к следующему виду:

$$u(x,t) = Z(x,t,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{9.1}$$

Представим ряд $Z(x,t,\varphi)$ в виде

$$Z(x,t,\varphi) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{10}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть представление (7), где R_λ заменено на R_λ^0: R_λ^0 есть R_λ при $q(x)=0$ и имеет следующий вид:

$$(R_\lambda^0 g)(x) = -\frac{1}{2\varrho\sin\frac{\varrho}{2}}\int\limits_0^1 \cos\varrho(x-t+\frac{1}{2})g(t)\,dt - \frac{1}{\varrho}\int\limits_0^x \sin\varrho(x-t)g(t)\,dt. \tag{11}$$

Подставим (11) в выражение для $u_{01}(x,t)$. Так как теперь

$$u_{01}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\ge 0}\oint\limits_{\gamma_n}(R_\lambda^0\varphi)(x)\cos\varrho t\,d\lambda,$$

то, применяя теорему о вычетах, получаем

$$\begin{gathered} u_{01}(x,t) = \sum_{n\ge 0}\tfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_n}\tfrac{1}{2\varrho\sin\frac{\varrho}{2}}\int\limits_0^1 \cos\varrho(x-\tau+\tfrac{1}{2})\varphi(\tau)\,d\tau\cos\varrho t\,d\lambda = \\ = (1,\varphi) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\big[(\varphi,\cos 2\pi n\tau)\cos 2\pi nx + (\varphi,\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx\big]\cos 2\pi nt. \end{gathered} \tag{12}$$

Мы знаем сумму следующего ряда в случае его сходимости

$$(1,\varphi) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\big[(\varphi,\cos 2\pi n\tau)\cos 2\pi nx + (\varphi,\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx\big] = \tilde\varphi(x), \tag{13}$$

где $\tilde\varphi(x) = \varphi(x)$ при $x\in[0,1]$, $\tilde\varphi(x)$ — 1-периодическая функция. Ряд (13) при $\varphi\in L(0,1)$, вообще говоря является расходящимся (пример А. Н. Колмогорова). Но мы теперь будем считать, что его сумма — функция $\tilde\varphi(x)$, как сумма расходящегося ряда в понимании Л. Эйлера. Из (13) и (12) следует, что

$$u_{01}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t)], \quad x\in\mathbb{R},\ t\ge 0. \tag{14}$$

Правая часть (14) имеет смысл при любых $(x,t) \in (-\infty,\infty)\times[0,\infty)$, поэтому в этом случае $u_{01}(x,t)$ из (14) будем обозначать через $a_0(x,t)$. Получаем формулу (5) теоремы 1.

Так как функция $a_0(x,t)$ похожа на решение задачи (1)–(3) при $q(x) = 0$, то функция $u_1(x,t)$ из представления (10) похожа на решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{15}$$

$$u_1^{(l)}(0,t) = u_1^{(l)}(1,t), \quad l = 0,1,\ t \ge 0, \tag{16}$$

$$u_1(x,0) = 0,\ u'_{1t}(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{17}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$. Поэтому от ряда для функции $u_1(x,t)$ из (10) перейдем, в силу (9.1), к формальному ряду для решения задачи (15)–(17), т. е. к ряду

$$u_1(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))\,d\eta. \tag{18}$$

Представим

$$Z(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)) = Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)) + Z_1(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)),$$

где $Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))$ есть $Z(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))$ при $q(x)=0$. Но $Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau))$, в силу (14), есть

$$Z_0(x,\eta,f_0(\cdot,\tau)) = \frac{1}{2}[\tilde f_0(x+\eta,\tau) + \tilde f_0(x-\eta,\tau)],$$

где $\tilde f_0(\eta,\tau)$ — 1-периодическая функция по η при каждом τ, $\tilde f_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$. И поэтому $a_1(x,t)$ есть

$$a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde f_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

и так далее, продолжаем этот процесс до бесконечности. В итоге от ряда (7) приходим к ряду (4) с коэффициентами (5), (6). Этим завершается формализм метода А. П. Хромова.

Далее формулируется последовательность утверждений, аналогичных утверждениям из [2, 3], доказывающих теорему 1, т. е., что ряд (4) действительно представляет единственное классическое решение исходной задачи.

3. Обобщенное решение

Теорема 2. *Если* $\varphi \in L(0,1)$, *то ряд* $A(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью в* $Q_T, \forall T > 0$.

Теорема 3. *Если* $\varphi \in L(0,1)$, *а* φ_h *удовлетворяет условиям теоремы 1 и* $\|\varphi_h - \varphi\| \to 0$ *при* $h \to 0$, *то соответствующие* φ_h *классические решения* $u_h(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *сходятся по норме* $L(Q_T)$ *к* $A(x,t)$, *т. е. в этом случае* $u(x,t) = A(x,t)$ *является обобщенным решением задачи* (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.

[2] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения, 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731.

[3] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288.

[4] *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

[5] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 229 – 241.

[6] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286 – 300.

[7] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Сарат. зим. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. С. **??**–439.

УДК 519.6+523.68

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЛОГО МЕТЕОРНОГО ТЕЛА В СЛЕДЕ БОЛЕЕ КРУПНОГО ТЕЛА

В. Т. Лукашенко, Ф. А. Максимов (Москва, Россия)
lukashenko-vt@yandex.ru, f_a_maximov@mail.ru

Представлен метод моделирования, позволяющий рассматривать динамику группы тел летящих со сверхзвуковой скоростью с учетом соударений между отдельными телами. При помощи данного метода проведено численное исследование задачи о возможных колебаниях малого метеорного тела при его попадании в след от более крупного метеороида. Результаты вычислений при различных значениях плотности малого тела показывают, что существует режим, когда малое тело совершает колебания и периодически соударяется с лидирующим телом, однако устойчивость данной конфигурации тел зависит от режима течения.

Ключевые слова: моделирование, метеороид, фрагменты, соударения, колебания.

NUMERICAL STUDY OF OSCILLATIONS OF A SMALL METEOR BODY IN THE TRACE OF LARGER BODY

V. T. Lukashenko, F. A. Maksimov (Moscow, Russia)
lukashenko-vt@yandex.ru, f_a_maximov@mail.ru

A modeling method is presented that allows one to consider the dynamics of a group of bodies flying with supersonic speed, taking into account collisions between individual bodies. Using this method, a numerical study is carried out for the problem of possible oscillations of a small meteoroid when it falls into the trail from a larger meteoroid. The results of calculations for various values of the density of a small body show that there is a mode when a small body oscillates and periodically collides with a leading body, however the stability of this configuration of bodies depends on the flow regime.

Keywords: modeling, meteoroid, fragments, collisions, oscillations.

Введение

При полете в атмосфере метеорное тело испытывает значительные нагрузки под воздействием увеличивающего скоростного напора и теплового нагрева, что приводит к постепенному разрушению и распаду тела на отдельные фрагменты [1, 2]. В результате образовывается достаточно сложная система из фрагментов, которые в ряде случаев оказываются достаточно близки по своим размерам и параметрам [3]. Данные фрагменты продолжают свое движение совместно, при этом со временем будет происходить перестройка их конфигурации.

В работе [4] было проведено моделирование динамики двух сферических тел при помощи постановки сопряженной задачи с исследованием эффекта коллимации — затягиванием меньшего фрагмент в след большего лидирующего тела. При этом был сделан общий вывод о характере поведения системы из двух фрагментов метеорного тела: если фрагменты имеют близкие размеры, то они должны разойтись в поперечном направлении и впоследствии двигаться независимо друг от друга; если же один из образовавшихся фрагментов оказывается более крупным, то он становится лидирующим, а меньшие фрагменты затягиваются в его след, реализуется модель иглы с постепенным отставанием малых фрагментов от лидирующего. Целью данной работы является более подробное изучение эффекта коллимации, чтобы выяснить, возможна ли реализации конфигурации, когда меньшее тело удерживается непосредственно вблизи лидирующего большего тела без отставания вдоль направления движения.

Метод расчета

Авторами был реализован метод сопряженного расчета [5] с использованием системы сеток. Изначально рассчитывается аэродинамическая картина обтекания, находится распределение давления на поверхности тел. После этого тела сдвигаются согласно уравнениям движения за малый промежуток времени Δt, картина течения перерасчитывается за данный интервал времени. Находится новое распределение давления на поверхности тел, итерационным методом прослеживается динамика системы на больших временных интервалах.

Представленный метод был дополнен алгоритмом для моделирования соударений между телами [6]. Считается, что соударение между телами происходит, когда фрагменты подлетают близко друг к другу. В плоском случае, когда тела имеют форму круговых цилиндров с радиусами R_i и R_j, соударение моделируется при условии

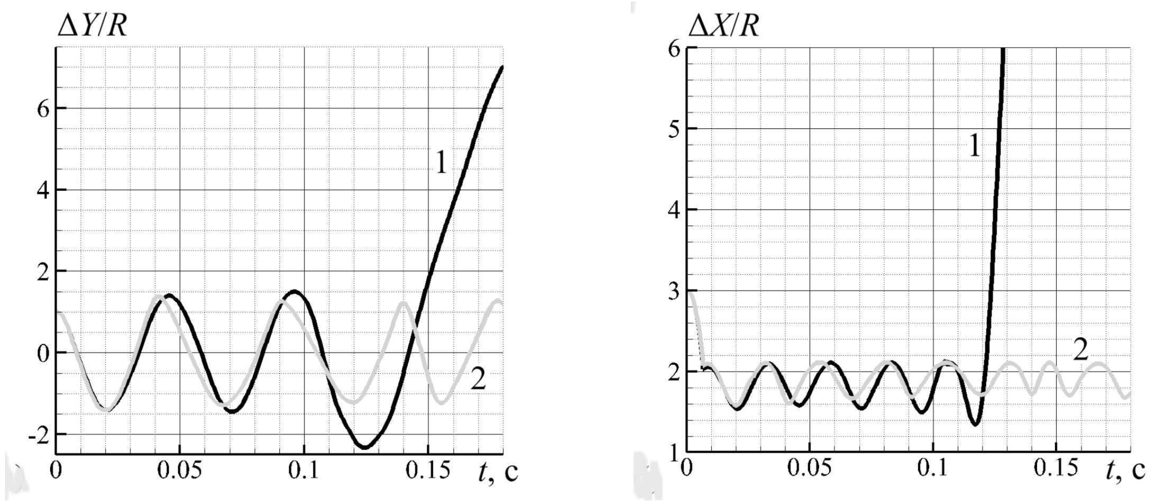
$$\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} < R_i + R_j + C,$$

где (X_i, Y_i) - координаты центра масс i-го тела; константа C подбирается в зависимости от размера сеток тел, а также заданного максимально возможного смещения тел за шаг времени Δt. То есть, между телами всегда присутствует тонкая воздушная прослойка. Моделирование типа удара задается при помощи коэффициента восстановления удара k, значение которого зависит от реальных свойств веществ соударяющихся тел [7].

Результаты

В работе [6] было показано, что конфигурация совместного полета двух одинаковых тел, расположенных на прямой вдоль направления полета, реализуется, однако оказывается неустойчивой к малым возмущениям. В данной работе рассматривается полет системы из двух фрагментов разного размера и состава. Бралось лидирующее тело железного состава с радиусом $R = 0.027$ м (и соответственно массой $m = 1$ кг); радиус остающего тело задавался $R_0 = 0.02025$ м при варьируемой плотности. Изначально тела располагались близко друг к другу с расстояним между центрами масс вдоль направления движения $\Delta X_0/R = 3$ и со смещением отстающего тела в бок $\Delta Y_0/R = 1$ для имитации начального возмущения. Все расчеты проводились для полета со скоростью 2 км/с на высоте 10 км над поверхностью Земли.

Результаты расчетов показали, что реализуются три варианта поведения системы. Если плотность отстающего близка или больше лидирующего, то тела расходятся в поперечном направлении. Если плотность отстающего тело мала, то данное тело будет постепенно отходить от лидирующего. В промежуточном случае отстающее тело будет осуществлять колебания около лидирующего. На рис.1 представлены характеристики данных колебаний для малого тела с массой $m_0 = 0.4$ кг.



а *б*

Рис. 1. Поперечные (*а*) и продольные (*б*) колебания малого тела с радиусом $R_0/R = 0.75$ и массой $m_0/m = 0.4$ в следе лидирующего тела при 1 – установившемся режиме течения; 2 – неустановившемся режиме течения

Устойчивость данных колебаний меняется в зависимости от характеристик течения. При квазистационарном полете (линия 1) амплитуда данных колебаний носит расходящийся характер с выбросом при $t > 0.12$ с отстающего тела в бок на ударную волну от лидирующего тела. При нестационарном режиме (линия 2) малое тело удерживается в следе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И.* Аэродинамика болидов. М.: Наука. Физматлит, 1995. 240 с.

[2] *Стулов В. П.* О разрушении и распаде метеорных тел в атмосфере // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 421, № 4. С. 486–489.

[3] *Borovichka J., Toth J, Igaz A., Spurny P., Kalenda P., Haloda J., Svoren J., Kornos L., Silber E., Brown P., Husarik M.* The Kosice meteorite fall: Atmospheric trajectory, fragmentation, and orbit // Meteoritics & Planetary Science. 2013. V. 48, № 10. P. 1757–1779.

[4] *Барри Н. Г.* Аэродинамика фрагментов метеорного тела. Эффект коллимации // Астрономический вестник. 2010. Т. 44, № 1. С. 59–64.

[5] *Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А.* Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. Т. 69, № 9. С. 1–13.

[6] *Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А.* Моделирование соударений двух одинаковых осколков метеорного тела, расположенных друг за другом // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. Т. 90, № 6. С. 1–14.

[7] *Тригуба А. М., Штагер Е. В.* Приближенные способы оценки коэффициента восстановления при соударении упругих тел // Современные наукоемкие технологии. 2014. № 5-1. С. 91–93.

УДК 517.518

ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ БАЗИСЫ ДВУМЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ ИЗ СДВИГОВ ОДНОГО ИЗ НИХ[1]

Т. П. Лукашенко (Москва, Россия)
email: lukashenko@mail.ru

В ряде пространств двумерных тригонометрических многочленов указаны конструкции ортонормированных базисов из последовательных сдвигов одного многочлена. Также указывается способ построения ортоподобных систем (фреймов Парсеваля) из последовательных сдвигов одного многочлена в более широком классе пространств тригонометрических многочленов.

Ключевые слова: двумерные тригонометрические многочлены, сдвиги многочленов, ортонормированные системы, фреймы Парсеваля.

THE ORTHONORMAL BASES OF TWO-DIMENSIONAL TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS OF CONSECUTIVE SHIFTS OF ONE POLYNOMIAL[1]

T. P. Lukashenko ((Moscow, Russia)
email: lukashenko@mail.ru

In some spaces of two-dimensional trigonometric polinomials the orthonormal bases of consecutive shifts of one polinomial are constructed. Method for constructing of Parseval frames of consecutive shifts of a polinomial in wider classes of trigonometric polinomials are proposed.

Keywords: two-dimensional trigonometric polinomials, shift of a polinomials, orthonormal systems, Parseval frames.

Введение

В работах [1] и [2] в конечномерных пространствах одномерных тригонометрических многочленов рассматривались ортонормированные базисы из последовательных сдвигов одного многочлена. В пространствах $\mathbf{T}^n$ тригонометрических многочленов степени не выше n

$$T^n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

с действительными (или комплексными) коэффициентами a_k, b_k (соответственно, c_k) такие базисы существуют и они были указаны.

Пространство $\mathbf{T}^n$ тригонометрических многочленов степени не выше n имеет размерность $2n+1$ как над полем $\mathbf{R}$, так и над полем $\mathbf{C}$, и один

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

из ортонормированных базисов в нем образуют сдвиги нормированных ядер Дирихле

$$\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\left(x-\frac{2r\pi}{2n+1}\right)\right),$$

$r = 0, 1, \ldots, 2n$.

В [1] и [2] привелены и другие примеры ортонормированных базисов в пространствах $\mathbf{T^n_0}$, в [2] указан общий вид таких базисов. В данной работе рассматриваются тригонометрические многочлены двух переменных и базисы сдвигов в них.

1. Базисы сдвигов многочленов двух переменных

Рассмотрим пространство $\mathbf{T^{n,m}_{0,0}}$ тригонометрических многочленов двух переменных x, y степени не выше n по переменной x и степени не выше m по переменной y

$$T^{n,m}(x,y) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-m}^{m} c_{k,l}e^{i(kx+ly)}$$

с комплексными коэффициентами $c_{k,l}$, причем в случае действительных тригонометрических многочленов выполняются равенства $c_{k,l} = \overline{c_{-k,l}} = \overline{c_{k,-l}} = c_{-k,-l}$ (где черта сверху обозначает комплексное сопряжение).

Это пространство размерности $(2n+1)(2m+1)$ как в случае действительных многочленов, так и в случае комплексных.

Укадем ортонормированные базисы в нем из последовательных сдвигов одного многочлена.

Пусть $P(x)$ — одномерный тригонометрический многочлен. сдвиги которого $P(x+k\alpha)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{T}^n$ переменной x.

Как известно, для любой 2π-периодической функции f и любого $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x+\alpha)\,dx.$$

Отсюда следует, что многочлен $P\left(x+(2n+1+j)\alpha\right)$ ортогонален всем многочленам $P\left(x+(2n+1+k)\alpha\right) = P(x+k\alpha)$, $k = 0, \ldots, j-1, j+1. \ldots .2n$, а значит, равен многочлену $P(x+j\alpha)$. Следовательно, число $(2n+1)\alpha$ кратно 2π. А тогда если целые числа k и l равны по модулю $(2n+1)$, то многочлены $P(x+k\alpha)$ и $P(x+l\alpha)$ равны.

Пусть $Q(y)$ — также одномерный тригонометрический многочлен, сдвиги которого $Q(y+l\beta)$, $l=0,1,\ldots,2m$, образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{T_0^m}$ переменной y.

Теорема. *Система сдвигов* $\left(j\alpha, \frac{j}{2n+1}\beta\right)$, $j=0,1,\ldots,(2n+1)(2m+1)-1$, *тригонометрического многочлена* $P(x)Q(y)$, *то есть многочлены*

$$P\left(x+j\alpha\right)Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right),$$

$j=0,1,\ldots,(2n+1)(2m+1)-1$, *образуют ортонормированный базис в пространстве* $\mathbf{T^{n,m}}$ *(как в действительном, так и в комплексном случае.*

Доказательство. Так как размерность $\mathbf{T^{n,m}_{0,0}}$ равна $(2n+1)(2m+1)$, то достаточно показать, что приведенные многочлены образуют ортонормированную систему. Если целые j и s не равны по модулю $2n+1$, то многочлены $P(x+j\alpha)$ и $P(x+s\alpha)$ ортогональны, а тогда ортогональны многочлены $P\left(x+j\alpha\right)Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)$ и $P\left(x+s\alpha\right)Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)$, ведь по теореме Фубини $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P\left(x+j\alpha\right)\cdot Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)\cdot\overline{P\left(x+s\alpha\right)}\cdot\overline{Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} P\left(x+j\alpha\right)\cdot\overline{P\left(x+s\alpha\right)}\,dx\cdot\int\limits_0^{2\pi} Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)\cdot\overline{Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)}\,dy = 0$. А если $j=s$ по модулю $(2n+1)$, то многочлены $Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)$ и $Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)$ ортогональны и по той же формуле ортогональны многочлены $P\left(x+j\alpha\right)Q\left(y+\frac{j}{2n+1}\beta\right)$ и $P\left(x+s\alpha\right)Q\left(y+\frac{s}{2n+1}\beta\right)$. Теорема доказана.

2. О фреймах Парсеваля

Аналогичные ортонормированные бащисы строятся в пространствах $\mathbf{T^{m_1,\ldots,m_n}_{0,\ldots,0}}$ тригонометрических многочленов n переменных $x_1,\ldots,x_n$ степени не выше m_k по переменной x_k, $k=1,\ldots,n$, как в действительном, так и в комплексном случае,

Ортогональные проекции таких базисов на инвариантные относительно слвигов подпространства будут фреймами Парсеваля из последовательных сдвигов одного тригонометрического многочлена. Разумеется, такие системы могут содержать много больше элементов, чем размерность подпространства. Для одномерных тригонометрических многочленов вопрос существавания в данном подпространстве фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов одного многочлена в заданном количестве был решен А. В. Фадеевой в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Базисы тригонометрических многочленов из сдвигов ядер Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2014. № 5. P. 35–40.

[2] *Лукашенко Т. П.* Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Vol. 14, вып. 4, ч. 1. P. 111–122.

[3] *Фадеева А. В.* Фреймы Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции в пространствах тригонометрических многочленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2018. № 6. P. 30–36.

УДК 517.5

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И РИССОВСКИЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Хорошо известны необходимые условия на маску масштабирубщей функции, при которых система сдвигов будет ортонормированной или системой Рисса. Мы указываем класс масштабирующих функций, на котором эти условия становятся необходимыми и достаточными.

Ключевые слова: локальные поля, масштабирующая функция, система Рисса, деревья.

DISCRETE ORTHOGONAL AND RIESZ REFINABLE FUNCTIONS

S. F. Lukomskii (Saratov, Russia)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

The necessary conditions under which the shift system of a refinable function is orthogonal or Riesz system are well known. We indicate the class of refinable functions on which this condition is necessary and sufficient. Bibliography: 1 titles.

Keywords: local fields, refinable function, Riesz system, trees.

Введение

Если система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)$ есть ОНС в поле K положительной характеристики , то [1] для п.в. $\chi \in K_0^{\perp}$

$$\sum_{\mathbf{a}\in GF(p^s)} |m_0(\chi\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}})|^2 = 1,$$

где$GF(p^s)$ – конечное поле порядка p^s, K_0– единичный шар в K, $\mathbf{r}_0 \in K_0^{\perp} \setminus K_1^{\perp}$ — функции Радемахера. Это условие не является достаточным. Мы укажем класс масштабирующих функций, для которых это условие является необходимым и достаточным.Мы рассмотрим аналогичную задачу для масштабирующей функции Рисса и докажем что условие

$$0 < A \le \sum_{\mathbf{a}\in GF(p^s)} |m_0(\chi\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}})|^2 \le B < \infty$$

будет необходимым и достаточным для Риссовости масштабирующей функции на этом классе.

1. Локальное поле положительной характеристики и его характеры

Пусть $K = F^{(s)}$ локальное поле положительной характеристики p, элементами которого являются бесконечные последовательности
$a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots), \mathbf{a}_j \in GF(p^s)$ Будем рассматривать его как линейное пространство над конечным полем $GF(p^s)$. Произведение λa определяется покоординатно Если $\mathbf{a}_n \neq 0$, то $\|a\| = p^{-sn}$. Подгруппы

$$K_n = \{a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : n \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\},\ n \in \mathbb{Z}$$

образуют основную цепочку в K^+. Пусть фиксированы элементы $g_n \in K_n \setminus K_{n+1}$. Последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом в K. В дальнейшем будем считать, что $g_n = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{1}_n, \mathbf{0}_{n+1}, \dots)$, где $\mathbf{1}_n = (1, 0, ..., 0)$. Оператор растяжения $\mathcal{A}$ определяем равенством $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\lambda}_n g_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\lambda}_n g_{n-1}$. Пусть X - группа аддитивных характеров поля K. Любой характер $\chi \in X$ можно записать в виде произведения $\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_n = \overline{0, p-1})$, функций Радемахера $r_n(a) = e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)}}$, где $n = ks + l,\ 0 \leq l < s.$. Если мы запишем характер χ в виде $\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$ и обозначим $\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} := r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$, где $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, ..., a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$ то мы можем записать характер χ как произведение $\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}$. Если $\mathbf{a}_k, \mathbf{u} \in GF(p^s)$, то $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u}g_j) = 1$ для любых $k \neq j$. Оператор растяжения в X определяется равенством $(\chi\mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$.

2. Масштабирующие функции Рисса в локальном поле простой характеристики

Let $K = F^{(s)}$ be a local field of characteristic p. Denote

$$H_0 = \{a : a = \mathbf{a}_{-1}g_{-1} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{a}_{-\nu}g_{-\nu},\ \nu \in \mathbb{N},\ \mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s)\},$$

Пусть $\varphi \in L_2(K)$ масштабирующая функция, т.е. φ решение уравнения $\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, которое может быть записано в частотной форме $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, где $m_0(\chi) = \frac{1}{p}\sum_{h\in H_0} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$ есть маска масштабирующего уравнения. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе K_M с носителем $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_{-N}$ обозначим $\mathfrak{D}_{K_M}(K_{-N})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично,
$\mathfrak{D}_{K_{-N}^{\perp}}(K_M{}^{\perp})$ есть множество функций , постоянных на смежных классах по подгруппе $K_{-N}^{\perp}$ с носителем $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_M^{\perp}$.

Определение. Пусть T — дерево, ориентированное к корню на множестве вершин $GF(p^s)$. Дерево T назовем *N-валидным*, если:

(а) вершины дерева есть элементы $\bar{\alpha} \in GF(p^s)$;

(б) корень дерева T есть $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$;

(в) для любых $j = 0, 1, ..., N-1$ множество T_j вершин j-го уровня есть множество $\{\mathbf{0}\}$;

(г) любой путь $(\bar{\alpha}_k \leftarrow \bar{\alpha}_{k+1} \leftarrow \cdots \leftarrow \bar{\alpha}_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве T ровно 1 раз.

По N-валидному дереву T построим граф Γ следующим образом. Каждую вершину $\bar{\alpha}_{-n}$ уровня больше чем $N-1$ соединим с вершиной $\bar{\beta}_{-n+1}$ низшего уровня, для которой $\bar{\alpha}_{-n+j} = \bar{\beta}_{-n+j}$, $\overline{j = 1, N-1}$. Получим граф, в котором путь $\bar{\alpha}_{-n} \to ... \to \bar{\alpha}_{-n+N-1}$ присутствует несколько раз, но не более N. Обозначим $\{\alpha^*_{-n+N}\}$ совокупность вершин графа Γ, следующих за $\bar{\alpha}_{-n+N-1}$. Выбираем комплексные числа $\lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0}$ так, чтобы
(а$\lambda_{0,0,...,0} = 1$, (б)$\lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0} = 0$ for $\bar{\alpha}_0 \notin \{\bar{\alpha}^*_0\}$,
(с)$\sum_{\bar{\alpha}_0 \in \{\bar{\alpha}^*_0\}} |\lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0}|^2 > 0$. Определяем маску m_0 on $K_1^\perp$ равенствами

$$m_0(K^\perp_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\overline{\alpha}_{-N+1}}...\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0}) = \lambda_{\bar{\alpha}_{-N},\bar{\alpha}_{-N+1},...,\bar{\alpha}_{-1},\bar{\alpha}_0}$$

периодически продолжаем ее на X и определяем масштабирующую функцию $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k})$. В этом случае скажем, что функция φ порождается деревом T. Множество функций, порожденных N-валидными деревьями обозначим через Φ. Таким ообразом, $\varphi \in \Phi$ тогда и только тогда, когда существует N-валидное дерево T, порождающее φ.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и m_0 соответствующая маска.*

(а) система сдвигов $\varphi(x \dot{-} h)_{h \in H_0}$ ортонормирована т. и т. т. когда для любых $\bar{\alpha}_{-N}, \bar{\alpha}_{-N+1}, \ldots, \bar{\alpha}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\sum_{\overline{\alpha}_0 \in GF(p^s)} |m_0(K^\perp_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}...\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0})|^2 = 1,$$

(б) система сдвигов $\varphi(x \dot{-} h)_{h \in H_0}$ есть система Рисса т. и т. т. когда существует $A \geq 1$ такое, что для любых $\bar{\alpha}_{-N}, \bar{\alpha}_{-N+1}, \ldots, \bar{\alpha}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\frac{1}{A} \leq \sum_{\overline{\alpha}_0 \in GF(p^s)} |m_0(K^\perp_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}...\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_{-1}}\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0})|^2 \leq A.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Jiang Huikun., Li Dengfeng, Jin Ning* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004.№ 294. P. 523–532.

УДК 517.521

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПО СОБОЛЕВУ И ПОРОЖДЕННОЙ СИСТЕМОЙ УОЛША[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, Россия)
rasuldev@gmail.com

Получены оценки скорости равномерного приближения функций из пространств Соболева частичными суммами рядов Фурье по системе функций, ортогональной по Соболеву и порожденной системой Уолша.

Ключевые слова: скалярное произведение типа Соболева, система Уолша, аппроксимативные свойства, пространство Соболева, ряд Фурье.

APPROXIMATION PROPERTIES OF FOURIER SERIES IN A SOBOLEV ORTHOGONAL SYSTEM, GENERATED BY WALSH SYSTEM[1]

M. G. Magomed-Kasumov (Makhachkala, Russia)
rasuldev@gmail.com

Uniform convergence rate estimation of Fourier series in a Sobolev orthogonal system, generated by Walsh system, to functions from Sobolev spaces are obtained.

Keywords: Sobolev orthogonality, Walsh system, approximation properties, Sobolev space, Fourier series.

Введение

Пусть L^p пространство измеримых на $[0,1]$ функций, таких что $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$. Через $W^r_{L^p}$ обозначим пространство заданных на отрезке $[0,1]$ непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз функций $f = f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L^p$. В пространстве $W^r_{L^2}$ определим скалярное произведение соболевского типа

$$\langle f, g\rangle = \sum_{s=0}^{r-1} f^{(s)}(0)g^{(s)}(0) + \int_0^1 f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)dt, \qquad (1)$$

которое превращает $W^r_{L^2}$ в гильбертово пространство.

Обозначим через $\mathfrak{W} = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ систему функций Уолша в нумерации Пэли [1, с. 10]. Введем в рассмотрение новую систему функций $\mathfrak{W}_r$, $r \geq 1$, порожденную системой функций Уолша $\mathfrak{W}$ ($x \in [0,1]$):

$$w_{r,k}(x) = \frac{x^k}{k!}, \quad 0 \leq k \leq r-1, \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00477 мол_а).
[1]The article is done with the financial support of RFFI (project № 18-31-00477).

$$w_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^x (x-t)^{r-1} w_{k-r}(t)dt, \quad k \geq r. \tag{3}$$

Отметим, что $\mathfrak{W}_r \subset W^r_{L^1}$ при любом r.

Метод построения систем функций, ортогональных относительно скалярного произведения вида (1) и порожденных классическими ортогональными системами с помощью формул вида (2), (3), был предложен в работах И.И. Шарапудинова (см., например, [2]). На данный момент в той или иной степени исследованы алгебраические, асимптотические и аппроксимативные свойства соболевских систем, порожденных такими классическими ортогональными системами, как система функций Хаара [2] и Уолша [3], система полиномов Чебышева [4], Лежандра, Якоби [5], Лагерра [6], система полиномов Чебышева дискретной переменной [7], система полиномов Мейкснера [8, 9] и др.

Из общих результатов, полученных в [2], вытекает, что система функций $\mathfrak{W}_r$ полна в $W^r_{L^2}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения (1). Поэтому для функций $f \in W^r_{L^2}$ можно рассматривать ряд Фурье по этой системе. Частичные суммы порядка n этих рядов будем обозначать через $S_{r,n}(f,x)$:

$$S_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x).$$

Можно показать, что частичная сумма $S_{r,n}(f,x)$ представима следующим образом:

$$S_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n-1} c_{r,k}(f) w_{r,k}(x), \quad n > r,$$

где $c_{r,k} = \int_0^1 f^{(r)}(t) w_{k-r}(t)dt$.

В [2] было показано, что ряды Фурье по системам вида $\mathfrak{W}_r$ в общем случае равномерно сходятся к функциям из $W^r_{L^2}$. Нетрудно заметить, что указанные ряды Фурье можно определить и для функций $f \in W^r_{L^p}$, $p \geq 1$. В связи с этим возникают вопросы о сходимости (равномерной или поточечной) рядов Фурье по системам вида $\mathfrak{W}_r$ к функциям из пространств Соболева $W^r_{L^p}$ при различных $p \geq 1$. Для некоторых конкретных систем эти вопросы решены в некотором смысле окончательно. В частности, в [3] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Для любой функции $f \in W^r_{L^1}$, $r = 1, 2, \ldots$, ряд Фурье этой функции по системе $\mathfrak{W}_r$ равномерно на $[0,1]$ сходится к f.*

Целью данной работы является исследование скорости сходимости рядов Фурье по системе $\mathfrak{W}_r$ к функциям $f \in W^r_{L^1}$.

Основные результаты

Как известно, функции Уолша вполне естественным образом можно определить на группе, элементами которой являются последовательности нулей и единиц, с операцией покоординатного сложения по модулю 2. С помощью этой операции в теории рядов Уолша посредством специальных отображений вводится новое расстояние $\rho^*(t,x)$ на отрезке $[0,1]$, обладающее некоторыми преимуществами над стандартным расстоянием $\rho(t,x) = |t-x|$ [1, с. 20], и новый модуль непрерывности [1, с. 49]

$$\overset{*}{\omega}(\delta, f) = \sup_{\rho^*(t,x)<\delta} |f(t) - f(x)|, \quad t, x \in [0,1).$$

Теорема 1. *Для $f \in W^r_{L^1}$ при $n = 2^k + i$, $1 \le i \le 2^k$, $r \ge 1$, справедлива оценка*

$$|f^{(\nu)}(x) - S^{(\nu)}_{r,r+n}(f,x)| \le \frac{x^{r-\nu}}{(r-\nu)!} \overset{*}{w}(\frac{1}{2^k}, f^{(r)})(2 + \frac{1}{2}L_n), \quad 0 \le \nu \le r-1,$$

где L_n константы Лебега для системы Уолша.

Теорема 2. *Для $f \in W^1_{L^1}$ при $n = 2^k + i$, $1 \le i \le 2^k$, имеет место оценка*

$$|f(x) - S_{1,1+n}(f,x)| \le \frac{5}{2}\omega_1(\frac{1}{2^k}, f'),$$

где $\omega_1(\delta, g) = \sup_{0\le h\le\delta} \int_0^1 |g(x+h) - g(x)|dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 344 с.

[2] *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, № 1. С. 225–258.

[3] *Магомед-Касумов М. Г.* Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 4. С. 545–552.

[4] *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г., Магомедов С. Р.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышева первого рода // Дагестанские электронные математические известия. 2015. Т. 4. С. 1–14.

[5] *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 611–629.

[6] *Шарапудинов И. И.* Специальные ряды по полиномам Лагерра и их аппроксимативные свойства // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 440–467.

[7] *Шарапудинов И. И., Шарапудинов Т. И.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Чебышева, ортогональными на сетке // Изв. вузов. Матем. 2017. Т. 61, № 8. С. 67–79.

[8] *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д.* Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321.

[9] *Гаджимирзаев Р. М.* Ряды Фурье по полиномам Мейкснера, ортогональным по Соболеву // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 388–395.

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. Н. Малютина, А. В. Новик (Томск, Россия)
nmd@math.tsu.ru

В этой статье мы рассмотрим экстремальные свойства отображения с s-усредненной характеристикой. Вариационный метод разработан и успешно применяется в теории плоских квазиконформных отображений для решения экстремальных задач. Мы применяем этот классический метод для решения экстремальных задач в классе отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: пространственный, отображение, негомеоморфный, геометрический, усредненный, характеристика, искажение, модуль семейства кривых.

DIFFERENTIAL PROPERTIES OF MAPS WITH S-AVERAGED CHARACTERISTIC

A. N. Malutina, A. V. Novik (Tomsk, Russia)
nmd@math.tsu.ru

In this article we will discuss the extremal properties of mappings with s-averaged characteristic. The variational method is developed and successfully applied in the theory of plane quasi-conformal maps for solving extreme problems. We apply this classical method to solve extreme problems in the class of maps with s-averaged characteristic.

Keywords: spatial, mapping, non-homomorphic, geometric, averaged, characteristic, distortion, modulus of a family of curves.

Пусть $D \subset R^n$-область и $f : D \to R^n$, $f \in W^1_{n,loc}$ — отображение области D, $n \geq 3$. Обозначим так же как и в [1] якобиан $(Jf)_x = def'(x)$, а также характеристики:

— внутренняя дилатация отображения f в точке x $K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l^n(f,x)}$, где

$$l(x,f) = l(f'(x)) = min_{|h|=1}|f'(x)h|; \tag{1}$$

— внешняя дилатация отображения f в точке x $K_O(x,f) = \frac{L^n(f,x)}{|J(x,f)|}$, где

$$L(x,f) = |f'(x)| = max_{|h|=1}|f'(x)h|. \tag{2}$$

При этом справедливы оценки (см., например, [1]) и неравенства, связывающие характеристики между собой

$$K_I(x,f) \leq K_O^{n-1}(x,f), \tag{3}$$

$$K_O(x,f) \leq n^{\frac{n}{2}}\lambda(x,f) \leq n^{\frac{n}{2}}K_O(x,f) \leq n^{\frac{n}{2}}K_I^{n-1}(x,f). \tag{4}$$

Определение 1. *[2] Отображение $f : D \to R^n$ обладает N (N^{-1})-свойством (Лузина),если из условия $\nu(E) = 0$ следует, что $\nu(f(E) = 0$ ($\nu(f^{-1}(E) = 0$). Назовем гомеоморфизм f области D на область D'*

отображением класса $\widetilde{W}^1_{n,loc}(D')$, если $f \in W^1_{n,loc}(D)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(D')$, и обладает N и N^{-1}-свойствами.

Перейдем теперь к определению отображения с s-усредненной характеристикой.

Определение 2. Отображение $f : D \to R^n$ называется *отображением с $K_{O,S}$ усредненной характеристикой* (и принадлежит классу $K_{O,s}(D, D^*)$ (или $K^*_{O,s}(D, D^*)$) , если f — непрерывное, открытое, изолированное и

1)$f \in W^1_{n,loc}(D)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(D')$;

2) существует постоянная $K_{O,S} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство $K_{O,S}(f) = (\int_D K^s_O(x, f)d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \leq K_{O,S}$.

Аналогично определяются отображения с $K^*_{O,S}$, $K_{I,S}$, $K^*_{I,S}$ усредненной характеристикой [3].

Назовем локальный гомеоморфизм $f : D \to R^n$ отображением класса $\widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$. Пусть f — отображение с s-усредненной характеристикой, $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, $U \subset D$ — нормальная область (т. е. $f(\partial U) = \partial f(U)$,$x \in U$, $y \in f(U) \setminus f(B_f \cap U)$,$f^{-1}(y) = \{x_j\}$. Тогда существуют $V_j = U(x_j, f, r)$ — окрестности точек x_j, такие, что $f_j = f|_{V_j}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассматривать отображения $h_j : B^n(y, r)) \to U$, причем $f \circ h_j$ тождественное отображение. Если $h_j \in W^1_{n,loc}(B^n(y, r)$ и f — отображение с s-усредненной характеристикой, то по лемме 1 и [4] существует такое r_0, что $h_j = f^{-1}_j$ — квазиконформное в среднем отображение в шаре $B^n(y, r)$.

Если для любого $x \in D$ существует U-окрестность точки $x \in D$ такая, что $f|_U \in \widetilde{W}^1_n(U)$.

Известно [1, 4], что если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, то для любой точки $x \in U$ существует число $r_0(x)$, такое что окрестность $U(x, f, r)$ нормальна при $r \leq r_0(x)$. Обозначим через $i(x, f)$ верхнюю грань числа прообразов точек $y' \in B^n(y, r)$ в $U(x, f, r)$ при $r < r_0(x)$. Если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$ то $i(x, f)$ не зависит от r. Число $i(x, f)$ мы назовем кратностью ветвления в точке .

Пусть $V \subset U$ — нормальная область, $y \in f(V), \{x_k\} = f^{-1}(y) \cap V$. Тогда функция $i(y, f) = i(V, f) = \sum_k i(x_k, f)$ постоянна в $f(V)$, если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$. Все указанные свойства K —квазиконформных отображений можно найти в [5]. Множество B_f точек U, где f не является локальным гомеоморфизмом, называется множеством точек ветвления f.

Для негомеоморфных отображений мы построили обратное отображение f^{-1}_i такое, что $f \circ f^{-1}_i$ отображение и f, f^{-1}_i гомеоморфизмы. Пусть f — отображение с s-усредненной характеристикой область $V \subset U$ — нормальна и $f(V) = V^*$. Определим отображение $g_v : V^* \to R^n$ следующим образом: пусть $y \in V^*$, $f_i^{-1}(y) \cap V = \{x_i\}$, тогда $g_v(y) = \frac{1}{m}\sum_i i(x_i,f)x_i$, где $m = \sum i(x_i,f) = i(V,f)$.

Для построенного отображение $g_v(y) \in ACL^n(v^*)$ докажем сначала непрерывность отображения. Очевидно, что g_v непрерывно на множестве $V^* \setminus f(B_f \cap V)$. Возьмем точку $y \in f(B_f)$ и последовательность точек $\{y_i\}$, обладающую следующими свойствами: $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$ и $y_i \in V^* \setminus f(B_f \cap V)$. Пусть $f_i^{-1}(y) = \{x_i\}$,$f_i^{-1}(y_j) = \{x_j^k\}$ и $V_i = U(x_i,f,r)$ — непересекающиеся нормальные окрестности точек x_i. В каждой окрестности V_i находится $m_i = i(x_i,f)$ точек из множества $\{x_j^k\}$ и очевидно, что $\lim\limits_{j\to\infty}\sum_{k,x_i^k\in V_i} x_j^k = m_i x_i$. Поэтому $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m} x_j^k = \frac{1}{m}\sum i(x_i,f)x_i$. Так как $f(B_f)$ нигде не плотно, то отсюда следует, что g_v непрерывно.

Перейдем к доказательству абсолютной непрерывности g_v . В дальнейшем мы будем всюду писать В вместо B_f . Пусть $I^* \subset V^*$-отрезок, параллельный одной из осей координат. Мы можем считать отрезок I^* разрешимым и рассмотрим семейство кривых $\{\gamma_i\}$, $1 \le i \le m$, такое, что $f \circ \gamma_i = I^*$ для всех $i = 1,\ldots,m$, $\gamma_i \cap \gamma_j \subset B$ и $f_i^{-1}(I^*) = \cup_{i=1}^m \gamma_i$. По лемме 7.10 из [9] для почти всех таких отрезков I^* кривые $\gamma_i : I^* \to R^n$ абсолютно непрерывны. Так как в каждой точке $x \in f_i^{-1}(I^*)$ пересекаются ровно в i(x,f) кривых γ_i , то $g_v|_{I^*} = \frac{1}{m}\sum \gamma_i$ и, следовательно, $g_v \in ACL(V^*)$.

Пусть теперь $y \in V^* \setminus f(B \cap V)$ и $f_i^{-1}(y) = \{x_i\}$. Существуют окрестности $V_i = U(x_i,f,r)$ точек x_i такие, что $f|_{V_i}$ — гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображения $f_i^{-1} : B^n(y,r) \to V$, причем $f \circ f_i^{-1}$ — тождественное отображение. Покажем, что отображения f_i^{-1} - то же отображения с s-усредненной характеристикой. В самом деле $f_i^{-1} \in W^1_{n,loc}(D \setminus B_f)$. Откуда следует, что

$$\int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} |\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y_k}|^n d\sigma_y \le \int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} K_O^s(y,f_i^{-1})|J(y,f_i^{-1})|d\sigma_y \le$$

$$\le \int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} K_O^{s\setminus(n-1)}(y,f_i^{-1})|J(y,f_i^{-1})|d\sigma_y \le$$

$$\le \int\limits_{v^*\setminus f(B_f\cap V)} K_I^s(y,f_i^{-1})|J(y,f_i^{-1})|d\sigma_y \le \infty.$$

Итак мы доказали что, отображение f_i^{-1} есть отображение с s-усредненной характеристикой, принадлежит классу $f_i^{-1} \in W^1_{n,loc}(D \setminus B_f)$.

Кроме того, поскольку ACL^n -гомеоморфизмы обладают N и N^{-1}-свойством (см. определение1) или [2], то f и f_i^{-1} невырожденно дифференцируемы в своих областях задания [1, 4] и поэтому $K_i(y, f_i^{-1}) = K_O(x, f)$ для почти всех $y = f(x)$. Производя во втором интеграле замену переменных [7], получим

$$\int\limits_V K_O^{s'}(x, f) d\sigma_x \leq \int\limits_{V^* \setminus f(B_f \cap V)} K_I^s(y, f) |J(y, f_i^{-1})| d\sigma_y < \infty$$

.

Определение 3. Отображение $f : D \to D^*$ в некотором классе $f \in K(D, D^*) \subset K_{O,s}(D, D^*)$ (или $K_{O,s}^*(D, D^*)$) называется *экстремальным в классе* $K(D, D^*)$, если $K_{O,s}(f) \leq K_{O,s}(g)$ (или $K_{O,s}^*(f) \leq K_{O,s}^*(g)$) для всех отображений характеристики $K_{O,s}(x, g)$ от отображения $g \in K(D, D^*)$.

Теорема 1 [2]. *Пусть теперь* $s \leq \frac{2}{n-2}$ *и отображение с s-усредненной характеристикой* $f : D \to D^*$ *есть экстремальное отображение в классе* $K_{I,s}(D, D^*)$. *Тогда* $f \in W_2^2(D')$ *для любой подобласти* D' *такой, что* $J(x, f) > 0$ *на замыкании* $\bar{D}'$ *и* $\bar{D}' \subset D$.
Доказательство теоремы следует из теоремы 2 и [8, x II, лемма 4.6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск : Наука, 1983.

[2] *Севостьянов Е. А.* Об одном модульном неравенстве для кривых, вращающихся отображением вокруг себя // Тр. ИПММ НАН Украины. 2013. Т. 27. С. 209–216.

[3] *Malyutina A. N., Elizarova M. A.* Otobrazheniya s s-usrednennoj kharakteristikoj. Opredelenie i svoystva (Mappings with s-averaged characteristic. De nition and properties). LAMBERT Acad. Publ., 2013. 121 p.

[4] *Гольдштейн В. М., Водопьянов С. И.* Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 5. С. 1040–1042.

[5] *Vaisala J.* Lectures on n-dimentional quasiconformal mappings. Lectures and Notes in Math. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag, 1971. 144 p.

[6] *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Матем. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.

[7] *Rado T., Reichelderfer R. V.* Continuous transformation in analisis. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1955. 442 p.

[8] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973. 576 с.

[9] *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 1969. № 448. P. 1–40.

UDC 517.9

A UNIQUENESS THEOREM OF THE INVERSE PROBLEM FOR A CLASS THE STURM– LIOUVILLE PROBLEM

Kh. R. Mamedov, U. Demirbilek (Mersin, TURKEY)
hanlar@mersin.edu.tr, ulviyedemirbilek@gmail.com

In the present paper , we study inverse problem of scattering theory for Sturm-Liouville operator on the half-axis $[0,\infty)$ with spectral paramater in the boundary condition for second order of differantial equation .We define the kernel function and determine the scattering data uniquely .

Keywords: Sturm–Liouville operator, scattering function, scattering data, Gelfand-Levitan-Marchenko main equation..

Introduction

We consider inverse problem of scattering theory for the Sturm–Liouville equation

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

on the semi-axis $[0,\infty)$ containing a spectral parameter in the boundary condition

$$y'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) = 0. \tag{2}$$

Here λ is a spectral parameter, α_i $(i = 0, 1, 2.)$ are real numbers that satisfy certain conditions. $q(x)$ is a real valued function satisfying the condition

$$\int_0^\infty (1 + x)\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{3}$$

It is well known (see [1]) that for all λ from the half-line Eq. (1) has the solution

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt. \tag{4}$$

The kernel $K(x,t)$ satisfies the inequality

$$K(x,t) \le \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2})\exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1(\frac{x+t}{2})\right\}. \tag{5}$$

The inverse problem of scattering data without any spectral parameter in boundary condition was solved in $[1,2]$. The many spectral properties of the boundary value problems were investigated with different methods by the many authors in [1–7].

In this work we prove the uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory on the half line for the boundary — value problem (1)–(2) by using defined the sacttering data of the problem and its properties.

With the above preliminaries provided, we have the following lemmas and theorems.

Lemma 1. *For all $\lambda \neq 0$, the identity is valid*

$$\frac{2i\lambda w(x,\lambda)}{E(\lambda)} = e(x,-\lambda) - S(\lambda)e(x,\lambda), \tag{6}$$

where

$$S(\lambda) = \frac{E_1(\lambda)}{E(\lambda)}, \tag{7}$$

$$E(\lambda) = e'(0,\lambda) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,\lambda),$$

$$E_1(\lambda) = e'(0,-\lambda) + (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0,-\lambda)$$

and

$$|S(\lambda)| = 1.$$

The scattering function $S(\lambda)$ is meromorphic in half plane $Im\lambda > 0$, with poles at the zeros of the function $E(\lambda)$. Moreover, the function $E(\lambda)$ is analytic in upper half plane. The function $E(\lambda)$ may have only a finite number of zeros in the half plane $Im\lambda > 0$.

We shall obtain the main equation that contributes to construct the potential $q(x)$ in the Eq. (1). To obtain the main equation, we substituting the relation (4) into the relation (6). Thus, the following results are valid:

Theorem 1. *For each fixed $\neq 0$ the kernel $K(x,t)$ satisfies the following equation:*

$$F(x+y) + K(x+y) + \int\limits_x^\infty K(x,t)F(t+y)dt = 0, \quad x < y < \infty, \tag{8}$$

Proof. From [3, Theorem 3.1.] it is clear that the main equation can be constructed.

Thus, we have the following theorem.

Theorem 2. For each $x \geq 0$, the kernel $(K(x,t))$ to the solution (4) satisfy the main equation (8).

Uniqueness

Lemma 2. *Assume that the function $f_x(t)$ is summable on the half line for $t \geq x$*

$$f_x(t) + \int_x^\infty f_x(u)F(u+t)du = 0, \tag{9}$$

and there is a solution for $f_x(t) \equiv 0$, $t \geq x$.

Proof. It can be easily seen from [3, Lemma 4.1], the function $f_x(t)$ be solution of the integral equation, where $K(x,t)$ satisfies the equation (8). Then, the homogeneous equation (9) has only trival solution i.e. $f_x(t) \equiv 0$ for $t \geq x$.

Theorem 3. *The scattering data of the boundary value problem* $(1)-(3)$ *determine uniquely.*

Proof. Given scattering function $S(\lambda)$ for $\lambda \neq 0$ and the scattering data can be determined according to Eq. (8). By virtue of the function $F(x)$, the main equation is constructed and it sufficies to find only scattering data of the boundary value problem (1)–(3). Given the scattering data, we can use formulas as follows:

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_x^\infty [1 - S(\lambda)]e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) + F_s(x),$$

and

$$p_j(x) = e^{-i\lambda_j x} f_j(x), \quad j = 1, 2, ..., n.$$

By Lemma 2, the main equation has a unique solution. Futhermore, we find the function $K(x,t)$. It follows from, appliying (5) we have

$$q(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{10}$$

Thus, the potential $q(x)$ can uniquely be found from (10).The theorem is proved.

REFERENCES

[1] *Marchenko V. A.* Sturm – Liouville Operators and Their Applications. Kiev : Naukova Dumka, 1977 (in Russian).

[2] *Levitan B. M.* Inverse Sturm – Liouville Problems. Utrecht : VNU Science Press, 1987.

[3] *Mamedov Kh. R.* Uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory for the Sturm – Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition // Math. Notes. 2003. Vol. 74, № 1–2. P. 136–140.

[4] *Mamedov Kh. R.* On The Inverse Problem For Sturm – Liouville Operator With A Nonlinear Spectral Parameter In The Boundary Condition // J. Korean Math. Soc. 2009. Vol. 46, № 6. P. 1243–1254.

[5] *Yurko V. A.* An inverse problem for pencil of differantial operator on the half line // Sbornik Math. 2000. Vol. 191, № 9–10. P. 1561–1586.

[6] *Yurko V. A.* Reconstruction of the pencils of differantial operators on the half line // Mat. Zametki. 2000, Vol. 67, № 2. P. 316–320; Math. Notes. 2000. Vol. 67, № 1–2. P. 261–265..

[7] *Yang Y., Wei G.* Inverse Scattering Problems for Sturm Liouville Operators Spectral Parameter Dependent on Boundary Condition // Math. Notes. 2018. Vol. 103, № 1. P. 65–74.

УДК 517.51+517.53

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ НА ПРЯМОЙ

Т. С. Мардвилко (Минск, Беларусь)
mardvilko@mail.ru

В данной работе описано поведение квазинормы производных произведения Бляшке в пространстве Лебега L_p на прямой. Результаты получены для всех значений параметра $0 < p < +\infty$. Ранее автором были изучены аналогичные вопросы для окружности.

Ключевые слова: произведения Бляшке, неравенства типа Бернштейна, рациональные функции.

DERIVATIVES OF BLASCHKE PRODUCTS ON THE STRAIGHT LINE

T. S. Mardvilko (Minsk, Belarus)
mardvilko@mail.ru

This paper describes the behavior of the seminorm for the derivatives of Blaschke products in the Lebesgue space L_p on a straight line. The results were obtained for all values of the parameter $0 < p < +\infty$. The similar results for the circle were obtained by the author earlier.

Keywords: Blaschke product, Bernstein type inequality, rational functions.

Введение

Ранее автором были получены экстремальные оценки квазинормы производных произведений Бляшке для круга [1,2]. В данном работе рассмотрены аналогичные задачи для прямой. Интересным является тот факт, что поведение квазинормы производных произведения Бляшке для круга в общем случае, отличается от поведения аналогичной квазинормы для прямой.

Через $L_p, 0 < p < \infty$, будем обозначать пространство Лебега измеримых комплексных функций на $\mathbb{R}$ с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx\right)^{1/p}, \; 0 < p < \infty.$$

Обозначим b_n произведение Бляшке порядка n с нулями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, лежащих в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}.$$

Введем также обозначение

$$\lambda(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2})}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $n, s \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty \text{ при } 0 < p \le \frac{1}{s+1},$$

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} < +\infty \text{ при } \frac{1}{s+1} < p < +\infty$$

при любых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда*

$$\sup_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} = s!\lambda^s(1/s)n^s.$$

Теорема 3. *Пусть $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < +\infty, p \ne \frac{1}{s}$. Тогда*

$$\sup_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда*

$$\inf_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} > \frac{\pi^s(s-1)((s-2)!)^s}{16^s(s!)^{s-1}}n^s.$$

Теорема 5. *Пусть $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < +\infty, p \ne \frac{1}{s}$. Тогда*

$$\inf_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Подробнее с приведенными результатами можно ознакомиться в работах [3, 4].

Заключение

Задача об исследовании поведения квазинормы производных произведения Бляшке возникла в результате исследования постоянной в неравенстве типа Бернштейна для высших производных рациональных функций, полученном А.А. Пекарским [5]. Упомянутое неравенство типа

Бернштейна в свою очередь применяется для получения обратных теорем рациональной аппроксимации [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Mardvilko T. S.* On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions // East journal on approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 31–42.

[2] *Мардвилко Т. С.* Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 1. С. 10–16.

[3] *Мардвилко Т. С.* О значении постоянных в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций на прямой // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Серия 2. 2009. № 3 (27). С. 18–25.

[4] *Мардвилко Т. С.* Поведение L_p-квазинормы производных произведений Бляшке на прямой // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 4 (41). С. 1–4.

[5] *Пекарский А. А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166), № 4 (8). С. 571–588.

[6] *Lorenz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.* Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin : Springer-Verlag, 1996. 651 p.

УДК 517.53

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОБЛАСТЯХ С АСИМПТОТИЧЕСКИ КОНФОРМНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Н. М. Махина (Брянск, Россия)
mahinanm@yandex.ru

В данной работе строится ограниченный интегральный оператор, отображающий весовое пространство измеримых функций на соответствующее пространство аналитических функций, в случае, если данные пространства рассматриваются на произведениях областей с асимптотически конформными границами.

Ключевые слова: асимптотически конформная кривая, конформное отображение, проектор, произведение областей.

ON THE BOUNDEDNESS OF SOME INTEGRAL OPERATORS IN DOMAINS WITH ASYMPTOTICALLY CONFORMAL BOUNDARIES

N. M. Makhina (Bryansk, Russia)
mahinanm@yandex.ru

In this paper we construct a bounded integral operator, mapping the weight space of measurable functions on the corresponding space of analytic functions, if these spaces are considered on the products of domains with asymptotically conformal boundaries.

Keywords: asymptotically conformal curve, conformal mapping, projector, product of domains.

Пусть $E_p(G)$ — класс Смирнова в области G.

Обозначим через $L^p(G)$ — класс измеримых по Лебегу в области G функций, для которых

$$\|f\|^p_{L^p(G)} = \int\limits_G |f(z)|^p \, dm_2(z) < +\infty; 0 < p < +\infty,$$

где $dm_2(z)$ — плоская мера Лебега.

Из классической теоремы М. Рисса известно, что интеграл типа Коши по границе ∂G отображает пространство $L^p(G)$ на $E_p(G)$ при всех $1 < p \leq +\infty$. В то же время, исходя из результатов А. Н. Колмогорова, такой интегральный оператор не отображает пространство $L^1(G)$ на $E_1(G)$ даже в том случае, когда ∂G представляет собой единичную окружность. Дж. Ньюмен показал, что такого интегрального оператора вообще не существует. Однако, в пространствах Бергмана существует ограниченный проектор по плоской мере Лебега из $L^1(G)$ на соответствующее пространство Бергмана. Эти результаты были получены Ф. А. Шамояном в случае гладких контуров при всех $0 < p \leq 1$. А при $1 < p \leq +\infty$ такие результаты можно вывести из результатов М. Рисса.

Возможности распространения данных результатов на области с более общими границами рассматривались в работах отечественных и зарубежных авторов (см., подробно, [1] и литературу там).

Напомним, что класс (A) есть класс асимптотически конформных кривых Γ на комплексной плоскости, если справедливо

$$\mu(\delta) = \sup_{\substack{w_1, w_2 \in \partial G \\ |w_1 - w_2| \le \delta}} \sup_{w \in \Gamma'} \left(\frac{|w_1 - w| + |w_2 - w|}{|w_2 - w_1|} - 1 \right) \to 0, \delta \to 0,$$

где Γ' – кратчайшая дуга на границе $\Gamma = \partial G$, соединяющая точки w_1, w_2 (см. [2]). Свойства областей с асимптотически конформными границами, применяемые при доказательстве полученных результатов, изучались, в частности, в работах автора [3], [4].

Пространства функций на произведениях областей рассматривались, например, в работе [5].

Пусть G_j — некоторая односвязная область на комплексной плоскости, граница которой принадлежит классу (A) . Рассмотрим $\{G_j\}_{j=1}^m$ — множество таких областей и $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Обозначим $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ — множество измеримых в $\tilde{G}$ функций таких, что

$$\|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} = \int\limits_{\tilde{G}} |f(w)|^p \, d^{\vec{\beta}}(w, \partial G) dm_{2m}(w) =$$

$$= \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} |f(w_1, ..., w_m)|^p \prod_{j=1}^{m} d^{\beta_j}(w_j, \partial G_j) dm_2(w_j) < +\infty,$$

где $0 < p < +\infty, \vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_m), \beta_j > -1, j = \overline{1, m}; dm_{2m} = dm_2 ... dm_2$ — мера Лебега на $\tilde{G}$. Пусть также $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$.

В работе [1] доказан результат, касающийся существования ограниченного проектора из L^p-весовых пространств в соответствующие простарнства аналитических функций. В качестве дальнейшего распространения данного результата нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть* $\{G_j\}_{j=1}^m$ — *некоторое множество односвязных областей на комплексной плоскости с границами класса* (A), $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Пусть также $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ — *множество функций, конформно отображающих единичный круг* S *на* G_j, $\varphi_j(0) = w_0^j$, $w_0^j \in G_j$, $\varphi_j'(0) > 0$, $\psi_j = \varphi_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$.

Тогда интегральный оператор вида

$$P_{\vec{\eta}}(f)(\vec{w}) \stackrel{def}{=} F(\vec{w}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\eta_j + 1}{\pi} \int\limits_{G_1} \ldots \int\limits_{G_m} f(\mu_1, \ldots, \mu_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{\left(1 - |\psi_j(\mu_j)|^2\right)^{\eta_j} \left|\psi_j'(\mu_j)\right|^2}{\left(1 - \overline{\psi_j(\mu_j)}\psi_j(w_j)\right)^{\eta_j + 2}} dm_2(\mu_1) \ldots dm_2(\mu_n)$$

непрерывно отображает $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ *на* $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$, $1 < p < +\infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1,m}$, *при всех* $\eta > \eta_0$, $\eta_0 = \eta_0(\vec{\beta})$, $j = \overline{1,m}$; *и существует такая положительная постоянная* $c = c(\vec{\beta}, p)$ *что справедлива оценка*

$$\|F\|_{A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} \leq c \, \|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Tkachenko N. M., Shamoyan F. A.* The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2009. Vol. 5(2). P. 192–210.

[2] *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М. : Мир, 1969. 133 с.

[3] *Махина Н. М.* Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости // Вестн. МГОУ. 2017. Т. 2. С. 16–22.

[4] *Махина Н. М.* Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей // Вестн. Омского ГУ. 2018. Т. 23, № 2. С. 47–51.

[5] *Шамоян Р. Ф., Максаков С. П.* On some new estimates for a gradient of a function in product domains and related results // Проблемы физики, математики и техники. 2017. Т. 3(32). С. 69–74.

УДК 517.9

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Е. В. Назарова (Москва, Россия)
nazarovi@inbox.ru

В статье рассматривается интегральный оператор, ядро которого имеет разрывы первого рода на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. Получен аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: теорема Жордана – Дирихле, резольвента, собственные функции, инволюция.

AN ANALOGUE OF THE JORDAN – DIRICHLET THEOREM FOR A CLASS OF INTEGRAL OPERATORS WITH INVOLUTION

E. V. Nazarova (Moscow, Russia)
nazarovi@inbox.ru

In the paper, the integral operator with kernel having discontinuites of the first kind at the lines $t = x$ and $t = 1 - x$ is studied. An analogue of the Jordan – Dirichlet theorem on the convergence of expansions in eigen and associated functions of this operator is obtained.

Keywords: Jordan – Dirichlet theorem, resolvent, eigenfunctions, involution.

Рассматривается интегральный оператор вида

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha \int_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha^2 \neq 1$. На ядро $A(x,t)$ наложены следующие ограничения: $A(x,x) = 1$, $\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} = 0$.

Для разложений по собственным и присоединенным функциям данного оператора устанавливается аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье (см. [1, с. 121–122]).

Интегральный оператор (1) является представителем класса операторов, допускающих разрывы первого рода ядра на линиях $t = x$ и $t = 1-x$, а именно частным случаем оператора, исследуемого в работе [2]. В [3] получена теорема равносходимости разложений произвольной интегрируемой функции по собственным и присоединенным функциям рассматриваемого оператора и разложений линейной комбинации функций $f(x)$ и $f(1-x)$ по обычной тригонометрической системе.

Основной результат (аналог теоремы Жордана–Дирихле)

Теорема. *Пусть ядро оператора A непрерывно дифференцируемо один раз по x и один раз по t при $0 \le t \le x \le 1$, выполняются условия:*

1) $\left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x} = 0$*;*

2) $A(x,x) \equiv 1$*;*

3) $\alpha^2 - 1 \neq 0$.

Тогда для любой функции $f(x) \in \overline{\Delta}_A$, где $\overline{\Delta}_A$ — замыкание по норме $C[0,1]$ области значений оператора A и $f(x) \in V[0,1]$, имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda \right| = 0,$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ — резольвента Фредгольма оператора A, а r таково, что $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r,\ 0 \le \arg\lambda \le 2\pi\} \in S_{\delta_0}$. Здесь S_{δ_0} — область, получающаяся после удаления из λ-плоскости нулей некторой функции вместе с их δ_0-окрестностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961.

[2] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственым функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: https://doi.org/10.4213/sm601

[3] *Назарова Е. В., Халова В. А.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 313–330.DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-313-330

УДК 517.518.126

ОБ АБСОЛЮТНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ИЗМЕРИМЫХ ПО РИМАНУ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

К. М. Нараленков (Москва, Россия)

naralenkov@gmail.com

В настоящей заметке получены дескриптивные, то есть описывающие свойства неопределённых интегралов, необходимые и достаточные условия характеризующие абсолютно интегрируемые по Биркгофу и интегрируемые по Мак-Шейну функции в классе измеримых по Риману интегрируемых по Хенстоку функций.

Ключевые слова: измеримая по Риману функция, ограниченная вариация, AC_* и AC^*_δ функции, интегралы Биркгофа, Мак-Шейна, Хенстока, Петтиса.

ON ABSOLUTE INTEGRABILITY OF RIEMANN-MEASURABLE VECTOR-VALUED FUNCTIONS

K. M. Naralenkov (Moscow, Russia)

naralenkov@gmail.com

In this article we obtain descriptive, that is, describing the properties of the indefinite integrals, necessary and sufficient conditions that characterize absolutely Birkhoff integrable and McShane integrable functions within the Riemann-measurable Henstock integrable function class.

Keywords: Riemann-measurable function, bounded variation, AC_* and AC^*_δ functions, Birkhoff, McShane, Henstock, and Pettis integrals.

Хорошо известно, что для действительнозначных функций интеграл Мак-Шейна есть *абсолютный* интеграл, эквивалентный интегралу Лебега, в то время как интеграл Хенстока, естественным образом расширяющий интеграл Мак-Шейна в смысле риманового определения, является *неабсолютным* и эквивалентен узкому интегралу Данжуа. С дескриптивной точки зрения неопределённые интегралы абсолютно интегрируемых функций являются функциями *ограниченной вариации*, что полностью характеризует их внутри класса неопределённых интегралов Хенстока [1]. Важно отметить, что доказательство данного факта существенно опирается на лемму Сакса–Хенстока в сильной форме, которая уже не верна для любого бесконечномерного пространства значений.

Аналогами интеграла Лебега для векторнозначных функций являются интегралы Биркгофа и Мак-Шейна, базирующиеся на *римановых* суммах, а также, наиболее широкий из классических векторнозначных обобщений интеграла Лебега, интеграл Петтиса, в основе определения которого лежит *барицентрическая* формула. Оказывается, что эти три понятия интеграла эквивалентны в классе *измеримых по Бохнеру* функций, но существенно расходятся для *скалярно измеримых* функций с несепарабельной областью значений. Понятие *измеримости по Риману* естественным образом возникает при изучении векторнозначных обобщений интеграла Римана [2]. Все измеримые по Бохнеру функции измеримы по Риману, однако измеримые по Риману функции могут иметь несепарабельную область значений. Тем не менее, интегралы Биркгофа, Мак-Шейна и Петтиса оказываются эквивалентны в классе функций измеримых по Риману [2], [3].

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a, b]$ соответственно. Если $F : [a, b] \to X$, то $\Delta F(I)$ обозначает *приращение* F на I. Положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Если $(T, \mathscr{T})$ — топологическое пространство, то $\operatorname{dens}(T, \mathscr{T})$ обозначает наименьший кардинал, для которого в $(T, \mathscr{T})$ существует плотное множество такой мощности. Кардинал $\varkappa(\mu)$ определяется наименьший кардинал $\varkappa$ такой, что существует объединение $\varkappa$ множеств нулевой меры Лебега, имеющее положительную внешнюю меру Лебега.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ есть конечный набор $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a, b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a, b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a, b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a, b]$.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a, b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ *$\mathscr{M}$-интегрируема* (*$\mathscr{H}$-интегрируема*) на $[a, b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a, b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a, b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ. Функция f *$\mathscr{M}$-интегрируема* (*$\mathscr{H}$-интегрируема*) на множестве E если функция $f \cdot \chi_E$, где χ_E обозначает *характеристическую функцию* множества E, *$\mathscr{M}$-интегрируема* (*$\mathscr{H}$-интегрируема*) на $[a, b]$.

Разбиением Биркгофа множества E называется не более чем счётный набор $\Pi = \{E_k\}$ попарно не пресекающихся множеств покрывающих E. Пусть Γ и Π суть два разбиения Биркгофа множества E. Разбиение Γ *измельчает* разбиение Π если каждое множество из Γ является подмножеством некоторого множества из Π.

Определение 3. Функция $f : E \to X$ называется *(абсолютно) интегрируемой по Биркгофу* на E, с *(абсолютным) интегралом Биркгофа* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение Биркгофа Π множества E такое, что для каждого разбиения Биркгофа $\Gamma = \{E_k\}$, измельчающего Π, для всех $t_k \in E_k$ ряд $\sum\limits_k f(t_k)\mu(E_k)$ безусловно (абсолютно) сходится и выполняется неравенство

$$\left\| \sum_k f(t_k)\mu(E_k) - w \right\| < \varepsilon.$$

В работе [4] показано, что интеграл Биркгофа эквивалентен $\mathscr{M}$-интегралу.

Определение 4. Функция $f : E \to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Все $\mathscr{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathscr{M}$-интегралу ($\mathscr{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [2].

Определение 5. $F : [a, b] \to X$ есть sVB *функция* на $[a, b]$ если

$$\mathrm{sV}(F, [a, b]) = \sup \sum_{k=1}^{K} \|\Delta F(I_k)\| < \infty,$$

где супремум берется по всем наборам попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$.

Определение 6. $F : [a, b] \to X$ есть AC_* (AC^*_δ) *функция* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ ($\eta > 0$ и измеримый масштаб δ на

E) такое, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{K}\Delta F(I_k)\right\| < \varepsilon$$

выполняется для каждого конечного набора попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ (частичного разбиения Хенстока $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ отрезка $[a, b]$) с условием $\partial I_k \cap E \neq \varnothing$ ($t_k \in \partial I_k \cap E$, $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$) для всех k и $\sum_{k=1}^{K}\mu(I_k) < \eta$.

Теорема 1. *Если $f : [a, b] \to X$ абсолютно интегрируема по Биркгофу на $[a, b]$, то неопределённый интеграл функции f есть sVB функция на $[a, b]$ и*

$$\mathrm{sV}\Big(\int_a^{\cdot} f, [a, b]\Big) \leq \overline{\int_{[a,b]}} \|f\| < \infty.$$

Теорема 2. *Функция $f : E \to X$ абсолютно интегрируема по Биркгофу на E тогда и только тогда, когда f измерима по Риману на E и $\overline{\int_E}\|f\| < \infty$.*

Теорема 3. *Функция $f : [a, b] \to X$ $\mathscr{M}$-интегрируема на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда f $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a, b]$ и неопределённый интеграл функции f есть AC_* функция на $[a, b]$.*

Теорема 4. *Функция $f : E \to X$ $\mathscr{M}$-интегрируема на E тогда и только тогда, когда f измерима по Риману и интегрируема по Петтису на E.*

Следствие 1. *Если функция $f : [a, b] \to X$ $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a, b]$ и неопределённый интеграл функции f есть sVB функция на $[a, b]$, то f $\mathscr{M}$-интегрируема на $[a, b]$. Если дополнительно $\mathrm{dens}(B_{X^*}, w^*) < \varkappa(\mu)$, то f абсолютно интегрируема по Биркгофу на $[a, b]$.*

Теорема 5. *Пусть функция $f : [a, b] \to X$ $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a, b]$ и $F : [a, b] \to X$ есть её неопределённый интеграл. Если F есть AC_* функция на E, то f $\mathscr{M}$-интегрируема на E.*

Теорема 6. *Пусть функция $f : [a, b] \to X$ $\mathscr{H}$-интегрируема на $[a, b]$ и $F : [a, b] \to X$ есть её неопределённый интеграл. Если f $\mathscr{M}$-интегрируема на E, то F есть AC_δ^* функция на E.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bartle R. G.* A modern theory of integration. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 32. Providence : American Mathematical Society, 2001. 458 p.

[2] *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.

[3] *Caponetti D., Marraffa V., Naralenkov K.* On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // Monatsh. Math. 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.

[4] *Солодов А. П.* О границах обобщения интеграла Колмогорова // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272.

УДК 517.5

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА И АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ–ЭРМИТА[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)

semen.nasyrov@yandex.ru

В теории диагональных аппроксимаций Паде–Эрмита важную роль играет приближение многозначных аналитических функций с конечным числом особых точек и нахождение максимальных областей их сходимости. Эти области связаны с так называемым разложением Наттолла компактных римановых поверхностей, индуцированным некоторым абелевым интегралом. А. И. Аптекаревым и Д. Н. Туляковым была рассмотрена задача о разложении Наттолла трехлистного комплексного тора с тремя точками ветвления, которые образуют треугольник, близкий к правильному. С использованием эллиптических функций Вейерштрасса мы исследуем ситуацию в случае произвольного расположения точек.

Ключевые слова: диагональные аппроксимации Паде–Эрмита, компактная риманова поверхность, разложение Наттолла, квадратичный дифференциал, комплексный тор.

WEIERSTRASS ELLIPTIC FUNCTIONS AND PADE-HERMITE APPROXIMATIONS[1]

S. R. Nasyrov (Kazan, Russia)

semen.nasyrov@yandex.ru

In the theory of diagonal Pade–Hermite approximations, approximation of multivalued analytic functions with a finite number of singularities plays an important role as long as finding of maximal domains of their convergence. The domains are connected with the so-called Nuttall decomposition of compact Riemann surfaces induced by some Abelian differential. A. I. Aptekarev and D. N. Tulyakov investigated the problem on the Nuttall decomposition for a complex torus with three branch-points, when the points form a triangle close to a regular one. With the help of the Weierstrass elliptic functions, we study the problem for the case of arbitrary location of the branch-points.

Keywords: diagonal Pade–Hermite approximations, compact Riemann surface, Nuttall decomposition, quadratic differential, complex torus.

Введение

Сначала напомним определение диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде II. Пусть функции f_j, $1 \le j \le m$, голоморфны в окрестности ∞. Их аппроксимациями Эрмита–Паде типа II называются рациональные функции $Q_{nj}(\tau)/P_n(\tau)$, $1 \le j \le m$, такие, что

$$P_n(\tau)f_j(\tau) - Q_{nj}(\tau) = O(\tau^{-(n+1)}),\ \tau \to \infty, \quad 1 \le j \le m,$$

и $\deg P_n \le mn$.

Представляет интерес случай, когда функции f_j могут быть продолжены аналитически из бесконечности по любому пути на плоскости, лежащему вне некоторого компакта $\mathcal{E}$. Актуальным является определение

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Республики Татарстан (проект № 18-41-160003).

[1]The article is done with the financial support of the RFBR and the Government of the Republic of Tatarstan (project No 18-41-160003).

максимальных областей сходимости указанных аппроксимантов к заданной функции.

В случае одной функции эта проблема была исследована Шталем [1, 2], который установил, что такая область является внешностью некоторого компакта, который ограничен ортогональными критическими траекториями квадратичного дифференциала, связанного с функцией Грина внешности этого компакта.

В случае $m \geq 1$ вопрос остается открытым даже в случае, когда множество $\mathcal{E}$ конечно. Наттолл [3] предположил, что асимптотика аппроксимаций Паде–Эрмита связана с $(m+1)$-листной компактной римановой поверхностью S, накрывающей сферу Римана, точки ветвления которой лежат над множеством $\mathcal{E}$. Обозначим через p проектирующее отображение, $p : S \to \overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим абелев интеграл G на S, который регулярен в любой точке S, кроме точек P_0, $P_1, \ldots, P_m$, лежащих над бесконечно удаленной точкой. В точках P_j этот интеграл G имеет асимптотику

$$G(\tau) \sim \begin{cases} m \ln \tau, & \tau \to P_0, \\ -\ln \tau, & \tau \to P_j, \quad 1 \leq j \leq m. \end{cases} \tag{1}$$

Кроме того, все периоды G чисто мнимые. Для каждого $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$ существует ровно $(m+1)$ точка поверхности S, лежащая над ней. Обозначим эти точки через $\tau^{(0)}$, $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)}$. Введем также обозначения $g_j(\tau) := g(\tau^{(j)})$. Понятно, что нумерацию точек $\tau^{(0)}$, $\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(m)}$ можно выбрать так, чтобы $g_0(\tau) \geq g_1(\tau) \geq \ldots \geq g_m(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$. Заметим, что в точках, где значения некоторых из g_j совпадают, такая нумерация определена неоднозначно. Рассмотрим множество точек τ на плоскости, в которых значения $g_j(\tau)$ попарно различны. Тогда для таких τ имеем $g_0(\tau) > g_1(\tau) > \ldots > g_m(\tau)$.

Рассмотрим множества

$$S_j := \{P \in S : P = \tau^{(j)} \text{ для точки } \tau = p(P)\}.$$

Множество S_j назовем j-м листом поверхности S. Отметим, что S получается из листов S_j, $0 \leq j \leq m$, склеиванием вдоль некоторых кусочно-гладких кривых, и проекция граничных кривых ∂S_j листов S_j на сферу Римана также состоит из конечного числа аналитических дуг.

Даже когда $m = 2$, и число точек множества $\mathcal{E}$ невелико, ситуация остается не исследованной. Рассмотрим, например, риманову поверхность функции

$$\omega = \sqrt[3]{(\tau - a_1)(\tau - a_2)(\tau - a_3)} \tag{2}$$

и построим для нее функции g_j, $j = 0,\ 1,\ 2$. В работе А. И. Аптекарева и Д. Н. Тулякова [4] исследована геометрическая структура множества

$$\{\tau \in \mathbb{C} \mid \exists j, k \in \{0, 1, 2\} : j \neq k \text{ и } g_j(\tau) = g_k(\tau)\}$$

в случае, когда треугольник с вершинами a_1, a_2, a_3 достаточно близок к правильному. Мы исследуем ситуацию в случае произвольного расположения на плоскости точек a_1, a_2, a_3.

1. Униформизация комплексного тора и построение абелева интеграла

Рассмотрим трехлистную компактную риманову поверхность T над сферой Римана, имеющую три точки ветвления, лежащие над точками a_1, a_2 и a_3. Эта поверхность имеет род один, т. е является комплексным тором. Построим ее универсальное накрытие. Для этого сначала применим в плоскости τ дробно-линейное преобразование, переводящее точки a_1, a_2 и a_3 в вершины правильного треугольника, которые лежат на единичной окружности и являются корнями кубическими из 1 так, чтобы бесконечно удаленной точке соответствовала точка z_0, лежащая в замыкании единичного круга Δ. Отметим, что точка z_0 лежит на границе круга тогда и только тогда, когда исходные точки a_1, a_2 и a_3 лежат на одной прямой.

При данном дробно-линейном преобразовании тор T перейдет в риманову поверхность R функции $w = \sqrt[3]{z^3 - 1}$, которая обладает богатой симметрией, а асимметрия исходного треугольника проявляется в асимметричном расположении точки z_0 относительно вершин правильного треугольника.

Если конформно отобразить правильный треугольник Δ с длиной сторон, равной единице, и вершинами в точках $A(0)$, $B(e^{\pi/6})$ и $C(e^{-\pi/6}$ на Δ, то это конформное отображение продолжается по симметрии на всю плоскость и дает универсальное накрытие для R. Для построения абелева интеграла G достаточно построить соответствующий абелев дифференциал $\widetilde{G}$ на универсальном накрытии, т. е. на комплексной плоскости.

Пусть α — точка из замыкания треугольника Δ, соответствующая точке z_0. Используя эллиптические функции Вейерштрасса, мы можем показать, что $\widetilde{G}$ имеет вид

$$\widetilde{G}(z) = -2\ln\sigma(z-\alpha) + \ln\sigma(z - e^{2\pi i/3}\alpha) + \ln\sigma(z - e^{-2\pi i/3}\alpha) - \sqrt{3}\eta_1\overline{\alpha}z,$$

Здесь $\eta_1 = 2\zeta(\omega_1/2)$, а $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ — эллиптические дзета- и сигма-функции Вейерштрасса с периодами $\omega_1 = \sqrt{3}$ и $\omega_2 = \sqrt{3}e^{i\pi/3}$.

Введем функцию

$$u(z) := \ln|\sigma(z - e^{-2\pi i/3}\alpha)| - \ln|\sigma(z - e^{2\pi i/3}\alpha)| - \eta_1 \mathrm{Im}\,(\overline{\alpha}z).$$

Эта функция гармонична и двоякопериодична на универсальном накрытии. Введем также множества $L_{12} = \{z \in \mathbb{C} : u(z) < 0\}$, $L_{21} = \{z \in \mathbb{C} :$

$u(z) > 0\}$, и их повороты $L_{01} = e^{2\pi i/3} L_{12}$, $L_{10} = e^{2\pi i/3} L_{21}$, $L_{20} = e^{-2\pi i/3} L_{12}$, $L_{02} = e^{-2\pi i/3} L_{20}$. Тогда множества $\widetilde{S}_j$, $0 \le j \le 2$, на универсальном накрытии, соответствующие листам Наттолла, имеют вид

$$\widetilde{S}_0 = L_{01} \cap L_{02}, \quad \widetilde{S}_2 = L_{10} \cap L_{20}, \quad \widetilde{S}_1 = (L_{01} \cap L_{20}) \cup (L_{02} \cap L_{10}).$$

2. Структура листов Наттолла

Из полученных результатов следует, что для описания листов Наттолла достаточно описать нулевое множество $L(u, 0) := \{z \in \mathbb{C} \mid u(z) = 0\}$ функции $u(z)$, которое является общей границей множеств L_{12} и L_{21}. Это нулевое множество зависит от параметра α. Точка α может быть любой точкой треугольника Δ, за исключением вершин. Нетрудно показать, что в каждом параллелограмме периодов градиент функции $u(z)$ имеет ровно две критические точки (в случае, когда α совпадает с центром треугольника Δ, эти две точки сливаются в одну точку двойной кратности, в противном случае они различны).

Нами установлено, что критические точки лежат в множестве $L(u, 0)$ тогда и только тогда, когда α лежит либо на одной из перпендикуляров, опущенных из центра треугольника на его стороны, либо на одной из этих сторон . Это означает, что либо треугольник с вершинами в точках a_1, a_2 и a_3 является равнобедренным и угол при его вершине больше, чем $\pi/3$, либо точки a_1, a_2 и a_3 лежат на одной прямой. Особо следует выделить случай, когда α совпадает с центром треугольника Δ. Это — случай правильного треугольника с вершинами в точках a_1, a_2 и a_3.

В каждом из случаев описана дифференциально-топологическая структура множества $L(u, 0)$. Линии $\{u(z) \equiv \mathrm{const}\}$ являются траекториями некоторого квадратичного дифференциала, связанного с $\widetilde{G}$. Во всех случаях описана структура этих траекторий.

Наконец, исследована структура множеств $\widetilde{S}_j$, $0 \le j \le 2$, на универсальном накрытии, соответствующих листам Наттолла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Stahl H.* The structure of extremal domains associated with an analytic function // Complex Variables Theory Appl. 1985. Vol. 4, № 4. P. 339–354.

[2] *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex-valued weight function. I, II // Constr. Approx. 1986. Vol. 2, № 1. P. 225–240, 241–251.

[3] *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 42, № 4. P. 299–386.

[4] *Аптекарев А. И., Туляков Д. Н.* Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80, № 6. С. 5–42.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА В УЗЛАХ, БЛИЗКИХ К УЗЛАМ ЯКОБИ

В. В. Новиков (Саратов, Россия)

vvnovikov@yandex.ru

Приведена схема доказательства существования матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкой к матрице узлов Якоби, со следующим свойством. Пусть заданы непрерывная на $[-1,1]$ функция f и числа $-1 < a < b < 1$. Тогда f можно исправить (с сохранением непрерывности) на множестве как угодно малой меры так, что интерполяционный процесс Лагранжа исправленной функции с узлами $\mathfrak{M}_\gamma$ будет сходится к ней равномерно на $[a,b]$.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, ортогональные многочлены Якоби, исправление функций.

ADJUSTMENT OF FUNCTIONS AND LAGRANGE INTERPOLATION BASED ON THE NODES CLOSE TO THE JACOBI NODES

V. V. Novikov (Saratov, Russia)

vvnovikov@yandex.ru

We give a proof sketch for an existence of interpolatory matrix $\mathfrak{M}_\gamma$ arbitrarily close to the Jacobi matrix, with the following property. Let a continuous on $[-1,1]$ function f and numbers $-1 < a < b < 1$ be given. Then f can be adjusted in a set of arbitrarily small measure so that the Lagrange interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g in $[a,b]$.

Keywords: Lagrange interpolation, Jacobi orthogonal polynomials, adjustment of functions.

Пусть $\alpha, \beta > -1$, $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, и $\{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)}\}_{i=1}^{n}$ — нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции f, заданной на $[-1,1]$, обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n-ой строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha,\beta)} = \{x_{i,n}^{(\alpha,\beta)} \ : \ i = i = \overline{1,n}; \ n \in \mathbb{N}\}$. Если $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных чисел и матрица $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\}_{i,n=1}^{\infty}$ такова, что $|x_{k,n}^{(\alpha,\beta)} - y_{k,n}| < \gamma_n$; $i = \overline{1,n}$; $n \in \mathbb{N}$, то условимся писать $\mathfrak{M} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть числа a, b, и $\varepsilon > 0$ таковы, что

$$-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}: \ -1 =: y_{n+1,n} < y_{n,n} < y_{n-1,n} < \ldots < y_{1,n} < y_{0,n} := 1, \ n = 1, 2, \ldots,$$

— произвольная матрица узлов интерполирования на $[-1,1]$ и $f \in C[-1;1]$. Положим $\Delta_{i,n} = (y_{i+1,n}, y_{i,n})$, $|\Delta_{i,n}| = y_{i,n} - y_{i+1,n}$, $\Delta f_i = f(y_{i,n}) - f(y_{i+1,n})$, и пусть ε' — любое фиксированное число такое, что $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Обозначим $I = [a - \varepsilon', b + \varepsilon']$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min\limits_{i:\, \Delta_{i,n} \subset I} |\Delta_{i,n}|$,

$d_2(\mathfrak{M},n) = \max\limits_{i:\,\Delta_{i,n}\subset I} |\Delta_{i,n}|$, $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M},f) = \sum\limits_{i:\,|y_{p,n}-y_{i,n}|<\varepsilon} \frac{|\Delta f_i|}{|p-i|+1}$, $T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M},f) = \max\limits_{p\,:\,y_{p,n}\in[a,b]} T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M},f)$. Для произвольного конечного множества $A = \{a_1;a_2;\ldots;a_m\} \subset \mathbb{R}$ полагаем $d(A) := \min\limits_{i,j}\{|a_i-a_j| : a_i \neq a_j\}$.

Следующее утверждение, схема доказательства которого приведена в настоящей заметке, дает утвердительный ответ на вопрос о наличии интерполяционного аналога усиленного C–свойства ([1], см. также [14]) для матриц класса $M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Кроме того, оно обобщает результат из [3] на случай произвольных показателей α, $\beta > -1$.

Теорема. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — произвольная последовательность и $\alpha,\beta > -1$. Тогда существует матрица узлов $\mathfrak{M}_\gamma \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ такая, что для любых $f \in C[-1,1]$, $-1 < a < b < 1$, и $0 < \delta < b-a$ найдутся функция $g \in C[-1,1]$ и множество $E \subset [a,b]$, $\mathrm{mes}E > b-a-\delta$, для которых $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n(\mathfrak{M}_\gamma,g,\cdot)-g\|_{C[a,b]} = 0$.*

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть верно (1). Тогда существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ со следующим свойством: для любой $f \in C[-1;1]$ и любой матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} = \{y_{i,k}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$, условие $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M},f) = 0$ влечет за собой равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - L_n(\mathfrak{M},f,\cdot)\|_{C[a,b]} = 0$.*

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ удовлетворяет утверждению леммы 1 и $\mathfrak{M} = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$. Пусть, далее, $r > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $a-\varepsilon' =: \lambda_{m+1} < \lambda_m < \cdots < \lambda_1 < \lambda_0 := b+\varepsilon'$, $d(\Lambda) > r$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(r)$, зависящий только от r, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p \in J_n(a,b) := \{p :\ y_{p,n} \in [a,b]\}$ будут верны неравенства $Q_{p,n}(\Lambda,r) := \sum\limits_i (|i-p|+1)^{-1} \leq 3$, где суммирование идет по тем i для которых $\Delta_{i,n} \subset I$ и $\Delta_{i,n} \cap (\Lambda \backslash \{\lambda_0;\lambda_{m+1}\}) \neq \varnothing$.*

Лемма 1 может быть доказана с использованием представления для разности $f(x) - L_n(\mathfrak{M},f,x)$ из [4], доказательство леммы 2 тривиально.

Опишем теперь схему доказательства теоремы.

Шаг 1. Пусть заданы произвольные $f \in C[-1,1]$ и $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$, числа $a,b,\varepsilon,\varepsilon'$ выбраны и зафиксированы как указано выше, и пусть $\gamma^* = \{\gamma^*{}_n\}$, $0 < \gamma^*{}_n < \gamma_n$, — последовательность, существование которой гарантирует лемма 1. Выберем какую-либо матрицу $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\} \in M^{(\alpha,\beta)}(\gamma^*) \subset M^{(\alpha,\beta)}(\gamma)$ и зафиксируем ее, потребовав, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -1 + k2^{1-j}$, $k = 1,...,2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Положим $I_{k,j} := [-1+(k-1)2^{1-j}, -1+k2^{1-j}]$, и определим на $[-1,1]$ функции $\tilde{f}_j(x) := \min\limits_{t\in I_{k,j}} f(t)$, $x \in I_{k,j}$, $k = 1,...,2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\{\tilde{f}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-1,1]$. Пусть $f_j(x) := \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x)$, $\tilde{f}_0(x) \equiv 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к f на $[-1,1]$.

Шаг 2. Зафиксируем $0 < \delta < b-a$ и последовательность $\{N_j\} \subset \mathbb{N}$, $N_j \uparrow \infty$. Для каждого $j = 1, 2...$ строится функция $g_j \in C(I)$ такая, что

$$\mathrm{mes}\{t \in [-1,1] : f_j\,(t) \neq g_j\,(t)\} < 2^{-j}\delta; \tag{2}$$
$$\max_n T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \ \leq C\,\|f_j\|_{C(I)} \ \to \ \ 0 \text{ при } j \to \infty; \tag{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0. \tag{4}$$

Кроме того, при $j \geq 2$ функция g_j удовлетворяет условиям:

$$0 \leq g_j(x) \leq f_j(x), \quad x \in I; \tag{5}$$
$$T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0, \quad n = 1,...,N_j. \tag{6}$$

Опишем построение функций $g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$ Для g_1 полагаем $g_1(x) = f(x)$ при $x \in [-1,1]\backslash I$. На I в качестве g_1 возьмем f_1, заменив ее в окрестностях точек разрыва на линейную так, чтобы выполнялись условия $g_1 \in C[-1,1]$ и (2). Предположим теперь, что $j \geq 2$ и построим функцию g_j. Обозначим через L множество точек разрыва функции f_j, лежащих в I. Выберем номер $M_j > N_j$ так, чтобы при $n > M_j$ для всех индексов i суммы $T_{n,p,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, f)$, $p \in J_n(a,b)$, выполнялось условие $\Delta_{i,n} \in I$ и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in I : 1 \leq s \leq M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$ для которого $Q_{n,p}(D_0) \leq 3\ \ \forall\, n \geq \mu(0),\ p \in J_n(a,b)$. Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma_l \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l/\sigma_{l-1} < 2^{-l}$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t-\sigma_0, t+\sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1}d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in I : M_j + 1 \leq s \leq \mu(0)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;

3) $\max\{n :\ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Для $x \in [-1,1]$ положим

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_0; \\ f_j(x), & \text{если } x \in [-1,1] \backslash \cup_{t\in D_0} (t-\sigma_0, t+\sigma_0); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_k, t] \text{ и } [t, t+\sigma_k],\ t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0, \ldots, D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0, \ldots, \sigma_{l-1}$ и построены функции $g_{0,j}, \ldots, g_{l-1,j}$, $l \geq 1$. Определим

D_l, σ_l и построим $g_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t\in D_s} [t-\sigma_s, t+\sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} :\ s = M_j + l,\ y_{i,s} \in I\backslash E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t\in D_s} \{t-\sigma_s;\ t;\ t+\sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}(D_l \cup P_{l-1}) < 3$, $\forall n \geq \mu(l),\ p \in J_n(a,b)$;

2) $\mu(l) > \min\{n :\ d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \leq \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t-\sigma_l, t+\sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1} d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in I\backslash E_{0,l-1} :\ M_j + l \leq s \leq \mu(l)\}$;

2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;

3) $\max\{n :\ d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := f_j(x),\ x \in I_{k,j}$ и для $x \in [-1,1]$ положим

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum_{s=1}^{l} 2^{-l}, & \text{если } x \in D_l \cap I_{k,j}; \\ g_{l-1,j}(x), & \text{если } x \in [-1,1] \backslash \cup_{t\in D_l} (t-\sigma_l, t+\sigma_l); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_l, t] \text{ и } [t, t+\sigma_l],\ t \in D_l. \end{cases}$$

Окончательно для $j \geq 2$ полагаем $g_j(x) = \lim\limits_{l\to\infty} g_{l,j}(x),\ x \in [-1,1]$, после чего проверяем выполнение условий (2)–(6) для всех $j \in \mathbb{N}$.

Шаг 3. Полагаем $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x)$, $x \in [-1,1]$, и проверяем, что $g \in C[-1,1]$, $\mathrm{mes}\{x \in [-1,1] : f(x) \neq g(x)\} < \delta$, а также, что за счет выбора последовательности $\{M_j\}_{j=1}^{\infty}$ можно добиться выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,\varepsilon}(\mathfrak{M}_\gamma, g) = 0$. В силу леммы 1 это равенство влечет за собой равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|g - L_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot)\|_{C[a,b]} = 0$. Таким образом, матрица $\mathfrak{M}_\gamma$ и функция g — искомые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Menchoff D.* Sur les seéries de Fourier des fonctions continues // Матем. сб. 1940. Т. 8 (50), №. 3. С. 493–518.

[2] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматлит, 1961. 936 с.

[3] *Новиков В. В.* Исправление функций и интерполяция Лагранжа в узлах, близких к узлам Лежандра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2017. Т. 17, вып. 4. С. 344–401.

[4] *Неваи Г. П.* Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1974. Vol. 25, iss. 1–2. P. 123–144.

УДК 517.9

МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРОВ СИНТЕЗА РАВНОМЕРНОГО ЖЕСТКОГО ФРЕЙМА С ПОЛНЫМ СПАРКОМ В $\mathbb{R}^d$

С. Я. Новиков[1], Д. А. Рогач (Самара, Россия)
mostvil53@gmail.ru, ida@ssau.ru

Матрица оператора синтеза для равномерного жёсткого фрейма в явном виде построена А. И. Мальцевым в 1947 году. Случайная матрица для оператора синтеза фрейма с полным спарком представлена Б. С. Кашиным в 1977 году.

В данной работе рассмотрены детерминированные способы построения равномерных жёстких фреймов с полным спарком.

Ключевые слова: фрейм, ортопроектор, фрейм Парсеваля, равномерный фрейм.

MATRICES OF SYNTHESIS OPERATORS FOR AN EQUAL NORM TIGHT FULL SPARK FRAME IN $\mathbb{R}^d$

S. Ya. Novikov[1], D. A. Rogach (Samara, Russia)
mostvil53@gmail.ru, ida@ssau.ru

The matrix of the synthesis operator for an equal norm tight frame was explicitly constructed by A. I. Maltsev in 1947. Random matrix for the synthesis operator of the full spark frame was presented by B. S. Kashin in 1977.

Deterministic construction methods for matrices of the synthesis operators for the full spark equal norm tight frames are considered here.

Keywords: frame, orthoprojector, Parseval frame, equal norm frame.

Определение 1. *Система векторов $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ называется фреймом пространства $\mathbb{R}^d$, если существуют константы $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^d$*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

В конечномерном пространстве понятие фрейма эквивалентно полноте системы, то есть $span\{\phi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^d$.

Определение 2. *Фрейм называется*

а) жестким, если $A = B$;

б) фреймом Парсеваля, если $A = B = 1$;

в) равномерным, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\|\phi_n\| = \alpha$, $n = 1, ..., N$.

Понятие фрейма и терминология, связанная с ним, стала активно использоваться сравнительно недавно. Некоторые классические результаты получили новое звучание.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00138).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project № 17-01-00138).

Теорема 1. [1] *Система $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$ является фреймом Парсеваля для $\mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда существует N-мерное евклидово пространство $\mathbb{H}^N$ и ортонормированный базис $\{b_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{H}^N$ такие, что $\mathbb{R}^d$ является подпространством $\mathbb{H}^N$ и $\phi_n = P_{\mathbb{R}^d} b_n$ для всех n, где $P_{\mathbb{R}^d}$-ортопроектор из $\mathbb{H}^N$ на $\mathbb{R}^d$.*

Теорема 1 была обобщена на фреймы общего вида в [2].

Конструкция фреймов Парсеваля в теореме 1 является универсальной, однако имеет недостаток, состоящий в том, что получающиеся из нее фреймы Парсеваля не являются равномерными. Поэтому возникает вопрос о существовании равномерного фрейма Парсеваля с произвольным количеством элементов $N \geq d$.

Оказалось, что положительный ответ на этот вопрос получил А.И. Мальцев в [3]. На языке фреймов результат Мальцева звучит так: в пространстве $\mathbb{R}^d$ для $\forall N \geq d$ существует равномерный фрейм Парсеваля $\Phi = \{\phi_n\}_{n=1}^N$.

Важной для приложений характеристикой оказался так называемый спарк.

Спарком системы векторов называется минимальное количество линейно зависимых векторов. Если это количество на единицу превосходит размерность пространства, то говорят о системе с полным спарком. Таким образом, если $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ имеет полный спарк, то любая подсистема Φ из d векторов линейно независима.

Б.С. Кашин в [4] доказал существование случайной прямоугольной матрицы, столбцы которой образуют систему с полным спарком в $\mathbb{R}^d$. Количество таких столбцов может быть произвольным больше или равным d.

Несмотря на то, что упомянутые выше результаты давно стали классическими, явных примеров равномерных жестких фреймов с полным спарком очень мало.

В [5] дана общая схема построения таких систем с помощью ортогональных полиномов, но примеров реализации этой схемы пока нет. В качестве примера покажем матрицу оператора синтеза (её столбцы состоят из координат векторов фрейма) равномерного жесткого фрейма в $\mathbb{R}^2$ с полным спарком из шести элементов.

Фактически главным и пока достаточно хорошо изученным источником равномерных жестких фреймов с полным спарком в $\mathbb{R}^d$ остается матрица дискретного преобразования Фурье. Элементы этой матрицы - комплексные числа, однако правильный выбор столбцов и строк матрицы и простые арифметические операции с ними приводят к матрицам синтеза фреймов с заданными свойствами. Равномерные жесткие фреймы для произвольных пар чисел (d, N) были построены на основе уточнений и исправлений работ предшественников в работах М.А. Лихобабенко [6]. Исследование построенных в этой работе фреймов на полноту спарка не проводилось, но непосредственное вычисление определителей квадратных матриц операторов синтеза в пространствах малых размерностей показывает, что эти матрицы имеют полные спарки. В качестве примера приводим матрицы равномерных жестких фреймов с полным спарком для пар $(2, 6)$ и $(2, 7)$.

Пример 1. *Построим фрейм* Φ_1 *для* $d = 2$, $N = 6$.

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} cos0 & cos\frac{\pi}{6} & cos\frac{\pi}{3} & cos\frac{\pi}{2} & cos\frac{2\pi}{3} & cos\frac{5\pi}{6} \\ sin0 & sin\frac{\pi}{6} & sin\frac{\pi}{3} & sin\frac{\pi}{2} & sin\frac{2\pi}{3} & sin\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. *Равномерный жесткий фрейм* Φ_2 *для* $d = 2$, $N = 7$.

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & cos\frac{6\pi}{7} & cos\frac{12\pi}{7} & cos\frac{18\pi}{7} & cos\frac{24\pi}{7} & cos\frac{30\pi}{7} & cos\frac{36\pi}{7} \\ 0 & sin\frac{6\pi}{7} & sin\frac{12\pi}{7} & sin\frac{18\pi}{7} & sin\frac{24\pi}{7} & sin\frac{30\pi}{7} & sin\frac{36\pi}{7} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -0,90... & 0,62... & -0,22... & -0,22... & 0,62... & -0,90... \\ 0 & 0,43... & -0,78... & 0,97.... & -0,97... & 0,78... & -0,43... \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Наймарк М. А.* Спектральные функции симметрического оператора // Известия АН СССР. Сер. матем., 1940. Т. 4, № 3. С. 277–318.

[2] *Кашин Б. С., Куликова Т. Ю.* Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 941–945.

[3] *Мальцев А. И.* Замечания к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов» // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 6. С. 567–568

[4] *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.

[5] *Puschel M., Kovacevic J.* Real, tight frames with maximal robustness to erasures // IEEE, 2005. Data Compression Conference. P. 63–72.

[6] *Новиков С. Я., Лихобабенко М. А.* Фреймы конечномерных пространств [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов. Самара : Самар. ун-т, 2013. on-line. ISBN = 978-5-86465-576-4 (12.09.2019)

УДК 517.98

СХОДИМОСТЬ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ $\widehat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ В СЛУЧАЕ ЦЕЛЫХ α И β

А. А. Нурмагомедов (Махачкала, Россия)
alimn@mail.ru

В данной работе для непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$ построены дискретные суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ по системе многочленов $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, являющихся дискретными аналогами классических многочленов Якоби. Исследуются аппроксимативные свойства построенных частных сумм $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ порядка $n \le N-1$. В частности, получена оценка отклонения частной суммы $S_{n,N}(f,x)$ от $f(x)$, которая зависит от n и положения точки $x \in [-1,1]$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, дискретные суммы Фурье, функция Лебега.

CONVERGENCE OF FOURIER SUMS BY POLYNOMIALS $\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, ORTHOGONAL ON NON-UNIFORMS GRIDS IN THE CASE INTEGERS α and β

A. A. Nurmagomedov (Makhachkala, Russia)
alimn@mail.ru

For continuous function $f(x)$ on the segment $[-1,1]$ is constructed discrete sums by Fourier $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ on system polynomials $\{\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ representing descrete analogs of classical Jacobi polynomials. Approximation properties of the constructing partial sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ order $n \le N-1$ are investigated. In particular, is obtained the estimation deflection partial sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ from $f(x)$ with is depended from n and position of a point x on the $[-1,1]$.

Keywords: polynomial, orthogonal system, set, discrete Fourier sums, Lebesgue function.

Пусть α, β — целые неотрицательные числа, $\Omega = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — сетка, состоящая из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1] : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N = \{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где $x_j = \frac{t_j+t_{j+1}}{2}$, $j = 0,1,...,N-1$.

Через $\hat{p}_{k,N}^{\alpha,\beta}(x) = \hat{p}_{k}^{\alpha,\beta}(x;\Omega)$ $(k = 0,1,\ldots,N-1)$ обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в следующем смысле $(0 \le n, m \le N-1)$:

$$(\hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}, \hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}) = \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \hat{p}_{n,N}^{\alpha,\beta}(x_j) \hat{p}_{m,N}^{\alpha,\beta}(x_j) \Delta t_j = \delta_{nm},$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, j = 0,1,\ldots,N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max_{0\le j\le N-1}\Delta t_j$, $æ_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В.А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$, $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ — ортонормированный многочлен Якоби, $C[-1,\,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(x)$ с нормой $\| f \| = \| f \|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1} \mid f(x) \mid$, $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени n, $E_n(f) = \min_{l_n\in\mathcal{P}_n} \| f - l_n \|_{C[-1,1]}$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n.

Через $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ обозначим частную сумму n–ого порядка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, т.е.

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = \sum_{k=0}^{n} \hat f_{k,N}^{\alpha,\beta} \hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x),$$

где

$$\hat f_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta f(x_j) \hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j)\Delta t_j.$$

Как известно, задача об оценке отклонения частной суммы $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ ряда Фурье функции $f \in C[-1,1]$ по системе $\{\hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $x \in [-1,\,1]$ и $n, N \to \infty$ посредством неравенства Лебега:

$$\mid f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) \mid \le (1 + L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)) E_n(f)$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} (1-x_j)^\alpha (1+x_j)^\beta \left| K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j) \right| \Delta t_j,$$

где

$$K_{n,N}^{\alpha,\beta}(x,x_j) = \sum_{k=0}^{n} \hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x) \hat p_{k,N}^{\alpha,\beta}(x_j).$$

В работе [1] нами исследованы асимптотические свойства многочлена $\hat p_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ при $n, N \to \infty$. А основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C[-1,1], b > 0, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{1/4}$, α, β — *целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}, n = O(\delta_N^{-1/(\lambda+3)})$. *Тогда справедлива оценка* $(-1 \le x \le 1)$:

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x) \le c(\alpha,\beta,a,b) \left\{ \ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac12}+1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac12}+1} \right\}.$$

Касаясь вопроса о точности полученнной нами оценки для функции $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$, то следует сказать, что указанная оценка точна по порядку.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C[-1,1], b > 0, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2æ_2}\right\}^{1/4}$, α, β — *целые положительные числа,* $\lambda = \max\{\alpha,\beta\}, n = O(\delta_N^{-1/(\lambda+3)})$. *Тогда равномерно относительно* $-1 \le x \le 1$ *справедлива оценка*

$$\left|f(x) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)\right| \le$$

$$\le c(\alpha,\beta,a,b)E_n(f)\left\{\ln(n+1) + \frac{n^{\alpha+1/2}}{(n\sqrt{1-x})^{\alpha+\frac{1}{2}}+1} + \frac{n^{\beta+1/2}}{(n\sqrt{1+x})^{\beta+\frac{1}{2}}+1}\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 10–19.

[2] *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.

[3] *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 359 с.

[4] *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Приближение функций суммами Фурье–Якоби // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 1. С. 9–10.

[5] *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функция Лебега сумм Фурье–Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. 1968. Т. 1. С. 11–13.

[6] *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 9, № 6. С. 1263–1283.

[7] *Бадков В. М.* Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск, 1987. С. 31–45.

[8] *Шарапудинов И. И.* О сходимости метода наименьших квадратов // Матем. заметки, 1993. Т. 53, № 3. С. 131–143.

[9] *Gronwall T.* Uber die Laplacische Reihe // Math. Ann. 1913. Vol. 74. P. 213–270.

[10] *Rau H.* Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen nach Jacobischen // Polynomen. Journ. fur Math. 1929. Vol. 161. P. 237–254.

[11] *Нурмагомедов А. А.* Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках // Изв.Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3 (2). С. 29–42.

[12] *Nurmagomedov A. A.* Convergence of Fourier sums in polynomials orthogonal on arbitrary grids // Russ. Math. (Iz. VUZ), 2012. Vol. 56, № 7. P. 52–54.

[13] *Nurmagomedov A. A., Rasulov N. K.* Two-sided estimates of Fourier sums Lebesgue functions with respect to polynomials orthogonal on nonuniform grids // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2018. Vol. 51, № 3. P. 249–259.

[14] *Коркмасов Ф. М.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Якоби // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 334–355.

[15] *Нурмагомедов А. А., Нурмагомедов И. А.* О сходимости дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, АН респ. Татарстан, 2019. Т. 57. С. 254–257.

УДК 517.9

КОМПАКТНЫЙ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛ И МЕТРИКА ХАУСДОРФА

И. В. Орлов, И. В. Баран (Симферополь, Россия)
igor_v_orlov@mail.ru, matemain@mail.ru

Рассмотрена связь субдифференциального исчисления с топологией конуса выпуклых компактов и конуса сублинейных компактнозначных операторов, а также связь с частичными пределами разностных отношений в случае симметрических субдифференциалов.

Ключевые слова: компактный субдифференциал, симметрический субдифференциал, метрика Хаусдорфа, субнорма.

COMPACT SUBDIFFERENTIAL AND HAUSDORFF METRIC

I. V. Orlov, I. V. Baran (Simferopol, Russia)
igor_v_orlov@mail.ru, matemain@mail.ru

The connection between the subdifferential calculus and the topology of the cone of convex compact sets and the cone of sublinear compact-valued operators, as well as the connection with the partial limits of difference relations in the case of symmetric subdifferentials is considered.

Keywords: compact subdifferential, symmetric subdifferential, Hausdorff metric, subnorm.

Введение

Мы исходим из понимания сильного субдифференциала как ограниченного сублинейного многозначного оператора с компактными выпуклыми значениями. Это определяет тесную связь построенного исчисления с подходящей топологией конуса выпуклых компактов и конуса сублинейных компактнозначных операторов. Нашей целью является описание такой связи. Отметим основные моменты.

1. Классическая топология Помпейю–Хаусдорфа в конусе выпуклых компактов может рассматриваться как неинвариантная сублинейная топология, порождаемая супремум–нормой.

2. Для суб–операторов в банаховых пространствах ограниченность и непрерывность равносильны. Однако в случае конусов ограниченность суб–оператора связана с более слабым понятием субнепрерывности.

3. В случае пространств Фреше описано равносильное определение субдифференциала, без прямого применения метрики Хаусдорфа, как выпуклого замыкания множества производных чисел Дини.

1. Классический анализ Фреше

Прежде чем переходить к субдифференциалам, напомним базовые понятия анализа Фреше в банаховых пространствах:

1. Основные объекты анализа Фреше связаны с линейностью: линейное пространство (нормированное, обычно полное (банахово)); линейная топология (топология, согласованная с линейными операциями); линейные операторы (обычно ограниченные по норме).

2. Основные определения: X, Y – банаховы пространства, $f : X \supset U(x) \to Y$; $h \in X$. Дифференциал по направлению:

$$\partial f(x,h) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \tag{1}$$

Сильный дифференциал: $\partial f(x) \in L(X;Y)$, сходимость в (1) равномерна по $\|h\| \le 1$.

Переход к негладкому анализу требует существенного изменения всех базовых понятий: переход к выпуклым конусам; переход к позитивно линейной неинвариантной топологии; переход к сублинейным компактнозначным операторам.

2. Выпуклые конусы

Классические конусы — ВК, содержащиеся в некотором линейном пространстве (ЛП). *Вложимые (канцеллятивные) конусы* — ВК, допускающие изоморфное вложение в ЛП. *Абстрактные (неканцеллятивные) конусы* — не допускают изоморфного вложения ни в какое линейное пространство. Важным классом конусов являются конусы подмножеств ЛП.

Отметим, что в конусах обычно применяется специальная метрика — метрика Помпейю–Хаусдорфа.

3. Метрика Помпейю–Хаусдорфа

Далее Y — банахово пространство, Y_K — конус непустых выпуклых компактов из Y. Введем метрику Хаусдорфа в Y_K следующим образом

$$B_1, B_2 \in Y_K : \quad h(B_1, B_2) = \max\left(h^1(B_1, B_2),\ h^2(B_1, B_2)\right),$$

$$h^1(B_1, B_2) = \sup_{y_2 \in B_2} d(y_2, B_1);\ h^2(B_1, B_2) = \sup_{y_1 \in B_1} d(y_1, B_2).$$

Отметим важное отличие топологий: топология ЛП всегда инвариантна относительно переноса, однако топология ВК — полугрупповая.

Метрика Хаусдорфа в нуле однородна, поэтому мы свяжем с ней удобное понятие *субнормы*:

$$\|C\| = \sup_{y\in C} \|y\| = h(C, \{0\}).$$

Метрику Хаусдорфа можно рассматривать и в более обширном конусе Y_B, где Y — метрическое пространство. Напомним понятие субпредела (см. [3] – [5]).

Определение 1. Пусть T – метрическое пространство, Y – банахово пространство, $\varphi : T \supset U(t_0) \to Y$ локально ограничено. Положим:

$$\operatorname*{sublim}_{t\to t_0} \varphi(t) := \lim_{\delta\to 0} (\overline{co}\varphi(\dot{U}_\delta(t_0)) = C_0 \quad (\text{в } (Y_B, h)); \quad \text{если } C_0 \in Y_K.$$

Здесь $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества; $\lim\limits_{\delta\to 0}$ — предел в метрике Хаусдорфа в Y_B, однако при дополнительном условии компактности предельного множества: $C_0 \in Y_K$. Особенно просто субпредел выражается для функционалов.

Пример 1. Пусть $\varphi : T \to \mathbb{R}$, тогда $\operatorname*{sublim}\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = \left[\varliminf\limits_{t\to t_0} \varphi(t);\ \varlimsup\limits_{t\to t_0} \varphi(t)\right]$ (если пределы конечны).

4. Метрика Хаусдорфа и суб-операторы

Сублинейные многозначные операторы с компактными выпуклыми значениями в качестве субдифференциалов впервые были введены в работе А. Д. Иоффе [1]. Приведем основное определение, распространив его на выпуклые конусы.

Определение 2. Пусть X, Y – субнормированные конусы, $A : X \to Y_K$ – сублинейный оператор. В конусе суб–операторов можно ввести *субнорму*:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

$L_{sub}(X; Y_K)$ — конус ограниченных сублинейных операторов $A : X \to Y_K$.

Распространим теперь понятие метрики Хаусдорфа на конус суб–операторов.

$$h(A_1, A_2) = \sup_{\|x\|\leq 1} h(A_1x, A_2x);\ \|A\| = h(A, 0).$$

Отметим, что введенная выше субнорма суб–оператора порождается данной версией метрики Хаусдорфа, аналогично субнорме выпуклого компакта. Теорема о полноте конуса суб–операторов также вполне аналогична классической теореме о полноте конуса L_K (см. [4]).

Для классических линейных операторов ограниченность по норме и непрерывность равносильны. Однако для суб–операторов из ограниченности по субнорме следует лишь непрерывность в нуле. Для глобального описания мы используем понятие «внешней полунепрерывности», или «субнепрерывности»:

$$(A \in C_{sub}(x_0)) \Leftrightarrow [(x \to x_0) \Rightarrow (h^1(Ax, Ax_0) \to 0)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; (x \in U_\delta(x_0)) \Rightarrow (Ax \subset V_\varepsilon(Ax_0))].$$

Теорема 1. *Пусть X, Y – банаховы конусы, $A : X \to Y_K$ – суб-оператор. Следующие условия равносильны: $\|A\| < \infty$; A непрерывен в нуле; A равномерно субнепрерывен на X.*

Теорема 2. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $A : X \to Y_K$ – суб-оператор. Тогда следующие условия равносильны: A равномерно субнепрерывен в X; A равномерно непрерывен в X.*

Приведем пример субнепрерывного, но разрывного оператора.

Пример 2. Пусть $(X, \; \|\cdot\|_0)$ — произвольное банахово пространство, $\mathrm{dim} X = \infty$:

$$(X, \; \|\cdot\|_0) \overset{\approx}{\hookrightarrow} \; (X, \; \|\cdot\|_1),$$

$$Ax = [0;1] \cdot \|x\|_1, \quad A: \; X \to \mathbb{R}_K.$$

5. Компактные субдифференциалы

Напомним, что понятие субдифференциала от выпуклого функционала возникло в работах Рокафеллара и Моро [2]. Позднее возникло эффективное обобщение — субдифференциал Кларка. Отметим здесь известную работу А. Д. Иоффе [1].

В работах [4], [5] мы развивая идею Иоффе, ввели компактный субдифференциал как субаддитивный и однородный компактнозначный оператор, что создало базу для построения субдифференциального исчисления как первого, так и высших порядков.

Приведем необходимую формулировку в случае первого порядка.

Определение 3. Компактный субдифференциал (по направлению; сильный) $(f : X \supset U(x) \to \; Y, \; h \in \; X)$:

$$\partial_{sub} f(x, h) = \underset{t \to +0}{\mathrm{sublim}} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \quad (\rightrightarrows \text{ по } \|h\| \leq 1).$$

Переход в конусы:

$$\partial_{sub} f(x, h) = \underset{t \to +0}{\mathrm{sublim}} \; \overline{co}\{y \in Y | f(x + th) = f(x) + t \cdot y\} \quad (\rightrightarrows \text{ по } \|h\| < 1).$$

Прямое вычисление компактного субдифференциала представляет непростую задачу. Рассмотрим подход, сводящий задачу к вычислению обычных производных чисел Дини.

1. Производные числа Дини по направлению:

$$\partial_{part} f(x,h) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x+t_k\cdot h)-f(x)}{t_k} \ (t_k \to +0).$$

2. Основная формула: (распространяется на пространства Фреше)

$$\partial_{sub} f(x,h) = \overline{co}\{\partial_{part} f(x,h)\}.$$

3. Случай функционалов ($f : X \to \mathbb{R}$):

$$\partial_{sub} f(x,h) = [\underline{\partial f}(x,h);\ \overline{\partial f}(x,h)].$$

Последние результаты, в применении к интегранту вариационного функционала, позволяют получить и оценку первого субдифференциала (первой субвариации) основного вариационного функционала.

Пусть $\Phi(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y,y')dx$. Тогда

$$\partial_{sub}\Phi(y,h) \subset \left[\int_a^b (\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}h + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'}}h')dx;\ \int_a^b (\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}h + \overline{\frac{\partial f}{\partial y'}}h')dx\right].$$

Пример 3. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^1).$$

Тогда

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{(f(x,y,y')\neq 0)} sign(f(x,y,y'))\cdot(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial y'}h')dx +$$

$$+[-1;1]\cdot \int\limits_{(f(x,y,y')=0)} (\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial y'}h')dx.$$

6. Субдифференциалы второго и высших порядков (индуктивный подход)

Классическое определение дифференциалов Фреше второго и высших порядков основано на канонической изометрии пространства линейных операторов и пространства билинейных операторов. Это позволяет рассматривать дифференциалы высших порядков как полилинейные операторы.

Следуя этому образцу, мы устанавливаем каноническую изометрию конуса сублинейных операторов и конуса бисублинейных операторов.

Определение 4. Пусть $B_{sub}(X_1, X_2; Y_K)$ – конус бисублинейных ограниченных операторов; тогда

$$L_{sub}(X_1; L_{sub}(X_2; Y_K)_K) \cong B_{sub}(X_1, X_2; Y_K).$$

Определение 5. Пусть $f : X \supset U(x) \to Y$ сильно субдифференцируем в $U(x)$. Рассмотрим

$$\partial_{sub} f : X \supset U(x) \to L_{sub}(X; Y_K)$$

и положим:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h, k) := (\partial_{sub}(\partial_{sub} f)(x)h)k.$$

Случай функционалов особенно важен для применений к экстремальным задачам.

Пример 4. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$\partial^2_{sub} f(x)(h)^2 \subset H_{sub} \cdot (h)^2,$$

где

$$H_{sub} = \left(\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x);\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x) \right] \right)_{i,j=1}^{n} \quad \text{– «субматрица Гессе».}$$

7. Обобщение метрики Хаусдорфа-Помпейю: H-равномерность

Здесь мы хотим обобщить идею метрики Хаусдорфа, переходя от классического случая выпуклых компактов в банаховом пространстве к более общему случаю выпуклых компактов в выпуклом конусе, снабженном некоторой равномерной топологией.

Определение 6. Пусть X – выпуклый конус с равномерной сублинейной топологией, порожденной базой окружений диагонали
$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, X_K – конус выпуклых компактов в X. Определим в X_K базу равномерности Хаусдорфа через окружения ΔX_K:

$$V_i = \{(C_1, C_2) |\ C_1 \subset U_i(C_2);\ C_2 \subset U_i(C_1)\}_{i \in I}.$$

Пример 5. Пусть X – банахово пространство, $\sigma(X)$ — слабая топология в X, X_K — конус слабо компактных выпуклых подмножеств в X. Тогда предбаза H–равномерности в X_K^σ:

$$V_{f,\varepsilon} = \{(C_1, C_2)|\ h(f(C_1), f(C_2)) < \varepsilon\}\ (f \in X^*,\ \varepsilon > 0).$$

Покажем теперь, что в случае слабой топологии компактный субдифференциал уже не вычисляется, вообще говоря, через выпуклое замыкание множества производных числе Дини:

$$\partial^\sigma_{sub} f(x,h) \neq \overline{co}\{\partial^\sigma_{part} f(x,h)\}.$$

1. Построение: $X = \mathbb{R}$, $\quad Y$ — несепарабельное гильбертово пространство, порожденное

$$\varphi_x(t) = e^{ixt}\ (0 \le t \le 2\pi),\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = x \cdot \varphi_x(\cdot);\ f : \mathbb{R} \to Y.$$

2. Вычисление $\partial_{sub} f(0) \quad (\forall \delta > 0)$:

$$\overline{co}\left\{\frac{f(x) - f(0)}{x}|0 < |x| < \delta\right\} = \overline{co}\{\varphi_x(\cdot)\big|\ |x| < \delta\} = B_\delta \subset B_1(0) \subset Y.$$

Отсюда

$$\forall \lambda \in Y^* \exists \operatorname*{sublim}_{\delta \to 0} \lambda[B_\delta] \Rightarrow \exists \partial^\sigma_{sub} f(0).$$

В заключение отметим простую связь между слабой формой условия Липшица и слабой субдифференцируемостью по направлениям.

Теорема 3. *Пусть X, Y – банаховы пространства, $f : X \supset U(x) \to Y$. Если $f \in Lip^\sigma(x)$, то f слабо субдифференцируемо в точке x по любому направлению. В частности, если $f : \mathbb{R} \to Y$ и $f \in Lip^\sigma(x)$, то f слабо субдифференцируемо в точке x.*

8. Обобщение: симметрические компактные субдифференциалы

Недавно в нашей работе [3] были введены понятия симметрических компактных субдифференциалов произвольного порядка. Приведем определение в случае первого порядка (по направлению, сильный):

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(x,h) = \operatorname*{sublim}_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \quad (\text{sublim} \rightrightarrows \text{ по } \|h\| \le 1).$$

В случае пространств Фреше на симметрические субдифференциалы обобщается результат о связи с частичными пределами разностных отношений:

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x,h) = \overline{co}\left\{\partial_{part}^{[\prime]} f(x,h) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x+t_k h) - f(x-t_k h)}{2t_k}\right\}.$$

Однако нетрудно показать, что в случае слабой топологии возможно нарушение этой связи:

$$\partial_{sub}^{[\prime]} f(x,h) \neq \overline{co}\{\partial_{part}^{[\prime]} f(x,h)\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ioffe A. D.* Nonsmooth Analysis: Differential Calculus of Noundifferential Mappings. Trans // AMS, 1981. Vol. 266 (1). P. 1–56.

[2] *Rockafellar R. T., Wets R. J. B.* Variational Analysis. Berlin : Springer, 1997. 736 p.

[3] *Орлов И. В., Баран И. В.* Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант // Соврем. мат. Фундам. направл. 2015. Т. 57, С. 108–161.

[4] *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Соврем. мат. Фундам. направл. 2014. Т. 53, С. 64–132.

[5] *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации. Симферополь : ДИАЙПИ, 2016. 320 с.

УДК 519.853

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

М. А. Осипцев, С. И. Дудов, В. В. Абрамова
(Саратов, Россия)
Osipcevm@gmail.com, DudovSI@info.sgu.ru, Veronika0322@rambler.ru

Рассматривается конечномерная задача о вложении заданного компакта $D \subset \mathbb{R}^p$ в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ выпуклой функции $f(\cdot)$ с наименьшим значением α за счёт смещения D. Её математическая формализация приводит к задаче минимизации функции $\phi(x) = \max\limits_{y \in D} f(y - x)$ на $\mathbb{R}^p$. Исследованы свойства функции $\phi(x)$, получены необходимые и достаточные условия и условия единственности решения задачи. В качестве базового для приложений выделен случай, когда $f(\cdot)$ — калибровочная функция Минковского некоторого выпуклого тела M. Показано, что если M — многогранник, то задача сводится к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: калибровочная функция, внешняя оценка, субдифференциал, квазивыпуклая функция, сильно выпуклое множество, сильно выпуклая функция.

ON CHARACTERIZATION OF THE SOLUTION FOR THE PROBLEM ON THE ESTIMATION OF A COMPACT BY THE LEBESGUE SET OF A CONVEX FUNCTION

M. A. Osiptsev, S. I. Dudov, V. V. Abramova
(Saratov, Russia)
Osipcevm@gmail.com, DudovSI@info.sgu.ru, Veronika0322@rambler.ru

We consider the finite-dimensional problem of embedding a given compact $D \subset \mathbb{R}^p$ into the lower Lebesgue set $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ of the convex function $f(\cdot)$ with the smallest value of α due to the offset of D. Its mathematical formalization leads to the problem of minimizing the function $\phi(x) = \max\limits_{y \in D} f(y - x)$ on $\mathbb{R}^p$. The properties of the function $\phi(x)$ are investigated, necessary and sufficient conditions and conditions for the uniqueness of the solution of the problem are obtained. As a important case for applications, we reviewed the case when $f(\cdot)$ is the Minkowski gauge function of some convex body M. It is shown that if M is a polyhedron, then the problem reduces to a linear programming problem.

Keywords: gauge function, external estimate, subdifferential, quasiconvex function, strongly convex set, strongly convex function.

1. Постановка задачи

Оценка сложных множеств множествами простой структуры — одно из актуальных направлений негладкого анализа [1, 2]. В рамках этого направления находится и рассматриваемая здесь задача.

Пусть D — ограниченное замкнутое множество из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, а $f(\cdot)$ — выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция. Требуется вложить множество D в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p :$

$f(y) \leqslant \alpha\}$ этой функции с наименьшим значением α за счёт смещения D. То есть решить задачу

$$\begin{cases} \alpha \to \min\limits_{(\alpha,x)\in\mathbb{R}^{p+1}}, \\ D - x \subset G(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Для корректности и нетривиальности задачи будем предполагать, что функция $f(\cdot)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^p$, её минимальное значение достигается, множество $G(\alpha_0)$, где $\alpha_0 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} f(x)$, является ограниченым и при этом

$$G(\alpha_0) \overset{*}{-} D = \{z \in \mathbb{R}^p : z + D \subset G(\alpha_0)\} = \emptyset.$$

Легко видеть, что задача (1) эквивалентна следующей минимаксной задаче

$$\phi(x) \equiv \max_{y\in D} f(y - x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{2}$$

При этом, если $\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x)$, то пара (ϕ^*, x^*), где $\phi^* = \phi(x^*)$, является решением задачи (1).

Нетрудно сделать вывод, что при сделанных предположениях решение задачи существует. Отметим также, что на задачу (2) можно смотреть как на обобщение задачи о чебышёвском центре множество D (случай, когда $f(\cdot)$ — некоторое норма на $\mathbb{R}^p$).

Цель работы — указать на основные свойства целевой функции, получить необходимые и достаточные условия и условия единственности решения задачи (2).

Далее используются следующие обозначения:
$\bar{A}$, $int\ A$, $co\ A$ — соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества A, $\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$, $\underline{\partial} f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$ в точке x, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leqslant r\}$ — шар с центром в точке x и радиусом r, $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^p$, $0_p = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

2. Свойства целевой функции. Критерий решения

Основные свойства функции $\phi(x)$ отражает

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ является выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией. Тогда функция $\phi(x)$ является:*

1) выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией, а её субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ может быть выражен в виде

$$\underline{\partial}\phi(x) = -co\{\underline{\partial} f(z - x) : z \in Q^{\phi}(x)\}, \tag{3}$$

где $Q^{\phi}(x) = \{z \in D : f(z - x) = \phi(x)\}$*;*

2) строго выпуклой, если функция $f(\cdot)$ *строго выпукла на* $\mathbb{R}^p$*;*

3) сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ *с константой* $C > 0$*, то есть для любых точек* x_0*,* x_1 *из* $\mathbb{R}^p$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполняется*

$$\phi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant (1-\alpha)\phi(x_0) + \alpha\phi(x_1) - \frac{C}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2,$$

если функция $f(\cdot)$ *сильно выпукла на* $\mathbb{R}^p$ *с константой* C*;*

4) строго квазивыпуклой, то есть для любых точек $x_0 \neq x_1$ *из* $\mathbb{R}^p$ *и* $\alpha \in (0, 1)$ *выполняется*

$$\phi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) < \max\{\phi(x_0), \phi(x_1)\},$$

если функция $f(\cdot)$ *строго квазивыпукла на* $\mathbb{R}^p$*.*

Необходимые и достаточные условия решения задачи (2) выражаются следующей теоремой.

Теорема 2. *1. Для того, чтобы точка* x^* *была точкой минимума функции* $\phi(x)$ *на* $\mathbb{R}^p$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^{\phi}(x^*)\}. \tag{4}$$

2. Если существует $\delta > 0$ *такое, что*

$$B(0_p, \delta) \subset co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^{\phi}(x^*)\}, \tag{5}$$

то x^* *является единственной точкой минимума функции* $\phi(x)$ *на* $\mathbb{R}^p$*, причём*

$$\phi(x) \geqslant \phi(x^*) + \delta\|x - x^*\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \tag{6}$$

Замечание 1. Очевидно, единственность решения задачи (2), кроме соотношения (5), обеспечивает также строгая квазивыпуклость выпуклой функции $f(\cdot)$, и тем более ее строгая или сильная выпуклость. Это вытекает из теоремы 1.

3. Базовый случай

Базовым для возможного подхода к разработке метода приближённого решения задачи (2) является случай, когда функция $f(\cdot)$ является калибром (калибровочной функцией Минковского) некоторого выпуклого телесного компакта M, причём $0_p \in int\ M$, т. е.

$$f(x) = k(x, M) \equiv \inf\{\alpha \geqslant 0 : x \in \alpha M\}. \tag{7}$$

Выделим для рассмотрения два частных случая.

3.1 Пусть выпуклое тело M является многогранником заданным в виде
$$M = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y\rangle \leqslant 1,\ i = \overline{1,m}\},$$
где $A_i \in \mathbb{R}^p$, $i = \overline{1,m}$, $0_p \in int\, co\{A_i : i = \overline{1,m}\}$.

В этом случае, в силу положительной однородности калибра, имеет место формула.
$$k(x, M) = \max_{i=\overline{1,m}} \langle A_i, x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Тогда задача (2) принимает вид
$$\max_{i=\overline{1,m}} \{a_i - \langle A_i, x\rangle\} \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \quad a_i = \max_{y\in D} \langle A_i, y\rangle. \tag{8}$$

Задача (8) известным приемом [4] сводится к задаче линейного программирования. А именно справедлива

Теорема 3. *Задача* (8) *эквивалентна следующей задаче линейного программирования*
$$\begin{cases} x^{(p+1)} \to \min\limits_{(x,x^{(p+1)})\in\mathbb{R}^{p+1}}, \\ \langle A_i, x\rangle + x^{(p+1)} - a_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{9}$$

Причём, если $\widetilde{x_0} = (x_0, x_0^{(p+1)})$ — решение задачи (9)*, то x_0 — решение задачи* (8)*. А если x_0 — решение задачи* (8)*, то $\widetilde{x_0} = (x_0, x_0^{(p+1)})$, где $x_0^{(p+1)} = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \{a_i - \langle A_i, x_0\rangle\}$, решение задачи* (9)*.*

3.2 Теперь предположим, что M является сильно выпуклым множеством. Посмотрим, как это отразится на свойствах функции $f(\cdot)$ вида (7) и соответственно на функции $\phi(\cdot)$.

Укажем на важное свойство калибра.

Теорема 4. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^p$ является r-сильно выпуклым множеством и $C_M = \sup\limits_{x\in M} \|x\|$. Тогда функция $\Psi(\cdot) = k^2(\cdot, M)$ является сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ с константой равной $\dfrac{2}{C_M(C_M + r)}$.*

Очевидным следствием теоремы 4 является

Теорема 5. *Если множество M является r-сильно выпуклым и* $C_M = \sup\limits_{x \in M} \|x\|$, *то функция* $\phi^2(x) = \max\limits_{y \in D} k^2(y - x, M)$ *является сильно выпуклой на* $\mathbb{R}^p$ *с константой* $\dfrac{2}{C_M(C_M + r)}$.

Замечание 2. Сама функция $\phi(\cdot)$ как и $f(\cdot)$ вида (7), не является сильно выпуклой, независимо от свойств множества M. Минимизация функции $\phi(\cdot)$ при $f(\cdot)$, имеющий вид (7), эквивалентна минимизации функции $\phi^2(x)$. А применение к минимизации сильно выпуклой функции численных методов (например, субградиентного типа) позволяет рассчитывать на сходимость последовательности приближений к решению со скоростью геометрической прогрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Пшеничный Б. Н.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.

[2] *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.

[3] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004.

[4] *Авдеева Л. И., Зуховицкий С. И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1964.

УДК 517.53

О ФАКТОРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

О. В. Охлупина (Брянск, Россия)
helga131081@yandex.ru

Огромное количество задач в комплексном анализе посвящено теме факторизации в различных классах функций. Интерес к этим вопросам появился в начале прошлого века и не потерял актуальности в наши дни. В работе рассмотрены целые функции класса с весом из L_p-пространств. Для введённого класса построено факторизационное представление с использованием методов комплексного анализа.

Ключевые слова: целая функция, факторизационное представление, порядок целой функции.

FACTORIZATION OF A CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS

O. V. Okhlupina (Bryansk, Russia)
helga131081@yandex.ru

A huge number of problems in complex analysis is devoted to the topic of factorization in various classes of functions. Interest in these issues appeared at the beginning of the last century and has not lost its relevance today. We consider entire functions of a class with weight from L_p-spaces. For the introduced class, a factorization representation is constructed using the methods of complex analysis.

Keywords: entire function, factorization representation, order of the entire function.

Введение

Изучению различных классов функций и получению их полных описаний был дан толчок в работах специалистов комплексного анализа ещё в начале 20-го столетия. Достаточно упомянуть работы о факторизации функций ограниченного вида и классов Харди в единичном круге. Полным описанием многочисленных классов функций занимаются и современные учёные, среди которых выделяются работы М. М. Джрбашяна, Н. В. Говорова, А. А. Гольдберга, И. В. Островского, А. М. Седлецкого, Ф. А. Шамояна, Б. Н. Хабибуллина и других не менее известных математиков.

Обозначим с помощью C комплексную плоскость, тогда $H(C)$ - множество целых функций в C, $0 < p < +\infty$, $0 < \rho < +\infty$.

Рассмотрим класс функций $E^p_\rho(C)$:

$$E^p_\rho(C) = \left\{ f \in H(C) : \int\limits_1^{+\infty} \frac{(\ln M(r,f))^p}{r^{\rho p+1}} dr < +\infty \right\}.$$

Для данного класса функций осуществим построение факторизационного представления.

В случае единичного круга с аналогичными результатами можно ознакомиться в работе [1].

Другие весовые L_p-классы типа Валирона и описание их корневых множеств рассмотрены в работе [2].

Основной результат работы

Теорема 1. *Пусть ρ принимает нецелое неотрицательное значение, $0 < p < +\infty$, $\rho - 1 < q < \rho$. Равносильны следующие утверждения:*

1. $f \in E^p_\rho(C)$;

2. *f допускает следующее представление*

$$f(z) = z^m \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right) \exp\left(h\left(z\right)\right), \quad \text{где}$$

$z \in C$, $h(z)$ - многочлен, степень которого меньше ρ, m - неотрицательное целое число, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - последовательность комплексных чисел, для которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^p\left(2^k\right)}{2^k \rho p} < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $\rho \in N$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $f \in E^p_\rho(C)$;

2. *f допускает следующее представление*

$f(z) = z^m \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{\rho} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_k}\right)^j\right) \exp\left(h\left(z\right)\right)$, где $z \in C$, $h(z)$ - многочлен, степень которого меньше ρ, m принимает неотрицательное целое значение, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^p\left(2^k\right)}{2^k \rho p} < +\infty$, $\delta_f(r) = \left|\sum\limits_{|z_k| \le r} \frac{1}{z_k^\rho}\right|$ удовлетворяет условию $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(\delta_f(r))^p dr}{r} < +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Shamoyan F. A.* Parametric representation and description of root sets of weight classes of functions holomorphic in a circle // Sibirsk. Math Zh. 1999. Vol. 40, № 6. P. 1452–1470.

[2] *Okhlupina O. V.* Generalization of Valiron's theorem for the case entire functions with weight // Bulletin of the Bryansk State University, RIO BSU, Bryansk 2015. Vol. 2015, № 4. P. 400–408.

УДК 517.518.82

О ЯВНОЙ ЗАПИСИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

М. А. Петросова (Москва, Россия)

petrosova05@mail.ru

Обсуждается задача о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке. Выделен важный класс порождающих функций типа рационального модуля. Указан явный вид вторых производных, а также самих полиномов Бернштейна на специально отобранной последовательности возрастающих номеров. Итоговые результаты зависят, в частности, от арифметической структуры абсциссы точки излома порождающей функции. Тематика представляет интерес в связи с задачей о скорости роста коэффициентов при явной алгебраической записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, рациональный модуль, симметричный отрезок, трапеции Паскаля.

ON THE EXPLICIT ALGEBRAIC REPRESENTATION FOR BERNSTEIN POLYNOMIALS OF RATIONAL MODULE FUNCTION ON THE SYMMETRIC INTERVAL

M. A. Petrosova (Moscow, Russia)

petrosova05@mail.ru

The problem of the explicit algebraic representation for Bernstein polynomials on a symmetric interval is discussed. Special class of generating rational module functions is considered. We give explicit formulas for second derivatives, as well as for Bernstein polynomials themselves on a selected sequence of numbers. Final results depend on the arithmetic structure of the break point of generating rational module function. The subject connects with the task on the growth rate of coefficients in the explicit algebraic representation of Bernstein polynomials on a symmetric interval.

Keywords: Bernstein polynomials, rational module function, symmetric interval, Pascal trapeziums.

Для функции $f \in C[-1,1]$ полиномы Бернштейна удобно определить формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k \,(1-x)^k \,(1+x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Краткий обзор по теории полиномов Бернштейна на симметричном отрезке представлен в [1].

Рассматриваем важный класс производящих функций типа рационального модуля

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [-1,1], \tag{2}$$

где $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $|p| < q$, НОД$\,(p,q) = 1$. Ставится вопрос о явной алгебраической записи полиномов Бернштейна для функции (2).

Известно (см. [2]), что в последовательности полиномов Бернштейна для кусочно линейных порождающих функций возможны совпадающие пары, образующие бесконечную цепочку регулярных склеиваний. Применительно к функции (2) получаем

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

если оба числа p, q являются нечетными, или же

$$B_{2qm+1}(f,x) = B_{2qm}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

если хотя бы одно из чисел p, q четное.

Используя общие формулы для производных полиномов Бернштейна на симметричном отрезке (см. [3]), находим явные выражения вторых производных от полиномов из соответствующих цепочек (3) или (4).

Теорема 1. *Пусть $B_n(f,x)$ — полиномы Бернштейна* (1) *для функции* (2)*. Если оба числа p, q в формуле* (2) *являются нечетными, то*

$$B''_{qm}(f,x) = (q^2 - p^2)m \cdot 2^{-qm} C_{qm}^{sm} (1-x)^{sm-1} (1+x)^{tm-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

со значениями $s = (q-p)/2$, $t = (q+p)/2$. Если же хотя бы одно из чисел p, q в формуле (2) *четное, то*

$$B''_{2qm}(f,x) = 2(q^2 - p^2)m \cdot 2^{-2qm} C_{2qm}^{sm} (1-x)^{sm-1} (1+x)^{tm-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

со значениями $s = q - p$, $t = q + p$.

Для раскрытия скобок в выражениях (5) и (6) применим так называемую *формулу бибинома*

$$(1-x)^j (1+x)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n} D_{n,j}^k x^k, \qquad j,\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad n \geqslant j, \tag{7}$$

с коэффициентами $D_{n,j}^k$, образующими специальные *трапеции Паскаля* (см. [4]). Раскрывая этим способом скобки в (5) и (6), и проводя двукратное интегрирование, получаем явную алгебраическую запись полиномов Бернштейна по степеням переменной x на цепочках склеиваний (3) и (4).

Ввиду определенной громоздкости общих формул рассмотрим частный пример функции $f(x) = |3x - 2|$. Пара $p = 2$, $q = 3$ содержит четное число. Поэтому реализуются возможности (4) и (6). Расчет по формуле (6) со значениями $s = 1$, $t = 5$ дает представление

$$B''_{6m}(f,x) = 10m \cdot 2^{-6m} C_{6m}^{m} (1-x)^{m-1} (1+x)^{5m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Формула бибинома (7) принимает здесь вид

$$(1-x)^{m-1}\,(1+x)^{5m-1} = \sum_{k=0}^{6m-2} D^k_{6m-2,\,m-1}\,x^k, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в представление (8) и проводя двукратное интегрирование, имеем окончательный результат

$$B_{6m}(f,x) = \alpha_m + \beta_m\,x + 10m \cdot 2^{-6m} C^m_{6m} \sum_{k=0}^{6m-2} D^k_{6m-2,m-1}\,\frac{x^{k+2}}{(k+1)\,(k+2)}$$

при $m \in \mathbb{N}$. Числа $D^k_{6m-2,m-1}$ вычисляются по таблицам из работы [4]. Для коэффициентов α_m и β_m компактные выражения пока не найдены. Нетрудно заметить, впрочем, что $2 < \alpha_m < 3$ и $-3 < \beta_m < 0$ при всех значениях $m \in \mathbb{N}$. Эти оценки связаны с геометрической структурой функции $f(x) = |3x-2|$.

Аналогично проводятся расчеты во всех остальных примерах вида (2) на соответствующих цепочках (3) или (4). Отметим, что для полиномов Бернштейна, не попадающих в цепочки склеиваний, формулы вторых производных становятся сложнее, чем (5) или (6). Там возникают дополнительные слагаемые, и решение задачи сильно затрудняется.

Исследуемое направление представляет интерес в связи с нетривиальным вопросом о скорости роста коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи на симметричном отрезке (см. [5], [6]).

Выражаю благодарность И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за большую помощь в исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Петросова М. А.* Краткий обзор по теории полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 230–235.

[2] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300.

[3] *Петросова М. А.* О некоторых соотношениях, связанных с полиномами Бернштейна для рационального модуля на симметричном отрезке // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2018. СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. С. 153–157.

[4] *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Алгебраическая запись полиномов Бернштейна на симметричном отрезке и связанные с ней комбинаторные соотношения // Владикавказ. матем. журн. 2019. Т. 21, вып. 3. С. 68–91.

[5] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы XIX Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию физ.-матем. факультета СмолГУ. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 336–347.

[6] *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О росте коэффициентов в полиномах Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, вып. 3. С. 89–107.

УДК 517.9

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ДИНИ–ЛИПШИЦА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

С. С. Платонов (Петрозаводск, Россия)
platonov@psu.karelia.ru

Пусть K — произвольное локальное поле (т. е. локально-компактное, недискретное, вполне несвязное, полное топологическое поле), функция $f(x)$ принадлежит классу Лебега $L^p(K)$, $1 < p \le 2$, и пусть $\widehat{f}(x)$ — преобразование Фурье функции f. В работе приводится решение следующей задачи: если функция f принадлежит классу Дини–Липшица $DLip(\alpha, \beta, p; K)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то для каких значений r можно гарантировать, что $\widehat{f} \in L^r(K)$? Результат работы является аналогом классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица на $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: гармонический анализ на локальных полях, функциональные пространства на локальных полях, преобразование Фурье, условия Дини–Липшица.

FOURIER TRANSFORM OF FUNCTIONS FROM DINI–LIPSCHITZ CLASSES ON LOCALLY FIELDS

S. S. Platonov (Petrozavodsk, Russia)
platonov@psu.karelia.ru

Let K be a locally field (that is a locally compact, non-discrete, totally disconnected, complete topological field). Suppose that a function $f(x)$ belongs to the the Lebesgue class $L^p(K)$, $1 < p \le 2$, and let $\widehat{f}(x)$ be the Fourier transform of f. In this paper we give an answer to the next problem: if the function f belongs to the Dini - Lipschitz class $DLip(\alpha, \beta, p; K)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, then for which values of r we can guarantee that $\widehat{f} \in L^r(K)$? The result is an analogue of one classical theorem of E. Titchmarsh about the Fourier transform of functions from the Lipschitz classes on $\mathbb{R}$.

Keywords: harmonic analysis on local fields, function spaces on local fields, Fourier transform, Dini–Lipschitz conditions.

В настоящей работе для функций на произвольном локальном поле получен аналог одной классической теоремы Е. Титчмарша о преобразовании Фурье функций из классов Липшица на $\mathbb{R}$. Приведем точную формулировку этой теоремы.

Пусть $f(x)$ — функция из пространства $L^p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, (все рассматриваемые функции комплекснозначные), $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ — норма в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, α — произвольное число из полуинтервала $(0, 1]$. По определению функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица $Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$, если выполняется условие

$$\|f(x-t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Теорема 1 ([1, теорема 84]). *Пусть $f(x) \in Lip(\alpha, p; \mathbb{R})$, $1 < p \le 2$, $0 < \alpha \le 1$, и пусть $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f. Тогда $\widehat{f}$*

принадлежит классу Лебега $L^r(\mathbb{R})$ *при*

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \leq \frac{p}{p-1}, \tag{1}$$

причем границы в неравенстве (1) *точные.*

В настоящей работе приводится аналог теоремы 1 для преобразования Фурье на произвольном локальном поле. Приведем необходимые сведения из гармонического анализа на локальных полях.

Локальным полем называется произвольное локально-компактное, недискретное, вполне несвязное, полное топологическое поле. Примерами локальных полей являются поле p-адических чисел и поле формальных рядов Лорана над произвольным конечным полем. Полное описание локальных полей см., например, в монографиях [2, 3]. Гармонический анализ на локальных полях является частным случаем более общего гармонического анализа на локально компактных абелевых группах (см. [4]), но наличие более богатых алгебраических структур на локальном поле позволяет глубже изучать различные задачи гармонического анализа и его приложений.

Пусть K — произвольное локальное поле. На K существует неархимедово абсолютное значение $x \mapsto |x| \in [0, +\infty)$, $x \in K$, удовлетворяющее условиям: 1) $|x| \geq 0$ и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 2) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in K$; 3) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

Подмножество $D := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ является подкольцом в K (оно называется кольцом целых чисел в K). Подмножество D является компактным открытым подмножеством в K. Пусть $B := \{x \in K : |x| < 1\}$. Подмножество B является максимальным идеалом в D и компактным открытым подмножеством в K. Фактор-кольцо K/B изоморфно конечному полю $GF(q)$, где $q = p^n$ — порядок поля, p — простое число, n — натуральное число.

Пусть dx — мера Хаара на K, удовлетворяющая условию нормировки $\mu(D) = 1$, где $\mu(A)$ — мера Хаара множества A. Обычным образом определяются банаховы пространства Лебега $L^p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L^p(K)$.

На поле K существует единственная непрерывная функция $\chi : K \mapsto \mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям: 1) $|\chi(x)| = 1 \ \forall x \in K$; 2) $\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y) \, \forall x, y \in K$; 3) $\{x \in K : \chi(x) = 1\} = D$. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ пусть $D_n = \{x \in K : |x| \leq q^{-n}$. Семейство $\{D_n, n \in \mathbb{Z}\}$ образует фундаментальную систему компактных окрестностей нуля в K. Отметим, что $D_0 = D$.

На любом локальном поле естественным образом определяется преобразование Фурье. Для $f \in L^1(K)$, преобразование Фурье $F : f(x) \mapsto \widehat{f}(y)$

определяется формулой

$$F(f)(y) = \widehat{f}(y) := \int\limits_K f(x)\,\chi(-xy)\,dx, \qquad y \in K.$$

Для любого $p \in [1, +\infty]$ пусть $p' := \frac{p}{p-1}$. Если $f \in L^p(K)$, $1 < p \leq 2$, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$ может быть определено как предел в $L^{p'}(K)$ последовательности функций

$$\widehat{f}_n(y) := \int\limits_{D_n} f(x)\,\chi(-xy)\,dx$$

при $n \to \infty$. Преобразование Фурье $F : f(x) \mapsto \widehat{f}(y)$ является линейным ограниченным оператором из банахова пространства $L^p(K)$ в банахово пространство $L^{p'}(K)$, и для любой функции $f \in L^p(K)$ справедливо неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|F(f)\|_{p'} \leq \|f\|_p,\ 1 \leq p \leq 2.$$

Для любой функции f на K и для любого $h \in K$ пусть

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Оператор τ_h называется оператором сдвига. Оператор τ_h является изометрическим оператором в банаховом пространстве $L^p(K)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Для $f \in L^p(K)$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$\omega_p(f; n) := \sup\{\|f - \tau_h f\|_p : h \in D_n\}.$$

Числовая последовательность $\{\omega_p(f; n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется модулем непрерывности функции f в пространстве $L^p(K)$.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$, β — произвольное вещественное число, $f(x)$ — комплекснозначная функция на K.

Определение. *Функция $f(x)$ принадлежит классу Дини–Липшица $DLip(\alpha, \beta, p; K)$*, если $f \in L^p(K)$ и для некоторой постоянной $c = c(f) > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_p(f; n) \leq c\, q^{-\alpha n} n^{-\beta}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В частном случае $\beta = 0$ класс $DLip(\alpha, 0, p; K)$ называется *классом Липшица* и обозначается $Lip_{\oplus}(\alpha, p; K)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для преобразования Фурье–Уолша функций из двоичного класса Дини–Липшица.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in DLip(\alpha, \beta, p; K)$, $1 < p \leq 2$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, и пусть $\widehat{f}$ – ее преобразование Фурье на K. Тогда $\widehat{f}$ принадлежит классу Лебега $L^r(K)$, если r удовлетворяет условиям:*

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \leq \frac{p}{p-1} \quad \text{при} \quad \beta \leq \frac{p+\alpha p-1}{p}, \tag{2}$$

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} \leq r \leq \frac{p}{p-1} \quad \text{при} \quad \beta > \frac{p+\alpha p-1}{p}. \tag{3}$$

При этом границы $\frac{p}{p+\alpha p-1}$ и $\frac{p}{p-1}$ в неравенствах (2) и (3) точные, т. е. область значений r не может быть расширена.

В частном случае $\beta = 0$ получаем следующее следствие.

Следствие. *Если $f(x) \in Lip(\alpha, p; K)$, $1 < p \leq 2$, $\alpha > 0$, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит классу Лебега $L^r(K)$ при*

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < r \leq \frac{p}{p-1}, \tag{4}$$

причем границы в неравенстве (4) точные.

В частном случае, когда локальное поле K совпадает с полем p-адических чисел, теорема 2 доказана в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М. : ОГИЗ ; Гостехиздат, 1948. 418 с.

[2] *Taibelson M. H.* Fourier analysis on local fields. Prinston Univ. Press, 1975. 304 c.

[3] *Weiyi Su.* Harmonic analysis and Fractal analysis over local fields and applications. Hackensack, N J: World Scientific; Beijing : Science Press, 2018. 328 c.

[4] *Хьюитт Э. Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М. : Мир, 1978. 655 с.

[5] *Platonov S. S.* Fourier transform of Dini – Lipschitz functions on the field of p-adic numbers // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2019. Vol. 11, № 4. P. 307–318.

УДК 517.518

АНАЛИЗ НА P-ИЧНЫХ ГРУППАХ[1]

М. Г. Плотников (Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com

Рассмотрены представления p-ичных групп G, а также рядов по системам характеров G (системам Виленкина–Крестенсона). Построены новые примеры U-множеств для систем Виленкина–Крестенсона.

Ключевые слова: p-ичные группы, системы Виленкина–Крестенсона, p-ичные графы, p-ичные мартингалы, U-множества.

ANALYSIS ON THE P-ADIC GROUPS[1]

M. G. Plotnikov (Vologda, Russia)
MGPlotnikov@gmail.com

Various representations of the p-adic groups G, as well as series on the systems of characters of G (Vilenkin–Chrestenson systems), are considered. New examples of U-sets for the Vilenkin–Chrestenson systems are constructed.

Keywords: p-adic groups, Vilenkin–Chrestenson systems, p-adic graphs, p-adic martingales, U-sets.

1. Основные определения и обозначения

Всюду $\mathbb{N}$ означает множество целых неотрицательных, $\mathbb{C}$ — комплексных чисел. Для натурального q положим $\mathbb{N}(q) := \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Фиксируем произвольное $p \in \{2, 3, \ldots\}$ и рассмотрим *p-ичную группу* $\mathbb{G} = \mathbb{G}_p$, т.е. множество последовательностей $g = (g_0, g_1, \ldots)$, $g_k \in \mathbb{N}(p)$, с групповой операцией покоординатным сложением по модулю p. Отображение $\phi\colon\ g \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{g_k}{p^{k+1}}$ переводит $\mathbb{G}$ в отрезок $[0,1]$, а множества

$$\Delta_k^m := \left\{ g \in \mathbb{G}\colon\ g_s = m_{k-1-s},\ s = \overline{0, k-1} \right\}, \quad m = \sum_{j=0}^{k-1} m_j p^j \qquad (1)$$

— в замкнутые интервалы $\left[m/p^k;\ (m+1)/p^k\right]$. Множества (1) называют *p-ичными интервалами* (ранга k) в $\mathbb{G}$, а *смежными* — p-ичные интервалы одного ранга, чье объединение есть p-ичный интервал ранга на единицу меньше. (Интервалы Δ_{k+1}^{pm+j}, $j \in \mathbb{N}(p)$, являются смежными.)

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

Множества (1) образуют счетную базу топологии в $\mathbb{G}$. $\mathbb{G}$ является компактной абелевой группой, группу характеров которой образует *система Виленкина–Крестенсона* $\{VC_n\}_{n=0}^{\infty}$ (приведена нумерация Пэли):

$$VC_n(g) = \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i g_k n_k}{p}\right), \quad n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k p^k, \quad n_k \in \mathbb{N}(p). \tag{2}$$

Подробнее о группе $\mathbb{G}$ и системе $\{VC_n\}$ см., напр., в [1–3].

2. Представления p-ичной группы и рядов Виленкина–Крестенсона

Здесь мы соберем в единое целое весьма разрозненные факты, касающиеся представлений группы $\mathbb{G}$, а также рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n VC_n(g), \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

См., напр., [2, § 3.1], [3], [4, Ch. 3], [5]– [9]; в части работ рассматривается лишь случай $p = 2$. К известным результатам добавлены новые.

p-ичные интервалы можно отождествить с вершинами ориентированного графа (p-ичного дерева) T_Δ на рис. 1. k-й ярус дерева составляют p-ичные интервалы Δ_k^m ранга k, упорядоченные по m естественным образом. Любое ребро графа T_Δ идет от p-ичного интервала ранга k к одному из p смежных интервалов ранга $k+1$.

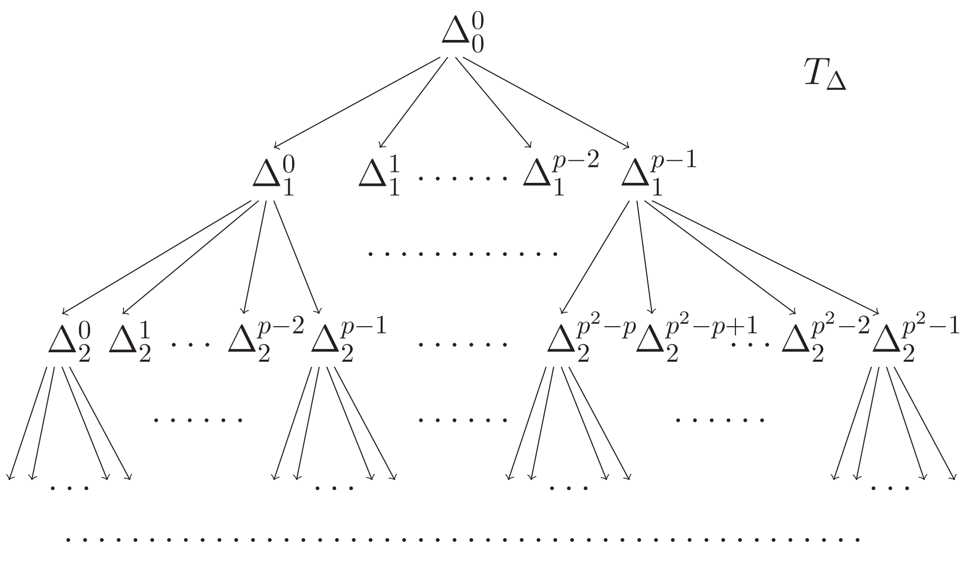


Рис. 1

Сама группа $\mathbb{G}$ отождествляется с множеством (ориентированных) путей P на графе T_Δ, начинающихся с корня Δ_0^0. Этот факт верифицируется следующей конструкцией. Для каждой вершины графа занумеруем в естественном порядке p ребер, исходящих от этой вершины, числами 0, 1, …, $p-1$. Тогда каждому элементу $g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}$ можно сопоставить путь P, последовательно проходящий через ребра с номерами g_0, g_1, …. Несложно показать, что g является еще и точкой пересечения p-ичных интервалов, лежащих на пути P.

Что касается рядов (3), то каждому такому ряду можно поставить в соответствие ориентированное p-ичное дерево T_A со значениями A_k^m в вершинах, см. рис. 2. Если S_N — N-ые частичные суммы ряда (3), то $A_k^m := S_k^m$ — постоянное значение S_{p^k} на Δ_k^m.

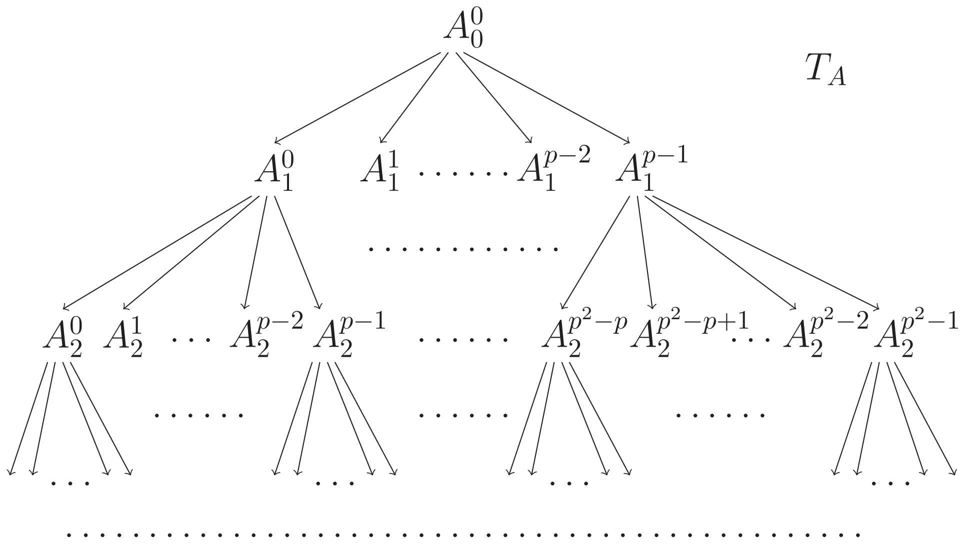


Рис. 2

Необходимым и достаточным условием такого представления является система соотношений

$$A_k^m = \frac{1}{p} \sum_{j \in \mathbb{N}(p)} A_{k+1}^{pm+j}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m = 0, \ldots, p^k - 1. \tag{4}$$

В несколько других настройках подобные равенства имеются в [7].

Соотношения (4) фактически означают, что последовательность S_{p^k} образует дискретный мартингал на вероятностном пространстве $\{\mathbb{G}, \mathcal{F}, \mu\}$, с фильтрацией $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Здесь $\mathcal{F}$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbb{G}$, $\mathcal{F}_k$ — σ-алгебра, порожденная p-ичными интервалами ранга k, μ — мера Хаара на $\mathbb{G}$. Напомним, что последовательность случайных величин (X_k) на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с выделенной системой σ-алгебр $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ (*фильтрацией*) образует *дискретный мартингал*, если для всех $k \in \mathbb{N}$ с.в. X_k является $\mathcal{F}_k$-измеримой, $\mathbf{E}\,|X_k| < \infty$ и $\mathbf{E}\,(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) = X_k$ (п.н.).

Еще одним представлением рядов по системе Виленкина–Крестенсона являются *квазимеры* — конечно-аддитивные функции множества, определенные на семействе p-ичных интервалов. Каждый ряд (3) порождает квазимеру τ по следующему правилу: $\tau\,(\Delta_k^m) = S_k^m/p^k$. Коэффициенты ряда (3) восстанавливаются из порождаемой им квазимеры по формуле $a_n = \int\limits_{\mathbb{G}} \overline{VC_n}\, d\tau$ при подходящем выборе понятия интеграла. Подробности — в [9, п. 2.3].

Каждую квазимеру можно рассматривать как граф T_A, удовлетворяющий соотношениям

$$A_k^m = \sum_{j\in\mathbb{N}(p)} A_{k+1}^{pm+j}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad m = 0,\dots,p^k-1, \tag{5}$$

если взять $A_k^m := \tau\,(\Delta_k^m)$ для всех k и m.

В [8] квазимеры рассматривались, как линейные функционалы на пространстве $TP(\mathbb{G})$ — линейной оболочке характеристических функций p-ичных интервалов. Это дает еще одно представление рядов (3).

Теорема 1. *Следующие объекты изоморфны, как линейные пространства*:

1) *множество рядов* (3);
2) *множество графов* T_A *с соотношениями* (4);
3) *множество* p*-ичных мартингалов*;
4) *множество квазимер*;
5) *множество графов* T_A *с соотношениями* (5);
6) *множество линейных функционалов на пространстве* $TP(\mathbb{G})$.

3. U-множества для системы Виленкина–Крестенсона

Здесь мы построим новые классы U-множеств для системы $\{VC_n\}$. Напомним, что если $\{f_n\}$ — система функций, заданных на нормированном пространстве X, то множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, U*-множеством*) для системы $\{f_n\}$, если из сходимости ряда $\sum a_n f_n(x)$ к нулю на $X\setminus A$ вытекает, что все $a_n = 0$. Отметим, что семейство U-множеств обладает *свойством наследственности*: если $A \subset B$ и B есть U-множество, то A также является U-множеством.

Введем обозначения:

$$G_k := \{g = (g_0, g_1, \dots) : \; g_k = g_{k+1} = \dots = 0\} \subset \mathbb{G};$$

$$N_{r,k} = \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} n_j p^j + n_{k-1} p^{k-1},\ n_j,\, n_{k-1} \in \mathbb{N}(p) \right\} \subset \mathbb{N}. \tag{6}$$

Очевидно, G_k является подгруппой $\mathbb{G}$, а $N_{r,k}$ — подгруппой $\mathbb{N}$, если рассматривать p-ичные записи чисел из $\mathbb{N}$ и снабдить множество $\mathbb{N}$ операцией поразрядного сложения по модулю p.

Теорема 2. *Пусть $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим $B = \mathbb{N}(p) \setminus \{0\} = \{1, \ldots, p-1\}$,*

$$F = \{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}\colon \quad g_{k_s - 1} \in B, \quad s \in \mathbb{N}\}. \tag{7}$$

Тогда F является U-множеством для системы $\{VC_n\}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не является верным и найдется нетривиальный ряд (3), сходящийся к нулю вне F. В силу нетривиальности ряда $\tau\left(\widehat{g} \oplus \Delta_r\right) \neq 0$ для некоторого p-ичного интервала $\widehat{g} \oplus \Delta_r$. Здесь τ — квазимера, порожденная рядом (S).

Обозначим $H_{k_s} = \mathbb{G} \setminus F_s$. Фиксируем s и пишем для краткости $k := k_s$. Рассмотрим величину

$$T_k := \tau\left(H_k \cap \left(\widehat{g} \oplus \Delta_r\right)\right) = \sum_{\Delta_k^m \subset H_k \cap (\widehat{g} \oplus \Delta_r)} \tau\left(\Delta_k^m\right).$$

С одной стороны, $\tau(\Delta_k^m) = 0$, если $\Delta_k^m \subset H_k \cap (\widehat{g} \oplus \Delta_r)$, в силу теоремы 8 из [3] и комментария к этой теореме. Поэтому $T_k = 0$ при $k \geq r$. С другой стороны, применяя технику, подобную той, что использовалась в [12], можно получить равенство

$$T_k = \frac{1}{p} \cdot \tau\left(\widehat{g} \oplus G_r\right) + \frac{1}{p^{r+1}} \cdot \sum_{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)} a_n VC_n\left(\widehat{g}\right). \tag{8}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (8). Из (6) видно, что

$$\max\{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)\} \geq p^{k-1} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Кроме того, множество $N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)$ состоит из $(p-1)\,p^r$ элементов. Примем во внимание также тождество $|VC_n| \equiv 1$ и тот факт, что сходимость ряда Виленкина–Крестенсона хотя бы в одной точке влечет соотношение $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Получим:

$$\left| \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)} a_n VC_n\left(\widehat{g}\right) \right| \leq \frac{1}{p^{r+1}} \sum_{n \in N_{r,k} \setminus \mathbb{N}(p^r)} |a_n|$$

$$\leq \frac{(p-1)p^r}{p^{r+1}} \max_{n\in N_{r,k}\setminus\mathbb{N}(p^r)} |a_n| \to 0, \quad k\to\infty.$$

Отсюда вытекает, с учетом (8), что $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = \tau\left(\widehat{g}\oplus G_r\right)/p \neq 0$. Это противоречит тому, что $T_k = 0$ при $k\geq r$, и доказывает теорему.

Множества (7) образуют, по-видимому, самый широкий известный класс замкнутых U-множеств для системы $\{VC_n\}$, включающий в себя все другие известные классы (см., напр., [8], [3], [11]), а также содержащий новые множества.

С геометрической точки зрения каждое из множеств (7) обладает определенной симметрией: оно занимает одну и ту же позицию на всех "гроздьях" смежных p-ичных интервалов (k_s-1)-го яруса дерева T_Δ, $s\in\mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел и каждого* $s\in\mathbb{N}_+$ *задано множество* $B_s \subsetneqq \mathbb{N}(p)$. *Положим*

$$F = \left\{g=(g_0,g_1,\ldots)\in\mathbb{G}\colon\; g_{k_s-1}\in B_s,\; s\in\mathbb{N}\right\}. \tag{9}$$

Тогда F *есть* U*-множество для системы* $\{VC_n\}$.

Доказательство. Так как семейство U-множеств обладает свойством наследственности, достаточно доказать теорему для случая, когда $\#F_s = p-1$ для каждого s, т.е. $F_s=\mathbb{N}(p)\setminus\{q_s\}$, $q_s\in\mathbb{N}(p)$. Если $q_s\equiv 0$, то мы находимся в условиях теоремы 2 и приходим к нужному результату.

В противном случае рассмотрим множество $(-\widetilde{g})\oplus F$, $\widetilde{g}_{k_s-1}=q_s$ для всех s и $\widetilde{g}_k=0$, если $k\neq k_s$ ни для какого s. В силу того, что F и $(-\widetilde{g})\oplus F$ одновременно либо являются, либо не являются U-множествами, ситуация сводится к случаю $q_s\equiv 0$, а затем к теореме 2. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 получается следствие, обобщающее на $p\geq 3$ результат А. А. Шнейдера из [13]. Пусть F_ζ — симметричное совершенное множество с постоянным отношением $\zeta\in(0,1/2)$. Естественным образом перенесем F_ζ с отрезка $[0,1]$ на группу $\mathbb{G}$ так, что прообразом каждого p-ичного интервала тоже будет p-ичный интервал.

Теорема 4. *Множество* $F_{1/p}$, $p\geq 3$, *является* U*-множеством для системы Виленкина–Крестенсона.*

Доказательство. Из [14, гл. 14, § 18]) вытекает, что

$$F_{1/p} = \bigcap_{s=0}^{\infty}\bigsqcup_{m=1}^{2^s-1}\left[\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{p-1}{p^j}\right)m_{s-j},\; \frac{1}{p^s}+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{p-1}{p^j}\right)m_{s-j}\right],$$

$m=\sum\limits_{j=1}^{s-1} m_j 2^j$ и $\sum\limits_{j=1}^{0} := 0$. Отсюда $F_{1/p}=\{g\in\mathbb{G}\colon\; g_k = 0\vee(p-1),\; k\in\mathbb{N}\}$, выбор $0\vee(p-1)$ свой для каждого s. Значит, $F_{1/p}$ представимо в виде (9), если положить $k_s \equiv s$, а $B_s \equiv \{0, p-1\}$. Применив теорему 3, завершаем доказательство теоремы 4.

На рис. 3 изображен граф T_Δ, соответствующий множеству $F_{1/p}$. Каждому $g \in F_{1/p}$ соответствует путь, начинающийся с корневого элемента и проходящий через отмеченные темным вершины.

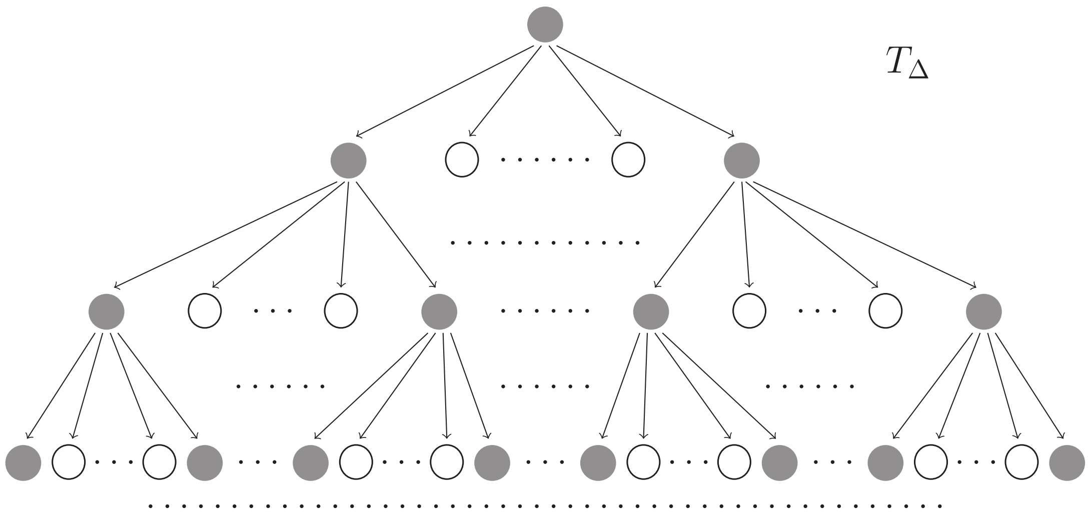


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981. 180 с.

[2] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. М.: Наука, 1987. 344 с.

[3] *Skvortsov V.* Henstock–Kurzweil type integrals in $\mathcal{P}$-adic harmonic analysis // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 2004. T. 20,

[4] *Schipp F., Wade W. R., and Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Académiai Kiadó, 1987. 560 p.

[5] *Wade W. R., Yoneda K.* Uniqueness and quasi-measure on the group of integers of p-series field // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. T. 84,

[6] *Gundy R. F.* Martingal theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. T. 124,

[7] *Скворцов В. А.* Об одном примере двойного ряда Хаара // Матем. заметки. 1980. Т. 28,

[8] *Grubb D. J.* Sets of uniqueness in compact 0-dimensional metric groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. T. 301,

[9] *Plotnikov M.* $\mathcal{V}$-sets in the products of zero-dimensional compact abelian groups // European J. Math. 2019. T. 5,

[10] *Harris D. C.* Sets of uniqueness and closed subgroups in Vilenkin groups // Anal. Math. 1990. T. 16,

[11] *Grubb D. J.* Growth conditions for thin sets in Vilenkin groups of bounded order // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. T. 119,

[12] *Плотников М. Г.* Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда // Матем. заметки. 2014. Т. 95,

[13] *Шнейдер А. А.* О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24(66),

[14] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 937 с.

УДК 517.518

МНОЖЕСТВА ТИПА КАНТОРА И РЯДЫ ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА[1]

М. Г. Плотников, В. С. Асташонок (Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com, AstashonokV1998@gmail.com

А. А. Шнейдер доказал, что если F_ζ — симметричное совершенное множество с постоянным отношением ζ, то при $\zeta = 1/2^{n+1}$ ($n \in N$) оно является U-множеством для системы Уолша. Мы изучаем вопрос, являются ли множества F_ζ с $\zeta = 1/p^n$ множествами Дирихле и U-множествами для систем Виленкина–Крестенсона на p-ичных группах.

Ключевые слова: системы Виленкина–Крестенсона, множества типа Кантора, множества Дирихле, U-множества.

CANTOR TYPE SETS AND SERIES ON THE VILENKIN–CHRESTENSON SYSTEMS[2]

M. G. Plotnikov, V. S. Astashonok (Vologda, Russia)
MGPlotnikov@gmail.com, AstashonokV1998@gmail.com

A. A. Šneider has proved that if F_ζ is the symmetric perfect set with the constant ratio ζ then for $\zeta = 1/2^{n+1}$ ($n \in N$) F_ζ is a U-set for the Walsh system. We study the question of whether the sets F_ζ with $\zeta = 1/p^n$ are Dirichlet sets and U-sets for the Vilenkin–Chrestenson systems on the p-adic groups.

Keywords: Vilenkin–Chrestenson systems, Cantor type sets, Dirichlet sets, U-sets.

Пусть $\zeta \in (0, 1/2)$ и F_ζ — симметричное совершенное множество с постоянным отношением ζ (множество канторовского типа). Одна из замечательных теорем теории тригонометрических рядов состоит в том, что *F_ζ является множеством единственности для тригонометрической системы тогда и только тогда, когда ζ^{-1} есть число Пизо* (Н. К. Бари — случай рациональных ζ, результат работ Р. Салема, А. Зигмунда и И. И. Пятецкого–Шапиро — общий случай, см. [1, гл. 14, §§ 18, 19]). Напомним, что если $\{f_n\}$ — система функций, заданных на нормированном пространстве X, то множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, *U-множеством*) для системы $\{f_n\}$, если из сходимости ряда $\sum a_n f_n(x)$ к нулю на $X \setminus A$ вытекает, что все $a_n = 0$.

Один из результатов работы А. А. Шнейдера [2] состоит в том, что *при $\zeta = 1/2^{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$, F_ζ является U-множеством для системы Уолша.* На текущий момент это единственный результат о множествах F_ζ как U-множествах для системы Уолша.

В [3] Д. С. Харрис уточнил результат А. А. Шнейдера, заметив, что на двоичной группе множества $F_{1/2^{l+1}}$ являются множествами Дирихле

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[2]The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00584.

для системы Уолша и даже подгруппами меры Хаара нуль. Напомним, что если на множестве X задана система функций $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, то множество $A \subset X$ называют *множеством Дирихле* для системы $\{g_n\}$, если $\liminf\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |1 - g_n(x)| = 0$. Ранее К. Йонеда установил [4], что любая подгруппа меры Хаара нуль двоичной группы является множеством Дирихле, а всякое множество Дирихле, в свою очередь, U-множеством для системы Уолша. В [3] результат К. Йонеды был распространен на системы характеров произвольных нульмерных компактных абелевых групп G, а в [5] рассматривались множества Дирихле и их обобщения на произведениях G^d таких групп G, и было установлено, что все они являются U-множествами для широкого класса сходимостей.

Фиксируем произвольное $p \in \{2, 3, \ldots\}$ и рассмотрим *p-ичную группу Виленкина* $\mathbb{G}_p$, т.е. множество последовательностей $g = (g_0, g_1, \ldots)$, $g_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ с групповой операцией покоординатным сложением по модулю p. Сюръективное отображение $\phi\colon\ g \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{g_k}{p^{k+1}}$ переводит группу $\mathbb{G}_p$ в отрезок $[0,1]$. Множества вида

$$\Delta_k^{m_0,m_1,\ldots,m_{k-1}} = \left\{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}_p\colon\ g_s = m_{k-1-s},\ s = \overline{0, k-1}\right\} \qquad (1)$$

образуют счетную базу топологии в $\mathbb{G}_p$, являясь одновременно замкнутыми и открытыми множествами в этой топологии. Образами таких множеств при отображении ϕ являются замкнутые p-ичные интервалы $\left[m/p^k;\ (m+1)/p^k\right]$, $m = \sum\limits_{j=0}^{k-1} m_j p^j$, в связи с чем множества (1) также называют *p-ичными интервалами* (ранга k).

$\mathbb{G}_p$ является компактной абелевой группой, группу характеров которой образует *система Виленкина–Крестенсона* $\{VC_n\}_{n=0}^{\infty}$, определяемая следующим образом. Если $R_k(g) := \exp(2\pi i g_k/p)$ — *обобщённые функции Радемахера* на $\mathbb{G}_p$, $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k p^k$ ($n_k \in \{0, \ldots, p-1\}$), то *функция Виленкина–Крестенсона* VC_n (в нумерации Пэли) есть

$$VC_n(g) = \prod_{k=0}^{\infty} (R_k(g))^{n_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{2\pi i g_k n_k}{p}\right). \qquad (2)$$

При $p = 2$ система $\{VC_n\}$ совпадает с *системой Уолша.*

Лемма 1 (см. [1, гл. 14, § 18]).

$$F_\zeta = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigsqcup_{m=1}^{2^s-1} \left[\sum_{j=1}^{s} \left(\zeta^{j-1} - \zeta^j\right) m_{s-j},\ \zeta^s + \sum_{j=1}^{s} \left(\zeta^{j-1} - \zeta^j\right) m_{s-j}\right]. \qquad (3)$$

Здесь $m = \sum\limits_{j=1}^{s-1} m_j 2^j$ *и* $\sum\limits_{j=1}^{0} := 0$. *Как следствие,*

$$F_{1/p^l} = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigsqcup_{m=1}^{2^s-1} \left[\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{p^l-1}{p^{lj}} \right) m_{s-j},\ \frac{1}{p^{ls}} + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{p^l-1}{p^{lj}} \right) m_{s-j} \right]. \tag{4}$$

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned} F_{1/p^l} =& \{ z = (z_0, z_1, \ldots) \in G_p : \\ & z_{sl} = z_{sl+1} = \ldots = z_{(s+1)l-1} = 0 \vee (p-1),\ s = 0, 1, \ldots \}, \end{aligned} \tag{5}$$

причем выбор $0 \vee (p-1)$ свой для каждого s. Отметим, что из (5) видно, что F_{1/p^l} является подгруппой группы G_p тогда и только тогда, когда $p = 2$.

Отметим, что каждое множество $F^{(s)}_{1/p^l}$ в формуле (4) является объединением 2^s p-ичных интервалов ранга ls. В связи с этим мы перенесем множества $F^{(s)}_{1/p^l}$ с отрезка $[0,1]$ на группу $\mathbb{G}_p$, сделав это таким образом, что прообразом $F^{(s)}_{1/p^l}$ будет объединение 2^s соответствующих p-ичных интервалов на группе $\mathbb{G}_p$. Попутно отметим, что в работе [6] для системы Уолша доказано (Теорема A 2.47), что замкнутое множество является U-множеством на группе $\mathbb{G}_p$ тогда и только тогда, когда $\phi(E)$ является U-множеством на отрезке $[0,1]$. Этот результат несложно распространить и на системы Виленкина–Крестенсона.

Теорема 1. *Если* $\zeta = 1/p^l$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$, *то* F_ζ *является множеством Дирихле и* U*-множеством для системы Виленкина–Крестенсона.*

Доказательство. Из (2) и (5) видно, что всякая функция

$$VC_{n(s)} = \prod_{j=sl}^{(s+1)l-1} R_j^{\alpha_j} : \sum_{j=sl}^{(s+1)l-1} \alpha_j = p,$$

обладает тем свойством, что $VC_{n(s)}(g) = 1$ для каждого $g \in F_{1/p^l}$. Следовательно,

$$\liminf_{n \to \infty} \sup_{g \in F_{1/p^l}} |1 - VC_n(g)| = 0$$

и F_{1/p^l} является множеством Дирихле для системы $\{VC_n\}$. С учетом теоремы 1 из [3], F_{1/p^l} есть U-множество. Теорема доказана.

Теорема 2. *Множество* $F_{1/p}$, $p \geq 3$, *не является множеством Дирихле и даже не представимо в виде счетного объединения множеств Дирихле для системы* $\{VC_n\}$.

Доказательство. Формула (5) влечет

$$F_{1/p} = \{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = 0 \vee (p-1),\ k = 0, 1, \ldots\}. \qquad (6)$$

Предположим, что $F_{1/p} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, где E_j — множества Дирихле для системы $\{VC_n\}$. Фиксируем произвольное $E_j =: E$. Рассмотрим произвольную непустую порцию множества $F_{1/p}$ вида $F_{1/p} \cap \Delta$, Δ — p-ичный интервал. В этом случае найдутся натуральное l и $\widehat{g}_k \in \{0, p-1\}$, $k = 0, \ldots, l-1$, такие, что

$$\Delta = \{g = (g_0, g_1, \ldots) \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = \widehat{g}_k,\ k = 0, \ldots, l-1\}. \qquad (7)$$

Так как E — множество Дирихле для системы $\{VC_n\}$, найдется возрастающая последовательность $\{n(s)\}$ такая, что

$$VC_{n(s)}(g) = 1 \quad \text{для каждого } g \in E. \qquad (8)$$

Выберем достаточно большое s, чтобы $n := n(s) \in \left[p^L; p^{L+1} - 1\right]$ для некоторого $L \geq l$. Рассмотрим p-ичные интервалы ранга $L+1$:

$$\Delta^1 = \left\{g \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = \widehat{g}_k,\ k = \overline{0, l-1};\ \ g_k = 0,\ k = \overline{l, L-1};\ \ g_L = 0\right\};$$

$$\Delta^2 = \left\{g \in \mathbb{G}_p \colon\ g_k = \widehat{g}_k,\ k = \overline{0, l-1};\ \ g_k = 0,\ k = \overline{l, L-1};\ \ g_L = p-1\right\}.$$

Из (2) видно, что на Δ^1 и Δ^2 функция VC_n принимает постоянные значения

$$\prod_{k=0}^{l-1} \exp\left(\frac{2\pi i \widehat{g}_k n_k}{p}\right) \quad \text{и} \quad \prod_{k=0}^{l-1} \exp\left(\frac{2\pi i \widehat{g}_k n_k}{p}\right) \cdot \exp\left(\frac{2\pi i (p-1) n_L}{p}\right),$$

соответственно. Так как $n_L \neq 0$, в силу того, что $n \in \left[p^L; p^{L+1} - 1\right]$, эти значения различны. Значит, как минимум одно из них не равно единице. Поэтому как минимум один из p-ичных интервалов Δ^1 или Δ^2 имеет пустое пересечение с E, в силу (8). Значит, в любой непустой порции множества $F_{1/p}$ лежит p-ичный интервал, не содержащий точек из E. Это означает, что E нигде не плотно в $F_{1/p}$.

Итак, $F_{1/p}$ есть счетное объединение нигде не плотных множеств, что противоречит теореме Бэра. Противоречие доказывает теорему.

Замечание. Если $p \geq 3$, то, в отличие от случая $p = 2$, множество $F_{1/p}$ не является подгруппой меры Хаара нуль группы $\mathbb{G}_p$ и даже не представимо в виде счетного объединения таких подгрупп. Этот факт вытекает из теоремы 2 и результатов работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 937 с.

[2] *Шнейдер А. А.* О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24(66), № 2. С. 279–300.

[3] *Harris D. C.* Sets of uniqueness and closed subgroups in Vilenkin groups // Anal. Math. 1990. T. 16, № 2. C. 115–122.

[4] *Yoneda K.* Perfect sets of uniqueness on the group 2^ω // Canad. J. Math. 1982. T. 34, № 3. C. 759–764.

[5] *Plotnikov M.* $\mathcal{V}$-sets in the products of zero-dimensional compact abelian groups // European J. Math. 2019. T. 5, № 1. C. 223–240.

[6] *Плотников М. Г.* Квазимеры, обобщенные интегралы и хаусдорфовы меры в теории рядов Хаара и Уолша. Вологда, 2011. 221 с.

УДК 517.9

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

А. В. Подорога (Москва, Россия)
anastasiapodoroga@gmail.com

Рассматривается задача Коши для квазилинейного закона сохранения с кусочно линейной функцией потока. Выделен специальный класс кусочно постоянных решений. Поставлен вопрос об устойчивости таких решений по малым возмущениям функции потока. Указаны специальные предположения, при которых удается получить желаемую оценку устойчивости. Доклад будет дополнен результатами численного моделирования по обсуждаемой теме.

Ключевые слова: квазилинейный закон сохранения, кусочно линейная функция потока, обобщенные решения, оценка устойчивости.

ON THE SOLUTIONS STABILITY IN THE CAUCHY PROBLEM FOR THE QUASILINEAR CONSERVATION LAWS

A. V. Podoroga (Moscow, Russia)
anastasiapodoroga@gmail.com

We discuss the Cauchy problem for a quasi-linear conservation law with a piecewise linear flow function. A special class of piecewise constant solutions is considered. The question of stability of solutions for small perturbations of the flow function is raised. We introduce special assumptions, under which it is possible to obtain the stability estimate. The talk will be supplemented with the results of numerical simulation.

Keywords: quasilinear conservation law, piecewise linear flow function, generalized solutions, stability estimate.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Задача (1), (2) активно используется в теоретических и численных исследованиях, связанных с квазилинейными дифференциальными уравнениями (см. [1–10]). При этом *функция потока* $f(u)$ часто предполагается выпуклой вверх или вниз (см. [1, 4–6]). Сейчас мы не налагаем такого ограничения (см. также [2, 9]).

Выберем специальный класс кусочно линейных функций потока $f(u)$ и класс кусочно постоянных начальных условий $\varphi(x)$ с конечным набором значений $E(\varphi) \subset \mathbb{R}$. При таких ограничениях единственное обобщенное энтропийное решение $u = u(x,t)$ задачи Коши (1), (2) также будет кусочно постоянным (см. [8–10]), а каждая кривая сильного разрыва решения должна удовлетворять условиям Гюгонио и Олейник.

Так, если $x = \xi(t)$ — кривая сильного разрыва обобщенного решения $u = u(x,t)$ со значениями

$$u^+ = u(\xi(t)+0,t), \qquad u^- = u(\xi(t)-0,t)$$

справа и слева от разрыва, то условие Гюгонио (см. [3–6]) имеет вид

$$\xi'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}. \tag{3}$$

Соответственно, условие Олейник [2] означает, что

$$(f(u) - l(u))(u^+ - u^-) \geqslant 0 \tag{4}$$

для любого численного значения u, находящегося между u^+ и u^-. При этом $l(u)$ есть уравнение секущей, соединяющей на плоскости (u,f) точки графика $(u^+, f(u^+))$ и $(u^-, f(u^-))$. Всюду в дальнейшем стандартные соглашения (3), (4) считаем выполненными.

Так как $\varphi(x)$ есть кусочно постоянная функция с конечным множеством значений $E(\varphi)$, то существуют такие $\varphi_{\min}, \varphi_{\max} \in E(\varphi)$, что

$$\varphi_{\min} \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_{\max}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Решение задачи Коши (1), (2) подчинено тем же ограничениям

$$\varphi_{\min} \leqslant u(x,t) \leqslant \varphi_{\max}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В силу ограничений (5) функцию потока $f(u)$ будем рассматривать лишь на отрезке $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$. Обсудим, что происходит с решением $u = u(x,t)$ при возмущении $f(u)$ на этом отрезке.

Отметим типичный пример. Для одной и той же начальной функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2c, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{6}$$

с фиксированным значением $c > 0$ возьмем функцию потока

$$f(u) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 2c, \tag{7}$$

и возмущенную функцию $f_\varepsilon(u)$, не сильно отличающуюся от первой

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot u, & 0 \leqslant u \leqslant c, \\ 2\varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot u, & c \leqslant u \leqslant 2c, \end{cases} \tag{8}$$

Обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с начальным условием (6) и функцией потока (7) очевидно имеет вид

$$u(x,t) \equiv \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0. \tag{9}$$

С другой стороны, решение $u_\varepsilon(x,t)$, отвечающее тому же начальному условию (6) и функции потока (8) имеет вид

$$u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 2c, & x < -\dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t, \\ c, & -\dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t < x < \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t, \\ 0, & x > \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot t, \end{cases} \tag{10}$$

Условия (3), (4) для решения (10) проверяются непосредственно.

Несмотря на очевидную близость функций потока (7) и (8) (при малых значениях $\varepsilon > 0$), решения (9) и (10) заметно различаются. Например, в любой момент времени $t = t^* > 0$ имеется точка $x^* = \varepsilon t^*/(2c)$, в которой разность между $u_\varepsilon(x,t)$ и $u(x,t)$ оказывается равной $c > 0$. При этом значение $c > 0$ является достаточно большим, как бы мы ни выбирали малое $\varepsilon > 0$.

Дадим теперь оценку, позволяющую измерить отклонение решений двух задач при специальных возмущениях функций потока. Пусть множество абсцисс $M = M(f)$ точек излома функции $f(u)$ включает в себя всё множество значений $E(\varphi)$ начальной функции $\varphi(x)$, но, кроме того, может содержать и другие точки из $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$. Пусть множество абсцисс $M_1 = M(f_1)$ точек излома функции $f_1(u)$ включает в себя множество M и содержит также другие точки из $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$, т. е.

$$E(\varphi) \subset M \subset M_1.$$

Пусть Δ — максимальное расстояние между соседними точками из множества M. Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $u(x,t)$ и $u_1(x,t)$ — обобщенные решения задач Коши (1), (2) с одним и тем же начальным условием и функциями потока $f(u)$ и $f_1(u)$ соответственно. Если функции $f(u)$ и $f_1(u)$ удовлетворяют перечисленным выше требованиям, то для любых x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ и любого момента времени $T > 0$ справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} (u(x,T) - u_1(x,T))dx \right| \leqslant (L + L_1)T\Delta. \tag{11}$$

Здесь $L = L(f)$ и $L_1 = L(f_1)$ — константы Липшица функций $f(u)$ и $f_1(u)$ соответственно.

Оценка (11) включает в себя важный параметр Δ, оценивающий мелкость разбиения функции потока $f(u)$ на кусочно линейные участки по оси u. Если величина Δ достаточно мала, т. е. функция $f(u)$ состоит из большого числа малых звеньев, то и величина интегрального отклонения $u_1(x,t)$ от $u(x,t)$ в формуле (11) на протяжении длительного времени остается достаточно малой.

Данный принцип можно использовать при аппроксимации более сложных кусочно гладких функций потока посредствам многозвенных кусочно линейных функций $f(u)$. В докладе будут представлены результаты численных расчетов применительно к нескольким важным квазилинейным уравнениям математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, № 3. С. 3–73.

[2] *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи математических наук. 1959. Т. 14, № 2(86). С. 165–170.

[3] *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Наука, 1978. 688 с.

[4] *Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения с частными производными первого порядка : учебн. пособие. М. : Мех-мат МГУ, 1999. 96 с.

[5] *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск : Тамара Рожковская, 2003. 576 с.

[6] *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. М. ; Ижевск : НИЦ «РХД», 2010. 296 с.

[7] *Гасников А. В.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков : учебн. пособие. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : МЦНМО, 2013. 427 с.

[8] *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Метод движения разрывов для специальных квазилинейных уравнений // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 242–245.

[9] *Подорога А. В.* Особенности моделирования решений квазилинейного закона сохранения с невыпуклой функцией потока // Системы компьютерной математики и их приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2018. Вып.19. С. 85–92.

[10] *Подорога А. В., Тихонов И. В.* Сравнительный анализ различных численных методов для квазилинейного уравнения дорожного движения // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 2. С. 154–179.

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ[1]

Е. С. Половинкин (Москва, Россия)
polovinkin.es@mipt.ru

Рассмотрен пример экстремальной задачи Майера, в которой функционал задается на семействе траекторий некоторого дифференциального включения с псевдо-липшицевой неограниченной и невыпуклозначной правой частью. Для этой задачи сравниваются различные необходимые условия оптимальности решения.

Ключевые слова: необходимые условия оптимальности, полярные конусы, условие псевдо-липшицевости.

ON AN EXAMPLE OF AN EXTREMAL PROBLEM WITH DIFFERENTIAL INCLUSION [1]

E. S. Polovinkin (Moscow, Russia)
polovinkin.es@mipt.ru

An example of the Mayer extremal problem is considered, in which the functional is defined on the family trajectories of some differential inclusion with pseudo-Lipschitz unbounded and nonconvex right-hand side. For this problem, various necessary conditions for optimality of the solution are compared.

Keywords: necessary optimality conditions, polar cones, pseudo-Lipschitz condition.

Введение. Задача Майера и необходимые условия оптимальности

В докладе автор опирается на прямой вариационный метод доказательства необходимых условий в задаче Майера, полученный им в работах [1, 2]. В работе [2] доказаны необходимые условия, включающие в себя сопряженное дифференциальное включение Эйлера, график которого является некоторым нормальным конусом. При этом мы используем более узкий нормальный конус, чем нормальный конус Кларка или даже частично овыпукленный предельный нормальный конус (см. [3]).

Напомним некоторые понятия и утверждения. Пусть задано многозначное отображение $F\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ и рассмотрим дифференциальное включение

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{п.в. } t \in T := [t_0, t_1]. \tag{1}$$

Для любого $C_0 \subset \mathbb{R}^n$ через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ обозначаем множество всех F-траекторий $x \in AC(T, \mathbb{R}^n)$ дифференциального включения (1) на интервале T при условии, что $x(t_0) \in C_0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00209а).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No 18-01-00209a).

Рассмотрим экстремальную задачу Майера на отрезке $T := [t_0, t_1]$:

$$\text{Minimize}\,\{\varphi(x(t_1)) \mid x \in \mathcal{R}_T(F, C_0);\ x(t_1) \in C_1;\ C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^n\}. \qquad (2)$$

Эта задача состоит в нахождении минимума заданной локально липшицевой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ на множестве концевых точек всех F-траекторий дифференциального включения (1), у которых начальные значения $x(t_0)$ выбираются из $C_0 \subset \mathbb{R}^n$, а концевые значения $x(t_1)$ выбираются из подмножества $C_1 \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть некоторая F-траектория $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ является решением данной экстремальной задачи (2). Приведем локальные условия на отображение F в задаче (2) около кривой $\widehat{x}$:

Гипотеза 0 (измеримость). Многозначное отображение $F\colon T\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ является $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}$-измеримым и для каждого $t \in T$ множество Graph $F(t,\cdot)$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Гипотеза 1 (псевдо-липшицевость). Существуют число $\varepsilon \in (0,1)$, функция $l \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$, $l(t) > 0$ п.в., и измеримая функция $R : T \to (0, +\infty]$ такие, что для каждой пары точек (t, x_1), (t, x_2) из трубки $W := \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \|x - \widehat{x}(t)\| \le \varepsilon\}$ справедливо включение

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}, \qquad (3)$$

где по определению

$$G(t, x) := F(t, x) \cap (\widehat{x}'(t) + R(t)B_1(0)). \qquad (4)$$

Гипотеза 2 (невырожденность). Для функций l и R, заданных в гипотезе 1, существует число $\nu \in (0, \frac{1}{\varepsilon})$ такое, что при почти всех $t \in T$ справедливо неравенство $l(t) \le \nu\, R(t)$.

Определение 1. *Отображение $F\colon T \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ называется измеримым псевдо-липшицевым около F - траектории $\widehat{x}$ если существуют числа $\nu > 0$ и $\varepsilon \in (0, \min\{1; \frac{1}{\nu}\})$, а также функции l и R, при которых справедливы гипотезы 0 - 2 .*

Рассмотрим также следующее предположение.

Гипотеза 3. Для заданных отображения F и F-траектории $\widehat{x}$ существует многозначное измеримое отображение $K : T \rightsquigarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, значения которого являются замкнутыми выпуклыми конусами, удовлетворяющее для почти всех $t \in T$ включениям

$$\begin{aligned} &T_C(\text{Graph}\ \ F(t,\cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}\,'(t))) \\ &\qquad\qquad \subset K(t) \subset T_L(\text{Graph}\ \ F(t,\cdot); (\widehat{x}(t), \widehat{x}\,'(t))). \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь определение касательного конуса Кларка T_C смотрите в [4], §2.4, а определение нижнего касательного конуса T_L смотрите в [5].

Теорема 2.([2]) *Пусть траектория* $\widehat{x} \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ *является локальным решением исходной проблемы Майера (2). Пусть отображение* F *является измеримым псевдо-липшицевым около кривой* $\widehat{x}$ *(см. определение 1). Пусть конусы* $K(t)$ *удовлетворяют гипотезе 3. Пусть* K_0 *и* K_1 *некоторые шатры Болтянского ко множествам* C_0 *и* C_1 *в точках* $\widehat{x}(t_0)$ *и* $\widehat{x}(t_1)$ *соответственно. Пусть задана выпуклая положительно однородная функция* $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$*, удовлетворяющая неравенству* $D_L^+\varphi(\widehat{x}(t_1))(x) \leq \psi(x) < \infty$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$*. Тогда существуют число* $\lambda \geq 0$ *и кривая* $p \in AC(T, \mathbb{R}^n)$ *такие, что выполнены: 1) условия нетривиальности:* $\lambda + \|p\|_{AC} > 0$*, 2) условия трансверсальности:*

$$p(t_0) \in K_0^0, \quad -p(t_1) \in K_1^0 + \lambda\partial\psi(0), \tag{6}$$

3) кривая p *удовлетворяет дифференциальному включению Эйлера:*

$$(p'(t), p(t)) \in K^0(t), \quad \text{при п.в. } t \in T, \tag{7}$$

где K_0^0, K_1^0, $K^0(t)$ *- суть полярные конусы ко множествам* K_0, K_1, $K(t)$ *соответственно.*

Пример

Предметом нашего доклада является следующий пример задачи Майера (2). Пусть размерность пространства $n = 1$, а интервал времени $T := [0, 1]$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ такова, что $f(x) = f(-x)$ для $x \in \mathbb{R}^1$ и $f(x) = 1/2$ для x, у которых $|x| \geq 1$. При $x \in [0, 1]$ функция f является непрерывной кусочно аффинной (ломаной) функцией со счетным числом сегментов, при этом график функции заключен между параболой $y = x^2/2$ и прямой $y = 0$ с угловыми точками на этих двух кривых. Все сегменты этой кусочно аффинной функции имеют углы наклона с осью Ox равными $\pm\pi/4$, и при убывании аргумента x от 1 до 0 знаки углов чередуются. Пусть также выбрана такая функция $l \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^1_+)$, $l(t) > 0$, которая не ограничена на любом открытом интервале.

Определим отображение $F(t, x) := l(t)\{y \in \mathbb{R}^1 \mid f(x) \leq y \leq x^2\} \cup \{y \in \mathbb{R}^1 \mid y \geq 2x^2\}$ для $t \in [0, 1]$ и $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда при любом выборе чисел $\nu > 0$, $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{1}{4}, \frac{1}{\nu}\})$ и функции $R(t) \geq \nu l(t)$ отображение F является измеримым псевдо-липшицевым около $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Задача Майера состоит в минимизации значений $x(1)$ по всем траекториям дифференциального включения $x' \in F(t, x)$, удовлетворяющим начальному условию $x(0) = 0$. Очевидно, что $\widehat{x}(t) \equiv 0$ является решением этой задачи.

Легко проверить, что нижний касательный конус ко множеству $\text{Graph}\, F(t, \cdot)$ в точке 0 равен следующему: $T_L(\text{Graph}\, F(t, \cdot); 0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$. Выбирая $K(t) := T_L(\text{Graph}\, F(t, \cdot); 0)$, вычислим его полярный конус, а именно: $K^0(t) = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid q = 0,\, p \leq 0\}$. Таким образом, необходимые условия (7) (дифференциальное включение Эйлера) принимают простую форму: $p'(t) = 0$, $p(t) = \text{Const} \leq 0$. Из условий трансверсальности получаем $\lambda = 1$ и $p(t) \equiv -1$.

В свою очередь, легко проверить, что предельный нормальный конус ко множеству $\text{Graph}\, F(t, \cdot)$ в точке 0 для п.в. $t \in [0, 1]$ имеет вид: $N^L_{\text{Graph}\, F(t,\cdot)}(0) = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid |q| + l(t)p \leq 0\} \cup \{(q, p) \mid q = 0, p \geq 0\}$. По теореме 3.1.1 [3] необходимые условия в виде дифференциального включения Эйлера для кривой p имеет более сложный вид : или $|p'(t)| + l(t)p(t) \leq 0$ п.в., или $p(t) = \text{Const} \geq 0$ п.в.

В итоге показали, что в указанном примере необходимые условия, полученные в работе [2], записанные через полярные конусы, дают более точные необходимые условия по сравнению с другими необходимые условиями, известными в литературе (например, в [3, 6, 7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Polovinkin E. C.* On Continuous Variations of Trajectories of Differential Inclusion with Unbounded Right-Hand Side // Optimization. 2019. P. 1–26. DOI: https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1626385

[2] *Половинкин Е. С.* Прямой метод Понтрягина для оптимизационных задач с дифференциальным включением. // Тр. Матем. инст. им. В.А.Стеклова РАН. 2019. Т. 304. С. 257–272.

[3] *Clarke F. H.* Necessary Conditions in Dynamic Optimization. Providence : AMS, 2005. 113 p.

[4] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М. : Наука. 1988.

[5] *Aubin, J. P. and H. Frankowska.* Set-Valued Analisys. Boston ; Basel ; Berlin : Birkhäuser. 1990.

[6] *Vinter R. B.* Optimal Control. Boston : Birkhäuser, 2000.

[7] *Mordukhovich B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation I, II.* Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1

УДК 517.518.862

О НЕРАВЕНСТВЕ В. В. АРЕСТОВА

Н. В. Попов (Москва, Россия)
popov.niikita@gmail.com

В неравенстве $\int_{\mathbb{T}} \varphi(|D^\alpha t_n(x)|)dx \le \int_{\mathbb{T}} \varphi(\tilde{\varkappa} \cdot |t_n(x)|)dx$ изучается наилучшая константа $\tilde{\varkappa}$, где $\varphi(x)$ — функция класса Арестова. В частности, для величины $\varkappa(\alpha,n,p) = \sup\limits_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv 0} \frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}$ справедливо: для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $p \in [0;+\infty]$ справедливо $\varkappa(\alpha,1,p) = 1$, для $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ и для любых $\alpha \in \{1,2,\ldots,2n-3\} \cup [2n-2,\infty)$ и $p \in [0;+\infty]$ справедливо $\varkappa(\alpha,n,p) = n^\alpha$.

Ключевые слова: неравенство Бернштейна, класс Арестова, дробная производная.

ABOUT THE V. V. ARESTOV INEQUALITY

N. V. Popov (Moscow, Russia)
popov.niikita@gmail.com

In the inequality $\int_{\mathbb{T}} \varphi(|D^\alpha t_n(x)|)dx \le \int_{\mathbb{T}} \varphi(\tilde{\varkappa} \cdot |t_n(x)|)dx$, the best constant $\tilde{\varkappa}$ is studied, where $\varphi(x)$ belongs to Arestov class function.

In particular, for the value $\varkappa(\alpha,n,p) = \sup\limits_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv 0} \frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}$ we have the following: for any $\alpha \in \mathbb{R}$ and $p \in [0;+\infty]$, $\varkappa(\alpha,1,p) = 1$; for $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ and for any $\alpha \in \{1,2,\ldots,2n-3\} \cup [2n-2,\infty)$ and $p \in [0;+\infty]$, $\varkappa(\alpha,n,p) = n^\alpha$.

Keywords: Bernstein's inequality, Arestov class, fractional derivative.

Введение

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi;\pi]$ – тор, $L_p(\mathbb{T})$, $p \ge 1$ — пространство суммируемых в p-ой степени функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Рассмотрим функционал $\|\cdot\|_p$, $0 \le p \le +\infty$. Для $0 < p < +\infty$ считаем, что он определён формулой (1). Для крайних p полагаем

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_C = \max_{x\in\mathbb{T}} |f(t)|,$$
$$\|f\|_0 = \lim_{p\to 0+} \|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(t)|\,dt\right).$$

Ниже мы будем рассматривать данный функционал на пространстве тригонометрических полиномов.

Исследуется задача о нахождении наилучшей константы $\varkappa(\alpha, n, p)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha t_n\|_p \le \varkappa(\alpha, n, p)\, \|t_n\|_p, \quad p \in [0, \infty],$$

где D^α— оператор дробно-линейного дифференцирования для $\alpha \ge 0$. Исследовалась величина

$$\varkappa(\alpha, n, p) = \sup_{t_n \in \tau_n, t_n \not\equiv 0} \frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}. \tag{2}$$

Данная величина исследовалась во многих работах в более общем виде, отметим некоторые последнии работы [3], [4].

Основные результаты

Определение. *Определим класс функций Арестова. Будем писать* $\varphi \in A$, *если* $\varphi \in AC[a, b], \forall [a, b] \subset (0, \infty)$, *и* $\varphi(s), s \cdot \varphi'(s)$ *- неубывающие функции. Рассмотрим наименьшую положительную константу* $\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi)$ *для которой справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|D^\alpha t_n(x)|)dx \le \int_{\mathbb{T}} \varphi(\tilde{\varkappa} \cdot |t_n(x)|)dx. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть* $\varphi \in A$, $t \in T_n$.*При* $n = 1$ *выполнено* $\tilde{\varkappa}(\alpha, 1, \varphi) = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. *При* $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *для любого* $\alpha \in \{1, 2, \dots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$, $p \in [0; +\infty]$ *справедливо* $\tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi) = n^\alpha$.
Следствие. *Пусть либо* $n = 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$, *либо* $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *и* $\alpha \in \{1, 2, \dots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$. *Тогда справедливо* $\|D^\alpha t_n\|_p \le n^\alpha \|t_n\|_p, \quad p \in [0, \infty]$.

Данный результат согласуется с работой [4]. В которой получены следующие оценки: $\varkappa(\alpha, 2, 0) = 2^\alpha$, для $\alpha = \{1\} \cup [2, \infty)$. $\varkappa(\alpha, 2, 0) > 2^\alpha$, для $\alpha = [0; 1) \cup (1; 2)$.

Автором ранее анонсировался результат при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ в работе [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Арестов В. В.* О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.

[2] *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, вып. 1. С. 3–22

[3] *Glazyrina P. Yu.* Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // Journal of Approximation Theory. 2010. Vol. 162. C. 1204–1210.

[4] *Арестов В. В., Глазырина П. Ю.* Неравенство Бернштейна-Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.

[5] *Kozko A. I.* The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 391416.

[6] *Козко А. И.* О неравенстве Арестова–Бернштейна–Сёге для тригонометрических полиномов. // Чебышёвский сборник. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе. 2015. Т. 16, № 4, С. 68–71.

[7] *Сегё Н.* Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.

[8] *Попов Н. В.* О неравенстве С. Н. Бернштейна // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 249–252.

УДК 517.977, 519.7

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С. С. Постнов (Москва, Россия)
postnov.sergey@inbox.ru

В работе рассматриваются две задачи оптимального управления для систем с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается линейными интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача быстродействия при заданном ограничении на норму управления. При этом анализируются случаи, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера, Эрдейи-Кобера, Катугамполы, Сайго и Атанганы-Балеану. Эти задачи сведены к l-проблеме моментов, для которой получены условия корректности и разрешимости. В ряде случаев получены аналитические решения поставленных задач оптимального управления и исследованы их свойства, а также проведено сравнение свойств решений, получаемых для операторов дробного дифференцирования разного типа.

Ключевые слова: оптимальное управление, l-проблема моментов, дробная производная.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR THE SYSTEMS, MODELED BY FRACTIONAL-ORDER EQUATIONS WITH MULTI-PARAMETRIC DERIVATIVES

S. S. Postnov (Moscow, Russia)
postnov.sergey@inbox.ru

In this paper two optimal control problems considered for the systems with lumped parameters which dynamics described by linear fractional-order integro-differential equations: the problem of control search with minimal norm at given control time and the problem of time-optimal control search at given constraint on control norm. Herewith several cases analyzed when fractional differentiation operator defined in sense of Hilfer, Erdélyi-Kober, Katugampola, Saigo or Atangana-Baleanu. These problems reduced to l-problem of moments. There are conditions of correctness and solvability obtained for the problem. In some cases analytical solutions of optimal control problems derived and its properties studied. Comparison of these properties evaluated in cases corresponding to different types of fractional derivative operator.

Keywords: optimal control, l-problem of moments, fractional derivative.

Введение

Исследование систем дробного порядка с управлением и, в частности, задач оптимального управления такими системами представляет собой относительно новое и активно развивающееся направление. Заметный рост количества публикаций по данной тематике начался в 2000-х гг. и продолжается поныне. В настоящее время для данного класса систем уже известен ряд базовых результатов, таких, например, как вывод уравнений

Эйлера-Лагранжа, решение задач оптимального управления с квадратичным функционалом качества, доказательство аналога принципа максимума Л. С. Понтрягина и др. [1–4]. В работах [3, 5, 7] для решения задач оптимального управления системами дробного порядка при явных ограничениях на норму управления был применён метод моментов.

Следует отметить, что большинство полученных на сегодня результатов (включая вышеперечисленные) относятся к системам, описание которых даётся уравнениями дробного порядка с производной Капуто или Римана-Лиувилля. Заметно меньше работ посвящено рассмотрению производных других типов, например Рисса или Адамара. В то же время, в литературе известно несколько десятков альтернативных определений дробной производной, на основе которых строятся модели реальных физических, биологических и экономических систем. Для таких систем актуальны и задачи управления, в том числе оптимального, что делает необходимым исследования задач оптимального управления для моделей с другими типами дробной производной.

В настоящей работе исследуются задачи оптимального управления для линейных систем с сосредоточенными параметрами, модели которых формулируются в терминах интегро-дифференциальных уравнений с многопараметрическими производными. Данный тип производных отличается от "простых" однопараметрических производных не просто наличием дополнительных параметров у оператора дифференцирования, но и тем, что при определённых их значениях многопараметрическая производная сводится к одной из однопараметрических. Т.е., многопараметрические производные объединяют в себе сразу несколько однопараметрических и, следовательно, обладают большей универсальностью.

1. Постановка задачи

Пусть функции $q(t)$ и $u(t)$ определены на полуинтервале $t \in (t_0, T]$ и задают соответственно состояние системы и управление. Будем рассматривать линейные системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами, динамика которых определяется уравнениями следующего вида:

$$ {}_{t_0}D_t^{\sigma} q(t) = a(t)q(t) + b(t)u(t), \tag{1} $$

где ${}_{t_0}D_t^{\sigma}$ – левосторонний оператор дробного дифференцирования, $t \in (t_0, T]$, $a(t)$ и $b(t)$ – некоторые известные непрерывные функции времени. В работе рассматриваются случаи, когда оператор ${}_{t_0}D_t^{\sigma}$ понимается в смысле Хильфера, Катугамполы, Эрдейи-Кобера, Сайго или Атанганы-Балеану. Системы, которые описываются уравнением (1) с одним из перечисленных операторов дробного дифференцирования далее называются соответственно системами Хильфера, Катугамполы, Эрдейи-Кобера, Сайго или Атанганы-Балеану. Показатель дробного дифференцирования σ является составным и подразумевает набор из двух или трех чисел. Допустимые управления $u(t)$ считаются элементами пространства $L_p(t_0, T]$, $p > 1$.

Для системы (1) задаются начальные условия следующего вида:

$$\lim_{t \to t_0+} \left[{}_{t_0}I_t^{\sigma} q(t) \right] = s^0(t_0), \tag{2}$$

где ${}_{t_0}I_t^{\sigma}$ – оператор дробного интегрирования. Конечные условия для системы (1) задаются в виде:

$$q(T) = q^T(T). \tag{3}$$

Исследуются следующие две задачи оптимального управления.

Задача А. *Найти управление $u(t)$, $t \in (t_0, T]$, такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3) и при этом норма управления в пространстве $L_p(t_0, T]$, $p > 1$ достигла минимального значения, когда значения t_0 и T заданы.*

Задача Б. *Найти управление $u(t) \in L_p(t_0, T]$, $t \in (t_0, T]$, такое, чтобы система (1) перешла из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3) и при этом время управления $T - t_0$ было минимальным при условии $\|u\| \leq l$, $l > 0$, где l задано.*

В работе демонстрируется, что задачи А и Б для уравнений с производными вышеуказанных типов сводятся (аналогично работам [3, 5, 7]) к l-проблеме моментов [4].

2. Исследование l-проблемы моментов

В данном разделе приведены основные результаты, касающиеся вопросов корректности и разрешимости l-проблемы моментов, а также её решения для уравнений с производными разного типа.

Теорема 1 [9]. *Пусть задана система (1), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Хильфера с показателем $\sigma = (\alpha, \mu)$, а функции $a(t)$ и $b(t)$ не зависят от времени. Тогда l-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима, если выполнено следующее условие:*

$$\alpha > \frac{1}{p}. \tag{4}$$

.

Теорема 2 [10]. *Пусть задана система* (1), *в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Эрдейи–Кобера с показателем* $\sigma = (\alpha, \beta, \delta)$. l*-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима в следующих случаях:*

- *для* $a = 0$, $b = 1$ *при выполнении условий*

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + 1) > \frac{1}{p}; \tag{5}$$

- *для* $a = \lambda t^{\beta\delta}$, $b = t^{\beta\delta}$ $(\lambda \neq 0)$ *при выполнении условий*

$$\delta > \frac{1}{p}, \quad \beta(\alpha + \delta + 1) > \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть задана система* (1) *при* $a(t) = 0$, $b(t) = 1$, *в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Катугамполы [11] с показателем* $\sigma = (\rho, \alpha)$. l*-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима при выполнении следующих условий:*

$$\alpha > \frac{1}{p}, \quad \rho > p. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть задана система* (1) *при* $a(t) = 0$, $b(t) = 1$, *в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Атанганы–Балеану [12] с показателем* α. l*-проблема моментов для такой системы будет корректна и разрешима при выполнении условия:*

$$\alpha > \frac{1}{p}. \tag{8}$$

Замечание 1. Аналогичные результаты можно получить и для систем Сайго и Фабрицио–Капуто. Последний тип наряду с производной Атанганы–Балеану представляет отдельный интерес, поскольку относится к так называемым дробным операторам с несингулярным ядром.

Замечание 2. В тех случаях, когда l-проблема моментов является корректной и разрешимой для неё можно построить точное решение, представляющее собой оптимальное управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Agrawal O. P.* A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlin. Dyn. 2004. Vol. 38. P. 323–337.

[2] *Tricaud C., Chen Y. Q.* Time-Optimal Control of Systems with Fractional Dynamics // Int. J. Diff. Eq. 2010. Vol. 2010. PaperID 461048.

[3] *Mozyrska D., Torres D. F. M.* Modified Optimal Energy and Initial Memory of Fractional Continuous-Time Linear Systems // Signal Proc. 2011. Vol. 91, № 3. P. 379–385.

[4] *Kamocki R.* Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. Vol. 37, № 11. P. 1668–1686.

[5] *Постнов С. С.* Исследование задачи оптимального управления для одиночного и двойного интеграторов дробного порядка с помощью метода моментов // Проблемы управления. 2012. № 5. С. 9–17.

[6] *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.

[7] *Постнов С. С.* Задачи оптимального управления для линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Адамара // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 2. С. 143–147.

[8] *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. М. : Наука, 1975. 568 с.

[9] *Постнов С. С.* Задачи оптимального управления для некоторых линейных систем дробного порядка, заданных уравнениями с производной Хильфера // Проблемы управления. 2018. № 5. С. 14–25.

[10] *Постнов С. С.* l-Проблема моментов для одномерных линейных интегро-дифференциальных уравнений с операторами Эрдейи–Кобера // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 6. С. 659–662.

[11] *Katugampola U. N.* Existence and uniqueness results for a class of generalized fractional differential equations. arXiv:1411.5229v2. 2016 (9 pages).

[12] *Jarad F., Abdeljawad T., Hammouch Z.* On a class of ordinary differential equations in the frame of Atangana–Baleanu fractional derivative // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. Vol. 117. P. 16–20.

УДК 517.977, 519.7

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. А. Постнова (Москва, Россия)

postnova@ipu.ru

В работе исследовалась задача оптимального управления для систем дробного порядка с сосредоточенными и распределенными параметрами. В первом случае исследование проводилось на примере двойного интегратора. Во втором случае изучалось подвижное управление для системы описываемой уравнением типа уравнения диффузии с дробной производной по времени. В обоих случаях использовался метод l-проблемы моментов. Для двойного интегратора точно решена линейная двумерная проблема моментов, а для системы с распределенными параметрами исследована нелинейная бесконечномерная проблема моментов, для которой получено решение в рамках конечномерной аппроксимации.

Ключевые слова: оптимальное управление, l-проблема моментов, дробная производная.

OPTIMAL MOTION CONTROL OF FRACTIONAL ORDER SYSTEMS WITH CONCENTRATED AND DISTRIBUTED PARAMETERS

E. A. Postnova (Moscow, Russia)

postnova@ipu.ru

The optimal control problem for fractional order systems with concentrated and distributed parameters was investigated. In the first case, the study was conducted on the example of a double integrator. In the second case, movable control was studied for a system described by an equation of the diffusion equation type with a fractional derivative in time. In both cases, the l-moment problem method was used. For double integrator parameters, the linear two-dimensional moment problem is precisely solved, and for a system with distributed parameters, the nonlinear infinite-dimensional moment problem is investigated, for which a solution is obtained in the framework of a finite-dimensional approximation.

Keywords: optimal control, l-problem of moments, fractional derivative.

Введение

Сравнительно недавно в моделировании динамических систем с управлением стали использовать интегро-дифференциальное исчисление дробного порядка (дробное исчисление) [1]. Этот математический аппарат позволяет учитывать наличие нелокальных пространственных и временных зависимостей. Например, в вязкоупругих системах, в физике фрактальных сред и т.д. В данной работе основное внимание уделяется исследованию систем дробного порядка с сосредоточенными и распределенными параметрами. В качестве системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами была выбрана линейная система — двойной интегратор. При этом управление задавалось в виде существенно ограниченной функции. Такая модель используется для реальных систем, когда управляющее воздействие осуществляется с помощью переключателей (реле). В качестве системы с распределёнными параметрами рассматривается система, описываемая уравнением диффузии с дробной производной по времени и для неё исследуется задача подвижного управления.

1. Система с сосредоточенными параметрами

Двойной интегратор математически описывается системой уравнений следующего вида:

$$
\begin{aligned}
{}_{t_0}D_t^{\rho_1} q_1(t) &= q_2(t), \\
{}_{t_0}D_t^{\rho_2} q_2(t) &= u(t),
\end{aligned} \tag{1}
$$

где функции $q_1(t), q_2(t)$ и $u(t)$ определяют состояние и управление соответственно; $t \in (t_0, T]$, $T > t_0 > 0$. Управление $u(t)$ считается элементом пространства $L_\infty(t_0, T]$. Оператор дробного дифференцирования ${}_{t_0}D_t^{\rho_i}$, в формуле (1) понимается в смысле Хильфера [2]. Индекс ρ_i в первом случае является составным, $\rho_i = (\alpha_i, \mu_i)$, $\alpha_i \in (0,1]$, $\mu_i \in [0,1]$, $i = 1,2$. Начальные условия для системы (1) задаются в виде:

$$
\lim_{t \to t_0+} \left[{}_{t_0}I_t^{\sigma_i} q_i(t)\right] = s_i^0, i = 1,2. \tag{2}
$$

Конечные условия для системы (1) задаются в виде:

$$
q_i(T) = q_i^T, i = 1,2. \tag{3}
$$

Задача оптимального управления: найти управление $u(t)$, переводящее систему (1) из заданного начального состояния, определяемого условиями (2), в заданное конечное состояние (3), и имеющее минимальную норму $\|u(t)\|$ при заданном времени управления $T - t_0$ (времени перехода системы из начального состояния в конечное). Здесь $\|u(t)\| = \operatorname{vrai}\max_{t \in (t_0,T]} u(t)$. Можно показать [3], что поставленная задача оптимального управления для исследуемой системы (1) сводится к l-проблеме моментов [4]. В свою очередь, l-проблема моментов для системы (1) сводится к задаче поиска минимума следующей функции [5]:

$$
F(\xi_2) = \int_{t_0}^{T} \left| \frac{1 - c_2\xi_2}{c_1} g_1(\tau) + \xi_2 g_2(\tau) \right| d\tau, \tag{4}
$$

где $\xi_2 \in (-\infty, \infty)$ — действительная переменная, $c_{1,2}$ — моменты, определяемые из конечных и начальных условий.

Теорема 1. *Функция $F(\xi_2)$, определяемая формулой (4) может достигать своего минимума в точках, лежащих только на следующих интервалах:*

$$\xi_2 \in \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, \frac{1}{c_2}\right) \quad \text{при } c_1 < 0,\ c_2 > 0, \xi_2 \in \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, 0\right) \quad \text{при } c_1 > 0,\ c_2 < 0,$$

$$\xi_2 \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, \infty\right) \quad \text{при } c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_2 - kc_1 > 0,$$

$$\xi_2 \in \left(\frac{1}{c_2 - kc_1}, 0\right) \quad \text{при } c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_2 - kc_1 < 0, \tag{5}$$

$$\xi_2 \in (-\infty, 1/c_2) \cup (0, \infty) \quad \text{при } c_1 < 0,\ c_2 < 0,\ c_2 - kc_1 < 0,$$

$$\xi_2 \in \left(0, \frac{1}{c_2 - kc_1}\right) \quad \text{при } c_1 < 0,\ c_2 < 0,\ c_2 - kc_1 > 0,$$

где

$$k = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)} (T - t_0)^{-\alpha_1} & \text{для системы Хильфера,} \\ \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_2)} \left(\ln \frac{T}{t_0}\right)^{-\alpha_1} & \text{для системы Адамара} \end{cases}$$

В работе построено решение проблемы моментов, позволяющее вычислить оптимальное управления для системы (1) и исследовано поведение этого решения при варьировании параметров, начальных и конечных условий.

2. Система с распределенными параметрами

В качестве динамической системы дробного порядка с распределенными параметрами рассматривается такая система, поведение которой описывается уравнением типа уравнения диффузии следующего вида:

$${}_0D_t^\alpha Q(x,t) = K \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), t > 0, 0 < x < L,$$

где функции $Q(x,t) \in AC(0,T] \times (0,L]$ и $u(x,t) \in L_p(0,T]$, $p > 1$ определяют состояние и управление системы соответственно; K — коэффициент диффузии; ${}_0D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования Капуто [1] порядка α, $0 < \alpha < 1$. Начальное и конечное условия задавались следующим образом:

$$Q(x,0) = Q_0(x), Q(x,T) = Q^*(x), T > 0.$$

В случае подвижного управления функция управления $u(x,t)$ будет иметь следующий вид:

$$u(x,t) = I(t)\psi[x - x_0(t), \sigma(t)],$$

где функция $I(t) \in L_p[0,T]$ определяет интенсивность управляющего воздействия; функция $\psi[x - x_0(t), \sigma(t)]$ отвечает за форму пространственного распределения управляющего воздействия, при этом $\sigma(t)$ является параметром формы распределения, а $x_0(t) \in L_p[0,T], 1 < p < \infty$ задаёт закон движения управляющего воздействия.

Задача оптимального управления ставится аналогично случаю систем с сосредоточенными параметрами, где отличие заключается лишь в определении управляющего воздействия. В свою очередь задача подвижного управления сведена к нелинейной бесконечномерной проблеме моментов следующего вида:

$$\int_0^T g_n(t,T) I(t) X_n[x_0(t)] dt = Q_n^* - Q_{0n} E_\alpha(-\mu_n T^\alpha),$$

где $g_n(t,T) = -\mu_n E_{\alpha,\alpha}[-\mu_n (T-t)^\alpha](T-t)^{\alpha-1}$; $X_n[x_0(t)]$ и μ_n — собственные функции и собственные значения соответсвующей краевой задачи, Q_n и $Q_0 n$ — коэффициенты разложения соответствующих величин по системе собственных функций.

Заключение

Задачу оптимального управления системы с распределенными и сосредоточенными параметрами можно решать аналогично, сводя к l-проблеме моментов. Отличие будет заключаться в форме проблемы моментов (линейная конечномерная или нелинейная бесконечномерная соответственно). Для системы с сосредоточенными параметрами (двойного интегратора) были получены точные и приближённые аналитические решения задачи оптимального управления в ряде частных случаев и приведены результаты некоторых численных расчётов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kilbas A. A., Srivastava H. M.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam : Elsevier, 2006.

[2] *Hilfer R.* Fractional time evolution. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore : World Scientific, 2000.

[3] *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.

[4] *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. М. : Наука, 1975. 568 с.

[5] *Постнова Е. А.* Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором дробного порядка // Проблемы управления. 2018. № 2. С. 40–46.

УДК 517.53

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ В КЛАССЕ И. И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ[1]

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия),
Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

В работе исследуется инвариантность классов И. И. Привалова относительно оператора дифференцирования.

Ключевые слова: класс Привалова, гипотеза Блоха–Неванлинны, оператор дифференцирования.

ON THE DIFFERENTIATION IN THE PRIVALOV CLASSES IN A DISK[1]

E. G. Rodikova (Bryansk, Russia)
F. A. Shamoyan (Saratov, Russia)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

The invariance of the Privalov classes with respect to the differentiation operator is studied in this paper.

Keywords: Privalov spaces, the Bloch–Nevanlinna conjecture, differentiation operator.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И.И. Привалова:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

Отметим, что классы Π_q впервые были рассмотрены И. И. Приваловым в [2]. При $q = 1$ они совпадают с хорошо известным классом Р. Неванлинны (см. [1]).

Предположение, известное в настоящее время как гипотеза Блоха-Неванлинны, было явно сформулировано в работе Р. Неванлинны в 1929 г., и состояло в следующем: производная любой аналитической в единичном круге функции ограниченной характеристики является функцией ограниченной характеристики. Наиболее известный результат, опровергающий эту гипотезу, принадлежит О. Фростману (см. [4]). Он доказал, что существует произведение Бляшке, производная которого не

[1]Первый автор поодержан грантом РФФИ, научный проект № 18-31-00180 мол-а
Второй автор поддержан грантом РФФИ, научный проект №17-51-15005-НЦНИ

[1]The work was financially supported by Russian Foundation for Fundamental Research (projects 18-31-00180 and 17-51-15005).

является функцией с ограниченной характеристикой. Вопросы инвариантности относительно интегро-дифференциальных операторов других классов аналитических функций исследовались многими математиками. Краткий обзор результатов в этом направлении содержится в работе С.В. Шведенко [3].

Сформулируем гипотезу Блоха-Неванлинны в классах И.И. Привалова: каково бы ни было $q > 0$ производная любой аналитической в единичном круге функции из класса Π_q принадлежит классу Π_q.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *В классах И.И. Привалова* $\Pi_q\,(0 < q < +\infty)$ *гипотеза Блоха–Неванлинны неверна.*

Таким образом, установлено, что классы Π_q не инвариантны относительно оператора дифференцирования не только при $q = 1$, но и при всех $0 < q < +\infty$. Отметим, что метод доказательства этого утверждения восходит к работе У. Хеймана [5].

Естественно возникает вопрос, какому классу будет принадлежать производная функции из пространства И.И. Привалова.

При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И. И. Привалова по площади:

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < +\infty$. *Если* $f \in \Pi_q$, *то* $f' \in \tilde{\Pi}_q$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1941. 388 с.

[2] *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций М. : Изд-во МГУ, 1941. 206 с.

[3] *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1985. Т. 23, С. 3–124.

[4] *Frostman O.* Sur les produits des Blaschke // Kungl. Fysiografiska Sallskapets i Lund Forhandlingar 1942. Vol. 12, № 15. P. 169 –182.

[5] *Hayman W.K.* On the characteristics of functions meromorphic in the unit disk and of their integrals // Acta. math. 1964. Vol. 112, № 3–4. P. 181–214.

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)
rykhlovvs@yandex.ru

Рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на положительном луче. На коэффициенты уравнения и краевых условий наложены такие условия, что отсутствует двукратная полнота корневых функций соответствующей спектральной задачи. Получены различные достаточные условия разрешимости данной задачи.

Ключевые слова: смешанная задача для гиперболического уравнения, разрешимость, существование решения, единственность решения, двукратная неполнота корневых функций.

ON THE SOLVABILITY OF THE MIXED PROBLEM FOR A CLASS HYPERBOLIC EQUATIONS IN THE ABSENCE OF COMPLETENESS OF THE ROOT FUNCTIONS

V. S. Rykhlov (Saratov, Russia)
rykhlovvs@yandex.ru

A mixed problem for a second-order hyperbolic equation with constant coefficients is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on a positive ray. Such conditions are imposed on the coefficients of the equation and the boundary conditions that there is no two-fold completeness of the root functions of the corresponding spectral problem. Various sufficient conditions for the solvability of this problem are obtained.

Keywords: mixed problem for a hyperbolic equation, solvability, existence of a solution, uniqueness of a solution, two-fold incompleteness of root functions.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для функции $u(x,t)$

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,+\infty), \tag{1}$$

$$\big(\alpha_{i1} u_x(0,t) + \alpha_{i2} u_t(0,t)\big) + \big(\beta_{i1} u_x(1,t) + \beta_{i2} u_t(1,t)\big) = 0,\ i = 1,2, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \quad u_t(x,0) = f_1(x), \tag{3}$$

где $p_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in \mathbb{C}$.

Предположим, что уравнение (1) гиперболического типа, то есть $p_1^2 - 4p_2 > 0$, и корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенствам

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{4}$$

Требуется найти классическое решение задачи (1)–(3), то есть такую функцию $u(x,t)$, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Для нахождения классического решения задачи (1)–(3) будем использовать метод контурного интеграла или вычетный метод [1]. В последнее время большой вклад в обоснование этого метода при весьма широких предположениях внесли А.П. Хромов и его ученики [2].

Задаче (1)–(3) сопоставим спектральную задачу $L(\lambda)y = 0$ для пучка $L(\lambda)$ вида:

$$\ell(y, \lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y, \tag{5}$$

$$U_i(y, \lambda) := \big(\alpha_{i1}y'(0) + \lambda\alpha_{i2}y(0)\big) + \big(\beta_{i1}y'(1) + \lambda\beta_{i2}y(1)\big) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Функции $y_1(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell(x, \lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$.

Далее для определенности считаем, что $\alpha_{i1} \neq 0$ или $\beta_{i1} \neq 0$ при каждом $i = 1, 2$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются, только изменятся обозначения.

Обозначим $V_j = (v_{1j},\ v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j},\ w_{2j})^T$; $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$, где $v_{ij} = \alpha_{i1}\omega_j + \alpha_{i2}$, $w_{ij} = \beta_{i1}\omega_j + \beta_{i2}$, $j, s, k = 1, 2$.

Пусть всюду далее выполняются условия

$$a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0, \tag{7}$$

то есть справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_i(y_j, \lambda)\big)_{i,j=1}^{2} = \lambda^2 \left(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2}\right) =: \lambda^2\Delta_0(\lambda). \tag{8}$$

и, следовательно, пучок (5)–(6) является сильно нерегулярным [3]– [4].

Из (7)–(8) следует, что краевые условия (6) (или (2)) эквивалентны полураспадающимся краевым условиям, а система корневых функций пучка (5)–(6), как показано в [5] (см. также [6]) двукратно не полна в $L_2[0, 1]$ и имеет бесконечный дефект. Условия существования и единственности решения смешанной задачи (1)–(3) при таких предположениях ранее не были получены.

Далее для краткости будем использовать обозначения: $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = x/\tau$, $\beta_x = \tau x + \tau + 1$, $c_0 = -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $e_1 = a_{\bar{1}1}/a_{\bar{1}2}$, $e_2 = a_{2\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $\gamma = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Из (8) видно, что корни уравнения $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеют вид $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_2$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Пусть $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для с.з. следует, что в плоскости $\mathbb{C}$ существуют такие контуры Γ_ν, которые отстоят от λ_k на расстояние не меньшее некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, а между соседними контурами лежит ровно одно λ_k. В качестве таких контуров можно взять, например, контуры $A_\nu B_\nu C_\nu D_\nu$, где $B_\nu C_\nu$ и $D_\nu A_\nu$ есть отрезки прямых $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$ ($H > 0$ достаточно большое число), а дуги $\overset{\frown}{A_\nu B_\nu}$ и $\overset{\frown}{C_\nu D_\nu}$ лежат вне δ-окрестностей с.з., являются дугами окружностей радиусов r'_ν, r''_ν, соответственно, с центрами в начале координат ($C'_1\nu < r'_\nu < C'_2\nu$, $C''_1\nu < r''_\nu < C''_2\nu$, где $C'_1, C''_1, C'_2, C''_2 > 0$ фиксированные константы) и скользят по прямым $\operatorname{Re}\lambda = \pm H$.

Линеаризуем пучок (5)–(6), положив $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций (в.-ф.): $\hat{L}z = \lambda z$, где $z = (z_0, z_1)^T$ и

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix} z,\ D_{\hat{L}} = \Big\{ z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \Big| z'_0, z_1 \in L_1[0,1],$$

$$U_i(z) = 0,\ i = 1,2 \Big\},\ U_i(z) = \alpha_{i1}z'_0(0) + \alpha_{i0}z_1(0) + \beta_{i1}z'_0(1) + \beta_{i0}z_1(1).$$

С.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ [3, с. 102] совпадает с системой корневых в.-ф. $\hat{L}$.

Пусть $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}$ есть резольвента оператора $\hat{L}$ и $f = (f_0, f_1)^T$. Известно, что $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f\, d\lambda$ есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по корневым в.-ф. оператора $\hat{L}$ (производным цепочкам пучка $L(\lambda)$), соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура $\hat{\Gamma}_\nu$. Обозначим $(\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}f = \big(z_0(x,\lambda;f), z_1(x,\lambda;f)\big)^T$.

В [7] были получены необходимые и достаточные, а также простые достаточные условия разложения в.-ф. $f = (f_0, f_1)^T$ по корневым функциям пучка $L(\lambda)$.

Рассмотрим функцию

$$u(x,t) = \lim_{\nu\to\infty}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} z_0(x,\lambda;f)\, d\lambda\Big), \tag{9}$$

которая является формальным решением задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (4), (7),

$$f_0^{(4)},\ f_1^{(3)} \in L_1[0,1],\ f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0,\ j = 0,1,\ s = \overline{0, 3-j}, \tag{10}$$

и, кроме того, функции f_0, f_1 удовлетворяют соотношениям

$$\big(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1\omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)\big) - p_2\big(e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + F_1(x)\big) = 0,$$
$$\big(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1\omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x)\big) - \big(e_2 f'_0(\alpha_x) - e_1 f'_0(\beta_x) + f'_0(x)\big) = 0,$$

где $F_1(x) = \int\limits_0^x f_1(\xi)\,dx$ *(здесь функции считаются продолженными нулем, если аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$*). Тогда существует единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9).

Из теоремы 1 при дополнительных предположениях можно получить более простые результаты. Так, на основании [7, теорема 2], получается следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (10), $e_2 = 0$ *(это эквивалентно условию* $a_{2\bar{2}} = 0$*) и функции* f_0, f_1 *удовлетворяют соотношению*

$$f_0'(x) = \omega_2 f_1(x) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{11}$$

Тогда существует единственное классическое решение $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9).

При других предположениях из теоремы 1 можно получить еще и такие результаты.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (10), $e_1 = 0$ *(это эквивалентно условию* $W_1 = 0$*),* $e_2 \neq 0$ *и функции* f_0, f_1 *удовлетворяют соотношению*

$$e_2 f_0'\left(\frac{x}{\tau}\right) + f_0'(x) = e_2\omega_1 f_1\left(\frac{x}{\tau}\right) + \omega_2 f_1(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Тогда существует единственное классическое решение $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9).

Следствие 1. *Пусть выполняются предположения теоремы 3 и* $|e_2| \neq \tau$*. Тогда существует единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9).

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (4), (7), (10), $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ *и функции* f_0, f_1 *удовлетворяют соотношению* (11) *и* $f_1(x) = 0$, *(а, следовательно, и* $f_0'(x) = 0$*) для всех* $x \in [0, 1/\tau]$*. Тогда существует единственное классическое решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*, определяемое формулой* (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Расулов М. Л.* Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром // Матем. сб. 1959. Т. 48(90), № 3. С. 277–310.

[2] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Докл. АН. 2019. Т. 484, № 1. С. 18–20.

[3] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

[4] *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // ТВИМ. 2015. № 1(26). С. 69–86.

[5] *Рыхлов В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Математика. Механика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та , 2001. Вып.3. С. 114–117.

[6] *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.

[7] *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.

УДК 517.5

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

Е. Х. Садекова (Москва, Россия)
EKSadekova@mephi.ru

В работе рассматривается метод построения сплайн-функции для получения точных по порядку оценок приближения ограниченных функций тригонометрическими полиномами в хаусдорфовой метрике. Приведена оценка указанных приближений, полученная из неравенства Джексона для равномерных приближений.

Ключевые слова: сплайн-функция, приближение тригонометрическими полиномами, метрика Хаусдорфа.

ONE ASSESSMENT FOR BEST APPROXIMATION LIMITED FUNCTIONS BY TRIGONOMETRIC POLYNOMES IN THE HOUSDORFF METRIC

E. H. Sadekova (Moscow, Russia)
EKSadekova@mephi.ru

In this paper, we consider a method for constructing a spline function to obtain estimates of the approximation of bounded functions that are exact in order trigonometric polynomials in the Hausdorff metric. An estimate of these approximations is given obtained from Jackson's inequality for uniform approximations.

Keywords: a spline function, approximation of trigonometric polynomials, Hausdorff metric.

В вопросах приближения функций полиномами в хаусдорфовой метрике отличительной особенностью является то, что в оценках типа

$$HE_n(f) \leqslant (C + \varepsilon_n)\, \alpha_n,$$

где $HE_n(f)$ — наименьшее хаусдорфово уклонение функции $f(x)$ от полиномов порядка не выше n, $C = const > 0$, $\alpha_n \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, существенным может быть не только порядок убывания α_n, но так же значение постоянной C и членов последовательности $\{\varepsilon_n\}$.

Бл. Х. Сендов, В. А. Попов, установили [1], что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$HE_n(f) \leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{\log n}{n}$$

при $n > n(M, \varepsilon)$, где $n(M, \varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Ими также получена оценка для тригонометрических полиномов T порядка не выше n через модуль непрерывности:

$$HE_n^T(f) \leqslant \max\left\{ \frac{A}{n} \ln\left(n\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)\right), \frac{A}{n} \right\},$$

где A — абсолютная постоянная.

Т. П. Боянов [2] показал, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ HE_n(f) \frac{n}{\log(n\omega(1/n)} : f \in H^\omega \right\} = 1,$$

где H^ω — класс всех 2π-периодических функций, модуль непрерывности $\omega(f;\delta)$ которых не превосходит модуль непрерывности $\omega(\delta)$, $\omega(\delta)/\delta \to \infty$ при $\delta \to 0$.

Используя понятие среднего модуля колебания, введённое в работе Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [3], получена оценка для всех натуральных n и любой ограниченной 2π-периодической функции:

$$HE_n^T(f) \leqslant \frac{C}{n} \ln \left(e + n\omega \left(f; \frac{\pi}{n} \right) \right),$$

где C — постоянная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Сендов Бл., Попов В. А.* Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа // Матем. сб. 1972. Т. 89, № 1. С. 138–147.

[2] *Боянов Т. П.* Точная асимптотика наилучшего хаусдорфова приближения классов функций с заданным модулем непрерывности // Сердика. 1980. Т. 6. С. 84–97.

[3] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций // Матем. сб. 1976. Т. 101, № 4. С. 508–541.

УДК 517.9

О ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ[1]

Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков (Калуга, Россия)
evfs@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru, amm2005@rambler.ru

С использованием проекционного метода найдены моментные функции первого и второго порядка решения двумерного уравнения диффузии со случайными коэффициентами. В работе использовалась модель двумерной диффузии экситонов, возбужденных электронным пучком в полупроводниковом материале. Задача решалась в цилиндрической системе координат. Моментные функции решения уравнения диффузии экситонов (математическое ожидание и автокорреляционная функция) получены в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра.

Ключевые слова: диффузия, проекционный метод, моментные функции.

THE PROJECTIVE METHOD OF FINDING THE MOMENT FUNCTIONS OF THE SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL STOCHASTIC EQUATION OF DIFFUSION[1]

E. V. Seregina, M. A. Stepovich, A. M. Makarenkov (Kaluga, Russia)
evfs@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru, amm2005@rambler.ru

Using the projection method, the first and second order moment functions of the solution of the two-dimensional diffusion equation with random coefficients are found. In this work, we used the model of two-dimensional diffusion of excitons excited by an electron beam in a semiconductor material. The problem was solved in a cylindrical coordinate system. The moment functions of the solution of the exciton diffusion equation (mathematical expectation and the autocorrelation function) are obtained in the form of a partial sum of the double Fourier series of the Laguerre orthogonal polynomial system.

Keywords: diffusion, projection method, moment functions.

Для наиболее полного описания математических моделей процессов, происходящих при взаимодействии электронного пучка с полупроводниковой мишенью, как правило необходимо учитывать немало случайных факторов, влияющих на формирование информативного сигнала (например, сигнала тока, индуцированного электронным пучком, сигнала катодолюминесценции и т. д.), что приводит к необходимости использования приближенных методов анализа стохастических математических моделей.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project no. 19-03-00271), and by the Government of the Kaluga region, Russian Federation (project no. 18-41-400001).

В настоящей работе изучается нестационарная задача Коши со случайными коэффициентами для двумерного уравнения диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале. Такая задача, учитывающая специфику процессов взаимодействия заряженных частиц с полупроводниковой мишенью, ранее не рассматривалась.

Кратко опишем основные этапы построения математической модели рассматриваемого процесса. При взаимодействии пульсирующего электронного пучка с полупроводниковой мишенью в последней генерируются неравновесные ННЗ, которые диффундируют и в последующем рекомбинируют в полупроводнике. После того, как в образце установится равновесие между процессами генерации и рекомбинации, возбуждение прекращается. Характер следующего за этим нестационарного процесса диффузии ННЗ зависит в общем случае только от электрофизических параметров полупроводника: времени жизни τ и коэффициента диффузии D ННЗ. Время действия электронного импульса во много раз больше времени установления стационарного процесса при включении или выключении электронного зонда, что даёт возможность описывать рассматриваемые процессы диффузии ННЗ следующим образом: на первом этапе — как стационарный процесс, обусловленный генерацией и рекомбинацией ННЗ, при котором мощность, рассеиваемая электронным пучком в мишени, а, значит, и число генерируемых ННЗ, есть величина постоянная, а на втором этапе, при выключении электронного зонда — как нестационарный процесс диффузии ННЗ. Это может позволить при наличии математической модели, описывающей рассматриваемое явление, на основе анализа экспериментальных данных получать оценки электрофизических параметров исследуемых полупроводниковых материалов, в общем случае путем решения соответствующей обратной задачи.

При прекращении действия электронного пучка концентрация ННЗ $c(x, y, t)$ может быть найдена как решение нестационарного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial t} = D\Delta c(x,y,t) - \frac{c(x,y,t)}{\tau}$$

с начальным условием

$$c(x,y,0) = n(x,y).$$

Здесь оси OX и OY прямоугольной декартовой системы координат лежат на плоской поверхности мишени, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа, а функция $n(x, y)$ удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию ННЗ в состоянии квазиравновесия (до выключения электронного пучка):

$$\Delta n(x, y) - \frac{n(x, y)}{\lambda^2} = -\rho(x, y).$$

Здесь $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина ННЗ, а функция $\rho(x, y)$ описывает концентрацию генерированных ННЗ до их диффузии в мишени.

В работах [1] и [2] рассмотрены некоторые возможности использования проекционного метода Галеркина для моделирования двумерной диффузии ННЗ в полупроводниковом материале, облучаемом электронным пучком, и получена порядковая оценка погрешности невязки, соответствующей приближенному уравнению диффузии.

В настоящей работе предлагается использовать проекционный метод наименьших квадратов (МНК) [3] для анализа стохастической модели диффузии и ставится задача получения оценки погрешности проекционной схемы МНК. Моментные функции концентрации экситонов (математическое ожидание и автокорреляционная функция решения уравнения диффузии) находятся в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра при условии, что коэффициент диффузии и время жизни экситонов являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону.

Построены сходящиеся матричные ряды и рассмотрена оптимизация скорости сходимости итерационных процессов, аппроксимирующих проекционные характеристики моментных функций решения уравнения диффузии экситонов. Рассмотрена также возможность использования расходящихся матричных рядов в приближенных вычислениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Seregina E.V., Polyakov A.N., Stepovich M.A.* On the possibility of using the Galerkin projection method to simulate the two-dimensional diffusion of excitons generated by an electron beam // Journal of Physics : Conf. Series, 2018. Vol. 955. 012032.

[2] *Степович М. А., Серегина Е. В., Поляков А. Н., Лямина О. И.* Об использовании метода Галеркина при математическом моделировании диффузии экситонов, вызванной пульсирующим электронным зондом в полупроводниковой мишени // Информатика и кибернетика. 2018. № 1 (11). С. 100–108.

[3] *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 11. С. 65–69.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ СУММ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Б. В. Симонов (Волгоград, Россия),
Т. М. Вуколова (Москва, Россия),
И. Э. Симонова (Волгоград, Россия)
simonov-b2002@yandex.ru, mvukolova@mail.ru, simonova-vstu@mail.ru

Исследованы двойные тригонометрические ряды с кратно монотонными коэффициентами. Получены необходимые условия, при которых их суммы принадлежат весовым пространствам типа Орлича.

Ключевые слова: ряды, коэффициенты рядов, кратная монотонность, последовательность, сумма.

ESTIMATES OF SUMS OF TRIGONOMETRIC SERIES IN THE SPACES WITH WEIGHT

B. V. Simonov (Volgograd, Russia),
T. M. Vukolova (Moscow, Russia),
I. E. Simonova (Volgograd, Russia)
simonov-b2002@yandex.ru, mvukolova@mail.ru, simonova-vstu@mail.ru

Double trigonometric series with multiply monotonic coefficients are investigated. Necessary conditions are found under which this sums belong to the weighted spaces of Orlich type.

Keywords: series, coefficients of series, multiply monotones, sequence, sum.

Введение

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2, \tag{1}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2, \tag{2}$$

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2, \tag{3}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2, \tag{4}$$

где для краткости положим $\cos 0\cdot x_1 = \cos 0\cdot x_2 = \frac{1}{2}$.

Будем считать, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют условию

$$a_{n_1n_2} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

при $n_1 \to \infty$ и любом фиксированном n_2 и при $n_2 \to \infty$ и любом фиксированном n_1. Для целых $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ обозначим

$$\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2} = \sum_{i=0}^{k_1}(-1)^i C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1+i\ n_2+j},\ \Delta_{0,0}a_{n_1n_2} = a_{n_1n_2},$$

$$\Delta_{0k_2}a_{n_1n_2} = \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1n_2+j},\ \Delta_{k_10}a_{n_1n_2} = \sum_{i=0}^{k_1}(-1)^i C_{k_1}^i a_{n_1+i\ n_2},$$

где $C_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!$. Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1n_2} \tag{6}$$

и его частичная сумма $S_{m_1m_2} = \sum\limits_{n_2=0}^{m_2}\sum\limits_{n_1=0}^{m_1} c_{n_1n_2}$.

Говорят, что ряд (6) сходится по Прингсхейму к сумме S ([1, с. 27]), если существует такое S, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа N_1 и N_2 такие, что
$|S_{m_1m_2} - S| < \varepsilon$ при любых $m_1 > N_1, m_2 > N_2$.

Из работы [2] следует, что если последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ удовлетворяет условию (5), $\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2} \geq 0$ для любых натуральных n_1 и n_2 и некоторых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$, то каждый из рядов (1) - (4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, быть может, множества плоской меры нуль. Пусть $r_1 = 1, 2,\ r_2 = 1, 2$. Через $f_{r_1r_2}(x_1, x_2)$ обозначим сумму ряда (1) при $r_1 = r_2 = 1$; сумму ряда (2) при $r_1 = 1, r_2 = 2$; сумму ряда (3) при $r_1 = 2, r_2 = 1$; сумму ряда (4) при $r_1 = r_2 = 2$.

В работе [2] устанавливается связь между поведением коэффициентов рядов (1)–(4) и принадлежностью функций $f_{11}(x_1, x_2), f_{12}(x_1, x_2), f_{21}(x_1, x_2), f_{22}(x_1, x_2)$ различным
$L_{p_1p_2}$ пространствам.

Результат работы [2] является обобщением известной теоремы Харди–Литтльвуда.

В работе [3] рассмотрены оценки снизу и сверху для сумм одномерных тригонометрических рядов на классах L_φ с весом.

В данной работе доказываются оценки снизу для тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами, у которых сумма принадлежит весовому классу $L(\varphi_1, \varphi_2, w_1, w_2)$.

Для формулировки приводимых ниже результатов введем определения.

Функция $\varphi(x)$ называется почти возрастающей на (a,b) (см. [4]), если существует такая положительная постоянная C_1, что $\varphi(x_1)\le C_1\varphi(x_2)$ при любых $a<x_1\le x_2<b$. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на $(0,a)$ Δ_2-условию, если существует такая положительная постоянная C_2, что $\varphi(x)\le C_2\varphi(\frac{x}{2})$ для любых $0<x<a$.

Через Φ обозначим совокупность неотрицательных на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(x)$, почти возрастающих, удовлетворяющих Δ_2 — условию и $\varphi(0)=0$; $W-$ множество измеримых, неотрицательных почти всюду на $(0,2\pi)$ функций $w(x)$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} w(x)dx<\infty$;
$\widetilde{w}(x)=w(x)+w(2\pi-x)$.

Пусть $\varphi_i\in\Phi, w_i\in W(i=1,2)$. Классом $L(\varphi_1,\varphi_2,w_1,w_2)$ назовем множество измеримых функций $f(x_1,x_2)$, $2\pi-$ периодических по каждой переменной и таких, что
$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1\big(|f(x_1,x_2)|\big)dx_1\big)dx_2<\infty.$

Ниже $C,C_1,C_2,...-$ положительные постоянные, не обязательно одинаковые в различных формулах.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $\varphi\in\Phi$, $w_i\in W(i=1,2)$. Пусть последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1k_2}a_{n_2n_2}\ge 0$ для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2 и любых целых неотрицательных чисел n_1 и n_2. Тогда

а) если $k_1=2,k_2=2$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1(|f_{11}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2\ge$$

$$\ge C_1\sum_{n_2=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2^*}}\widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1^*}}\widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\Big(n_1n_2a_{n_1n_2}\Big)\Big);$$

б) если $k_1=2,k_2=3$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi} w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi} w_1(x_1)\varphi_1(|f_{12}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2\ge$$

$$C_2\sum_{n_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}}\widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1^*}}\widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\Big(n_1(n_2+1)^2\Delta_{01}a_{n_1n_2}\Big)\Big);$$

в) если $k_1=3, k_2=2$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi}w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi}w_1(x_1)\varphi_1(|f_{21}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2\geq$$

$$C_3\sum_{n_2=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2^*}}\widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}}\widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\Big((n_1+1)^2n_2\Delta_{10}a_{n_1n_2}\Big)\Big);$$

г) если $k_1=3, k_2=3$, то справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2\pi}w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi}w_1(x_1)\varphi_1(|f_{22}(x_1,x_2)|)dx_1\Big)dx_2\geq$$

$$C_3\sum_{n_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}}\widetilde{w_2}(x_2)dx_2\varphi_2\Big(\sum_{n_1=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}}\widetilde{w_1}(x_1)dx_1\varphi_1\big((n_1+1)^2(n_2+1)^2\Delta_{11}a_{n_1n_2}\big),$$

где $n_i^*=\frac{12}{7}$ при $n_i=1$ и $n_i^*=n_i$ при $n_i=2,3,..(i=1,2)$, а положительные постоянные C_1,C_2,C_3 не зависят от последовательности $\{a_{n_1n_2}\}$.

Замечание. *Если* $\varphi_1(t)=t^{p_1}$, $\varphi_2(t)=t^{\frac{p_2}{p_1}}$ $(0<p_i<\infty)$ *и* $w_i(x_i)\equiv 1(i=1,2)$, *то* $L_{\varphi_1,\varphi_2,w_1,w_2}=L_{p_1p_2}$, *и из теоремы следуют нижние оценки теоремы из работы [2].*

Вспомогательные утверждения

Пусть

$B_0^1(x)=\frac{1}{2}$; $B_n^1(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{m=0}^{n}\cos mx$ для $n\geq 1$;

$B_n^k(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}B_m^{k-1}(x)$ для $k=2,3,...$ и $n=0,1,2,...$;

$\overline{B}_n^1(x)=\sum\limits_{m=1}^{n}\sin(mx)$ для $n=1,2,...$;

$\overline{B}_n^k(x)=\sum\limits_{m=1}^{n}\overline{B}_m^{k-1}(x)$ для $k=2,3,...$ и $n=1,2,....$

Заметим, что $B_n^1(x)$ — это ядро Дирихле $D_n(x)$, $\overline{B}_n^1(x)$ — сопряженное ядро Дирихле $\overline{D}_n(x)$, $B_n^2(x)$ — ядро Фейера, умноженное на $n+1$.

Рассмотрим ряды:

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}\overline{B}_{n_1}^{k_1}(x_1)\overline{B}_{n_2}^{k_2}(x_2), \tag{7}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}\overline{B}_{n_1}^{k_1}(x_1)B_{n_2}^{k_2}(x_2), \tag{8}$$

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}B_{n_1}^{k_1}(x_1)\overline{B}_{n_2}^{k_2}(x_2), \tag{9}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}B_{n_1}^{k_1}(x_1)B_{n_2}^{k_2}(x_2). \tag{10}$$

Лемма 1 [2]. *Если последовательность $\{a_{n_1n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1k_2}a_{n_1n_2}\geq 0$ для любых n_1 и n_2 и некоторых $k_1\geq 1$ и $k_2\geq 1$, то:*

а) каждый из рядов (1)–(4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, т.е. существуют функции $f_{11}(x_1,x_2)$, $f_{12}(x_1,x_2)$, $f_{21}(x_1,x_2)$, $f_{22}(x_1,x_2)$ — суммы соответствующих рядов (1)–(4);

б) каждый из рядов (7)–(10) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, к функциям $f_{11}(x_1,x_2)$, $f_{12}(x_1,x_2)$, $f_{21}(x_1,x_2)$, $f_{22}(x_1,x_2)$ соответственно.

Доказательство теоремы.

Рассмотрим сначала случай г). Из [2] следует, что $B_{n_i}^{k_i}(x_i)\geq 0$ для $k_i\geq 2$ и всех $x_i\in[-\pi,\pi] (i=1,2)$. В соответствии с леммой, существует функция $f_{22}(x_1,x_2)$ и, кроме того, почти всюду $f_{22}(x_1,x_2)=\sum\limits_{n_2=0}^{\infty}\sum\limits_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{33}a_{n_1n_2}B_{n_1}^3(x_1)B_{n_2}^3(x_2)$. Тогда

$$I=\int\limits_0^{2\pi}w_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{2\pi}w_1(x_1)\varphi_1\big(|f_{22}(x_1,x_2)|\big)dx_1\Big)dx_2=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2\Big(\int\limits_0^{\pi}\widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1\big(|f_{22}(x_1,x_2)|\big)dx_1\Big)dx_2=$$

$$= \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2 \Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \times$$

$$\times \Big(\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} B^3_{n_1}(x_1) B^3_{n_2}(x_2) \Big) dx_1 \Big) dx_2 \geq$$

$$\geq C \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2 \Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \times$$

$$\times \Big(\sum_{n_2=m_2}^{\infty} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} B^3_{n_1}(x_1) B^3_{n_2}(x_2) \Big) dx_1 \Big) dx_2.$$

Из [5] следует, что для $\nu_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x_i \in [\frac{\pi}{\nu_i+2}, \frac{\pi}{\nu_i+1}]$ и $n_i \geq \nu_i$

$$B^3_{n_i}(x_i) \geq C_1 (n_i + 1)^3, \tag{11}$$

где C_1 не зависит от n_i и x_i $(i = 1, 2)$. Применяя неравенства (11), получим:

$$I \geq C_2 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2 \Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \times$$

$$\times \Big(\sum_{n_2=m_2}^{\infty} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} (n_1+1)^3 (n_2+1)^3 \Big) dx_1 \Big) dx_2.$$

Так как

$$\sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty} \Delta_{33} a_{n_1 n_2} n_1^3 n_2^3 \geq \nu_1^2 \nu_2^2 \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty} n_1 n_2 \Delta_{33} a_{n_1 n_2} \geq$$
$$\geq \nu_1^2 \nu_2^2 \Delta_{11} a_{\nu_1 \nu_2},$$

то

$$I \geq C_3 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+2}}^{\frac{\pi}{m_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2)\varphi_2 \Big(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_1+2}}^{\frac{\pi}{m_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1)\varphi_1 \Big(m_1^2 m_2^2 \Delta_{11} a_{m_1 m_2} \Big) dx_1 \Big) dx_2,$$

где положительная постоянная C_3 не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Аналогично доказывается справедливость неравенств в случаях а), б) и в).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М. : Физматгиз, 1962.

[2] *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* Оценки смешанных норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1999. № 8. С. 22–28.

[3] *Симонов Б. В.* О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Матем. 2013. № 10. С. 24–42.

[4] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Вып 5. С. 483-521.

[5] *Вуколова Т. М.* Некоторые свойства тригонометрических коэффициентов с монотонными коэффициентами : Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М. : 1989.

УДК 517.5

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

И. Э. Симонова, Б. В. Симонов (Волгоград, Россия)
simonova-vstu@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

Для функции двух переменных исследуются сопряженные функции по первой и второй переменной. Находятся их суммы и разности и устанавливаются оценки для производной по направлению от них.

Ключевые слова: сопряженная функция, производная по направлению, модуль гладкости.

ESTIMATES OF DIRECTIONAL DERIVATIVES OF CONJUGATE FUNCTIONS

I. E. Simonova, B. V. Simonov (Volgograd, Russia)
simonova-vstu@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru

For a function of two variables conjugate function according to first and second variable are investigate. Their sums and differences are found and estimates for directional derivatives are given.

Keywords: conjugate function, directional derivative, moduli of smoothness.

Через L_p, $1 < p < \infty$, обозначается множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, $2\pi-$периодических по каждому переменному, для которых $||f||_p < \infty$, где
$||f||_p = \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x_1,x_2)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$; L_p^0- множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2.

Следуя [1, 2], обозначим:

$\widetilde{f}_{x_1}$ — функцию, сопряженную функции f по x_1; тогда ее ряд Фурье

$$\sigma(\widetilde{f}_{x_1}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} B_{n_1n_2}^{(1,0)}(f);$$

$\widetilde{f}_{x_2}$ — функцию, сопряженную функции f по x_2; тогда ее ряд Фурье

$$\sigma(\widetilde{f}_{x_2}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} B_{n_1n_2}^{(0,1)}(f);$$

$\tilde{\tilde{f}}_{x_1x_2}$ — функцию, сопряженную функции f и по x_1 и по x_2; тогда ее ряд Фурье

$$\sigma(\tilde{\tilde{f}}_{x_1x_2}) \equiv \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} B_{n_1n_2}^{(1,1)}(f),$$

где

$$B^{(1,0)}_{n_1n_2}(f)=a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2-b_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2+$$
$$+c_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2-d_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2,$$
$$B^{(0,1)}_{n_1n_2}(f)=a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2+b_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2-$$
$$-c_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2-d_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2,$$
$$B^{(1,1)}_{n_1n_2}(f)=a_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2-b_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2-$$
$$-c_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2+d_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2.$$

Введем обозначение для разностей:

$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)$ — разность положительного порядка α_1 по переменной x_1 с шагом h_1, т. е.

$$\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1}f(x_1+(\alpha_1-\nu_1)h_1,x_2),$$

где $\binom{\alpha}{\nu}=1$ для $\nu=0$, $\binom{\alpha}{\nu}=\alpha$ для $\nu=1$, $\binom{\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu\geq 2$;

$\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)$ — разность положительного порядка α_2 по переменной x_2 с шагом h_2, т. е.

$$\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2}f(x_1,x_2+(\alpha_2-\nu_2)h_2);$$

$\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}(f)$ — полную разность с шагами h_1 и h_2 положительного порядка α функции $f\in L_p$, т. е.

$$\Delta^{\alpha}_{h_1h_2}(f)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\alpha}{\nu}f(x_1+(\alpha-\nu)h_1,x_2+(\alpha-\nu)h_2).$$

Обозначим через:

$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_p$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f\in L_p$, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_p=\sup_{|h_1|\leq\delta_1}\|\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)\|_p;$$

$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_p$ — частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f\in L_p$, т. е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_p=\sup_{|h_2|\leq\delta_2}\|\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f)\|_p;$$

$\omega_\alpha(f,\delta)_p$ — полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_p$, т. е.

$$\omega_\alpha(f,\delta)_p = \sup_{|h_1|\le\delta, |h_2|\le\delta} ||\Delta^\alpha_{h_1h_2}(f)||_p.$$

Приведем определение производной по направлению в смысле Вейля [2]. Пусть функция f имеет ряд Фурье

$$\sigma(f) = \sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{\nu_1\nu_2} e^{i(\nu_1x_1+\nu_2x_2)},$$

где штрих означает, что в сумме нет членов $c_{00}, c_{\nu_1 0}$, $c_{0\nu_2}$ для $\nu_i = \pm1, \pm2, ...(i = 1, 2)$. Пусть $\overrightarrow{l}(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta)$. Если ряд

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty}{}' c_{k_1k_2} e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} (i(k_1\cos\beta + k_2\sin\beta))^\alpha,$$

где $(ik)^\alpha = |k|^\alpha e^{i\alpha\frac{\pi}{2}k}$, $\alpha > 0$, есть ряд Фурье некоторой функции, то эту функцию называют производной порядка α по направлению $\overrightarrow{l}(\beta)$ в смысле Вейля функции f и обозначают ее $f^{(\alpha, \overrightarrow{l}(\beta))}$. В случае $\overrightarrow{l}(0) = (1, 0)$ производную порядка α в смысле Вейля обозначают $f^{(\alpha,0)}$. В случае $\overrightarrow{l}(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ производную порядка α в смысле Вейля обозначают $f^{(0,\alpha)}$.

Через $C, C_1, C_2, ...$ обозначим произвольные положительные постоянные, вообще говоря, разные в разных формулах.

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta)$ и $G(f, \delta)$ будем писать, что $F(f, \delta) \ll G(f, \delta)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f и δ, такая, что $F(f, \delta) \le CG(f, \delta)$. Если одновременно $F(f, \delta) \ll G(f, \delta)$ и $G(f, \delta) \ll F(f, \delta)$, то будем писать, что $F(f, \delta) \asymp G(f, \delta)$.

Ниже будем рассматривать только функции из L^0_p, где $1 < p < \infty$. Для таких p будут применяться следующие обозначения: $\tau = \max(p, 2), \theta = \min(p, 2)$.

Утверждение 1. *Ряд Фурье производной положительного порядка r по направлению $\vec{l}(\beta) = (\cos\beta, \sin\beta)$ можно представить в следующем виде:*

$$f^{(r,\vec{l}(\beta))} \sim \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^{+\infty} \sum_{k_2=1}^{+\infty} \Big\langle |k_1\cos\beta + k_2\sin\beta|^r \Big\{ \cos(r\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(k_1\cos\beta +$$

$$+k_2\sin\beta))\Big(A_{k_1k_2}(f) - B^{(1,1)}_{k_1k_2}(f)\Big) - \sin(r\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,(k_1\cos\beta + k_2\sin\beta))\times$$

$$\times\Big(B^{(1,0)}_{k_1k_2}(f)+B^{(0,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)\Big\}+|k_1\cos\beta-k_2\sin\beta|^r\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(k_1\cos\beta-$$
$$-k_2\sin\beta))\Big(A_{k_1k_2}(f)+B^{(1,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)-$$
$$-\sin(r\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(k_1\cos\beta-k_2\sin\beta))\Big(B^{(1,0)}_{k_1k_2}(f)-B^{(0,1)}_{k_1k_2}(f)\Big)\Big\}\Big\rangle.$$

Следствие. *Если $r\in\mathbb{N}$, то производная по направлению имеет следующий вид:*

$$f^{(r,\vec{l}(\beta))}=(\cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial x_2})^r(f). \tag{1}$$

Замечание. *Из формулы (1) следует (16) из работы [3] для смешанных производных через производные по направлениям.*

Утверждение 2. *Пусть $f\in L^0_p, 1<p<\infty$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$C_1\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=0))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p\le$$
$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(0,\frac{\pi}{2})))}\|_p\le$$
$$\le C_2\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=0))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p;$$
$$C_3\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p\le$$
$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(\pi,3\frac{\pi}{2})))}\|_p\le$$
$$\le C_4C_3\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p;$$
$$C_5\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p\le$$
$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)))}\|_p\le$$
$$\le C_6\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=\pi))}\|_p;$$
$$C_7\asymp\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=2\pi))}\|_p\le$$
$$\le\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta\in(3\frac{\pi}{2},2\pi)))}\|_p\le$$
$$\le C_8\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=3\frac{\pi}{2}))}\|_p+\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(\beta=2\pi))}\|_p,$$

где положительные постоянные C_i $(i=\overline{1,8})$ *не зависят от функции* f.

Отметим, что вышеописанные неравенства понимаются так: из конечности правой части неравенства следует конечность его левой части.

Рассмотрим производные по направлениям, совпадающим с осями координат, и их связь с частными производными.

Утверждение 3. *Пусть* $f\in L_p^0$, $1<p<\infty$, $r>0$, $m=1,2$. *Тогда*

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}+\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\cos(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p,$$

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}-\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\sin(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p,$$

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}+\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\cos(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p,$$

$$\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}-\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}+\pi))}\|\asymp|\sin(r\frac{\pi}{2})|\|\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)^{(r,0)}\|_p.$$

Для полных модулей гладкости имеют место следующие интегральные оценки.

Утверждение 4. *Пусть* $f\in L_p^0$, $\alpha>0$, $r>0$, $1<p<\infty$, $\delta\in(0,1)$. *Тогда*

$$\Big(\int_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\tau\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$

$$\ll\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(0))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(3\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$

$$\ll\Big(\int_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\theta\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\Big(\int_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\tau\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$

$$\ll\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(0))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$

$$\ll\Big(\int_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)-\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\theta\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\Big(\int_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)+\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\tau\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$

$$\ll\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(\pi))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big((\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1})^{(r,\vec{l}(3\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$

$$\ll \Big(\int\limits_0^\delta \Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}\Big)+\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}-\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\theta\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$\Big(\int\limits_0^\delta \Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)+\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\tau\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\tau}}\ll$$

$$\ll \omega_\alpha\Big(\big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\big)^{(r,\vec{l}(\pi))},\delta\Big)_p+\omega_\alpha\Big(\big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\big)^{(r,\vec{l}(3\frac{\pi}{2}))},\delta\Big)_p\ll$$

$$\Big(\int\limits_0^\delta \Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\Big(\Big(\cos(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}\Big)+\sin(r\frac{\pi}{2})\Big(\widetilde{\widetilde{f}_{x_2}+\widetilde{f}_{x_1}}\Big)_{x_1}\Big),t\Big)_p\Big\}^\theta\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Далее рассмотрим оценки для полных модулей гладкости от производных по тем направлениям, которые отличны от осей координат. Для сокращения записи введем обозначения: ($\beta\in(m\frac{\pi}{2},m\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$, $m=0,1,2,3$)

$$F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)=\operatorname{sign}(\frac{1}{\sin\beta})\cdot\widetilde{f}_{x_2}+\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\cdot\widetilde{f}_{x_1},$$

$$I(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,s)=\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{\alpha+r}\big(\cos(r\frac{\pi}{2})\cdot F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)-$$

$$-\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\sin(r\frac{\pi}{2})\cdot(\widetilde{F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)})_{x_1},t\big)_p\Big\}^s\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

Утверждение 5. *Пусть* $f\in L_p^0$, $1<p<\infty$, $\beta\in(m\frac{\pi}{2},m\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$, $m=0,1,2,3$; $r>0$; $\alpha>0$, $\delta\in(0,1)$, $\vec{l}(\beta)=(\cos\beta,\sin\beta)$. *Тогда*

$$I(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,\theta)\ll\omega_\alpha(F^{(r,\vec{l}(\beta))}(x_1,x_2;f,r,m,\beta),\delta)_p\ll$$
$$\ll I(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,\tau).$$

Теперь рассмотрим оценки частных модулей гладкости от производных по направлению, совпадающими с осями координат. Для сокращения записи введем следующие обозначения (применяются левосторонние и правосторонние пределы):

$$PF(x_1,x_2;f,r,m)=\lim_{\beta\to m\frac{\pi}{2}+0}\big(\operatorname{sign}(\frac{1}{\sin\beta})\cdot\widetilde{f}_{x_2}+\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\cdot\widetilde{f}_{x_1}\big),$$

$$LF(x_1,x_2;f,r,m)=\lim_{\beta\to m\frac{\pi}{2}-0}\big(\operatorname{sign}(\frac{1}{\sin\beta})\cdot\widetilde{f}_{x_2}+\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\cdot\widetilde{f}_{x_1}\big),$$

$$PI(f;\alpha,r,m,\delta,s)=\Big(\int\limits_0^\delta\Big\{t^{-r}\omega_{(1\oplus m)(\alpha+r),(0\oplus m)(\alpha+r)}\times$$

$$\times\Big(\lim_{\beta\to m\frac{\pi}{2}+0}\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2})\cdot F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)-\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\sin(r\frac{\pi}{2})\times$$

$$\times(F(x_1,\widetilde{x_2;f},r,m,\beta))_{x_1}\Big\},t\Big)_p\Big\}^s\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

$$LI(f;\alpha,r,m,\delta,s)=\Big(\int\limits_0^{\delta}\Big\{t^{-r}\omega_{(1\oplus m)(\alpha+r),(0\oplus m)(\alpha+r)}\times$$

$$\times\Big(\lim_{\beta\to m\frac{\pi}{2}-0}\Big\{\cos(r\frac{\pi}{2})\cdot F(x_1,x_2;f,r,m,\beta)-$$

$$-\operatorname{sign}(\frac{1}{\cos\beta})\sin(r\frac{\pi}{2})\cdot(F(x_1,\widetilde{x_2;f},r,m,\beta))_{x_1}\Big\},t\Big)_p\Big\}^s\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{s}},$$

$\alpha>0$, $i\oplus j$ — сумма по модулю два.

Утверждение 6. *Пусть $f\in L_p^0$, $1<p<\infty$, $\alpha>0$, $r>0$, $\delta\in(0,1)$, $m=0,1,2,3$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$PI(f;\alpha,r,m,\delta,\tau)\ll\omega_{(1\oplus m)\alpha,(0\oplus m)\alpha}(PF^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}(x_1,x_2;f,r,m,\beta),\delta)_p\ll$$
$$\ll PI(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,\theta),$$

$$LI(f;\alpha,r,m,\delta,\tau)\ll\omega_{(1\oplus m)\alpha,(0\oplus m)\alpha}(PF^{(r,\vec{l}(m\frac{\pi}{2}))}(x_1,x_2;f,r,m,\beta),\delta)_p\ll$$
$$\ll LI(f;\alpha,r,m,\beta,\delta,\theta).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975.

[2] *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. М. : Макс-Пресс, 2016.

[3] *Тиман М. Ф.* О разностных свойствах функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. С. 667–676.

УДК 517.17+517.51

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. К. Соколова (Иркутск, Россия)
98gal@mail.ru

Статья посвящена исследованию свойства периодичности функций нескольких действительных переменных. Приведены результаты автора, в которых описана структура множества периодов периодических функций нескольких переменных, изучена периодичность суммы и произведения таких функций. Сформулированы теоремы интегрального и дифференциального исчисления. Показано применение этих теорем к исследованию проблемы существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных на примере задачи Гурса для уравнения гиперболического типа.

Ключевые слова: периодическая функция, основной период, решётка периодов.

PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AND THEIR APPLICATIONS

G. K. Sokolova (Irkutsk, Russia)
98gal@mail.ru

The article deals with the study of the periodicity property of functions of several real variables. A number of author's results are given. The structure of the set of periods of periodic functions of several variables is described; the periodicity of the sum and product of these functions is studied. Theorems of integral and differential calculus are formulated. It is shown that these theorems are directly applicable to the study of the existence of periodic solutions of partial differential equations. In particular, the Goursat problem for an equation of hyperbolic type is considered.

Keywords: periodic function, basic period, lattice of periods.

Построение периодических решений дифференцальных уравнений в частных производных связано с важной задачей — поиском множества периодов решения. В статье изложены элементы теории периодических функций нескольких переменных, заданных всюду на $\mathbb{R}^n$, с помощью которой установлен критерий существования периодического решения задачи Гурса и указано множество периодов искомого решения.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *периодической с периодом* $\bar{T}$, если существует ненулевой вектор $\bar{T} \in \mathbb{R}^n$, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$. Период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём *основным периодом в данном направлении* $\bar{\mathcal{T}}$ *периодической функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathcal{T}}$.

Заметим, что основной период в данном направлении имеет не любая периодическая функция. Например, функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, постоянную вдоль каждой прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, можно трактовать как периодическую с периодами $\alpha\bar{\mathcal{T}}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, среди которых нет вектора с наименьшим модулем. Следующая теорема, доказанная в работе [1], доставляет достаточные условия существования основного периода функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в данном направлении.

Теорема 1. *Если периодическая с периодом $\bar{T}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна и отлична от постоянной вдоль хотя бы одной прямой с направляющим вектором $\bar{T}$, то она имеет основной период в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.*

Одной из основных проблем теории периодических функций является описание множества периодов P_f периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В статье [2] показано, что это множество состоит из векторов

$$\bar{T} = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \bar{T}_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_1+m_2} \alpha_k \bar{\mathcal{T}}_k.$$

Здесь $\bar{T}_k$ — *базисные* или *порождающие* векторы m_1-*мерной решётки* $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1})$ [3, стр. 13], а $\bar{\mathcal{T}}_k$ — направления, вдоль которых данная функция постоянна, числа $n_k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ одновременно не равны нулю, и $m_1 + m_2 \leqslant n$. Каждый период $\bar{T}$ периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ однозначно представим в указанном виде при любых базисах m_1-мерной решётки и m_2-мерного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что справедливо представление

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \operatorname{span}(\bar{\mathcal{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2}).$$

Как доказано в работе [4], базисные векторы решётки $\Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1})$ являются основными периодами в своих направлениях периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Обратное неверно: не всякий набор из m_1 линейно независимых основных периодов в данных направлениях периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ образует базис решётки её периодов. Известно, что базис решётки определяется неоднозначно, и его образуют векторы, на которых строится так называемый *фундаментальный* параллелепипед, т. е. параллелепипед наименьшей меры Жордана (см. монографию [5]).

Доказательство следующей теоремы приведено в заметке [6].

Теорема 2. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с основным периодом $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$ и $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное линейное преобразование, тогда суперпозиция $f \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является периодической функцией с основным периодом $\mathcal{A}^{-1}\bar{T}_0$ в направлении $\bar{\tau}$, где $\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{T}} = |\mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{T}}| \cdot \bar{\tau}$.*

Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с основным периодом $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$, то, выбирая подходящим образом неособенное линейное преобразование $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ её векторного аргумента $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$, суперпозицию $f \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно сделать периодической функцией с основным периодом $|\bar{T}_0| \cdot \bar{\mathrm{e}}_i$ в направлении орта $\bar{\mathrm{e}}_i$, т. е. $|\bar{T}_0|$-периодической по переменной x_i. Здесь и далее $\{\bar{\mathrm{e}}_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис Гамеля в $\mathbb{R}^n$. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ постоянна в направлении $\bar{\mathcal{T}}$, то суперпозицию $f \circ \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно сделать постоянной по x_i, т. е. не зависящей от данной переменной. Таким образом, без ограничения общности, всякую периодическую функцию n действительных переменных можно считать периодической по первым m_1 переменным, постоянной по следующим m_2 переменным и непериодической по оставшимся $n-m_1-m_2$ переменным.

В статье [7] доказан критерий периодичности суммы и произведения периодических функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а также найдены оценки множества периодов P_{f+g} и $\mathrm{P}_{f\cdot g}$. Показано, что в общем случае множества периодов P_{f+g} и $\mathrm{P}_{f\cdot g}$ разные, и содержат, по крайней мере, пересечение $\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g$.

Теорема 3. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является непрерывной по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}$ и периодической с решёткой периодов $\Lambda(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{m_1})$, порождённой векторами $\bar{T}_i = T_i \bar{\mathrm{e}}_i$, $i \in J_{m_1}$, тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{P_{J_{m_1}}} f(t_1, \ldots, t_{m_1}, x_{m_1+1}, \ldots, x_n) dt_1 \ldots dt_{m_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_1-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m_1} \prod_{i \in J_{m_1} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}} x_i \int\limits_{P_{i_1, \ldots, i_k}} S_{J_{m_1} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}} dt_{i_1} \ldots dt_{i_k} +$$

$$+(-1)^{m_1-1} \prod_{i \in J_{m_1}} x_i \ S_{J_{m_1}} + \varepsilon(x_1, \ldots, x_n),$$

где $P_{i_1, \ldots, i_k} = [0, x_{i_1}] \times \ldots \times [0, x_{i_k}]$ обозначает k-мерный параллелепипед, $J_{m_1} = \{1, \ldots, m_1\}$ — множество индексов, а выражение

$$S_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})})} \int\limits_{P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$$

является средним значением по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ функции f на фундаментальном параллелепипеде $P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})}$ решётки $\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})$ меры Жордана $\mu(P_{\Lambda(\bar{T}_{i_1}, \ldots, \bar{T}_{i_k})})$, функция $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с множеством периодов P_ε таким, что $\Lambda(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \subseteq \mathrm{P}_\varepsilon$.

Теорема 4. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ является периодической с решёткой периодов, порождённой векторами $\bar{T}_x = T_x \bar{i}$ и $\bar{T}_y = T_y \bar{j}$, и имеет непрерывную смешанную производную $\partial_{xy} f$, тогда функция $\partial_{xy} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ является периодической с множеством периодов $\mathrm{P}_{\partial_{xy} f}$ таким, что $\mathrm{P}_f \subseteq \mathrm{P}_{\partial_{xy} f}$.*

Приведённые выше результаты могут быть применены к изучению проблемы существования периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим, например, задачу Гурса

$$u''_{xy}(x,y) = f(x,y);\ \ u(x,y)|_{y=0} = a(x),\ \ u(x,y)|_{x=0} = b(y).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть непрерывная функция* $f : [0;+\infty)\times[0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *является периодической с решёткой периодов* $\Lambda(\bar{T}_x, \bar{T}_y)$*, порождённой векторами* $\bar{T}_x = T_x\bar{i}$ *и* $\bar{T}_y = T_y\bar{j}$*, непрерывно дифференцируемые функции* $a : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *и* $b : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$*, периодическиие с периодами* T_x *и* T_y *соответственно, удовлетворяют условию* $a(0) = b(0)$*. Тогда для того, чтобы классическое решение* $u : [0;+\infty)\times[0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *задачи Гурса было периодическим по переменным* x *и* y*, необходимо и достаточно, чтобы при всех* $(x,y) \in [0;+\infty)\times[0;+\infty)$ *выполнялись условия*

$$\int\limits_0^{T_x} f(t,y)dt = \int\limits_0^{T_y} f(x,t)dt = 0,$$

причем множеством периодов этого решения является $\mathrm{P}_u = \mathrm{P}_{a+b} \cap \mathrm{P}_f$*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Соколова Г. К., Орлов С. С.* Об основном периоде периодической функции нескольких переменных // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2018 : материалы междунар. конф. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2018. С. 312–315.

[2] *Соколова Г. К.* О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения 2018 : Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 56. Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва ; Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 273–277.

[3] *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 171. С. 3–122.

[4] *Соколова Г. К., Орлов С. С.* Об основных периодах периодической функции нескольких переменных // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 294–297.

[5] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere Packings, Lattices and Groups. N. Y. : Springer-Verlag, 1999. 706 p.

[6] *Orlov S. S., Sokolova G. K.* Periodic function of several real variables // Surveys on Applied Industrial Mathematics. 2018. Vol. 25, № 1. P. 50–51.

[7] *Соколова Г. К.* Периодичность суммы и произведения периодических функций нескольких переменных // XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам : сб. материалов междунар. конф. Секции 1–3. Симферополь : Полипринт, 2018. С. 28–31.

УДК 517.518.87

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПЛОТНОСТЯМИ

Ю. С. Солиев (Москва, Россия)
su1951@mail.ru

Для особых (сингулярных и гиперсингулярных) интегралов по действительной оси с периодическими плотностями построены и исследованы квадратурные формулы с узлами различной кратности.

Ключевые слова: особые (сингулярные и гиперсингулярные) интегралы, периодическая плотность, квадратурные формулы.

ON THE APPROXIMATION OF SPECIAL INTEGRALS ALONG THE REAL AXIS WITH PERIODIC DENSITIES

Yu. S. Soliev (Moscow, Russia)
su1951@mail.ru

For special (singular and hypersingular) integrals on the real axis with periodic densities, quadrature formulas with nodes of various multiplicities are constructed and investigated.

Keywords: special (singular and hypersingular) integrals, periodic densities, quadrature formulas.

Рассматриваются вопросы конечномерных аппроксимаций интегралов (см.,например, в [1])

$$A_p f = A_p(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^p} dt, p = 1, 2, ... \tag{1}$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши ($p = 1$) или конечного значения по Адамару ($p \geq 2$), $f = f(x) - 2\pi$ -периодическая плотность интегралов.

Приближенному вычислению интегралов типа (1) по отрезку действительной оси посвящены работы [1–3]. Дробно-рациональная аппроксимация и синк-аппроксимация интеграла (1) при $p = 2$ рассматривалась в работах [4] и [5] соответственно.

Ниже будем считать, что функция $f(x)$ периодически продолжена с промежутка $[0, 2\pi)$ на всю числовую ось, причем $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}(f(+0) + f(2\pi - 0))$. Если $f(x)$ имеет непрерывные производные m-го порядка, то предполагаем, что выполнены условия $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi), k = \overline{0, m}$, гладкого периодического продолжения на всю числовую ось.

Пусть $H_\alpha^{(r)}(r \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 1)$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций, r-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера $H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Следуя [6], для $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$ положим

$$P_N f = P_N(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n} (1-(1-\lambda_{k,v}^{(n)})^{l+1})(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx), \quad (2)$$

где

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \cos kx_j, b_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \sin kx_j, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$a_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n}\right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \cos nx_j, b_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n}\right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \sin nx_j,$$

$$x_k = x_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}, k = \overline{1, N}, n = \left[\frac{N}{2}\right], N = 1, 2, ..., l = \left[\frac{r}{2}\right],$$

$[\sigma]$ — целая часть σ, $v = \overline{1,4}$,$\lambda_{k,1}^{(n)} = 1$;$\lambda_{k,2}^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{N}$; $\lambda_{k,3}^{(n)} = \frac{k\pi}{2n+2} ctg \frac{k\pi}{2n+2}$;

$$\lambda_{k,4}^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+2} \cos \frac{k\pi}{n+2} + \frac{\sin \frac{k+1}{n+2}\pi}{(n+2)\sin \frac{\pi}{n+2}}, k = \overline{1, n}.$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (2), получим квадратурную формулу

$$A_p f = A_p(P_N f; x) + R_{n,v} f = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} (1-$$

$$-(1-\lambda_{k,v}^{(n)})^{l+1}) \left(a_k^{(n)} \cos\left(kx + \frac{p\pi}{2}\right) + b_k^{(n)} \sin\left(kx + \frac{p\pi}{2}\right)\right) + R_{n,v} f, \quad (3)$$

где $R_{n,v} f$ — остаточный член.

Квадратурную формулу (3) можно записать в виде

$$A_p f = A_p(P_n f; x) + R_{n,v} f =$$

$$= \frac{2}{N(p-1)!} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \sum_{j=1}^{n}{}' j^{p-1} (1-(1-\lambda_{j,v}^{(n)})^{l+1}) \cos(j(x-x_k) + \frac{p\pi}{2}) + R_{n,v} f,$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое, соответствующее значению $j = n$ при $N = 2n$ следует разделить на 2.

С помощью результатов работ [6, 7] доказывается

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in H_{\alpha}^{(r)}(r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1)$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка*

$$||R_{n,v}f||_C = O\left(\frac{lnN}{N^{r+\alpha-p+1}}\right), N \geq 2, r \geq 1, v = \overline{1,4}. \qquad (4)$$

Замечание 1. В квадратурной формуле (3) коэффициенты $a_k^{(n)}, b_k^{(n)}, k = \overline{1,n}$, можно заменить на коэффициенты Фурье $a_k, b_k, k = \overline{1,n}$, функции $f(x)$, причем оценка (4) для $f(x) \in H_{\alpha}^{(r)}$ $(r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1)$ остается справедливой.

Замечание 2. Если $f^{(k)}(x)$, $k = \overline{0,m}$, в точках $x_l \in (0, 2\pi)$, $l = \overline{1,q}$, имеет разрывы первого рода, то для их устранения можно воспользоваться периодическими многочленами Бернулли [8].

Замечание 3. В квадратурной формуле (3) вместо множителей $1 - (1 - \lambda_{k,v}^{(n)})^{l+1}$ можно выбрать произвольную треугольную матрицу $\mu_k^{(n)}, k = \overline{0,n}(\mu_0^{(n)} = 1)$ типа (A) ([9, с. 273]). Тогда из (3) получаются квадратурные формулы, полученные путем аппроксимации плотности интеграла (1) интерполяционным полиномом Лагранжа, дискретными аналогами отрезка ряда Фурье, сумм Бернштейна–Рогозинского, Фейера, Фавара, Коровкина, причем оценка вида (4) для них сохраняется. В случае дискретного аналога интеграла Валле-Пуссена $\left(\mu_l^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\right)$ в оценке типа (4) следует заменить N на $\sqrt{N}$.

Рассмотрим теперь квадратурные формулы с кратными узлами для интеграла (1). Пусть $p = 2$ и $H_n f = H_n(f; x)$ — тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos nx$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{1,n}$, такой, что $H_n(x_k) = f(x_k), H_n'(x_k) = f'(x_k), k = \overline{1,n}$. Известно [10], что

$$H_n f = H_n(f; x) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) + f'(x_k)\sin(x - x_k))\left(\sin\frac{nx}{2}\text{cosec}\frac{x - x_k}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (5), получим квадратурную формулу

$$A_2 f = A_2(H_n f; x) + R_n f = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha(x - x_k)f(x_k) + b(x - x_k)f'(x_k)) + R_n f, \qquad (6)$$

где

$$a(t) = \frac{1}{2}\left(n(1 + \cos nt) - \sin nt * ctg\frac{t}{2}\right)\text{cosec}^2\frac{t}{2},$$

$$b(t) = n\cos\frac{2n-1}{2}t * \mathrm{cosec}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin nt * \mathrm{cosec}^2\frac{t}{2} - n\sin nt,$$

а $R_n f = R_n(f;x)$ — остаточный член.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \le 1, r \ge 2$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (6) справедлива оценка*

$$||R_n f|| = O\left(\frac{lnn}{n^{r+\alpha-2}}\right), r+\alpha > 2.$$

Замечание 4. Аналогично (6) можно построить и исследовать квадратурные формулы с кратными узлами для интеграла (1) при $p > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения // М. : Янус-К, 2001. 508 с.

[2] *Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н.* Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Констр. теор. функц. и функц. анал. Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1987. Вып. 6. С. 3–48.

[3] *Ашур С., Шарипов Р. Н.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов Адамара // Констр. теор. функц. и функц. анал. Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 1992. Вып. 8. С. 15–23.

[4] *Солиев Ю. С.* К приближенному вычислению гиперсингулярного интеграла по действительной оси // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 297–299.

[5] *Солиев Ю. С.* О синк-аппроксимации особых интегралов по действительной оси // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 57. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы XIY-й междунар. шк.-конф. Казань : Изд-во Казан. ун-т, 2019. С. 312–315.

[6] *Габдулхаев Б. Г.* Об оптимальных квадратурных формулах для сингулярных интегралов // Изв. вузов. Матем. 1978. № 3. С. 24–39.

[7] *Габдулхаев Б. Г.* Аппроксимация в Н-пространствах и приложения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1293–1296.

[8] *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М. : Наука, 1967. 500 с.

[9] *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. 688 с.

[10] *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск : Вышэйшая школа, 1968, 320 с.

УДК 517.518

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В ОЦЕНКЕ С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО СУММЫ РЯДА ПО СИНУСАМ С ВЫПУКЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

А. П. Солодов (Москва, Россия)
apsolodov@mail.ru

Известно, что сумма ряда по синусам $g(\mathbf{b},x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx$, коэффициенты которого образуют выпуклую последовательность $\mathbf{b}$, положительна на интервале $(0,\pi)$. Для оценки ее значений в окрестности нуля С. А. Теляковский использовал кусочно-непрерывную функцию $\sigma(\mathbf{b},x)=\big(1/m(x)\big)\sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2(b_k-b_{k+1})$, $m(x)=[\pi/x]$. Он показал, что в некоторой окрестности нуля разность $g(\mathbf{b},x)-(b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)$ допускает двустороннюю оценку через функцию $\sigma(\mathbf{b},x)$ с абсолютными постоянными. В работе найдены точные значения этих постоянных на классе выпуклых последовательностей $\mathbf{b}$.

Ключевые слова: ряды по синусам с монотонными коэффициентами, выпуклая последовательность, медленно меняющаяся последовательность.

SHARP CONSTANTS IN ESTIMATE OF S. A. TELYAKOVSKII FOR THE SUM OF A SINE SERIES WITH CONVEX COEFFICIENTS [1]

A. P. Solodov (Moscow, Russia)
apsolodov@mail.ru

The sum of a sine series $g(\mathbf{b},x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx$ with coefficients forming a convex sequence $\mathbf{b}$ is known to be positive on the interval $(0,\pi)$. To estimate its values near zero Telyakovskiĭ used the piecewise-continuous function $\sigma(\mathbf{b},x)=\big(1/m(x)\big)\sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2(b_k-b_{k+1})$, $m(x)=[\pi/x]$. He showed that in some neighborhood of zero the difference $g(\mathbf{b},x)-(b_{m(x)}/2)\cot(x/2)$ can be estimated from both sides in terms of the function $\sigma(\mathbf{b},x)$ with absolute constants. In the present paper, sharp values of these constants on the class of convex sequences $\mathbf{b}$ are found.

Keywords: sine series with monotone coefficients, convex sequence, slowly varying sequence.

Работа посвящена уточнению двусторонних оценок суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами, полученных С. А. Теляковским [1, 2].

Рассмотрим невозрастающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\mathbf{b}=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функцию

$$g(\mathbf{b},x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx. \tag{1}$$

Хорошо известно, что ряд (1) сходится всюду и его сумма непрерывна на $(0,2\pi)$. Нас будет интересовать поведение функции $g(\mathbf{b},x)$ вблизи

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00584.

[1]The reported study was funded by RFBR, project No. 20-01-00584.

точки $x = 0$. Всюду далее помимо монотонности будем предполагать выпуклость последовательности коэффициентов ряда (1):

$$b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Положим $m(x) = [\pi/x]$, $0 < x < \pi$ ($[t]$ — целая часть числа t).

При дополнительном условии медленного изменения последовательности $\mathbf{b}$, а именно: $\lim_{k\to\infty}(b_{2k}/b_k) = 1$, С. Алянчич, Р. Боянич и М. Томич [3] нашли асимптотику суммы ряда (1):

$$g(\mathbf{b}, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x} \sim \frac{b_{m(x)}}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \to +0. \tag{2}$$

С. А. Теляковский [1, 2] заметил, что сумма ряда (1) с выпуклыми коэффициентами в правой полуокрестности нуля всегда превосходит $\big(b_{m(x)}/2\big)\,\mathrm{ctg}\,(x/2)$. Он показал, что разность

$$g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{3}$$

удобно сравнивать с функцией

$$\sigma(\mathbf{b}, x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 \Delta b_k, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1} > 0, \tag{4}$$

и что функции (3) и (4) одного порядка при $x \to +0$.

Теорема A ([2, 4]). *Существуют такие положительные абсолютные постоянные C_1 и C_2, что для разности (3) выполняется неравенство*

$$C_1\,\sigma(\mathbf{b}, x) \leqslant g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2} \leqslant C_2\,\sigma(\mathbf{b}, x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{11}\right],$$

какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\mathbf{b}$.

Цель настоящей работы — получить точные постоянные в теореме A, а именно: вычислить значения величин

$$\overline{C} = \sup_{\mathbf{b}} \varlimsup_{x\to+0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sigma(\mathbf{b}, x)}, \tag{5}$$

$$\underline{C} = \inf_{\mathbf{b}} \varliminf_{x\to+0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sigma(\mathbf{b}, x)}. \tag{6}$$

Точная верхняя и нижняя грани в (5), (6) берутся по всем выпуклым и стремящимся к нулю последовательностям $\mathbf{b}$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\overline{C} = \frac{\pi}{2}, \qquad \underline{C} = \frac{3(\pi-1)}{\pi^2},$$

причем точная верхняя грань в (5) и точная нижняя грань в (6) достигаются на медленно меняющихся последовательностях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Telyakovskiĭ S. A.* On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. Nouvelle serie. 1995. Vol. 58, № 72. P. 43–50.

[2] *Теляковский С. А.* К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля // Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi. 2000, 2002. Т. 21, № 1–2. С. 47–53.

[3] *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Publ. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. Vol. 10, № 1. P. 101–120.

[4] *Теляковский С. А.* О поведении рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами вблизи нуля // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 4. С. 462–463.

УДК 517.5

ПОСТРОЕНИЕ БАНАХОВА ФРЕЙМА В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ, ОПРЕДЕЛЕННОМ НА ПОЛИДИСКЕ[1]

К. С. Сперанский, П. А. Терехин (Саратов, Россия)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

Мы приводим конструкцию системы представления на основе дискретизированного ядра Сеге в пространстве Харди, определенном на двумерном полидиске комплексной плоскости. Мы используем понятие банахова фрейма, являющееся обобщением понятия фрейма Даффина–Шеффера. Построив банахов фрейм мы можем говорить о том, что произвольную функцию пространства Харди можно представить в виде ряда по последовательности дискретизированных ядер.

Ключевые слова: банахов фрейм, система представления, воспроизводящее ядро, ядро Сеге, пространство Харди.

ON THE CONSTRUCTION OF A BANACH FRAME IN THE HARDY SPACE DEFINED ON A POLYDISC[1]

K. S. Speransky, P. A. Terekhin (Saratov, Russia)
konstantin.speransky@yahoo.com, terekhinpa@mail.ru

We give the construction of a representing system based on the discretized Szego kernel in the Hardy space defined on a two-dimensional polydisc. We use a notion of a Banach frame which generalizes a notion of a Duffin-Shaeffer frame. Having constructed a Banach frame we can say that any function from the Hardy space can be represented as a series of discretized kernels.

Keywords: Banach frame, respresenting system, reproducing kernel, Szego kernel, Hardy space.

Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D}^2)$, определенное на двумерном полидиске комплексной плоскости

$$\mathbb{D}^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

состоит из всех аналитических функций вида

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{k_1, k_2 \geq 0} |c_{k_1 k_2}|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространство H^2 является пространством с воспроизводящим ядром

$$K_\lambda(z) = K(z, \lambda) = \frac{1}{(1 - \overline{\lambda_1} z_1)(1 - \overline{\lambda_2} z_2)},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00414).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-01-00414).

где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$. Воспроизводящее ядро K_λ называется ядром Сеге и его нормированная версия имеет вид

$$\widehat{K}_\lambda(z) = \frac{K(\lambda, z)}{\|K(\lambda, z)\|_{H^2}} = \frac{(1-|z_1|^2)^{1/2}(1-|z_2|^2)^{1/2}}{\left(1-\overline{\lambda_1}z_1\right)\left(1-\overline{\lambda_2}z_2\right)}.$$

Вопрос о существовании систем представления на основе дискретизированных воспроизводящих ядер $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве Харди на единичном диске комплексной плоскости был сформулирован в качестве открытой проблемы в статье [1]:

Вопрос 1. Существует ли последовательность точек $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ на открытом единичном диске такая, что последовательность $\{K_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$ образует систему представления пространства $H^2(\mathbb{D})$?

Мы даем ответ на вопрос 1 для двумерного случая. Результат основан на применении теории банаховых фреймов и сохраняется при переходе к полидиску произвольной размерности. Результат для одномерного случая был опубликован в статье [2].

Пусть

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1$$

и $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем точки $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{D}^2$ вида

$$\lambda_n = \lambda_{kj_1j_2} = (r_k e^{\frac{2\pi i j_1}{n_k}}, r_k e^{\frac{2\pi i j_2}{n_k}}), \qquad j_1, j_2 = 0, 1, \ldots n_k - 1. \tag{1}$$

Далее, под условием согласования для n_k и r_k будем понимать выполнение неравенств

$$0 < a \le n_k(1 - r_k) \le b < \infty \tag{2}$$

с некоторыми постоянными $0 < a \le b < \infty$.

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{D}^2$ - последовательность точек вида (1), удовлетворяющая условиям согласования (2). Тогда последовательность значений нормированного ядра Сеге $\{\widehat{K}_{\lambda_n}\}_{n=1}^\infty$, дискретизированных в этих точках образует фрейм пространства Харди H^2 относительно пространства коэффициентов X, состоящего из всех последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = \{\xi_{kj_1j_2}\}$, для которых

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j_1=0}^{n_k-1}\sum_{j_2=0}^{n_k-1} |\xi_{kj_1j_2}|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Мы используем здесь понятие фрейма (см., например, [3]), которое в отличие от атомарного разложения и банахова фрейма по Грохенигу автоматически обеспечивает справедливость следствия 1 о представлении произвольной функции из пространства H^2 в виде ряда по последовательности дискретизированных ядер Сеге.

Следствие 1. Для каждой функции $f \in H^2$ существует последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{K}_n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Fricain E., Khoi L., Lefèvre P.* Representing systems generated by reproducing kernels // Indag. Math. 2018. Vol. 29, iss. 3. P. 860–872. DOI: https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.004

[2] *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indag. Math. 2018. Vol. 29, iss. 5. P. 1318–1325. DOI: https://doi.org/10.1016/j.indag.2018.06.001

[3] *Терехин П. А.* Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 9. С. 127–146. DOI: https://doi.org/10.4213/sm5655

УДК 517.28, 517.54, 517.41

ГИПОТЕЗА О ЯКОБИАНЕ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ[1]

В. В. Старков (Петрозаводск, Россия)
VstarV@list.ru

Гипотеза о якобиане в современной трактовке предполагает инъективность полиномиального отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) при условии, что якобиан $J_f \equiv const \neq 0$. В этой заметке исследуется вопрос о структуре полиномиальных отображений f, для которых $J_f \equiv const \neq 0$. Также рассматриваются некоторые достаточные условия инъективности неполиномиальных отображений.

Ключевые слова: гипотеза о якобиане, отображение Келлера.

JACOBIAN CONJECTURE AND ITS GENERALIZATIONS[1]

V. V. Starkov (Petrozavodsk, Russia)
VstarV@list.ru

The Jacobian Conjecture was first formulated by O. Keller in 1939. In the modern form it supposes injectivity of the polynomial mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ provided that jacobian $J_f \equiv const \neq 0$. In this note we consider structure of polynomial mappings f that provide $J_f \equiv const \neq 0$. Also we consider some sufficient conditions of injectivity for non polynomial mappings.

Keywords: Jakobian conjecture, Keller mappings.

Обозначим $\mathcal{P}_m$ множество всех полиномов в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) степени, не превосходящей m. Пусть P_m — множество всех полиномиальных отображений $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$), $F_k \in \mathcal{P}_m (k = 1, \ldots, n)$. Обозначим D_F матрицу Якоби и J_F — якобиан отображения F (в комплексном случае DF и J_F комплексные). Сформулированная Келлером [1] в 1939 г. *Гипотеза о якобиане* (**JC**) в современной ее трактовке заключается в следующем:

если $F \in P_m$ и $J_F \equiv const \neq 0$, то F инъективно в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Положительное решение гипотезы открывало бы возможность ее обширного приложения в ряде направлений математики.

В [2] гипотеза доказана для $F \in P_2$ для любого n, в [3] гипотеза проверена для $n = 2$ и $F \in P_{100}$. Однако, до сих пор **JC** не доказана и не опровергнута ни при каком значении n. Гипотеза включена в список 18 проблем “Mathematical Problems for the Next Century” [4].

В этой заметке ставится вопрос о структуре отображений $F \in P_m$ с $J_F \equiv const \neq 0$, именно он представляется ключевым в доказательстве или опровержении **JC**. Решение этого вопроса с последующим применением критериев или достаточных условий инъективности отображения приведет к существенным продвижениям в **JC**.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

[1]The work is supported by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01229).

Отображение $F \in P_m$ будем называть отображением Келлера, если $F(0)=0$, $J_F \equiv 1$ и его матрица Якоби $D_F(0)=I$ — единичная матрица. В [5] дано полное описание отображений Келлера для $n=2, m=3$.

Теорема A. [5] *Пусть $n=2$, $F \in P_3$, $F(0)=0$. F - отображение Келлера тогда и только тогда, когда $F = A^{-1} \circ g \circ A$, где $g(x,y) = (U(x,y), V(x,y))$,*

$$U(x,y) = x + \alpha_2(x+y)^2 + \alpha_3(x+y)^3,$$

$$V(x,y) = y - \alpha_2(x+y)^2 - \alpha_3(x+y)^3,$$

α_2 и α_3 - произвольные фиксированные постоянные, A - линейное однородное невырожденное отображение.

Теорема B. [6] *Пусть для $n \geq 2$, отображение $F(X) = (u_1, \dots, u_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определено следующим образом:*

$$u_k(X) = x_k + p_{k2}(x_1 + \dots + x_n)^2 + \dots + p_{km}(x_1 + \dots + x_n)^m \ , \qquad (1)$$

$(k = 1, \dots, n)$ и p_{kj} - любые постоянные, удовлетворящие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{kj} = 0$ для всех $j = 2, \dots, m$. Тогда **JC** *справедлива для F.*

Вопрос 1: останется ли справедливым утверждение Теоремы B, если в определении (1) координатных функций $u_k(X)$ сумму $z = x_1 + \dots + x_n$ заменить на $Z = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ с произвольным вектором $B = (b_1 + \dots + b_n), B \not\parallel (1, \dots, 1)$.

Задача решается подбором для каждого отображения f из Теоремы B неособенной матрицы A такой, что $F(X) = A^{-1}f(AX)$ обладает нужными свойствами. Оказывается, матрица A с таким свойством существует не всегда.

Теорема 1. *Пусть $k = 1, \dots n$ и $P^{(k)} = (p_{k2}, \dots, p_{km})$ - $(m-1)-$мерные векторы, не все из которых нулевые, $\sum\limits_{k=1}^{n} P^{(k)} = 0$. Пусть $\mathbb{R}^n \ni B = (b_1, \dots, b_n) \neq (1, \dots, 1)$, $F(X)$ из Теоремы B определяется условием (1) посредством векторов $P^{(k)}$.*

1) Если в наборе векторов $P^{(k)}, k = 1, \dots, n$ линейно независимых векторов не более $(n-2)$, то существует неособенная матрица A такая, что

$$F(X) = A^{-1}f(AX) = X + \begin{pmatrix} q_{12}Z^2, \dots, q_{1m}Z^m \\ \dots \\ q_{n2}Z^2, \dots, q_{nm}Z^m \end{pmatrix}, \ \sum_{k=1}^{n} q_{kj} = 0 \qquad (2)$$

для всех $j = 2, \dots, m$, где $Z = (B, X)$.

2) Если среди векторов $P^{(k)}, k = 1, \ldots, n$, $(n-1)$ линейно независимых, то не существует матрицы A со свойством (2).

Вопрос 2: насколько в Теореме 1 важно условие $\sum\limits_{k=1}^{n} q_{kj} = 0$ для того, чтобы полиномиальные отображения

$$F(X) = X + \sum_{j=2}^{m} Q_j Z^j, \text{ где } Q_j = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \ldots \\ q_{nj} \end{pmatrix}, \quad Z = (B, X), \tag{3}$$

было отображением Келлера?

Теорема 2. *Для любого вектора $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и любых векторов Q_j, $j = 1, \ldots, m$, из линейного пространства M, ортогонального вектору B, полиномиальное отображение $F(X)$ из (3) является отображением Келлера и для него справедлива* **JC.**

Теорема B является частным случаем Теоремы 2 при $B = (1, \ldots, 1)$. В Теореме 2 условие принадлежности векторов Q_j пространству $M, M \bot B$, является существенным. Будут представлены и другие результаты в этом направлении, в частности,

Теорема 3. *Пусть для каждого натурального $s = 1, \ldots, r$ полиномиальное отображение*

$$F_s(X) = X + \sum_{j=2}^{m} Q_j^{(s)} Z_s^j(X) =: \; X + V^{(s)}(X)$$

определяется формулой (3) и удовлетворяет Теореме 2, $Z_s(X) = (B_s, X)$, векторы $B_s = (b_1^{(s)}, \ldots, b_n^{(s)}) \neq 0$; пусть $M_{n-1}^{(s)}$ – линейное $(n-1)$-мерное пространство, $M_{n-1}^{(s)} \bot B_s$ и для любого $j = 2, \ldots, m$ справедливы включения $Q_j^{(1)} \in \bigcap\limits_{s=1}^{r} M_{n-1}^{(s)}$, $Q_j^{(2)} \in \bigcap\limits_{s=2}^{r} M_{n-1}^{(s)}$, $\ldots$, $Q_j^{(r)} \in M_{n-1}^{(r)}$. Тогда полиномиальное отображение $F = F_r \circ F_{r-1} \circ \cdots \circ F_1$ имеет вид $F(X) = X + \sum\limits_{s=1}^{r} V^{(s)}(X)$ и для него справедлива **JC**.

Все сформулированные здесь результаты справедливы как в вещественном, так и в комплексном случае.

Идеи, приведшие к теоремам 1–3, могут быть перенесены и на неполиномиальные отображения. В частности, справедлива

Теорема 4. *Для $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим: $z = x_1 + \ldots + x_n$. Пусть $h_k(z) \in C^1(\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, n$, $H(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} h_k(z)$. Если для любых*

$z', z'' \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $[H(z'') - H(z')]/(z'' - z') \neq -1$, *то отображение* $F(X) = (x_1 + h_1(z), \ldots, x_k + h_n(z))$ *инъективно в* $\mathbb{R}^n$.

Следствие. *Если (в обозначениях теоремы 1)* $H'(z) \neq -1$, *то отображение* F *инъективно в* $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Keller O. H.* Ganze Cremona-Transformationen // Monatshefte Math. Phys. 1939. Vol. 47. P. 299–306.

[2] *Wang S. S. S.* A Jacobian criterion for separability // J. of Algebra. 1980. Vol. 65, № 2. P. 453–494.

[3] *Moh T. T.* On the global Jacobian conjecture and the configuration of roots // J. reine und angew. Math. 1983. Vol. 340. P. 140–212.

[4] *Smale S.* Mathematical Problems for the Next Century // Math. Intelligencer. 1998. Vol. 20, № 2. P. 7–15.

[5] *Starkov V. V.* Jacobian conjecture, two-dimensional case // Probl. Anal. Issues Anal. 2016. Vol. 5 (23), № 2. P. 69–78.

[6] *Ponnusamy S., Starkov V. V.* The Jacobian Conjecture and Injectivity Conditions // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 2018. Vol. 41, № 4. P. 2099–2115.

УДК 517.5

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Д. А. Волков
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

При некоторых ограничениях найдена скорость сходимости (в том числе и недиагональных) аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода экспоненциальных функций. Доказанные утверждения дополняет результаты, полученные ранее в работах других авторов.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства..

THE CONVERGENCE RATE HERMITE – PADÉ APPROXIMANTS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS[1]

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko, D. A. Volkov
(Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

Under some restrictions, the convergence rate of type II Hermite – Padé approximants of exponential functions is found (including nondiagonal case). The statements proved in the paper complement the results obtained earlier by other authors.

Keywords: Hermite – Padé polynomials, Hermite – Padé approximations, asymptotic equality..

Рассмотрим систему экспоненциальных функций

$$\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k},$$

где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – различные не равные нулю комплексные числа. Для индекса $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z) \not\equiv 0$, $P^j_{n,\vec{m}}(z)$, $\deg Q_{n,\vec{m}} \leqslant m$, $\deg P^j_{n,\vec{m}} \leqslant n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющие условиям:

$$R^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = Q_{n,\vec{m}}(z)e^{\lambda_j z} - P^j_{n,\vec{m}}(z) = O(z^{n+|m|+1}),\ z \to 0,$$

где $|m| = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, $n_j = n + |m| - m_j$. При $k = 1$ считаем $\lambda_1 = 1$.

Многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P^1_{n,\vec{m}}(z)$, $\ldots$, $P^k_{n,\vec{m}}(z)$ принято называть *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а рациональные функции

$$\pi^j_{n,\vec{m}}(z) = \pi^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = \frac{P^j_{n,\vec{m}}(z)}{Q_{n,\vec{m}}(z)},\ \ j = 1, 2, \ldots, k$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф18М-025).
[1]The article is done with the financial support of BRFBR (project No. F18M-025).

— *аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода* (*совместными аппроксимациями Паде*) системы экспонент. Диагональному случаю соответствует набор индексов $n = m_1 = \ldots = m_k$. Явные конструкции таких многочленов и рациональных функций впервые появились в работе Ш. Эрмита (см. [1], [2]), посвященной доказательству трансцендентности числа e.

В случае $k = 1$ Паде (см. [3]) и Перрон [4] доказали, что на компактах из $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z) := \pi^1_{n,m}(z)$ равномерно сходятся к e^z при $n + m \to \infty$. Основываясь на результатах численного эксперимента, Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z)$, доказательство которой получено Д. Браессом [5]: *для любого комплексного z при $n + m \to \infty$*

$$e^z - \pi_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{m!\ n!\ e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\ (n+m+1)!}\ z^{n+m+1}\ (1 + o(1)).$$

Е. М. Никишин обратил внимание на необходимость исследования сходимости совместных аппроксимаций Паде системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ в многомерном случае, когда $k > 1$. Решение поставленной им задачи было получено А. И. Аптекаревым [6], который доказал, что при $n+|m| \to +\infty$ дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j \xi})$ сходятся равномерно к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в $\mathbb{C}$. Вместе с тем, вопрос о том, какова скорость равномерной сходимости дробей $\pi^j_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j \xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ в общей постановке остаётся открытым. Имеющиеся результаты (см., например, [7]– [11]) относятся в основном к диагональному случаю. Так в [7] с помощью метода матричной задачи Римана–Гильберта при $\gamma = 1$, $k = 2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ найдена скорость сходимости «сжатых» диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде. Более общий результат при $k = 2$ получен в [12]:

Теорема 1. *Пусть $\vec{m} = (m_1, m_2)$, $|m| = m_1+m_2$, а дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j z})$ являются аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^2$, где λ_1, λ_2 — различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если*

$$\lim_{n\to\infty} m(n)/\sqrt{n} = 0,$$

то равномерно по всем m, $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, при $n \to +\infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_1 z}) =$$

$$= (-1)^{|m|}\ \frac{m_1!\, n!\, (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!\ (n+m_1+1)!}\ (1 + o(1))\,,$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_2 z}) =$$

$$= (-1)^{|m|} \, \frac{m_2! \; n! \; (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! \; (n+m_2+1)!} \; (1+o(1)) \, ,$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leqslant L$.

Методы Лапласа и перевала, применяемые при изучении асимптотических свойств диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде, в общем случае не работают. При доказательстве теоремы 1 в [12] применяется новый подход, который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала. Совершенствуя метод работы [12], нами установлена следующая

Теорема 2. *Пусть n, m_1, m_2, $\ldots$, m_k – произвольные целые неотрицательные числа, а рациональные дроби $\pi^j_{n,\vec{m}}(z)$ являются аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода для системы экспонент $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если*

$$\lim_{n\to\infty} m(n)/\sqrt{n} = 0,$$

то равномерно по всем m, $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, при $n \to +\infty$

$$e^{\lambda_j z} - \pi^j_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \; \lambda_j^{n+m_j+1} \; \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^{m_i} \times$$

$$\times \frac{m_j! \; n! \; z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)! \; (n+m_j+1)!} \; (1+o(1)), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \leqslant L$.

Теорема 2 является обобщением теоремы 1. Более того, она согласуются со всеми известными результатами. В частности, при сделанных в ней предположениях она согласуется с результатом Д. Браесса [5]. В случае $k = 1$ произведение $\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^{m_i}$ в предыдущем равенстве следует заменить единицей.

Отметим также, что при доказательстве теоремы 2 существенно используется следующее асимптотическое равенство, доказательство которого имеет технический характер: *при $n + m \to \infty$*

$${}_1F_1(m+1; m+n+2; z) = e^{\frac{m}{m+n} z} \, (1+o(1)),$$

где

$$ {}_1F_1(\alpha, \beta; z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \, \frac{z^p}{p!} $$

— гипергеометрическая функция,

$$ (\gamma)_0 = 1, \;\; (\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1) $$

— символ Похгаммера, а оценка $o(1)$ *равномерна по* z *на компактах из* $\mathbb{C}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C.R. Acad. Sci. 1873. Vol. 77. P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[2] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.

[3] *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения. М. : Мир, 1986. 502 с.

[4] *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig : Teubner, 1929. 524 p.

[5] *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II // J. Approx.Theory. 1984. Vol. 40, № 4. P. 375–379.

[6] *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.

[7] *Kuijlaars A. B. J., Stah H., Van Assche W., Wielonsky F.* Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function // J. of Comput. and Appl. Math. 2007. Vol. 207, № 2. P. 227–244.

[8] *Kuijlaars A. B. J., Stah H., Van Assche W., Wielonsky F.* Asymptotique des approximants de Hermite-Padé quadratiques de la fonction exponentielle et probl'emes de Riemann-Hiebert // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2003. Vol. 336. P. 893–896.

[9] *Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: a Riemann – Hiebert approach // Constr. Approx. 2005. Vol. 21, № 3. P. 351–412.

[10] *Старовойтов А. П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 88–91.

[11] *Кечко Е. П., Сидорцов М. В.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Сер. Естественные науки. 2019. № 3 (144). С. 158–162.

[12] *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера // Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 241–258.

УДК 517.9

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, А. А. Драпеза
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс, вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий для произвольной системы степенных рядов сформулированы и доказаны критерии единственности решений двух задач Эрмита – Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система, определители Ганкеля.

REPRESENTATION OF HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS

A. P. Starovoitov, N. V. Ryabchenko, A. A. Drapeza
(Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by

In this article new concepts are introduced: quite normal index, quite perfect system of functions. Using these concepts for an arbitrary system of power series, a criteria for the uniqueness the solution of the two Hermite–Padé problems was formulated and proved, explicit determinant presentations of type I and type II Hermite–Padé polynomials obtained. The proven assertions complement the well-knowresults in the theory of Hermite–Padé approximations.

Keywords: Hermite–Padé polynomials, normal index, perfect system, Hankel determinant..

1. Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода

Постановка задачи

Пусть $f = (f_1, ..., f_k)$ – набор степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_k)$ — это сумма $m = m_1 + ... + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу [1].

Задача А. *Найти тождественно не равный нулю многочлен* $Q_m(z) = Q_{n,\overrightarrow{m}}(z; f)$, $\deg Q_m \leqslant m$ *и многочлены* $P_{n_j}^j(z) = P_{n,\overrightarrow{m}}^j(z; f)$, $\deg P_{n_j}^j \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы при $j = 1, ..., k$

$$R_{n,\overrightarrow{m}}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j\, z^{n+m+1} + \ \dots\ .$$

В отдельных частных случаях решение задачи А в явном виде найдено Паде и Эрмитом [1]. В общем случае решение задачи А существует, а многочлены Q_m, $P^j_{n_j}$ находятся с точностью до мультипликативного множителя. Эта неединственность может быть и более существенной.

Принято говорить, что задача А имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде: $(\lambda Q_m, \lambda P)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а (Q_m, P) — некоторое одно фиксированное решение.

Определение 1. Если пара (Q_m, P), где $P = (P^1_{n_1}, \ldots, P^k_{n_k})$ — решение задачи А, то многочлены Q_m, $P^1_{n_1}$, $\ldots$, $P^k_{n_k}$ называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для набора f степенных рядов (1).

Определение 2. Индекс $(n, \overrightarrow{m}) = (n, m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}_+$ называется нормальным для системы f относительно задачи А, если для любого решения (Q_m, P) задачи А с индексом n и мультииндексом $\overrightarrow{m}$

$$\deg Q_m = m, \;\; \deg P^j_{n_j} = n_j, \;\; j = 1, ..., k.$$

Если индекс $(n, \overrightarrow{m})$ является нормальным, то задача А имеет единственное решение [1]. Однако, нормальность индекса (n, m) не является необходимым условием единственности решения поставленной задачи.

Критерий единственности решения задачи А

Далее считаем, что $\overrightarrow{m}$ — ненулевой мультииндекс. Для нулевого мультииндекса $\overrightarrow{m}$ решение задачи А очевидно: $Q_m(z) \equiv 1$, а P^j_n — многочлены Тейлора функции f_j.

Для каждого $j = 1, ..., k$, фиксированных индекса n и мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы $F^j_i = \begin{pmatrix} f^j_{n-m_j+i} & f^j_{n-m_j+i+1} & \ldots & f^j_{n_j+i} \end{pmatrix}$ порядка $1 \times (m+1)$, где $i = 1, 2, \ldots$; матрицу порядка $m_j \times (m+1)$

$$F^j = \begin{bmatrix} F^j_1 & F^j_2 & \ldots & F^j_{m_j} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F^j_1 \\ \vdots \\ F^j_{m_j} \end{bmatrix},$$

матрицу $F_{n,\overrightarrow{m}} = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k \end{bmatrix}^T$ порядка $m \times (m+1)$ и определители $d^j_{n,\overrightarrow{m},i} = det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & F^j_{m_j+i} \end{bmatrix}^T$ $(m+1)$-го порядка.

Определим также функциональные матрицы порядка $1 \times (m+1)$

$$E(z) = \begin{pmatrix} z^m & z^{m-1} & \ldots & z & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{m_j}(z) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-m_j} f^j_i \, z^{m+i} & \sum\limits_{i=0}^{n-m_j+1} f^j_i \, , z^{m+i-1} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{n_j} f^j_i \, z^i \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Индекс $(n, \overrightarrow{m})$ будем называть вполне нормальным для f относительно задачи А, если ранг матрицы $F_{n,\overrightarrow{m}}$ равен m.

Теорема 1. *Для того, чтобы для фиксированного индекса $(n, \overrightarrow{m})$ задача А имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс $(n, \overrightarrow{m})$ был вполне нормальным для f относительно задачи А.*

В случае, если $rang\, F_{n,\overrightarrow{m}} = m$, для решений задачи (Q_m, P) справедливы следующие детерминантные представления:

$$Q_m(z) = \; det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T ,$$

$$P^j_{n_j}(z) = \; det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_{m_j}(z) \end{bmatrix}^T ,$$

$$R^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d^j_{n,\overrightarrow{m},i} z^{n+m+i} .$$

2. Многочлены Эрмита – Паде 1-го рода

Постановка задачи

Рассмотрим задачу, двойственную задаче А [1].

Задача В. *Для системы f степенных рядов (1) и ненулевого индекса $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ найти такой набор не равных тождественно нулю одновременно многочленов $A_1 = A^1_n, ..., A_k = A^k_n$,* $\deg A_1 \leqslant n_1 - 1, \dots, \deg A_k \leqslant n_k - 1$, *для которых*

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) = c_n z^{|n|-1} + \dots .$$

Многочлены A_j (их называют многочлены Эрмита – Паде 1-го рода для f) находятся с точностью до мультипликативного множителя. Эта неединственность может быть и более существенной.

Принято говорить, что задача В имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде: λA, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а $A = (A_1, \dots, A_k)$ — некоторое одно фиксированное решение.

Критерий единственности решения задачи В

Для каждого $j = 1, ..., k$ и индекса $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ при $n_j \neq 0$, определим матрицы $G^j_i = \begin{pmatrix} f^j_{1-i} & f^j_{2-i} & \dots & f^j_{|n|-i-1} \end{pmatrix}^T$ порядка $(|n|-1) \times 1$, где $i = 1, ..., n_j$; матрицы $G^j = \begin{pmatrix} G^j_1 & G^j_2 & \dots & G^j_{nj} \end{pmatrix}$ порядка $(|n| - 1) \times n_j$ и матрицу $G_n = \begin{pmatrix} G^1 & G^2 & \dots & G^k \end{pmatrix}$ порядка $(|n| - 1) \times |n|$.

Рассмотрим также функциональные матрицы–строки порядка $1 \times |n|$

$$U_j(z) = \Big(\, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 1 \;\; z \;\; \ldots \;\; z^{n_j - 1} \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \, \Big) \, ,$$

$$U(z) = U_1(z) + \ldots + U_k(z) \, .$$

Если в матрице G_n добавить в качестве последней строки строку $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу порядка $|n| \times |n|$. Определитель этой матрицы обозначим через $A_j(z)$. Если в определителе $A_j(z)$ последнюю строку заменить строкой

$$\Big(f^1_{i+|n|-2} f^1_{i+|n|-3} \; \ldots \; f^1_{i+|n|-n_1-1} \; \ldots \; f^k_{i+|n|-2} f^k_{i+|n|-3} \ldots \; f^k_{i+|n|-n_k-1} \Big) \; ,$$

то полученный определитель обозначим через $\widetilde{d}_{n,i}$.

Определение 4. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}^k_+$ назовем вполне нормальным для f относительно задачи B, если $rang \, G_n = |\, n| - 1$.

Теорема 2. *Для того, чтобы для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}^k_+$ задача B имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f относительно задачи B.*

В случае, если $rang \, G_n = |\, n| - 1$, при определенном выборе мультипликативного множителя справедливы следующие представления:

$$A_j(z) = det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(z) \end{bmatrix} , \;\; j = 1, ..., k \, ;$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_{n,i} \, z^{|n|+i-2} \, .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.

УДК 517.587

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПО СОБОЛЕВУ ПОЛИНОМОВ, ПОРОЖДЁННЫХ ПОЛИНОМАМИ ЯКОБИ

М. С. Султанахмедов (Махачкала, Россия)
sultanakhmedov@gmail.com

Одним из ключевых свойств классических ортогональных полиномов является так называемое трёхчленное рекуррентное соотношение. Оно используется в исследовании дальнейших свойств систем ортогональных полиномов, а также для вычисления значений полиномов в произвольно заданной точке. В настоящей работе установлены рекуррентные соотношения для полиномов, ортогональных по Соболеву и порождённых классическими ортогональными полиномами в общем случае, а также для одного конкретного случая — полиномов порождённых полиномами Якоби.

Ключевые слова: рекуррентные формулы, ортогональные полиномы, ортогональность по Соболеву, пространства Соболева, полиномы Якоби.

RECURRENT FORMULAS FOR SOBOLEV ORTHOGONAL POLYNOMIALS GENERATED BY JACOBI POLYNOMIALS

M. S. Sultanakhmedov (Makhachkala, Russia)
sultanakhmedov@gmail.com

One of the key properties of the classical orthogonal polynomials is the three-term recurrent formula. It can be used for the polynomial systems' further properties investigation, as well as for calculating the values of these polynomials at the given point. We establish the recurrent formulas for Sobolev orthogonal polynomials generated by the classical orthogonal polynomials in the general case, as well as for one specific case — polynomials generated by the Jacobi polynomials.

Keywords: recurrent formula, orthogonal polynomials, Sobolev orthogonality, Sobolev space, Jacobi polynomials.

Введение

Обозначим через $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ систему функций, ортонормированную в пространстве Лебега $L^2_\omega(a,b)$ измеримых на (a,b) функций $f(x)$, для которых $\int\limits_a^b |f(x)|^p\omega(x)dx < \infty$, где $\omega = \omega(x)$ — весовая функция. Более точно,

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2_\omega} = \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)\omega(t)dt = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Через $W^r_{L^2_\omega(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно-дифференцируемых $(r-1)$ раз на $[a,b]$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^2_\omega(a,b)$. Скалярное произведение в $W^r_{L^2_\omega(a,b)}$ имеет вид

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int\limits_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\omega(t)dt. \qquad (1)$$

Скалярные произведения такого вида называются скалярными произведениями типа Соболева.

В работе [1] показано, что из системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ можно породить систему функций, ортонормированную в смысле (1), посредством равенств

$$\varphi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, r-1,$$

$$\varphi_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_n(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots,$$

причём эта новая система будет полна в $W^r_{L^2_\omega(a,b)}$, если исходная система была полна в $L^2_\omega(a,b)$. В дальнейшем будем считать $\varphi_{0,n}(x) = \varphi_n(x)$.

Положим теперь $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ одной из систем классических ортогональных полиномов. Хорошо известно, что одним из ключевых свойств таких систем является трёхчленная рекуррентная формула вида

$$\varphi_n(x) = (A_n x + B_n)\varphi_{n-1}(x) + C_n \varphi_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots .$$

Эта формула применяется не только для отыскания значений полинома $\varphi_n(x)$ в любой заданной точке x, но и для исследования дальнейших свойств системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Нами доказано следующее утверждение, устанавливающее рекуррентные соотношения для полиномов, ортогональных по Соболеву и порождённых классическими ортогональными полиномами, в общем случае.

Теорема 1. *При $r \geq 1$ для системы полиномов $\{\varphi_{r,n}\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональных в смысле Соболева и порождённых системой ортогональных полиномов $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, имеют место следующие рекуррентные формулы*

$$\varphi_{r,0}(x) = 1, \quad \varphi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)}{n} \varphi_{r,n-1}(x), \quad 1 \leq n \leq r-1;$$
$$\varphi_{0,n}(x) = \varphi_n(x); \quad \varphi_{n+1,n+1}(x) = \frac{(x-a)}{n+1} \varphi_{n,n}(x), \quad n \geq 0;$$
$$A_n r \varphi_{r+1,r+n}(x) = (A_n x + B_n)\varphi_{r,r+n-1}(x) +$$
$$+ C_n \varphi_{r,r+n-2}(x) - \varphi_{r,r+n}(x), \qquad n \geq 2,$$

где A_n, B_n и C_n имеют тот же смысл, что и в ().

Замечание 1. Рекуррентные соотношения для полиномов $\varphi_{1,n+1}(x)$, $n \geq 1$, для каждой конкретной системы необходимо устанавливать отдельно, используя специальные свойства исходной ортогональной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ (интегральные и дифференциальные свойства).

Рекуррентные формулы для полиномов Соболева – Якоби

Классические ортогональные полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ могут быть определены с помощью формулы Родрига (см. [2]) следующим образом

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\rho(x)\sigma^n(x)\right\},$$

где $\rho(x) = \rho(x;\alpha,\beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \sigma(x) = 1-x^2$. При $\alpha,\beta > -1$ полиномы Якоби образуют ортогональную систему в $L^2_\rho(-1,1)$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta}(t)\rho(t)dt = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

Обозначим через $p_n^{\alpha,\beta}(x) = [h_n^{\alpha,\beta}]^{-1/2}P_n^{\alpha,\beta}(x)$ ортонормированный вариант полиномов Якоби.

Рассмотрим полиномы $p_{r,k}(x)$ $(r = 1,2,\ldots)$, определённые на $[-1,1]$ посредством равенств

$$p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!},\quad k = 0,1,\ldots,r-1,$$

$$p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}p_n^{\alpha,\beta}(t)dt,\quad n = 0,1,\ldots.$$

Рекуррентные формулы для полиномов Соболева–Якоби такого вида устанавливает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для полиномов $\{p_{r,n}^{\alpha,\beta}\}$ при $\alpha,\beta > -1$ справедливы следующие соотношения*

$$p_{r,0}^{\alpha,\beta}(x) = 1,\quad p_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)}{k}p_{r,k-1}^{\alpha,\beta}(x),\quad 1\le k\le r-1;$$

$$p_{0,n}^{\alpha,\beta}(x) = p_n^{\alpha,\beta}(x);\quad p_{r,r}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)}{r}p_{r-1,r-1}^{\alpha,\beta}(x),\quad r\ge 1;$$

$$p_{1,k+1}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{2\left(h_k^{\alpha,\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}}{k+\alpha+\beta}\left[P_{k+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x) + (-1)^k\binom{k+\beta}{k+1}\right],\quad k = 1,2,\ldots;$$

$$rp_{r+1,r+n}^{\alpha,\beta}(x) = \left(x + A_n^{\alpha,\beta}\right)p_{r,r+n-1}^{\alpha,\beta}(x) -$$

$$-B_{n-1}^{\alpha,\beta} p_{r,r+n-2}^{\alpha,\beta}(x) - B_n^{\alpha,\beta} p_{r,r+n}^{\alpha,\beta}(x), \qquad r \geq 1, n \geq 2,$$

где

$$A_n^{\alpha,\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)},$$

$$B_n^{\alpha,\beta} = \frac{2}{2n+\alpha+\beta}\sqrt{\frac{n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta+1)}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Sharapudinov I. I.* Asymptotic properties of polynomials, orthogonal in Sobolev sence and associated with the Jacobi polynomials // Daghestan electronic mathematical reports. 2016. Vol. 6. P. 1–24.

[2] *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. Providence, RI : American Mathematical Society, 1959. 432 p.

УДК 517.9

СПЕКТР ПЯТИ-ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ХАББАРДА

С. М. Ташпулатов (Ташкент, Узбекистан)
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

Исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энерги пяти-электронных систем в модели Хаббарда для первых и вторых дублетных состояний. Доказывается, что спектры этих двух дублетных состояний различные.

Ключевые слова: модель Хаббарда, пяти-электронных систем, существенный спектр, дискретный спектр, дублетное состояние, секстетное состояние, квартетное состояние, пяти-электронных связанных состояний, пяти-электронных анти-связанных состояний..

SPECTRA OF FIVE-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL

S. M. Tashpulatov (Tashkent, Uzbekistan)
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

We investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of five-electron systems in the Hubbard model in the first and second doublet states. We proved the spectra of this two doublet states is different.

Keywords: Hubbard model, five-electron system, essential spectra, discrete spectrum, doublet state, sextet state, quartet state, five-electron bound state, five-electron anti-bound state.

Introduction

The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model, and obtaining the corresponding statements is therefore of great interest. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [1]. The structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of three-electron and four-electron systems in the Hubbard model were investigated in the work [2, 3]. We consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and described the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system in the doublet states. Hamiltonian of considering system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}.$$

Here, A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience), τ which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. In the five-electron systems exists five type doublet states. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$.

Main results

The first doublet state corresponds the basis functions ${}^1d^{1/2}_{m,n,p,q,r} = a^+_{m,\downarrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^d_{1/2}$, corresponding to the first doublet state is the set of all vectors of the form
${}^1\psi^d_{1/2} = \sum_{m,n,p,q,r\in Z^\nu}\widetilde{f}(m,n,p,q,r){}^1d^{1/2}_{m,n,p,q,r}$, $\widetilde{f} \in l^{as}_2$, where l^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^5)$.

Theorem 1. *The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^d_{1/2}$ is invariant under the operator H, and the restriction ${}^1H^d_{1/2}$ of H to the subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^d_{1/2}$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self- adjoint operator ${}^1\overline{H}^d_{1/2}$, acting in the space l^{as}_2.*

In the quasimomentum representation, the operator ${}^1\overline{H}^d_{1/2}$ acts in the Hilbert space $L^{as}_2((T^\nu)^5)$ as $({}^1\widetilde{H}^d_{1/2}\widetilde{f})(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta) = \{5A+2A\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i+\cos\gamma_i+\cos\theta_i+\cos\eta_i]\}\widetilde{f}(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta)+U\int_{T^\nu}[\widetilde{f}(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta,\eta)+ \widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta)+ +\widetilde{f}(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s)+\widetilde{f}(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta,\eta)+ \widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s,\eta)+\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma,\theta,\mu+\eta-s)]ds$, where L^{as}_2 is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^5)$.

Theorem 2. *Let $\nu = 1$ and $U < 0$. Then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is the union of four segments and the discrete spectrum is empty.*

Let $\nu = 3$, $\Lambda_1 = \lambda+\gamma$, $\Lambda_2 = \mu+\theta$, $\Lambda_i = (\Lambda^0_i,\Lambda^0_i,\Lambda^0_i), i = 1,2;$

Theorem 3. *a). If $U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}}{W}, \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} > \cos\frac{\Lambda^0_2}{2}$, or $U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda^0_1}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_2}{2}$, then the essential spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is the union of four segments and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ is empty.*

b). If $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}}{W} \leq U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}}{W}, \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} > \cos\frac{\Lambda^0_2}{2}$, or $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}}{W} \leq U <$

$-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *then the essential spectrum of operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *is the union of two segments and the discrete spectrum of operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *is empty.*

c). If $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < 0, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$ *or* $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \leq U < 0, \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, *then the essential spectrum of* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *is the single segment and the discrete spectrum of operator* ${}^1\widetilde{H}^d_{1/2}$ *is empty.*

The basis functions ${}^2d^{1/2}_{m,n,p,q,r} = a^+_{m,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\downarrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$ corresponds to the second doublet state. The subspace ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^d_{1/2}$, corresponding to the second doublet state is the set of all vectors of the form ${}^2\psi^d_{1/2} = \sum_{m,n,p,q,r\in Z^\nu} \widetilde{f}(m,n,p,q,r){}^2d^{1/2}_{m,n,p,q,r}$. Denote ${}^2H^d_{1/2}$ the restriction of operator H to the subspace ${}^2\mathcal{H}^d_{1/2}$. Let $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$.

Theorem 4. *If* $\nu = 1$ *and* $U < 0$, *then the essential spectra of the operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of seven segments and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is consists of no more one point.*

Let $\nu = 3$, $\Lambda_3 = \lambda + \mu$, $\Lambda_4 = \gamma + \theta$, $\Lambda_j = (\Lambda_j^0, \Lambda_j^0, \Lambda_j^0), j = 3, 4$.

Theorem 5.

a). If $\nu = 3$ *and* $U < -\frac{3B}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $U < -\frac{3B}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_4^0}{2} < \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *then the essential spectra of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of seven segments and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is consists of no more one point.*

b). If $\nu = 3$ *and* $-\frac{3B}{W} \leq U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} \geq \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{3B}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{3B}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_4^0}{2} > \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *then the essential spectra of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of four segments and the discrete spectrum of* ${}^2H^d_{1/2}$ *is empty.*

c). If $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}$, *or* $-\frac{3B}{W} \leq U < -\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{3B}{W}$, $\cos\frac{\Lambda_4^0}{2} < \frac{1}{2}$, *then the essential spectra of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is the union of two segments and the discrete spectrum of operator* ${}^2H^d_{1/2}$ *is empty.*

d). If $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_4^0}{2}}{W} \leq U < 0$, $\cos\frac{\Lambda_4^0}{2} < \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $-\frac{6B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq$

$U < 0$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} < \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, *or* $-\frac{3B}{W} \leq U < 0$, $\cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_4^0}{2}$, $\cos\frac{\Lambda_4^0}{2} > \frac{1}{2}$, *then the essential spectra of operator* ${}^2H_{1/2}^d$ *is single segment and the discrete spectrum of* ${}^2H_{1/2}^d$ *is empty.*

REFERENCES

[1] *Karpenko B. V., Dyakin V. V., Budrina G. L.* Two-electrons in the Hubbard Model // Phys. Met. Metallogr., 1986. Vol. 61, № 4. P. 702–706.

[2] *Tashpulatov S. M.* Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model // Theoretical and Mathematical Physics. 2014. Vol. 179, № 3. P. 387–405.

[3] *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 3. P. 530–541.

УДК 517.5

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_{p,\alpha}$

Т. Е. Тилеубаев (Нур-Султан, Казахстан)
Tileubaev@mail.ru

В работе получены уточнения прямой и обратной теоремы теории прибижения в пространствах L_p со степенным весом.

Ключевые слова: наилучшее приближение,модуль гладкости.

DIRECT AND INVERSE THEOREMS IN SPACES $L_{p,\alpha}$ SPACES

T. E. Tileubayev (Nur-Sultan, Kazakhstan)
Tileubaev@mail.ru

In the work are sharped direct and inverse theorems of theory appoximations in space L_p with degree weight.

Keywords: best appoximation, modulus of smoothness function.

Введение

Пусть $1 \leq p \leq \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0, \infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0, \infty)$. Норма в пространстве определяется

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{x \in [0,\infty)} |f(x)|, p = \infty.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{p,\alpha}$ оператор обобщенного сдвига [1] функции $f(x)$

$$T^h f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha} d\varphi.$$

Отметим, что некоторые свойства оператора $T^h : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$

$$T^h j_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda h),\ j_\alpha(u) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{u^\alpha} J_\alpha(u)$$

где $J_\alpha(u)$ — функция Бесселя первого рода порядка α,

$$\left\|T^h(f)\right\|_{p,\alpha} \leq C\left\|f\right\|_{p,\alpha}, 1 \leq p \leq \infty$$

$$\int_0^\infty T^h f(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x) T^h g(x) x^{2\alpha+1} dx.$$

Для любой функции $f \in C^2(R_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t) = u(t,s),\ t,s \in R_+$ определим как решение следующей задачи Коши (см.[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{2\alpha+1}{s}\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$u(t,0) = f(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = 0.$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha}$ конечные разности $\Delta_h^k f(x)$ порядка $k(k = 1,2,...)$ с шагом $h > 0$ определим следующим образом

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x) - T^h(x), \Delta_h^k f(x) = \Delta_h^1\left(\Delta_h^{k-1} f(x)\right),\ k > 1.$$

Величину

$$\Omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} = \sup_{0<h\leq\delta}\left\|\Delta_h^k f\right\|_{p,\alpha}$$

будем называть обобщенным модулем гладкости k-го порядка функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Обозначим через $M(\nu,p,\alpha), \nu > 0$ множество всех функций $Q_\nu(t), t \in R$, удовлетворяющих следующим условиям :

1) $Q_\nu(t)$ — четная целая функция экспоненциального типа ν; 2) $Q_\nu(t)$ — принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ из класса $M(\nu,p,\alpha)$ определим следующим образом:

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = \inf\{\left\|f - Q_\nu\right\|_{p,\alpha}:\ Q_\nu \in M(\nu,p,\alpha)\}.$$

Основные результаты

Из историй теории приближения функций известно, что прямая теорема теории приближения была доказана Д. Джексоном в 1911 году.

Теорема А. *Для любой $f \in C_\infty$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_\infty \leq C\omega_k(f;1/n)_\infty.$$

Эта теорема была уточнена в 1965 году М. Ф. Тиманом (см. [4])

$$n^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{sk-1}E_\nu^s(f)_p\right)^{1/s}\le C\omega_k(f;1/n)_p,\ 1<p<\infty, s=\max(p,2),$$

где

$$E_\nu(f)_p=\inf_{n\le k}\|f-T_n\|_p,$$

$$\omega_k(f;1/n)_p=\sup_{|h|<t}\|\Delta_h^k f\|_p,\ \Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x), \Delta_h^k f(x)=\Delta_h(\Delta_h^{k-1}f(x)).$$

В 1958 году получил М. Ф. Тиман уточнение обратного неравенства для $f\in L_p$, $1<p<\infty$ (см. [5])

$$\omega_k(f;1/n)_p\le Cn^{-k}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\tau k-1}E_\nu^\tau(f)_p\right)^{1/\tau},\quad \tau=\min(p,2).$$

В связи выше приведенными результатами возникает вопрос, можно ли получить аналогичние результаты например, в пространствах L_p со степенным весом.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $\tau=\max(p,2)$. *Тогда*

$$\Omega_m(f,n^{-2k})_{p,\alpha}\ge Cn^{-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2m\tau-1}E_\nu^\tau(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Теорема 1 является уточнением теоремы 4.2 из работы [2, с. 187].

Теорема 2. *Пусть* $1<p<\infty$, $s=\min(p,2)$. *Тогда*

$$\Omega_m(f,n^{-2k})_{p,\alpha}\le Cn^{-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2ms-1}E_\nu^s(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Теорема 3. *Если* $1<p<\infty$, $s=\min(p,2)$, $f\in L_{p,\alpha}$,*и ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2r-1}E_\nu(f)_{p,\alpha}$$

сходиться, то $f\in W_{p,\alpha}^r$ *и справедливы неравенства*

$$\Omega_m(B^r f,n^{-k})_{p,\alpha}\le\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{2r-1}E_\nu(f)_{p,\alpha}+n^{-2m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{2ms-1}E_\nu^s(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}\right\}.$$

Теоремы 2 и 3 явлются уточнением соответстующих теорем 1.3 и 1.4 из [6, с. 49].

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $s = \min(p, 2)$. *Тогда*

$$\Omega_m(f,h)_{p,\alpha} \leq Ch^{2m} \left(\int_h^1 t^{-s2m-1} \Omega_{m+1}^s(f)_{p,\alpha} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Левитан Б. М.* Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.

[2] *Платонов С. С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полу прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 5. С. 149–196.

[3] *Иванов В. И.* О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом // Матем. заметки. 2015. Т. 95, вып. 5. С. 684–694.

[4] *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ // Матем. сб. 1958. Т. 46 (88), № 1. С. 125–132.

[5] *Тиман М. Ф.* Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p // Исслед. соврем. пробл. конструктивной теории функций. Баку : АН Азерб. ССР, 1965. С. 18–25.

[6] *Платонов С. С.* Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые обратные теоремы теории приближения функций на полупрямой // Труды ПГУ. Математика. 2007. Вып. 14. С. 44–57.

УДК 517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ МОДУЛЯ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА: НОВЫЕ ПРОДВИЖЕНИЯ И ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков
(Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Недавно замечено, что в теории классических полиномов Бернштейна особую роль играет пример простого симметричного модуля. Он служит надежным ориентиром для распространения результатов на более сложные кусочно линейные порождающие функции. В работе отражено текущее состояние вопроса. Кратко сформулировано основное утверждение о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Особо отмечены оценки уклонения на основном отрезке $[0, 1]$, где разбираемый пример позволяет добиться почти предельной точности. Даны указания по поводу возможных обобщений, в том числе, на порождающие функции, имеющие в своем составе линейный кусок.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный модуль, оценки уклонения, кусочно линейные функции.

APPROXIMATION OF THE MODULE FUNCTION WITH BERNSTEIN POLYNOMIALS: NEW ADVANCES AND POSSIBLE GENERALIZATIONS[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

It was recently noticed that in the theory of classical Bernstein polynomials an example of the simple module function plays a special role. It provides a guideline for the expansion of results for the more complicated case of piecewise linear generating functions. The paper reflects current state of the problem. The main statement on the convergence of Bernstein polynomials in the complex plane is briefly formulated. Convergence estimates on the main interval are specially noted where the example under consideration allows to obtain practically ideal accuracy. Ways of further generalizations are outlined, including generating functions which have a linear part in the structure.

Keywords: Bernstein polynomials, simple module function, convergence estimates, piecewise linear functions.

Для функции $f \in C[0,1]$ полиномы Бернштейна переменной $z \in \mathbb{C}$ вводят формулой

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна см. в [1–3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).
[1]The article is done with the financial support of RFBR (project No. 18-01-00236).

В последнее время (см. [4, 5]) особый интерес вызывает пример простого симметричного на отрезке $[0,1]$ модуля

$$f(x) = |2x-1|, \qquad x \in [0,1]. \tag{2}$$

Полиномы Бернштейна для функции (2) имеют вид

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{2k}{n} - 1\right| C_n^k\, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Действующее в последовательности (3) *свойство склеивания*

$$B_{2m+1}(f,z) = B_{2m}(f,z), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

позволяет ограничиться номерами $n = 2m$ и рассматривать далее лишь полиномы

$$B_{2m}(f,z) = \sum_{k=0}^{2m} \left|\frac{k}{m} - 1\right| C_{2m}^k\, z^k (1-z)^{2m-k}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Для них справедливо *разложение Поповичу*

$$B_{2m}(f,z) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^k \left(4z(1-z)\right)^k, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

восходящее к классической работе [6]. Подробный разбор свойств (4), (6) и многих других соотношений, связанных с полиномами (5), см. в [4, 5].

Дальнейшая замена $\zeta = 4z(1-z)$ позволяет связать конструкцию (6) с частичными суммами степенного ряда

$$\sqrt{1-\zeta} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^k\, \zeta^k, \qquad |\zeta| \leqslant 1, \tag{7}$$

сходящегося в круге к главной ветви корня. Эта неожиданная связь существенно упрощает изучение полиномов (5) и придает новый импульс теории степенных рядов (см., в частности, работу [7], результаты которой получены именно в связи с разложением (6)).

Соотнося (6) и (7), видим, что последовательность (5) сходится на множестве

$$K_{1/2} = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |4z(1-z)| \leqslant 1\right\}, \tag{8}$$

ограниченном лемнискатой

$$\Lambda_{1/2} = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |4z(1-z)| = 1\right\}, \tag{9}$$

и расходится всюду вне $K_{1/2}$. С общей точки зрения работы [8] указанные объекты порождены точкой излома $x = 1/2$ функции (2).

Фактически, в нашем примере (2) разложение Поповичу (6) делает предельно ясной подоплеку знаменитых результатов Канторовича [8] о сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области. Отдавая должное автору [8], называем множество (8) *компактом Канторовича* для функции (2), а его границу (9) — соответственно *лемнискатой Канторовича.* Компакт состоит из двух петель

$$K_{1/2}^{(1)} \equiv K_{1/2} \cap \{\operatorname{Re} z \leqslant 1/2\}, \qquad K_{1/2}^{(2)} \equiv K_{1/2} \cap \{\operatorname{Re} z \geqslant 1/2\},$$

где $K_{1/2}^{(1)} \cup K_{1/2}^{(2)} = K_{1/2}$ и $K_{1/2}^{(1)} \cap K_{1/2}^{(2)} = \{1/2\}$. Предельная функция последовательности полиномов (5) имеет вид

$$\varphi(z) \equiv \begin{cases} 1-2z, & z \in K_{1/2}^{(1)}, \\ 2z-1, & z \in K_{1/2}^{(2)}, \end{cases} \tag{10}$$

причем $\varphi(x) = f(x) = |2x-1|$ для всех точек $x \in [0,1] \subset K_{1/2}$.

Разложение Поповичу (6) позволяет провести общее исследование характера сходимости полиномов (5) на плоскости $\mathbb{C}$ и дать точные оценки уклонения

$$R_{2m}(f,z) \equiv B_{2m}(f,z) - \varphi(z), \qquad z \in K_{1/2}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Оказывается, полиномы Бернштейна от модуля (2) сходятся к предельной функции (10) внутри компакта $K_{1/2}$ с экспоненциальной скоростью

$$R_{2m}(f,z) \sim \frac{2z(1-z)}{(2z-1)^2}\, \frac{\big(4z(1-z)\big)^m}{m\sqrt{m\pi}}, \qquad m \to \infty. \tag{12}$$

Асимптотика (12) действует во всех точках $z \in K_{1/2} \setminus \Lambda_{1/2}$, кроме, конечно, $z=0$ и $z=1$, где $R_{2m}(f,0) = R_{2m}(f,1) = 0$. При приближении к границе сходимость «портится», переходя на самой лемнискате $\Lambda_{1/2}$ в медленное степенное стремление. Справедлива общая оценка

$$|R_{2m}(f,z)| < R_{2m}(f,1/2) = 2^{-2m}\, C_{2m}^{m}, \quad z \in K_{1/2} \setminus \{1/2\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда видно, что «наихудшей» в смысле сходимости на компакте $K_{1/2}$ является точка $z=1/2$ с асимптотикой уклонения $R_{2m}(f,1/2) \sim 1/\sqrt{m\pi}$ при $m \to \infty$.

Отметим, что сравнительно недавно подобную теорию сходимости полиномов Бернштейна удалось распространить на случай произвольного *рационального модуля* $f(x) = |qx-p|$ при помощи разработанного аппарата *обобщенных разложений Поповичу* (см. подробный обзор [9] и заметку Д. Г. Цветкович в настоящем сборнике). Результаты для рационального модуля в общих чертах воспроизводят изложенное выше.

На основном отрезке $[0,1]$ оценки уклонения полиномов Бернштейна от функции (2) приобретают вполне завершенный вид. Формулу уклонения (11) естественно переписать в виде

$$R_{2m}(f,x) \equiv B_{2m}(f,x) - f(x), \qquad x \in [0,1], \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

с полиномами Бернштейна (5) и функцией $f(x) = |2x-1|$. Именно так понимаем $R_{2m}(f,x)$ всюду в дальнейшем.

Используем разложение Поповичу (6) и степенное разложение модуля

$$|2x-1| = \sqrt{1-4x(1-x)} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, \left(4x(1-x)\right)^{k},$$

верное при $x \in [0,1]$ в силу формулы (7). Получим представление

$$R_{2m}(f,x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}\, \left(4x(1-x)\right)^{k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

действующее при всех $x \in [0,1]$ (точнее даже, при замене x комплексной переменной $z \in K_{1/2}$). Именно на (14) базируется такой результат.

Теорема 1. *Для поточечного уклонения* (13) *справедлива оценка*

$$F_m(x;3) \leqslant R_{2m}(f,x) \leqslant F_m(x;1), \quad x \in [0,1], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где

$$F_m(x;a) \equiv \frac{2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, \big(4x(1-x)\big)^{m+1}}{2(m+1)(2x-1)^2 + 4ax(1-x)} \tag{16}$$

с параметром $a > 0$.

Двусторонняя оценка (15) учитывает все особенности поведения уклонения $R_{2m}(f,x)$ на отрезке $[0,1]$, включая экспоненциальный характер стремления к нулю при $x \in (0,1/2) \cup (1/2,1)$ и степенной — при $x = 1/2$. Весьма неожиданно, что такого эффекта «два в одном» удается добиться от изначально негладкого уклонения (13) при помощи гладкого на $[0,1]$ единого шаблона (16).

Исходная версия подобных оценок была анонсирована в обзоре [5]. Но первое строгое доказательство для более сложной оценки сверху (15) дано в работе [7] на базе предложенного там метода оценивания остатков степенных рядов с положительными, логарифмически выпуклыми коэффициентами. В настоящий момент мы располагаем полным доказательством теоремы 1, основанным лишь на элементарных комбинаторных свойствах коэффициентов

$$\sigma_k \equiv \frac{1}{2k-1}\, 2^{-2k}\, C_{2k}^{k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

входящих в представление (14) (а также в формулы (6) и (7)).

Теорема 1 дает идею представить уклонение (13) в виде

$$R_{2m}(f,x) = \frac{2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, \bigl(4x(1-x)\bigr)^{m+1}}{2(m+1)(2x-1)^2 \,+\, 4x(1-x)\, \eta_m\bigl(4x(1-x)\bigr)} \tag{18}$$

с некоторой функцией $\eta_m(s)$ переменной $s \in [0,1]$. То, что эта идея содержательна, показывает следующий результат последнего времени.

Теорема 2. *При любом* $m \in \mathbb{N}$ *и всех* $x \in [0,1]$ *поточечное уклонение* (13) *с порождающей функцией* (2) *представимо в виде* (18), *где*

$$\eta_m(s) = 2(m+1)\left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k+m+2}\, s^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k+m+1}\, s^k}\right), \qquad s \in [0,1],$$

с положительными коэффициентами σ_k *из формулы* (17). *При каждом фиксированном* $m \in \mathbb{N}$ *функция* $\eta_m(s)$ *является непрерывной, положительной, строго убывающей и строго выпуклой вверх на* $[0,1]$ *с граничными значениями*

$$\begin{cases} \eta_m(0) = \dfrac{3(m+1)}{m+2}, & \eta_m'(0) = -\dfrac{3(m+1)(2m+1)}{2(m+2)^2\,(m+3)}, \\ \eta_m(1) = 1, & \eta_m'(1) = -\infty. \end{cases}$$

На любом отрезке $[0,l] \subset [0,1)$ *последовательность* $\eta_m(s)$ *строго возрастает по* $m \in \mathbb{N}$ *и равномерно снизу сходится к константе* 3.

Все свойства функции $\eta_m(s)$, перечисленные в теореме 2, важны при анализе формулы уклонения (18). Теперь, например, нетрудно показать, что при использовании шаблона (16) значения $a = 3$ и $a = 1$ в нижней и верхней границах (15) будут неулучшаемыми.

Наиболее трудным при выводе теоремы 2 неожиданно оказалось обоснование строгого возрастания последовательности $\eta_m(s)$ по $m \in \mathbb{N}$ на любом отрезке $[0,l] \subset [0,1)$. Доказательство данного факта потребовало особых усилий. Впрочем, «игра стоила свеч»: если правильно применить теперь упомянутое строгое возрастание по $m \in \mathbb{N}$, то для самого уклонения $R_{2m}(f,x)$ при всех $x \in [0,1]$ и всех $m \in \mathbb{N}$ удается установить новую усиленную оценку сверху с мажорантой

$$\Phi_m(x) \equiv \frac{2^{-2m}\, C_{2m}^{m}\, \bigl(4x(1-x)\bigr)^{m+1}}{m(2x-1)^2 + 2x(1-x) + \sqrt{\bigl(m(2x-1)^2 + 2x(1-x)\bigr)^2 + 4(m+1)(2x-1)^2}},$$

существенно более точной, чем в теореме 1. Компьютерные расчеты показывают, что оценка сверху $R_{2m}(f,x) \leqslant \Phi_m(x)$ дает чрезвычайную точность и является практически идеальной.

Изложенную концепцию с естественными техническими поправками полезно распространить не только на полиномы Бернштейна от рационального модуля $f(x) = |qx - p|$ или от кусочно линейных функций, но и на полиномы Бернштейна от функций, имеющих в своем составе какой-то линейный кусок. Есть твердая уверенность — здесь действует универсальный принцип: на плоскости $\mathbb{C}$ во внутренних точках области, примыкающей к линейному куску функции $f \in C[0,1]$ и ограниченной соответствующими лемнискатами Канторовича, сходимость полиномов Бернштейна (1) происходит с экспоненциальной скоростью, причем эта скорость падает при приближении точки к границе области. Частичные иллюстрации к данному принципу см. в [5, 9, 10]. Отмеченный эффект нуждается, на наш взгляд, в дальнейшем изучении как с качественной, так и с количественной точек зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. 130 p.

[2] *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

[3] *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

[4] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. ун-та. Математика. Механика. Информатика, 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

[5] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Том. 8. Ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

[6] *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica. 1935. Vol. 10. P. 49–54.

[7] *Попов А. Ю.* Оценка сверху остатка степенного ряда с положительными коэффициентами специального вида // Челяб. физ.-матем. журнал, 2017. Т. 2, № 2. С. 193–198.

[8] *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд-ние мат. и естеств. наук, 1931. № 8. С. 1103–1115.

[9] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры ВИНИТИ. (В печати.)

[10] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* О скорости сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области на классе кусочно линейных порождающих функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2019, СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. С. 116–121.

УДК 517.518.85, 517.518.68

КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЁННЫХ СИНК ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Трынин, Е. Д. Киреева, М. А. Олейник
(Саратов, Россия)
tayu@rambler.ru, ekateriha98@mail.ru, oleynik-ritochka@mail.ru

На классе непрерывных функций ограниченной вариации изучены аппроксимативные свойства интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши с потенциалом ограниченной вариации. Рассмотрена модификация таких интерполяционных процессов Лагранжа, позволяющая приближать любую непрерывную функцию ограниченной вариации на всём отрезке $[0, \pi]$.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, теорема отсчётов, ограниченная вариация.

A CRITERION FOR THE CONVERGENCE OF GENERALIZED SINC APPROXIMATIONS FOR FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

A. Yu. Trynin, E. D. Kireeva, M. A. Oleynik
(Saratov, Russia)
tayu@rambler.ru, ekateriha98@mail.ru, oleynik-ritochka@mail.ru

Approximative properties of Lagrange interpolation processes constructed by solutions of Cauchy problem with potential of bounded variation are studied on the class of continuous functions of limited variation. A modification of such Lagrange interpolation processes is considered, which allows to approximate any continuous function of bounded variation over the entire interval $[0, \pi]$.

Keywords: sinc approximation, sampling theorem, bounded variation.

Договоримся считать, что $\rho_\lambda \geq 0$, $\rho_\lambda = o(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln \lambda})$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbf{R}$, и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0, \pi]$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 1, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \tag{1}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = h(\lambda), \tag{2}$$

перенумеруем следующим образом

$$0 \leq x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n,\lambda} \leq \pi.$$

В сообщении речь пойдёт об аппроксимативных свойствах значений операторов (см., например, [1,2]), построенных по решениям задачи Коши (1) или (2) вида:

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}), \qquad (3)$$

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})} [f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0)] +$$
$$+ \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x + f(0). \qquad (4)$$

Операторы (3), (4) обладают интерполяционным свойством Лагранжа, т.е. $S_\lambda(f,x_{k,\lambda}) = T_\lambda(f,x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda})$, для любых $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$.

Г. И. Натансон в [3] получил признак Дини–Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$ процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})} = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x), \qquad (5)$$

где U_n есть $n-$ая собственная функция регулярной задачи Штурма–Лиувилля

$$U'' + [\lambda - q]U = 0, \quad U'(0) - hU(0) = 0, \quad U'(\pi) + HU(\pi) = 0$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и граничными условиями $h \neq \pm\infty, \quad H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n.

Изучению аппроксимативных свойств операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля (5) посвящены также работы [4–8]. Заметим, что (5) являются частным случаем операторов (3), в случае задачи Коши (1). Свойства операторов интерполирования функций (3), (4) и (5) тесно связанны с поведением синк-приближений

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx-k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

также представляющих собой частный случай операторов (3), только теперь в случае задачи Коши (2). До появления работ [9–18] приближение такими операторами на отрезке, или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. Здесь приводятся полученные с помощью концепций работ [19–28] достаточные условия равномерной внутри интервала $(0,\pi)$ и равномерной на отрезке $[0,\pi]$ сходимости интерполяционных процессов (3),(4). Будем обозначать $C_0[0,\pi]=\{f: f\in C[0,\pi],\ f(0)=f(\pi)=0\}$.

Теорема 1. *Пусть функция $f\in C_0[0,\pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty}|S_\lambda(f,x)-f(x)|=0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть функция $f\in C[0,\pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно внутри отрезка $[0,\pi]$ (раномерно на шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и любом компакте, содержащемся в интервале $(0,\pi)$) справедливо соотношение (6).*

Предложение 1. *Если функция $f\in C[0,\pi]\setminus C_0[0,\pi]$ имеет ограниченную вариацию, то существует задача Коши вида (2) такая, что сходимость в соотношении (6) на всём отрезке $[0,\pi]$, оставаясь квазиравномерной, равномерной не будет.*

Теорема 3. *Пусть функция $f\in C[0,\pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ и шарах $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty}|T_\lambda(f,x)-f(x)|=0. \tag{7}$$

Замечание. Проведены численные эксперименты [28], в которых построены непрерывные функции, для которых погрешность аппроксимации в соотношениях (6) и (7) неограниченно растёт с ростом вариации приближаемой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108.

[2] *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 6. С. 129–162.

[3] *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учен. записки Ленинград. пед. ин-та. 1958. Т. 166, No. 1. С. 213–219.

[4] *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2010. № 11. С. 74–85.

[5] *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2000. Т. 9, № 460. С. 60–73.

[6] *Трынин А. Ю.* Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. 479 с.

[7] *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 133–143.

[8] *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма–Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 116–129.

[9] *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6 (324). С. 53–128.

[10] *Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 10. С. 141–158.

[11] *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6, С. 66–78.

[12] *Трынин А. Ю.* Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 3. С. 288–298.

[13] *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East Journal on Approximations. 2008. T. 14, № 2. P. 183–192.

[14] *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 4. С. 232–256.

[15] *Умаханов А. Я., Шарапудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавк. матем. журн. 2016. Т. 18, № 4. С. 61–70.

[16] *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 116–132.

[17] *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 5. С. 170–194.

[18] *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Матем. 2016. № 3. С. 72–81.

[19] *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 506–514.

[20] *Дьяченко М. И.* Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 3. С. 3–18

[21] *Скопина М. А., Максименко И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2013. Т. 15, № 2. С. 1–39.

[22] *Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 2004. Т. 76 № 5. С. 723–731.

[23] *Борисов Д. И., Знойил М.* О собственных значениях PTPT-симметричного оператора в тонком слое // Матем. сб. 2017.Т. 208, № 2. С. 3–30.

[24] *Фарков Ю. А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 5. С. 185–212.

[25] *Киреева Е. Д., Трынин А. Ю.* Об аппроксимативных свойствах полиномиальных систем Чебышёва $\{S_{k,\lambda}\}_{k=0}^{n}$ // АННИ XXI века: теория и практика. Воронеж, 2019. С. 166–170.

[26] *Киреева Е. Д., Трынин А. Ю.* Об одном достаточном условии равномерной сходимости синк-аппроксимаций // 21 centry: fundamental science and technology XVII. North Charleston, USA, 2018. Vol. 2. P. 109–112.

[27] *Трынин А. Ю., Киреева Е. Д., Хуторная Ю. С.* Признак равномерной сходимости синк-аппроксимаций на отрезке // АННИ XXI века: теория и практика. Воронеж, 2017. С. 534–536.

[28] *Олейник М. А., Трынин А. Ю.* Исследование погрешности в районе заданного узла классических и модифицированных операторов sinc-аппроксимаций непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ функции // MODERN SCIENCE. 2019. № 4–1. С. 313–317.

УДК 517.98, 517.51

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СДВИГОВ ПОЛИНОМА В ПРОСТРАНСТВЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. В. Фадеева (Москва, Россия)

annafadeeva16@mail.ru

В работе доказан критерий существования фрейма Парсеваля наперед заданной размерности, полученного последовательными сдвигами одного многочлена, установлено, какое количество элементов может быть у фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов одного многочлена в пространстве тригонометрических многочленов вида $T_Q(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, где $c_k \in \mathbb{C}$, а Q — конечное множество целых чисел. Также показано, каким должен быть вид фрейма из сдвигов одной функции. Полученный результат обобщен на случай нескольких переменных.

Ключевые слова: фрейм Парсеваля, сдвиги функции, пространство тригонометрических многочленов.

THE PARSEVAL'S FRAMES OF SUCCESSIVE SHIFTS OF A POLYNOMIAL IN SPACE OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

A. V. Fadeeva (Moscow, Russia)

annafadeeva16@mail.ru

The work establishes the possible dimensions of the Parseval's frame in the space of trigonometric polynomials of the following type $T_Q(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, which consists of serial translations of a polynomial ($c_k \in \mathbb{C}$, the finite set $Q \subset \mathbb{Z}$). The sufficient and necessary conditions for a system of the serial translations to be a Parseval's frame are also established there. The result obtained is generalized to the case of several variables.

Keywords: Parseval's frame, shifts of functions, space of trigonometric polynomials.

Пусть Q — непустое конечное подмножество целых чисел, а M — непустое конечное подмножество неотрицательных целых чисел.

Введем следующие обозначения:

1) $\mathbb{T}_Q$ — пространство комплексных тригонометрических многочленов вида $T_Q(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, где $c_k \in \mathbb{C}$;

2) $\mathcal{T}_M$ — пространство действительных тригонометрических многочленов, т.е. многочленов вида $T_M(x) = \sum\limits_{|k|\in M} c_k e^{ikx}$, где коэффициенты $c_0 = \frac{a_0}{2}\chi_M(0), c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, $0 < k \in M$.

В 2014 г. Т.П. Лукашенко показал [1, 2], что в пространствах $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$ с $Q = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ и $M = [0, n] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, существуют ортонормированные базисы из последовательных сдвигов одного многочлена, а в пространствах $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$ с $Q = ([-n, -m] \cup [m, n]) \cap \mathbb{Z}$ и $M = [m, n] \cap \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$ (и в некоторых других), таких ортонормированных базисов нет. Но в этих пространствах существуют фреймы Парсеваля из $(2n+1)$ последовательного сдвига одного многочлена, а именно система сдвигов проекций ядер Дирихле

$$\left\{T_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sum_{k\in Q} e^{i\left(k\left(x-\frac{2\pi r}{2n+1}j\right)-s_k\right)}\right\}_{j=0}^{2n},$$

где $s_k \in \mathbb{R}$, число $r \in \mathbb{Z}$ не имеет общих делителей с числом $2n+1$ (в случае пространства действительных тригонометрических многочленов $s_0 \in \{0, \pi\},\ s_k = -s_{-k}$). При больших значениях n размерность фрейма Парсеваля может во много раз превосходить размерность пространства многочленов, равную $2(n-m+1)$. В связи с этим возник вопрос о существовании в таких пространствах $\mathbb{T}_Q$ фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции из меньшего числа элементов. Оказывается, что в некоторых случаях такие фреймы Парсеваля есть.

В 2018 году Фадеева А.В. [5] установила для пространств $\mathbb{T}_Q$ и $\mathcal{T}_M$, какое количество элементов может быть у фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов одного многочлена и каким должен быть вид фрейма из сдвигов одной функции.

В данной работе мы рассмотрим некоторые результаты для случая одной переменной и ряд результатов для случая нескольких переменных: необходимые и достаточные условия для системы из сдвигов функции являться фреймом Парсеваля в пространстве тригонометрических многочленов от нескольких переменных.

С общим определением фреймов можно ознакомиться в [3; 4]. Дадим определения для частного случая — фреймов Парсеваля (или ортоподобных систем).

Определение 1. Система $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ элементов гильбертова пространства H называется *фреймом Парсеваля* (ортоподобной системой), если для любого элемента $f \in H$ выполнено равенство $\|f\|^2 = \sum\limits_k |(f, f_k)|^2$ или, что эквивалентно, выполнено равенство $f = \sum\limits_k (f, f_k) f_k$, где ряд сходится в H (см. [3, с. 96, ф-ла (3.2.2); 4, с. 74, ф-ла (1.113)]).

Рассмотрим задачу о существовании и виде фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции в пространствах $\mathbb{T}_Q$, где множество $Q \subset \mathbb{Z}, |Q| < \infty$.

Теорема 1. *Пусть многочлен* $T(x) = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{ikx}$, *где* Q *— множество целых чисел, для количества элементов которого имеет место оценка* $1 < |Q| < \infty$, *и пусть* r *— натуральное число. Система* $\{T(x-\alpha j)\}_{j=0}^{r}$, *полученная последовательными сдвигами многочлена* $T(x)$ *на* α, *обра-*

зует фрейм Парсеваля в пространстве $\mathbb{T}_Q$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\alpha = \frac{2\pi v}{\mu\cdot(r+1)}$, *$\mu$ — НОД (наибольший общий делитель) чисел из множества* $\{a-b:\ a,b\in Q,\ a\neq b\}$, $v\in\mathbb{Z}$;

2) $|c_k| = \frac{1}{\sqrt{2\pi(r+1)}}$, $k\in Q$;

3) *для любых* $a,b\in Q$, $a\neq b$, *выполнено соотношение* $(a-b)\cdot\alpha\neq 0 \pmod{2\pi}$.

С доказательством данной теоремы можно ознакомиться в [5]. Также в упомянутой работе [5] был получен критерий существования фрейма Парсеваля из последовательных сдвигов многочлена в пространстве действительных тригонометрических многочленов.

Рассмотрим задачу о существовании и виде фреймов Парсеваля из последовательных сдвигов функции в пространствах тригонометрических многочленов от нескольких переменных.

Пусть непустое конечное множество $Q\subset\mathbb{Z}^n, n\in\mathbb{N}$, а $\mathbb{T}_Q$ — пространство комплексных тригонометрических многочленов вида: $T_Q(x_1,...,x_n) =$
$= \sum\limits_{(k_1,...,k_n)\in Q} c_{k_1,...,k_n}e^{i(k_1x_1+...+k_n)}$ или $T_Q(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{\overrightarrow{k}\in Q} c_{\overrightarrow{k}}e^{i(k_1x_1+...+k_n)}$, где $c_{\overrightarrow{k}}\in\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть многочлен* $T(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{\overrightarrow{k}\in Q} c_{\overrightarrow{k}}e^{i(k_1x_1+...+k_nx_n)}$, *где Q — непустое конечное подмножество $Q\subset\mathbb{Z}^n$. Пусть J – непустое конечное множество сдвигов (множество J состоит из элементов вида $(j_1,...,j_n)$, где $j_1,...,j_n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$). Если система $\{T(x_1-\alpha_1j_1,...,x_n-\alpha_nj_n)\}_{(j_1,...,j_n)\in J}$ образует фрейм Парсеваля в пространстве $\mathbb{T}_Q$, то выполнено следующее условие:*

$|c_{(k_1,...,k_n)}| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|J|}}$, *для любых* $(k_1,...,k_n)\in Q$.

Заметим, что система сдвигов многочлена вдоль ненулевого вектора $(a_1,...,a_n)$ $(a_i\in\mathbb{R})$, т.е. когда $J=\{j\times(a_1,...,a_n)\}_{j=0}^{|J|-1}$, на аргумент $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ сводится к случаю сдвигов вдоль вектора $\underbrace{(1,...,1)}_{n}$ путем изменения аргумента $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ на $(a_1\alpha_1,...,a_n\alpha_n)$, то есть система сдвигов $\{T(x_1-\alpha_1a_1j,...,x_n-\alpha_na_nj)\}_{j=0}^{|J|-1}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{T}_Q$ тогда и только тогда, когда система $\{T(x_1-\widetilde{\alpha}_1j,...,x_n-\widetilde{\alpha}_nj)\}_{j=0}^{|J|-1}$ является фреймом Парсеваля в $\mathbb{T}_Q$, где $\widetilde{\alpha}_k=\alpha_ka_k, k\in\{1,...,n\}$. Таким образом, достаточно рассматривать систему сдвигов вида $J=\{j\times(1,...,1)\}_{j=0}^{|J|-1}$, где $|J|$ — натуральное число.

Теорема 3. *Пусть многочлен* $T(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{\overrightarrow{k}\in Q} c_{\overrightarrow{k}} e^{i(k_1x_1+...+k_nx_n)}$, *где* $Q \subset \mathbb{Z}^n$ *— непустое конечное множество, причем существует такие элементы* $(a_1^1,....,a_n^1)$,..., $(a_1^n,...,a_n^n) \in Q$: $(a_1^1+1, a_2^1,....,a_n^1),...,(a_1^n,...,a_n^n+1) \in Q$. *Пусть множество* $J = \{j\times(1,...,1)\}_{j=0}^{|J|-1}$, *где* $|J|$ *— натуральное число. Система* $\{T(x_1-\alpha_1 j_1,...,x_n-\alpha_n j_n)\}_{(j_1,...,j_n)\in J}$, *полученная последовательными сдвигами многочлена*
$T(x_1,...,x_n)$ *на* $(\alpha_1,...,\alpha_n)$, *образует фрейм Парсеваля в пространстве* $\mathbb{T}_Q$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\alpha_l = \frac{2\pi k_l}{|J|}, k_l\in\mathbb{Z}, l\in\{1,2,...,n\}$;

2) $|c_{(k_1,...,k_n)}| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|J|}}$, $(k_1,...,k_n)\in Q$;

3) *для любых* $(l_1,...,l_n),(m_1,...,m_n)\in Q$, $(l_1,...,l_n)\neq(m_1,...,m_n)$, *выполнено соотношение:*
$\Big((l_1,...,l_n)-(m_1,...,m_n)\Big)\cdot(\alpha_1,...,\alpha_n)\neq 0 \pmod{2\pi}$.

Условие 3 предыдущей теоремы накладывает условия на углы $\alpha_i, i\in\{1,...,n\}$. В случае двух переменных из этой теоремы вытекает следующее ограничение:

Предложение 1. *Рассмотрим пространство* $\mathbb{T}_Q$, *где* Q_1, Q_2 *— множество целых чисел, для количества элементов которого имеет место оценка* $1<|Q_i|<\infty$, *и* Q_1, Q_2 *содержит три последовательных числа;* $J-$ *конечное множество* $J = j\times(1,1)_{j=0}^{|J|-1}$. *Обозначим через* $D_i = \{a_i-b_i : a_i,b_i\in Q_i, a_i\neq b_i\}$, *а через* $\widetilde{D_i} = \{\frac{2\pi d}{|J|}+2\pi k|J| : d\in D_i, k\in\mathbb{Z}\}$, *i = 1, 2. Если система* $\{T(x_1-\alpha_1 j_1, x_2-\alpha_2 j_2)\}_{(j_1,j_2)\in J}$, *полученная последовательными сдвигами вида многочлена* $T(x)$ *на* (α_1,α_2), *образует фрейм Парсеваля в пространстве* $\mathbb{T}_Q$, *то углы* α_1 *и* α_2 *не могут одновременно принадлежать множествам* $\widetilde{D_2}, \widetilde{D_1}$ *соответственно.*

Теорема 4. *Пусть многочлен* $T(x_1,...x_n) = \sum\limits_{\overrightarrow{k}\in Q} c_{\overrightarrow{k}} e^{i(k_1x_1+...k_nx_n)}$, *где* Q_j *— множество целых чисел, для количества элементов которого имеется оценка* $1<|Q_j|<\infty, j\in\{1,2,...n\}$. *Пусть множества* Q_j *содержат по два последовательных числа,* $Q = Q_1\times...\times Q_n$, *и множество* $J = \prod\limits_{j=1}^{n} J_j$, *где* $J_j = \{0,1,2,...n_j\}, n_j\in\mathbb{N}, j\in\{1,2,...n\}$. *Система* $\{T(x_1-\alpha_1 j_1,...x_n-\alpha_n j_n)\}_{(j_1,...j_n)\in J}$, *полученная последовательными сдвигами многочлена* $T(x_1,...,x_n)$ *на* $(\alpha_1,...\alpha_n)$, *образует фрейм Парсеваля в пространстве* $\mathbb{T}_Q$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $\alpha_j = \frac{2\pi k_j}{|J_j|}, k_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, 2, ...n\}$;
2) $|c_{\overrightarrow{k}}| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |J|}}$, $\overrightarrow{k} \in Q$;
3) *для любых* $a_j, b_j \in Q_j$, $a_j \neq b_j$, *выполнено соотношение:*
$(a_j - b_j) \cdot \alpha_j \neq 0 \pmod{2\pi}$ *для* $j \in \{1, 2, ...n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лукашенко Т. П.* Базисы тригонометрических многочленов из сдвигов ядер Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 5. С. 35–40.

[2] *Лукашенко Т. П.* Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 367–373.

[3] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ РХД, 2001. С. 96–105

[4] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. С. 73–84

[5] *Фадеева А.В.* Фреймы Парсеваля из последовательных сдвигов одной функции в пространствах тригонометрических многочленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 6. С. 30–36.

УДК 517.518

КОНЕЧНЫЕ ЖЁСТКИЕ ФРЕЙМЫ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Ю. А. Фарков (Москва, Россия)[1]

farkov-ya@ranepa.ru

Обсуждаются методы построения конечных жёстких фреймов с помощью функций Уолша. В связи с проблемой Кадисона-Зингера рассмотрен метод расщепления конечных фреймов Парсеваля, определяемых по матрицам Уолша. Показано, как применить дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона и принцип расширения для построения фреймов Парсеваля периодических последовательностей.

Ключевые слова: всплески, жёсткие фреймы, функции Уолша, проблема Кадисона–Зингера, дискретное преобразование Виленкина-Крестенсона, периодические последовательности.

FINITE TIGHT FRAMES IN WALSH ANALYSIS

Yu. A. Farkov (Moscow, Russia)

farkov-ya@ranepa.ru

Methods for constructing finite tight frames using Walsh functions are discussed. In connection with the Kadison-Singer problem, the method of splitting finite Parseval frames defined by Walsh matrices is considered. It is shown how to apply the discrete Vilenkin-Chrestenson transform and the extension principle to construct Parseval frames of periodic sequences.

Keywords: wavelets, tight frames, Walsh functions, Vilenkin groups, Kadison-Singer problem, discrete Vilenkin-Chrestenson transform, periodic sequences.

Пусть H — гильбертово пространство. Система элементов $f_1, f_2, f_3, \dots$ называется *фреймом* для H, если существуют такие положительные постоянные A и B, что для любого элемента $f \in H$ верны неравенства

$$A\|f\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \le B\|f\|^2.$$

Постоянные A и B называют соответсвенно *нижней* и *верхней границами* фрейма. Если границы фрейма совпадают, то фрейм называют *жёстким* (*tight*). В случае $A = B = 1$ фрейм $\{f_n\}$ называется *фреймом Парсеваля.*

Основы теории фреймов изложены в монографиях [1, 2], где имеется подробная библиография. Теория конечных жёстких фреймов [3] активно развивалась последние пятнадцать лет в связи с приложениями в таких областях как обработка сигналов, квантовая теория информации, многомерные ортогональные полиномы и сплайны, а также в теории сжатых измерений (Compressed Sensing). Взаимосвязи между теорией фреймов и анализом Уолша в контексте конструкций всплесков (wavelets) анализировались в недавних статьях [4–7].

[1]Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Хорошо известно, что функции Уолша можно интерпретировать как характеры двоичной группы Кантора, а обобщениями функций Уолша являются характеры групп Виленкина (см., например, [8–10]). Основные результаты о всплесках на группах Кантора и Виленкина приведены в книге [11] и в обзорных статьях [12, 13]. В лекции будут изложены методы построения конечных жёстких фреймов с помощью функций Уолша и их обобщений. В связи с проблемой Кадисона–Зингера (см., например, [14–16]) будет рассмотрен предложенный в [17] метод расщепления конечных фреймов Парсеваля, определяемых по матрицам Уолша. Ниже формулируется один из недавних результатов о построении фреймов в пространствах периодических последовательностей.

Пусть $N = p^n$, где p и n — натуральные числа, $p \geq 2$. Множество $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ является абелевой группой с операцией

$$a \oplus b := \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu - b_\nu| \, p^\nu, \quad a, b \in \mathbb{Z}_N,$$

где

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^\nu, \quad b = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu p^\nu, \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Пространство $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ состоит из последовательностей вида

$$x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots), \quad x(j) \in \mathbb{C},$$

таких, что $x(j+N) = x(j)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Последовательность x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ часто отождествляется с вектором

$$(x(0), x(1), \ldots, x(N-1)).$$

Линейные операции в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяются покомпонентно. Скалярное произведение последовательностей $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}.$$

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. *Функции Крестенсона* $w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}$ для пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ могут быть заданы равенствами

$$w_k^{(N)}(l) = \varepsilon_p^{\sigma(k,l)}, \quad w_k^{(N)}(j) = w_k^{(N)}(j+N), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где
$$\sigma(k,l)=\sum_{\nu=0}^{n-1}k_\nu l_{n-\nu-1}$$
и
$$k=\sum_{\nu=0}^{n-1}k_\nu p^\nu,\quad l=\sum_{\nu=0}^{n-1}l_\nu p^\nu,\quad k_\nu,l_\nu\in\{0,1,\dots,p-1\}.$$

В случае $p=2$ функции Крестенсона совпадают с функциями Уолша (см., например, [9, 18, 19]).

Положим $N_1=p^{n-1}$. При $p=2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ следует каждую строку матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ написать дважды в виде двух новых строк и дополнить полученные строки, приписывая к первой строке справа еще один экземпляр этой же строки, а ко второй строке добавляя справа все элементы той же строки с противоположным знаком (см. [9, § 1.3]). Аналогично, при $p>2$ для получения матрицы $(w_k^{(N)}(l))$ каждая строка матрицы $(w_k^{(N_1)}(l))$ записывается p раз в один столбец и умножается последовательно на 1, ε_p, ε_p^2, $\dots$, ε_p^{p-1} (полученные после умножения строки приписываются справа к имеющимся строкам). При $p=3$ из матрицы
$$(w_k^{(3)}(l))=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{bmatrix},\qquad k,l\in\{0,1,2\}.$$
этим методом получается (для краткости полагаем $\varepsilon=\varepsilon_3$) следующая матрица:
$$(w_k^{(9)}(l))=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon^2\\1&1&1&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon\\1&\varepsilon&\varepsilon^2&1&\varepsilon&\varepsilon^2&1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon^2&1&\varepsilon^2&\varepsilon&1\\1&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^2&1&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon^2&1\\1&\varepsilon^2&\varepsilon&1&\varepsilon^2&\varepsilon&1&\varepsilon^2&\varepsilon\\1&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon&1&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon&1\\1&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon&1&\varepsilon&1&\varepsilon^2\end{bmatrix},\qquad k,l\in\{0,1,\dots,7\}.$$

Матрица $W^{(N)}:=(w_l^{(N)}(j))_{l,j=0}^{N-1}$ симметрична и удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_l^{(N)}(j)\overline{w_k^{(N)}(j)} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^{(N)}(l)\overline{w_i^{(N)}(k)} = N\delta_{l,k}, \quad l,k \in \mathbb{Z}_N,$$

где $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера. Следовательно, система $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}\}$ является ортогональным базисом пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

Дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона сопоставляет каждому вектору x из $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ последовательность $\widehat{x}$ коэффициентов Фурье вектора x по системе $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}\}$:

$$\widehat{x}(k) := N^{-1}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{w_k^{(N)}(j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_N.$$

Разложение вектора x по базису $\{w_0^{(N)}, w_1^{(N)}, \ldots, w_{N-1}^{(N)}\}$ записывается в виде $x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}(k) w_k^{(N)}(j)$, $j \in \mathbb{Z}_N$.

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_N$ оператор p-ичного сдвига $T_k : \ell^2(\mathbb{Z}^N) \to \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ определяется по формуле

$$(T_k x)(j) := x(j \ominus k), \quad x = x(j) \in \ell^2(\mathbb{Z}^N).$$

Для любых $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$, $k, l \in \mathbb{Z}_N$, справедливы равенства

$$\widehat{(T_k x)}(l) = \overline{w_k^{(N)}(l)}\,\widehat{x}(l), \quad \langle x, y\rangle = N\langle\, \widehat{x}, \widehat{y}\,\rangle.$$

При построении жёстких фреймов и ортогональных базисов всплесков в различных пространствах ключевую роль играет принцип расширения (см., например, [1, § 1.8]). Следующая теорема и приведенный ниже алгоритм показывают, как реализуется принцип расширения в рассматриваемой ситуации.

Теорема А [7]. *Пусть векторы $u_0, u_1, \ldots, u_r \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ таковы, что для матрицы*

$$M(l) := \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \ldots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+N_1) \\ \widehat{u}_0(l+2N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+2N_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) & \ldots & \widehat{u}_r(l+(p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ *выполнено равенство*

$$M(l)M^*(l) = I_p, \tag{1}$$

где I_p — *единичная матрица порядка* p. *Тогда система*

$$B(u_0, u_1, \dots, u_r) := \{T_{p\,k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p\,k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \dots \cup \{T_{p\,k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}$$

является фреймом Парсеваля для $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

При условии (1) матрицу $M(l)$ можно дополнить до унитарной матрицы. Поэтому верны неравенства

$$|\widehat{u}_s(l)|^2 + |\widehat{u}_s(l + N_1)|^2 + \dots + |\widehat{u}_s(l + (p-1)N_1)|^2 \le \frac{p}{N^2}, \tag{2}$$

где $s = 0, 1, \dots, r$, $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$. Для случая, когда все неравенства в (2) обращаются в равенства, теорема A при $r = p - 1$ приводит к ортонормированному базису $B(u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ в $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$, построенному в [19]. Отметим также, что при $p = 2$ матрица $W^{(N)}$ совпадает с матрицей Уолша и для этого случая теорема A доказана в [20].

Пример 1. Пусть $p = r = 2$, $n = 1$. Тогда

$$M(l) = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l) \\ \widehat{u}_0(l+1) & \widehat{u}_1(l+1) & \widehat{u}_2(l+1) \end{bmatrix}, \quad l = 0.$$

Условие (1) будет выполнено, если

$$\widehat{u}_i(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} x_i, \quad \widehat{u}_i(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} y_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

где (x_0, x_1, x_2) и (y_0, y_1, y_2) — ортогональные векторы единичной длины:

$$x_0 \bar{y}_0 + x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 = 0,$$

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, \quad |y_0|^2 + |y_1|^2 + |y_2|^2 = 1.$$

В частности, если $x_0 = a$, $y_0 = b$, $|a|^2 + |b|^2 \le 1$, то можно выбрать

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{1 - |a|^2},$$

$$y_2 = -\frac{a\bar{b}}{\sqrt{1 - |a|^2}}, \quad y_1 = \sqrt{1 - |b|^2 - |y_2|^2}.$$

Таким образом, для каждой пары (a, b) комплексных чисел, удовлетворяющих условию $0 < |a|^2 + |b|^2 \le 1$, получается фрейм Парсеваля $\{u_0, u_1, u_2\}$ для $\ell^2(\mathbb{Z}_2)$ (сравните с примером 2 в [20]).

Пример 2. Пусть $p = r = n = 2$. Выберем u_0, u_1, u_2 в $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$ такими, что

$$\sum_{s=0}^{2} \widehat{u}_s(l)\overline{\widehat{u}_s(l+2)} = 0, \quad \sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s(l)|^2 = \sum_{s=0}^{2} |\widehat{u}_s(l+2)|^2 = \frac{1}{8}, \quad l = 0, 1.$$

Тогда $\{u_0, u_1, u_2, T_2u_0, T_2u_1, T_2u_2\}$ является фреймом Парсеваля для $\ell^2(\mathbb{Z}_4)$. Действительно, в этом случае

$$M(l) = \frac{4}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_1(l) & \widehat{u}_2(l) \\ \widehat{u}_0(l+2) & \widehat{u}_1(l+2) & \widehat{u}_2(l+2) \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1,$$

и равенство (1) выполнено.

Пример 3. Пусть $p = 3$, $n = 2$, $r = 8$. Тогда

$$M(l) = \frac{9}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \widehat{u}_0(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+3) & \widehat{u}_0(l+3) & \dots & \widehat{u}_r(l+3) \\ \widehat{u}_0(l+6) & \widehat{u}_0(l+6) & \dots & \widehat{u}_r(l+6) \end{bmatrix}, \qquad l = 0, 1, 2,$$

и для выполнения условия $M(l)M^*(l) = I_3$ матрицы $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$ можно выбрать так, чтобы составленная из них матрица $(\widehat{u}_k(j))_{k,j=0}^{j}$ была пропорциональна матрице $(w_k^{(9)}(j))_{k,j=0}^{8}$. Таким образом, в рассматриваемом случае матрица $M(l)$ формируется по строкам матрицы $W^{(9)}$.

Предположим, что числа $b_0, b_1, \dots, b_{N-1}$ удовлетворяют условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 \le \frac{p}{N^2}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1. \tag{3}$$

Алгоритм B.

Шаг 1. Найти вектор $u_0 \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ такой, что для $l = 0, 1, \dots, N_1 - 1$

$$\widehat{u}_0(l) = b_l, \quad \widehat{u}_0(l+N_1) = b_{l+N_1}, \dots, \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) = b_{l+(p-1)N_1},$$

где числа $b_0, b_1, \dots, b_{N-1}$ берутся из (3).

Шаг 2. Для полученного на шаге 1 вектора u_0 найти векторы $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{C}_N$, такие, что для матрицы

$$M(l) = \frac{N}{\sqrt{p}} \begin{bmatrix} \widehat{u}_0(l) & \dots & \widehat{u}_r(l) \\ \widehat{u}_0(l+N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+N_1) \\ \widehat{u}_0(l+2N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+2N_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \widehat{u}_0(l+(p-1)N_1) & \dots & \widehat{u}_r(l+(p-1)N_1) \end{bmatrix}$$

при каждом $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ выполнено равенство $M(l)M^*(l) = I_p$.

Шаг 3. Определить систему $B(u_0, u_1, \ldots, u_r)$ по формуле

$$B(u_0, u_1, \ldots, u_r) = \{T_{p\,k} u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p\,k} u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \cdots \cup \{T_{p\,k} u_r\}_{k=0}^{N_1-1}.$$

Отметим, что шаг 1 алгоритма B реализуется с помощью обратного дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона:

$$u_0(j) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k w_k^{(N)}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_N,$$

а для реализации шага 2 можно использовать те же методы, что и при построении фреймов на группах Виленкина (см. [4]).

На практике вектор $(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ в алгоритме B может быть выбран по энтропийному, среднеквадратическому или иному критерию адаптациии применяемого метода аппроксимации к сигналу (см. [22, § 9.4] и примеры в [13, 23]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.

[2] *Christensen O.* An Inroduction to Frames and Riesz Bases. Boston : Birkhäuser, 2016. 704 p.

[3] *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames N. Y. : Birkhauser, 2018. 587 p. (Applied and Numerical Harmonic Analysis)

[4] *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 5. 1550036 (19 pages).

[5] *Фарков Ю. А.* Параметрические множества для фреймов в анализе Уолша // Вестн. Евразийского нац. ун-та им. Л.?Н. Гумилева. Сер. Матем. Информ. Мех. 2018. Т. 124. № 3. С. 89–94.

[6] *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions // European Journal of Mathematics. 2019. Vol. 5, № 1. P. 250–267.

[7] *Farkov Yu. A.* Wavelet tight frames in Walsh analysis // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 2019. Vol. 49. P. 161–177.

[8] *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. N. Y. : Adam Hilger, 1990. 545 p.

[9] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 352 с.

[10] *Stanković R.S., Butzer P. L., Schipp F., Wade W. R. (eds.)* Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. Vol. 2. Extensions and generalizations // Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science 13. Amsterdam : Atlantis Press, 2015. 360 p.

[11] *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of wavelets through Walsh functions. Singapore : Springer, 2019. 382 p. (Industrial and Applied Mathematics).

[12] *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески в анализе Уолша // Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ / под ред. Т. П. Лукашенко и А. П. Солодова. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2016. С. 6275.

[13] *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлет-преобразования в анализе Уолша // International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17 : материалы международ. конф. Санкт-Петербургский политехн. ун-т, 24–28 июля 2017 г. / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. М. : ВИНИТИ РАН, 2019. Т. 160. С. 126–136

[14] *Casazza P. G.,Tremain J. C.* The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2006. Vol. 103, № 7. P. 2032–2039.

[15] *Stevens M.* The Kadison-Singer Property. Berlin : Springer, 2016. 140 p. (SpringerBriefs in Mathematical Physics 14).

[16] *Bownik M.* The Kadison-Singer problem // Kim, Yeonhyang (ed.) et al., Frames and harmonic analysis. AMS special session on frames, wavelets and Gabor systems and special session on frames, harmonic analysis, and operator theory, North Dakota State University, Fargo, ND, USA, April 16–17, 2016. Proceedings. Providence, RI : American Mathematical Society, Contemporary Mathematics 706. 2018. P. 63–92.

[17] *Albrecht A., Howlett P., Verma G.* Optimal splitting of Parseval frames using Walsh matrices // Poincare J. Anal. Appl. Special Issue (IWWFA-III, Delhi). 2018. № 2. P. 39–58.

[18] *Беспалов М. С.* Дискретное преобразование Крестенсона // Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46, № 4. С. 91–115.

[19] *Малоземов В. Н. Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб. : Лань, 2012. 304 с.

[20] *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина–Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, вып. 6. С. 914–928.

[21] *Фарков Ю. А., Робакидзе М. Г.* Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 106, № 3. С. 457–469.

[22] *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. М. : Мир, 2005. 671 с.

[23] *Любушин А. А., Фарков Ю. А.* Синхронные компоненты финансовых временных рядов // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 4. С. 639–655.

УДК 517.96;517.984

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ И МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KhromovAP@info.sgu.ru

Предложен новый прием в методе Фурье для волнового уравнения, базирующийся на широком применении расходящихся рядов в понимании Эйлера, обладающий большой экономичностью в использовании математических фактов и приводящий к значительному усилению известных результатов по методу Фурье для волнового уравнения.

Ключевые слова: метод Фурье, расходящиеся ряды, волновое уравнение.

DIVERGENT SERIES AND FOURIER METHOD FOR WAVE EQUATION

A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KhromovAP@info.sgu.ru

New technique is suggested in Fourier method for wave equation. It is based on wide using of divergent in Euler's sense series and is rather economical in required mathematical facts. The technique leads to considerable improvement of the known results concerning Fourier method for wave equation.

Keywords: Fourier method, divergent series, wave equation.

1. Сначала приведем необходимую информацию о расходящихся рядах из [1]. Рассмотрим простейшее функциональное уравнение:

$$y(x) = 1 + xy(x). \tag{1}$$

Для простоты считаем x вещественным. Из (1) получаем следующее очевидное формальное решение:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \dots \tag{2}$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда ряд (2) сходится и его сумма есть

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{3}$$

т.е. (3) есть решение (1) в этом случае. Но формула (3) имеет смысл при всех x, кроме $x = 1$. Воспользуемся этим.

Пусть $|x| > 1$. Тогда ряд (2) расходящийся и его сумму, как предел частичных сумм, найти мы не можем. Поэтому разумно определить эту сумму как решение уравнения (1) по формуле (3).

Таким образом, у нас теперь сумма ряда (2) определяется решением уравнения (1) при всех x, кроме $|x| = 1$.

Пусть $x = -1$. В этом случае ряд (2), т.е. ряд $1 - 1 + 1 - \ldots$ расходящийся, но мы считаем, что его сумма есть $1/2$ (что разумно из (3)), и в этом случае она представляет обобщенное решение уравнения (1) (т. е. если в (2) положим $x = x_n$, где $|x_n| < 1$, то при $x_n \to -1 + 0$ суммы соответствующих рядов в (2) сходятся к $1/2$).

Пусть $x = 1$. Тогда ряд $1+1+\ldots$ в силу (3) имеет сумму, равную $+\infty$, если его получаем из (3) при $x \to 1-0$ и $-\infty$, если $x \to 1+0$, т. е. сумма расходящегося ряда принимает два значения.

Вывод. Таким образом, ряд (2) в новом понимании дает решение уравнения (1) при всех x, кроме $x = 1$, а при $x = 1$ уравнение (1) не имеет решения.

Отметим еще формулу

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

также приводящую к ряду (2).

Вышеизложенное, за исключением формулы (1), есть у основоположника теории расходящихся рядов Л. Эйлера в его книге [2, с. 99–100]. Отметим еще книгу Харди Г. [3] с обширной информацией о расходящихся рядах.

Теперь приведем слова Эйлера [2, с. 100–101]:

«109. Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определенной суммы, ибо, выполняя сложение членов, мы не имеем приближения к какому-либо пределу, который можно было бы принять за сумму бесконечного ряда. Так как эти суммы уже потому, что мы пренебрегаем последними остатками, являются, как было показано, ошибочными, то это мнение полностью согласуется с истиной. Однако против него можно с полным правом возразить, что упомянутые суммы, хотя они и оказывают совершенно несогласными с истиной, однако никогда не приводят к ошибкам, и что напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество, и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остается развязать этот труднейший узел.

110. И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомне-

ния, что суммы можно получать только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают, могут обнаруживать чередования знаков + и −, в противном же случае они вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложения всех членов. Но в тех случаях, о которых мы упоминали, из неверных сумм получаются верные результаты не потому, что конечное выражение, скажем $\frac{1}{1-x}$, есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т.д., а потому, что это выражение, если его разложить, дает именно такой ряд. Таким образом здесь можно было бы вовсе отказаться от наименования «сумма».

111. Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т.д. истинная сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадет с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защищаться от всяческих обвинений».

2. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t);\; x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, u'_t(x,0) = \psi(x). \tag{6}$$

Будем предполагать, что все функции, входящие в (4)–(6) комплекснозначные, $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не выходят за рамки $L[0,1]$, $f(x,t)$ подчинено условию $f(x,t) \in L[Q_T]$, где $Q_T = \{x,t | x \in [0,1],\, t \in [0,T]\}$ при любом $T > 0$. Формальное решение по методу Фурье берем в виде [4, 5]:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\ge n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Big[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t +$$

$$+R_\lambda(\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]\,d\lambda, \qquad (7)$$

где $\lambda=\rho^2$, $Re\rho\geq 0$, R_λ — резольвента оператора: $Ly=-y''(x)+q(x)y(x)$, $y(0)=y(1)=0$, $r>0$ и достаточно велико, γ_n есть образ в λ — плоскости окружностей $\tilde{\gamma_n}$=$\{\rho\,|\,|\rho-n\pi|=\delta\}$, $\delta>0$ достаточно мало и фиксировано, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,\tau)$ по x.

Ряд (7) называется формальным, потому что мы не обращаем внимание на его сходимость.

Обозначим через $Z(x,t,\varphi)$ ряд (7) при $\psi(x)=f(x,t)=0$. Тогда, используя расходящиеся ряды в понимании Эйлера, мы преобразуем формальный ряд (7) к следующему виду:

$$u(x,t)=Z(x,t,\varphi)+\int\limits_0^t Z(x,\tau,\psi)\,d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta. \qquad (8)$$

Достоинство (8) по сравнению с (7) в том, что имеем теперь дело лишь с задачей

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u(x,t), \qquad (9)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad (10)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,u'_t(x,0)=0, \qquad (11)$$

при различного вида $\varphi(x)$.

Рассмотрим теперь задачу (9)–(11). Ряд (8) в этом случае переходит в $Z(x,t,\varphi)$. В [6] мы, используя рекомендации А. Н. Крылова [7–9] и расходящиеся ряды в понимании Эйлера, осуществляем переход от ряда $Z(x,t,\varphi)$ к ряду (см. также [10])

$$A(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,t), \qquad (12)$$

где

$$a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta \quad (n=1,2,...),$$

$$f_n(x,t)=-q(x)a_n(x,t) \quad (n=0,1,...),$$

$\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с $[0,1]$ на всю ось, $\tilde{f}_n(\eta,\tau)$ нечетная, 2-периодическая по η и $\tilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$.

Лемма ([4, с. 296]). *Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$. Пусть, далее, $T > 0$ и произвольна и m — наименьшее натуральное число, такое, что $T \le m$. Тогда*

$$\| a_n(x,t) \|_{C[Q_T]} \le M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \in N),$$

где $M_1 = \| a_1(x,t) \|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1) \| q \|_1$ ($\| \cdot \|_1$ – норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \le C_T \| \varphi \|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Теорема 1. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, то ряд $A_1(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью в Q_T.*

Теорема 2. *Для того, чтобы существовало единственное классическое решение задачи (9)–(11), необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Это решение дается формул ой $u(x,t) = A(x,t)$, где теперь $A(x,t)$ есть сумма ряда (12).*

Классическим решением задачи (9)–(11) называем функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t, причем $u_x(x,t)$ ($u_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющую уравнению (9) почти всюду и условиям (10)–(11).

Теорема 3. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, а $\varphi_h(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и $\| \varphi_h - \varphi \|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то соответствующие $\varphi_h(x)$ классические решения $u_h(x,t)$ задачи (9)–(11) сходятся по норме $L[Q_T]$ к $A(x,t)$, т. е. в этом случае $u(x,t) = A(x,t)$ является обобщенным решением задачи (9)–(11).*

Ранее в [11], не прибегая к расходящимся рядам, были получены следующие результаты.

Теорема 4. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_p[0,1]$ ($p > 1$), то сумма ряда $Z(x,t,\varphi)$ формального решения задачи (9)–(11) является классическим решением задачи (9)–(11).*

Теорема 5. *Если $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ ($p > 1$), то ряд $Z(x,t,\varphi)$ сходится почти всюду и $Z(x,0,\varphi) = \varphi(x)$ почти всюду. Более того, если $\varphi_h(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и $\| \varphi_h - \varphi \|_p \to 0$ при $h \to 0$ ($\| \cdot \|_p$ — норма в $L_p[0,1]$), то соответствующие классические решения $u_h(x,t)$ сходятся в $L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$ к $u(x,t) = Z(x,t,\varphi)$, т. е. $u(x,t)$ является обобщенным решением задачи (9)–(11).*

В получении теорем 4 и 5 существенно используются пример А. Н. Колмогорова, теорема Карлесона–Ханта и другие глубокие факты действительного анализа, в том числе и теорема Хаусдорфа–Юнга. Отсюда видно, что использование расходящихся рядов в понимании Эйлера приводит к результатам (теоремы 2 и 3) окончательного характера существенно более глубоким, чем теоремы 4 и 5.

Подробные доказательства теорем 1–3 приведены в [5, 6]. Они опирались на формальное решение (7). Приведенное здесь формальное решение (8) вместо (7) улучшает эти доказательства. Каждое слагаемое в (8) есть сумма сходящегося ряда $A(x,t)$ при различных начальных функциях $\varphi(x), \psi(x) \in L[0,1]$, $f(x,t) \in L[Q_T]$ (t — параметр). Таким образом, формула (8) дает явную формулу обобщенного решения во всех случаях. Соответствующие результаты о классическом решении (9)–(11) получены в [6]; в случае задач (4)–(6) при $\varphi(x) = f(x,t) = 0$ и $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ они могут быть получены аналогично [6].

Отметим, что в работе [12, с. 132–133] нами дан иной, чем метод Фурье, прием решения смешанной задачи. Сравнивая результаты работы [12] с результататами, полученными нами методом Фурье, приходим к заключению, что эти методы равносильны.

Наконец, работа [6, с. 286] приводит к выводу: считать обобщенное решение смешанной задачи истинным решением вне связи его с классическим (есть ли классическое или нет).

Таким образом, автором (в том числе и в соавторстве) получены следующие результаты по смешанной задаче (4)–(6) в классе функций $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L[0,1]$ и $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Классическое решение имеет место при $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывных и $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ почти при всех $x \in [0,1]$ абсолютно непрерывна по t и $f_t(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$. Обобщенное решение имеет место при всех $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ рассматриваемого класса.

При дополнительном условии, что решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по x и t при $x,t \in [0,1] \times [0,\infty)$ классическое решение имеет место, если $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ непрерывны и $\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0$.

Классическое и обобщенные решения представляются одним и тем же быстросходящимся рядом, члены которого явно выражаются через $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$. Этот ряд при $q(x) = 0$ переходит в формулу Даламбера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Понтрягинские чтения – XXX : материалы междунар. конф. Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 291–300.

[2] *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М. ; Л. :ГИТТЛ, 1949. 580 с.

[3] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 54 с.

[4] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59, № 2. С. 286–300. DOI: https://doi.org/10.1134/s0044466919020091

[5] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. DOI: https://doi.org/10.1134/s0374064119050121

[6] *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288

[7] *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

[8] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014, Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: https://doi.org/10.7868/s0869565214260041

[9] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241. DOI: https://doi.org/10.7868/s0044466915020052

[10] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Об обобщенном решении по методу Фурье смешанной задачи для волнового уравнения // Теория функций и их приложения : материалы . 19-й междунар Сарат. зим. шк., посвящ. 90-летию П. Л. Ульянова. (29 янв.–2 февр. 2018 г.)ю. Саратов : Изд-во «Научная книга», 2018. С. 156–159.

[11] *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1809.

[12] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф., посвящ. 90-летию В. А. Ильина (2–6 мая 2018 г.). М. : МАКС Пресс, 2018. С. 132–133.

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Г. В. Хромова (Саратов, Россия)
KhromovaGV@info.sgu.ru

На базе интегральных операторов с финитными полиномиальными ядрами и разрывной областью значений построены методы решения задач получения равномерных приближений к функциям и их производным любого порядка на отрезке. Общая идея конструирования подобных операторов принадлежит А.П. Хромову и была использована автором при решении ряда задач из теории приближений и теории уравнений 1 рода. Предлагаемые операторы обладают некоторым преимуществом перед ранее рассмотренными.

Ключевые слова: интегральный оператор, разрывная область значений, равномерная сходимость.

ON A FAMILY OF OPERATORS WITH DISCONTINUOUS RANGE

G. V. Khromova (Saratov, Russia)
KhromovaGV@info.sgu.ru

By means of integral operators with compactly supported kernels and discontinuous range methods are constructed of getting uniform approximations of functions and their derivatives of any order on an interval. The general idea of constructed such operators belongs to A.P. Khromov and was already used by the author for solving some problems in approximation theory and 1-st type equations theory. These operators have some advantages in comparison with those used before.

Keywords: integral operator, discontinuous range, uniform approximations.

Применение операторов с разрывной областью значений в задачах, решения которых являются непрерывными функциями, дано в [1, 2].

1. Пусть $f(x) \in C[0,1]$. Рассмотрим семейство операторов

$$T_\alpha f = \begin{cases} T_{\alpha 2} f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1} f, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha 2} f &= \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_x^{x+\alpha} (t-x)(\alpha-(t-x)) f(t) dt, \\ T_{\alpha 1} f &= \frac{6}{\alpha^3} \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)(\alpha-(x-t)) f(t) dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Легко убедиться, что операторы T_α инвариантны относительно единицы. На основании этого справедлива

Теорема 1. *Имеет место сходимость:*

$$\|T_\alpha f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0,$$

$$\left(\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]},\ \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}\right).$$

Теперь рассмотрим семейство $T_\alpha^{(1)}$,

$$T_\alpha^{(1)} f = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(1)} f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1}^{(1)} f, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где $T_\alpha^{(1)}, T_{\alpha 1}^{(1)} T_{\alpha 2}^{(1)}$ определяются по формулам (1) с заменой ядер на их производные по x.

Справедлива

Теорема 2. *Имеет место сходимость*

$$\left\| T_\alpha^{(1)} f - f' \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0.$$

2. Пусть $f(x) \in C^{(k)}[0,1]$, $k = 2, 3, ...$

Рассмотрим оператор

$$T_{\alpha k} f = \begin{cases} T_{\alpha 2,k} f, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ T_{\alpha 1,k} f, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha 2,k} f &= a_k(\alpha) \int\limits_x^{x+\alpha} (t-x)^k (\alpha - (t-x))^k f(t) dt, \\ T_{\alpha 1,k} f &= a_k(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t)^k (\alpha - (x-t))^k f(t) dt, \end{aligned} \tag{2}$$

$a_k(\alpha) = A_{0k} \alpha^{-(2k+1)}$ (нормированный множитель)

$$A_{0k} = \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \frac{C_k^l}{k+l+1} \right)^{-1}.$$

Очевидно, для операторов $T_{\alpha k}$ справедлива теорема 1. Для аппроксимации $f^{(k)}(x)$ рассмотрим операторы $T_{\alpha k}^{(k)}$, определяемые по формуле (2) с заменой $T_{\alpha j,k}$ на $T_{\alpha j,k}^{(k)}$, и $T_{\alpha j,k}^{(k)}$ имеют вид $T_{\alpha j,k}$ с заменой ядер на их производные по x порядка k.

Теорема 3. *Для любой $f(x) \in C^{(k)}[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\left\| T_{\alpha k}^{(k)} f - f^{(k)} \right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0.$$

3. Пусть теперь вместо $f(x)$ нам известна $f_\delta(x) : \|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$ и требуется по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$ и $f^{(k)}(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Будем обозначать операторы в п.п. 1, 2 единообразно: считая $k = 0, 1, \ldots$, положим $T_\alpha \equiv T_{\alpha 1}^{(0)}$, $T_\alpha^{(1)} \equiv T_{\alpha 1}^{(1)}$.

Справедлива

Лемма. *Имеют место формулы*

$$\|T_{\alpha k}^m\|_{L_2[0,1]\to L_\infty[0,1]} = C_{k,m}\alpha^{-m-1/2}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1.$$

(Константы $C_{k,m}$ легко вычисляются.)

На основании леммы и того, что операторы $T_{\alpha k}^m$ при применении их к точной функции $f(x)$ дают равномерную сходимость либо к ней, либо к её производным, эти операторы являются регуляризирующими [3].

Рассмотрим величины

$$\Delta(\delta, T_{\alpha k}^{(m)}, f) = \sup\left\{ \left\| T_{\alpha k}^{(m)} f_\delta - f^{(m)} \right\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2[0,1]} \le \delta \right\},$$

$$m = 0, k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

На основании теоремы 1.6 из [1] справедлива

Теорема. *Для того, чтобы $\Delta(\delta, T_{\alpha k}^{(m)}, f) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-m-1/2} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Замечание. Операторы $T_{\alpha k}^{(k)}$ имеют некоторое преимущество перед операторами из [1], построенными на базе степеней оператора Стеклова: с возрастанием k пределы интегрирования в них остаются неизменными и поэтому отпадает необходимость налагать дополнительные ограничения на параметр α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромова Г. В.* Операторы с разрывной областью значений в задачах приближения функций и некорректных задачах // В кн. «Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа» : коллективная монография. Раздел IV. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. С. 237–294.

[2] *Хромова Г. В.* О разрывном операторе Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й международ. Сарат. зим. шк. Саратов : Изд-во «Научная книга», 2016. С. 314–316.

[3] *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.

УДК 517.518.82+519.677

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА: ФОРМУЛЫ, СХОДИМОСТЬ, НУЛИ[1]

Д. Г. Цветкович (Москва, Россия)
dianacve@inbox.ru

В докладе дается краткий обзор недавних исследований, связанных с классическими полиномами Бернштейна. Выбирается класс кусочно линейных порождающих функций и, в частности, рациональных модулей на стандартном отрезке $[0, 1]$. Для рациональных модулей получены регулярные представления полиномов Бернштейна в виде обобщенных разложений Поповичу. При помощи этих разложений проведено полное исследование поведения полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Дано точное описание области сходимости. Установлены оценки скорости сходимости внутри и на границе области. Построена теория аттракторов нулей полиномов Бернштейна, т.е. предельных множеств, притягивающих нули при неограниченном увеличении номера полинома.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, кусочно линейные функции, рациональный модуль, обобщенные разложения Поповичу, область сходимости, лемнискаты Канторовича, распределение нулей.

CONSTRUCTIVE METHODS IN THE THEORY OF BERNSTEIN POLYNOMIALS: FORMULAS, CONVERGENCE, AND ZEROS[1]

D. G. Tsvetkovich (Moscow, Russia)
dianacve@inbox.ru

A brief review of recent studies associated with the classical Bernstein polynomials is given. A class of piecewise linear generating functions and, in particular, rational modules on the standard segment $[0, 1]$ is chosen. New regular representations of Bernstein polynomials for rational modules are obtained. By means of these representations a complete study of the behavior of Bernstein polynomials in the complex plane is carried out. The exact description of the convergence domain is given. Estimates of the convergence rate inside and on the boundary of the domain are established. The theory of zeros attractors for Bernstein polynomials is developed.

Keywords: Bernstein polynomials, piecewise linear functions, rational module, generalized Popoviciu representations, convergence domain, Kantorovich lemniscates, distribution of zeros.

Для функции $f \in C[0, 1]$ рассматриваем полиномы Бернштейна

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$. Здесь C_n^k — обычные биномиальные коэффициенты. Общие сведения по теории классических полиномов Бернштейна см. в [1]–[3].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

[1]The article is done with the financial support of RFBR (project no. 18-01-00236).

В последнее время проведено систематическое исследование полиномов Бернштейна для кусочно линейных порождающих функций с рациональными абсциссами точек излома. Взятую функцию можно представить в виде

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \, |q_j x - p_j|, \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

где $\alpha, \ \beta, \ \gamma_1 \neq 0, \ \ldots, \ \gamma_r \neq 0$ — соответствующие вещественные коэффициенты. Абсциссы точек излома $x_j = p_j/q_j$, $j = 1, \ldots, r$, считаем несократимыми рациональными дробями из $(0,1)$ (для определенности упорядоченными по возрастанию).

В таком случае

1. установлены новые регулярные представления для полиномов Бернштейна, связывающие их с теорией степенных рядов;

2. дано описание области сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости вместе с точными оценками скорости сходимости внутри и на границе области;

3. построена теория аттракторов нулей полиномов $B_n(f,z)$, отражающая характер распределения нулей при больших номерах $n \in \mathbb{N}$.

Важнейшим примером кусочно линейной функции является простой рациональный модуль

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [0,1]. \tag{3}$$

В случае (3) удается установить все конструктивные свойства полиномов Бернштейна в наиболее полном и завершенном виде.

Ввиду большой громоздкости общих формул продемонстрируем результаты на примере простого рационального модуля

$$f(x) = |5x - 2|, \qquad x \in [0,1], \tag{4}$$

с изломом в точке $x = 2/5$.

Согласно определению (1), отнесенному к функции (4), запишем

$$B_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{5k}{n} - 2 \right| C_n^k \, z^k (1-z)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Как видим, числовые коэффициенты здесь зависят от номера $n \in \mathbb{N}$, что сильно затрудняет изучение полиномов Бернштейна.

Оказывается, для полиномов (5) справедливо представление

$$\begin{aligned}B_{5m+r}(f,z) = 2 + z - 2z\,(1-z) \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(1,r)} \frac{2}{5k+1}\, C_{5k+1}^{2k} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k - \\ - 2z\,(1-z)^2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(2,r)} \frac{1}{5k+2}\, C_{5k+2}^{2k+1} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k - \\ - 2z^2\,(1-z)^2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(3,r)} \frac{1}{5k+3}\, C_{5k+3}^{2k+1} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k - \\ - 2z^2\,(1-z)^3 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(4,r)} \frac{2}{5k+4}\, C_{5k+4}^{2k+2} \left(z^2\,(1-z)^3\right)^k \end{aligned} \quad (6)$$

при всех значениях $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0,\,1,\,2,\,3,\,4$. Здесь символ $\varepsilon_m(\nu,r)$ при переборе $\nu = 1,\,2,\,3,\,4$ вычисляется по правилу

$$\begin{aligned} r = 0,\,1 \qquad &\Longrightarrow \quad \varepsilon_m(\nu,r) = m-1 \text{ для } \nu = 1,\,2,\,3,\,4\,; \\ r = 2,\,3,\,4 \qquad &\Longrightarrow \quad \varepsilon_m(\nu,r) = m \text{ для } \nu = 1,\,\ldots\,,\,r-1 \quad \text{и} \\ & \quad \varepsilon_m(\nu,r) = m-1 \text{ для } \nu = r,\,\ldots\,,\,4\,. \end{aligned}$$

Разложение (6) для полиномов (5) называем *обобщенным разложением Поповичу* по одному частному результату работы [4].

При помощи разложения (6) удается провести полное исследование сходимости полиномов (5). Для формулировки результатов введем несколько специальных понятий, восходящих к классической работе Л. В. Канторовича [5]. Определим *первичный полином Канторовича*

$$T_{2,5}(z) = \frac{3125}{108}\, z^2(1-z)^3, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

где $3125/108 \equiv q^q\,p^{-p}\,(q-p)^{-(q-p)}$ при $p = 2$, $q = 5$. Посредством полинома (7) зададим *компакт Канторовича*

$$K_{2,5} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \frac{3125}{108}\,\left|z^2(1-z)^3\right| \leqslant 1 \right\} \tag{8}$$

и ограничивающую его *лемнискату Канторовича*

$$\Lambda_{2,5} : \quad \frac{3125}{108}\,\left|z^2(1-z)^3\right| = 1. \tag{9}$$

Объекты (7)–(9) построены по точке излома $x = 2/5$.

Компакт $K_{2,5}$ состоит из левой и правой петель вида

$$K_{2,5}^{(1)} \equiv K_{2,5} \cap \{\operatorname{Re} z \leqslant 2/5\}, \qquad K_{2,5}^{(2)} \equiv K_{2,5} \cap \{\operatorname{Re} z \geqslant 2/5\}.$$

Ясно, что $K_{2,5}^{(1)} \cup K_{2,5}^{(2)} = K_{2,5}$ и $K_{2,5}^{(1)} \cap K_{2,5}^{(2)} = \{2/5\}$. Все точки основного отрезка $[0,1]$ попадают строго внутрь компакта $K_{2,5}$ за исключением одной лишь точки $x = 2/5$ — точки самопересечения лемнискаты (9).

Аппарат обобщенных разложений Поповичу позволяет установить следующий результат (см. также [1, 5]).

Теорема 1. *Пусть $B_n(f,z)$ — полиномы Бернштейна* (5) *от функции* (4)*. Тогда при $n \to \infty$ последовательность $B_n(f,z)$ сходится равномерно на компакте $K_{2,5}$ из формулы* (8)*, в левой петле $K_{2,5}^{(1)}$ — к функции $\varphi_1(z) = 2 - 5z$, а в правой петле $K_{2,5}^{(2)}$ — к функции $\varphi_2(z) = 5z - 2$. При любом выборе внешней точки $z \in \mathbb{C} \setminus K_{2,5}$ последовательность $B_n(f,z)$ расходится, т. е. не имеет конечного предела в $\mathbb{C}$.*

Теорему 1 удается существенно дополнить, охарактеризовав скорость сходимости полиномов (5) к результирующей предельной функции

$$\varphi(z) \equiv \begin{cases} 2 - 5z, & z \in K_{2,5}^{(1)}, \\ 5z - 2, & z \in K_{2,5}^{(2)}. \end{cases} \tag{10}$$

Ясно, что $\varphi(x) = f(x) = |5x - 2|$ при $x \in [0,1]$.

Теорема 2. *Пусть $B_n(f,z)$ — полиномы Бернштейна* (5) *от функции* (4)*. Пусть уклонения полиномов от предельной функции* (10) *заданы формулой*

$$R_n(f,z) \equiv B_n(f,z) - \varphi(z), \quad z \in K_{2,5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при всех $z \in \operatorname{int} K_{2,5}$, т. е. внутри компакта Канторовича (8) *(когда $|T_{2,5}(z)| < 1$), имеем оценку*

$$|R_{5m+l}(f,z)| \leqslant \frac{M_{2,5}}{1 - |T_{2,5}(z)|} \frac{|T_{2,5}(z)|^m}{m^{3/2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad l = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Если же $z \in \partial K_{2,5} = \Lambda_{2,5}$, то

$$|R_{5m+l}(f,z)| \leqslant \frac{2M_{2,5}}{\sqrt{m}} \left(1 + \frac{1}{2m}\right), \quad m \in \mathbb{N}, \quad l = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Здесь $M_{2,5} > 0$ — некоторая константа, вычисляемая конструктивно.

Теорема 2 показывает, что полиномы Бернштейна от функции (4) сходятся внутри компакта $K_{2,5}$ с экспоненциальной скоростью, но по мере приближения точки $z \in \operatorname{int} K_{2,5}$ к границе $K_{2,5}$ скорость сходимости «портится», переходя на самой границе, т. е. на лемнискате $\Lambda_{2,5}$, в медленное степенное стремление. Перечисленные результаты с соответствующими поправками распространяются на полиномы Бернштейна от любого рационального модуля (3).

Особый интерес представляет задача о распределении нулей полиномов Бернштейна, поставленная И. Я. Новиковым [6]. В цикле работ И. В. Тихонова, В. Б. Шерстюкова и автора построена систематическая теория *аттракторов нулей* полиномов Бернштейна на классе порождающих функций вида (2). Применительно к нашему примеру (4) эта теория позволяет сформулировать такой результат.

Пусть $B_n(f, z)$ — полиномы Бернштейна (5) от функции (4). Тогда при $n \to \infty$ все нули полиномов $B_n(f, z)$ (кроме отдельных *девиантных нулей*) стягиваются снаружи к границе области сходимости полиномов Бернштейна — лемнискате Канторовича $\Lambda_{2,5}$ из формулы (9). Наглядное представление о происходящем дает рис. 1.

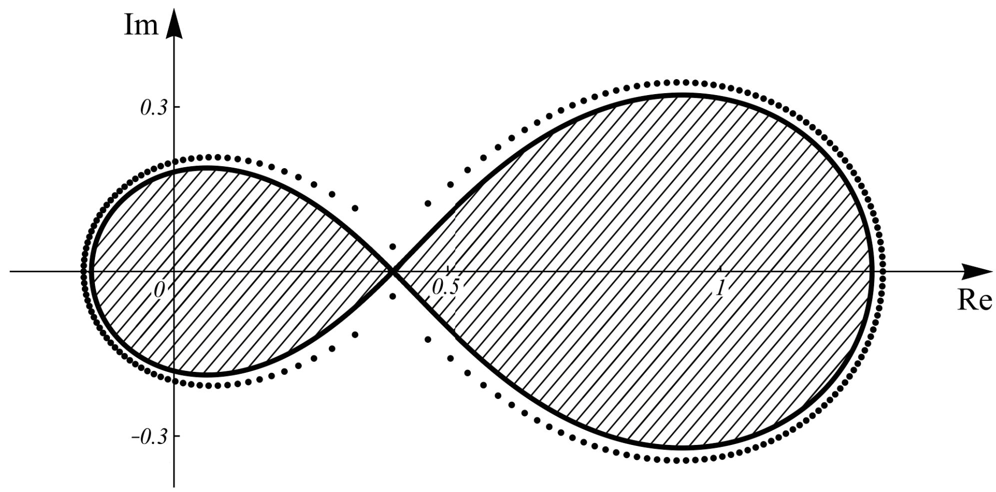


Рис. 1. Результат компьютерного расчета нулей полинома $B_{200}(f, z)$ от функции (4) вместе с компактом Канторовича $K_{2,5}$. Видно, что нули «стягиваются» к границе компакта — лемнискате $\Lambda_{2,5}$. При $n = 200$ картина получается стандартной: девиантные нули отсутствуют

Дадим дополнительные ссылки по теме исследований. В особое направление обсуждаемый круг вопросов был выделен в докладе [7]. По поводу обобщенных разложений Поповичу в случае произвольного рационального модуля (3) см. [8–10]. Сходимость полиномов Бернштейна для рационального модуля (3) и в общем случае кусочно линейных порождающих функций вида (2) обсуждается в [10, 11]. Проблеме распределения нулей полиномов Бернштейна посвящены работы [12–14].

Автор признательна И. В. Тихонову и В. Б. Шерстюкову за постановку задачи, поддержку и помощь на всех этапах исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein polynomials. Toronto : University of Toronto Press, 1953. 134 p.

[2] *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.

[3] *Bustamante J.* Bernstein operators and their properties. Birkhäuser, 2017. 420 p.

[4] *Popoviciu T.* Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // Mathematica (Cluj). 1935. Vol. 10. P. 49–54.

[5] *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд-ние матем. и естеств. наук, 1931. № 8. С. 1103–1115.

[6] *Новиков И. Я.* Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки, 2002. Т. 71, № 2. С. 239–253.

[7] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2016, СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. С. 139–145.

[8] *Цветкович Д. Г., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Специальные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля на стандартном отрезке // Современные проблемы теории функции и их приложения : материалы 19-й междунар. Сарат. зимн. шк., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. П. Л. Ульянова. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2018. С. 339–342.

[9] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Уточненный вид разложений Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы международ. конф. : Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж : ИД ВГУ, 2019. С. 258–261

[10] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техники. Сер. Совр. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры. (В печати.)

[11] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* О скорости сходимости полиномов Бернштейна в комплексной области на классе кусочно линейных порождающих функций // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2019. СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. С. 116–121.

[12] *Тихонов И. В., Цветкович Д. Г., Шерстюков В. Б.* Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, № 4. С. 151–173.

[13] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 2. С. 59–73.

[14] *Цветкович Д. Г.* Подробный атлас аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна // Челяб. физ.-матем. журнал, 2018. Т. 3, № 1. С. 58–89.

УДК 517.9

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНУСАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

С. Чандрагири, А. П. Ляпин (Красноярск, Россия)
srilathasami66@gmail.com, APLyapin@sfu-kras.ru

В работе рассмотрена задача Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в конусах целочисленной решетки. При помощи метода производящих функций доказана ее разрешимость и получено соотношение между производящими функциями решения задачи Коши и ее начальными данными. Как следствие, решение задачи Коши выражено через ее начальные данные и фундаментальное решение.

Ключевые слова: решеточные пути, целочисленный конус, разностное уравнение, производящая функция.

ON FUNDAMENTAL SOLUTIONS TO DIFFERENCE EQUATIONS IN LATTICE CONES

S. Chandragiri, A. P. Lyapin (Krasnoyarsk, Russia)
srilathasami66@gmail.com, APLyapin@sfu-kras.ru

We consider the Cauchy problem for a multidimensional difference equation with constant coefficients in the cones of an integer lattice. Using the method of generating functions, its solvability is proved and the relation between the generating functions of the solution to the Cauchy problem and its initial data is obtained. As a result, the solution to the Cauchy problem is expressed through its initial data and fundamental solution.

Keywords: lattice paths, lattice cone, difference equation, generating function.

On complex valued functions $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ we define the shift operator

$$\delta_j : f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

and polynomial difference operator

$$P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ is a finite set of points of an n-dimensional lattice, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot \delta_n^{\omega_n}$ and $c_\omega \in \mathbb{C}$ are the coefficients of the difference operator.

Let $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$ be the set of vectors $\alpha^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j) \in \mathbb{Z}^n, j = 1, \ldots, N$, and K is a lattice cone spanned by these vectors

$$K = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \lambda_1 \alpha^1 + \cdots + \lambda_N \alpha^N, \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant}, i = 1, \ldots, N\}.$$

We assume that cone K is *pointed*, which means it does not contain any line or, equivalently, lies in an open half-space of $\mathbb{R}^n$. We also define a relation $\underset{K}{\geqslant}$ as follows: $u \underset{K}{\geqslant} \nu \Leftrightarrow u-\nu \in K$ for any $u, \nu \in K$. Denote $m = \alpha^1 + \cdots + \alpha^m, c_0 = 1, \alpha^0 = (0, \ldots, 0)$ and formulate the problem.

The Cauchy Problem. Find a solution to the difference equation

$$\sum_{j=0}^{N} c_j f(x - \alpha^j) = g(x), \quad x \underset{K}{\geqslant} 0, \tag{1}$$

which coincides with the given function $\varphi(x)$ on the set $X_0 = \{x \in K : x \underset{K}{\ngeqslant} m\}$:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{2}$$

We use equation (1) with initial data (2) to describe a wide class problems of enumerative combinatorial analysis including lattice paths problems (the Dyck, Motzkin and Schröder paths, generalized lattice paths. See [1], [3], [4]).

The fact that cone K is pointed allows us to prove the solvability of problem (1)–(2) using the method of generating functions, and namely, correctly define on the set of (formal) power series

$$F(z) = \sum_{x \underset{K}{\geqslant} 0} f(x) z^x$$

the structure of a ring, which will be denoted by $\mathbb{C}_K[[z]]$. Additionally we will denote $F_m(z) = \sum\limits_{x \underset{K}{\geqslant} m} f(x) z^x$.

Using the method of generating functions, the solvability of problem (1)–(2) was proved, namely, there is a formula in which generating function () is expressed in terms of generating functions $\Phi_m(z) = F(x) - F_m(z)$ and $G_m(z) = \sum\limits_{x \underset{K}{\geqslant} m} g(x) z^x$ of the initial data $\varphi(x)$ and the right-hand side $g(x)$ of equation (1) respectively.

Теорема 1. *The generating function $F(z)$ of a solution to the difference equation* (1) *with initial data* (2) *is represented as*

$$F(z) = \frac{1}{P(z^{-1})} \Big(\sum_{j=0}^{N} c_j z^{\alpha^j} \Phi_{m-\alpha^j}(z) + G_m(z) \Big),$$

where $z^{-1} = (z_1^{-1}, \ldots, z_n^{-1}), P(z) = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j z^{-\alpha^j}$ is a characteristic polynomial of (1).

Further, using the concept of the fundamental solution $\mathcal{P}(x)$ of the problem (1)–(2) yields a formula expressing $f(x)$ in terms of $\varphi(x), g(x)$ and $\mathcal{P}(x)$.

A fundamental solution $\mathcal{P}(x)$ (see [2]) is a solution such that

$$\sum_{j=0}^{N} c_j \mathcal{P}(x-\alpha^j) = \delta_0(x), \quad x \in K,$$

where $\delta_0(x)$ is the Kronecker symbol.

We can obtain the fundamental solution $\mathcal{P}(x)$ by expanding function $P^{-1}(z^{-1})$ in a Laurent series as follows

$$\frac{1}{P(z^{-1})} = \sum_{x \underset{K}{\geqslant} 0} \mathcal{P}(x) z^x.$$

It allows us to find a solution to the Cauchy problem in terms of its initial data and fundamental solution.

Теорема 2. *A solution to the difference equation* (1) *with initial data* (2) *is given as follows:*

$$f(x) = \sum_{0 \underset{K}{\leqslant} y \underset{K}{\leqslant} x} \mathcal{P}(x-y)\tau(y),$$

where

$$\tau(y) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} c_j \varphi(y-\alpha^j), & \text{if } y \underset{K}{\ngeqslant} m; \\ g(y), & \text{if } y \underset{K}{\geqslant} m. \end{cases}$$

Example. Let $\alpha^1 = (2,-1), \alpha^2 = (-1,2)$ be a column vectors, we let K denote the cone K spanned by the vectors $K = \langle \alpha^1, \alpha^2 \rangle, s = \alpha^1 + \alpha^2 = (1,1)$.

We consider the two dimensional difference equation

$$f(x,y) - f(x-2,y+1) - f(x+1,y-2) = 0, \tag{3}$$

its characteristic polynomial $P(z,w) = 1 - z^{-2}w^1 - z^1w^{-2}$.

According to Theorem 2, a solution to this difference equation is

$$f(x_1,x_2) = \sum_{0 \underset{K}{\leqslant} y \underset{K}{\leqslant} x} \mathcal{P}(x_1-y_1, x_2-y_2)\tau(y_1,y_2),$$

where $\tau(y_1,y_2) = \begin{cases} \varphi(y_1,y_2) - \varphi(y_1-2,y_2+1) - \varphi(y_1+1,y_2-2), \\ \qquad\qquad \text{if } (y_1,y_2) \ngeqslant (1,1); \\ 0, \ \text{if } (y_1,y_2) \geqslant (1,1). \end{cases}$

To find a fundamental solution we will expand the characteristic polynomial $P(z,w)$ into a series as follows:

$$\frac{1}{(1-z^2w^{-1}-z^{-1}w^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(z^2w^{-1}+z^{-1}w^2)^k=$$
$$=\sum_{(k_1,k_2)\underset{K}{\geqslant}0}\frac{(k_1+k_2)!}{\left(\frac{2k_1+k_2}{3}\right)!\left(\frac{k_1+2k_2}{3}\right)!}z^{k_1}w^{k_2}.$$

Consequently,

$$\mathcal{P}(k_1,k_2)=\frac{(k_1+k_2)!}{\left(\frac{2k_1+k_2}{3}\right)!\left(\frac{k_1+2k_2}{3}\right)!}.$$

Finally, we have the solution for difference equation (3) with arbitrary initial data

$$f(x_1,x_2)=\mathcal{P}(x_1,x_2)\varphi(0,0)+$$
$$\sum_{t=1}^{x_1}\mathcal{P}(x_1-2t,x_2+t)(\varphi(2t,-t)-\varphi(2t-2,-t+1))+$$
$$+\sum_{t=1}^{x_2}\mathcal{P}(x_1+t,x_2-2t)(\varphi(-t,2t)-\varphi(-t+1,2t-2)).$$

In case of lattice paths, $\varphi(2t,-t)-\varphi(2t-2,-t+1)=0$ for $t\geqslant 1$, $\varphi(-t,2t)-\varphi(-t+1,2t-2)=0$ for $t\geqslant 1$, and $\varphi(0,0)=1$, then we get $f(x_1,x_2)=\mathcal{P}(x_1,x_2)$.

REFERENCES

[1] *Bousquet Mélou M., Petkovšek M.* Linear recurrences with constant coefficients: The multivariate case // Discrete Math. 2000. Vol. 225. P. 51–75.

[2] *Leinartas E. K.* Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations // Siberian Mathematical Journal. 2007. Vol. 48, № 2. P. 268–272.

[3] *Lyapin A. P., Chandragiri S.* Generating functions for vector partitions and a basic recurrence relation // Journal of Difference Equations and Applications. 2019. Vol. 25, № 7. P. 1052–1061.

[4] *Chandragiri S.* Difference equations and generating functions for some lattice path problems // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. 2019. Vol. 12, № 5. P. 551–559.

[5] *Leinartas E. K., Lyapin A. P.* On the rationality of multidimensional recursive series // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. 2009. Vol. 4, № 2. P. 449–455.

[6] *Stanley R.* Enumerative combinatorics. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999.

[7] *Leinartas E. K., Nekrasova T. I.* Constant coefficient linear difference equations on the rational cones of the integer lattice // Siberian Mathematical Journal. 2016. Vol. 57, № 2. P. 98–112.

УДК 517.9

О ПОЛНОТЕ ДВОИЧНЫХ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p

С. А. Чумаченко (Саратов, Россия)
chumachenkosergei@gmail.com

Рассматривается система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна. Доказывается, что такая система является переполненной в пространстве L_p и любое конечное число функций из этой системы можно удалить, не теряя полноты системы.

Ключевые слова: Системы сжатий и сдвигов, базисные сплайны, гладкая интерполяция.

COMPLETENESS OF BINARY BASIC SPLINES IN L_p

S. A. Chumachenko (Saratov, Russia)
chumachenkosergei@gmail.com

We consider scales and shifts of a binary basic spline. It is proved that such system is overflow in L_p and we can remove any finite number of functions from this system without losing the completeness.

Keywords: Basic splines, smooth interpolation, scales and shifts systems.

Введение

Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна является обобщением системы Фабера-Шаудера [1] с заданным порядком гладкости. Двоичный базисный сплайн определяется как результат многократного интегрирования функции Уолша W_{2_n-1}.

Попытки нахождения обобщения системы Фабера-Шаудера или гладкого аналога предпринимались достаточно давно. В частности, в работах [2] и [3] была доказана базисность в $C[0,1]$, однако без оценки погрешности через модуль непрерывности. Как и система Фабера–Шаудера, система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна является базисом в $C[0,1]$(данный результат показан в работе [4]), в то время как антипериодический сдвиг этой функции является базисом Рисса в пространстве L_2 [5].

В данной работе указан алгоритм построения равномерного сходящегося ряда по системе сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна степени $n > 1$ и приведена оценка скорости сходимости этого ряда к приближаемой функции в терминах модулей непрерывности 1-го и 2-го порядка. Полученная оценка является уточнением предыдущего результата [4]. Доказывается также, что построенная система сжатий и сдвигов не является минимальной в L_p. Для системы Фабера-Шаудера это свойство было отмечено П.Л.Ульяновым [6]).

Система сжатий и сдвигов двоичного базисного сплайна в L_p

Пусть $If(x) = \int_0^x f(t)dt(x \in [0,1])$ - оператор интегрирования, $r_k(x) = \mathrm{sign}(\sin(2^{k+1}\pi x))$ - функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ - функции Уолша. Тогда функцию

$$\varphi_{n,N}(x) = Q(n,N)I^N W_{2^n-1}(x), (x \in [0,1], n, N \in \mathbb{N}, N \leq n)$$

будем называть двоичным базисным сплайном N-й степени от n-й функции Уолша, где $Q(n,N)$ - нормирующий коэффициент $\varphi_{n,N}(x)$ в $C[0,1]$.

Теорема 1.Нормирующий коэфициент $Q(n,N)$ для $1 \leq N \leq n$ равен $2^{\frac{2nN+3N-N^2-2}{2}}$

Рассмотрим систему сжатий и сдвигов $\psi_{m,j}(x) = \varphi_{n,n}(2^m x - j), m \in Z_0, j \in [0, 2^m - 1]$. Пусть $f(x)$ - функция из $C_0[0,1]$. Обозначим:

$$R_0(x) = f(x),$$

$$S_0(x) = R_0\left(\frac{0+1/2}{2^0}\right)\psi_{0,0}(x).$$

В общем случае полагаем:

$$S_m(x) = R_m\left(\frac{j+1/2}{2^m}\right)\psi_{m,j}(x), \tag{1}$$

$$R_{m+1}(x) = R_m(x) - S_m(x), x \in \left[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right]. \tag{2}$$

Таким образом, $S_m(x)$ — частичная сумма порядка 2^m ряда по системе $\psi_{m,j}(x)$, R_m —отклонение частичной суммы от приближаемой функции f.

Пусть $\omega_f(\delta)$ и $\omega_f^2(\delta)$ — соответственно модуль непрерывности 1 и 2 порядков.

Теорема 2. *$\psi_{m,j}(x)$ — базис в $C_0[0,1]$. Имеет место следующая оценка через модуль непрерывности:*

$$|R_{2m+1}(x)| \leq \omega_f\left(\frac{1}{2^{2m+2}}\right) + \frac{14}{9} * \omega_f^2\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) + \frac{5/4+m}{2^{2m+2}} * ||f||_{C_0[0,1]}.$$

Теорема 3. Пусть $p \geq 1$. Для любых $m_1, j_1 \in Z_0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная сумма $\sum_{m>m_1,j} \psi_{m,j}(x)$ такая что

$$||\psi_{m_1,j_1}(x) - \sum \psi_{m,j}(x)||_{L_p} < \varepsilon$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Faber G.* Uber die ortogonalenfunctionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch Math. 1910. Vol. 19. P. 104–112.

[2] *Шайдуков К. М.* О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол // Ученые записки Казанского университета. 1965. Т. 125, № 2. С. 133–142.

[3] *Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А.* О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера // Матем. заметки. 1974. Т. 82, № 5. С. 643–651.

[4] *Чумаченко С. А.* Об одном из аналогов системы Фабера–Шаудера // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. 2016. Т. 53. С. 163–164.

[5] *Лукомский С. Ф., Терехин П. А., Чумаченко С. А.* Хаосы Радемахера в задачах построения сплайновых аффинных систем // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 863–874.

[6] *Ульянов П. Л.* О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера // Матем. заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 431–442.

УДК 517.53

О СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ В ВЕСОВЫХ L^p-ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ФОКА[1]

Ф. А. Шамоян (Саратов, Россия)
shamoyanfa@yandex.ru

В работе получено описание слабо обратимых элементов в весовых L^p-пространствах целых функций типа Фока.

Ключевые слова: целые функции, пространство Фока, линейные непрерывные функционалы, проблема Ватсона, весовая полиномиальная аппроксимация.

ON WEAK INVERTIBILITY IN L^p-WEIGHTED SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF THE FOCK TYPE SPACES[1]

F. A. Shamoyan (Saratov, Russia)
shamoyanfa@yandex.ru

A description of weakly reversible elements in L^p-weighted spaces of entire functions of the Fock type spaces is obtained in this work.

Keywords: entire functions, the Fock type spaces, continuous linear functionals, the Watson problem, weighted polynomial approximation.

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $H(\mathbb{C})$ — множество всех целых функций и пусть $R_+ = \{x \in R : x \geq 0\}$. Для любых σ, $\alpha \in R_+$, $p > 0$, введём в рассмотрение следующее весовое пространство целых функций:

$$F^p_{\sigma,\alpha} = \left\{ f \in H\left(C\right) : \|f\|_{F^p_{\sigma,\alpha}} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\sigma r^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{\theta}\right)\right|^p d\theta dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

при $p = 2$, $\alpha = 2, \sigma = \frac{1}{2}$ пространство $F^2_{1,\frac{1}{2}}$ совпадает с классическим пространством Фока (см. [1]), а при $p = 2$, σ, $\alpha > 0$ эти пространства были введены и изучены М. М. Джрбашяном в работах [2], [3]. В дальнейшем пространства $F^2_{\sigma,\alpha}$ и связанное с ним уравнение свёртки были введены в работах В. В. Напалкова и его учеников (см. [4]).

Пусть P — множество всех алгебраических многочленов от z, X — некоторое пространство целых функций $P \subset X$, причем P составляет всюду плотное множество в X.

Предположим, что $f \in X$, при этом для произвольного многочлена $p \in P$, $pf \in X$. Скажем, что функция f слабо обратима в пространстве X, если существует последовательность многочленов p_n, $n = 1, 2, ...,$ таких что $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, научный проект №17-51-15005-НЦНИ
[1]The work was financially supported by Russian Foundation for Fundamental Research (project 17-51-15005).

Описание слабо обратимых элементов в конкретных функциональных пространствах тесно связано с широким кругом задач нескольких дисциплин: от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа (см. [5,6]).

В работе устанавливается, что функция $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ слабо обратима в $F^p_{\sigma,\alpha}$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, при этом получено полное описание таких функций. Также в статье строится пространство типа Фока, в котором существуют сильно обратимые функции, не обладающие слабой обратимостью.

Основными результатами работы являются следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $0 < \alpha, \sigma < +\infty$, $f \in H(\mathbb{C})$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. *Тогда*

1. *если* $\alpha \overline{\in} N$, *то следующие условия равносильны*

   i) $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$,

   ii)

$$f(z) = \exp(h(z)),\ h(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ z \in \mathbb{C},\ n < \alpha \qquad (*)$$

2. *если* $\alpha = n \in N$, $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$, *то* f *имеет вид (*), где* $n \leq \alpha$, *причем, если* $\alpha = n$, $n \leq 2$, *то* $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ *тогда и только тогда, когда* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$, *если же* $n > 2$, *то возможен и случай* $n = \frac{\sigma}{p}$;

3. *функция* $f \in F^p_{\sigma,\alpha}$ *тогда и только тогда слабо обратима, когда* $f(z)$ *допускает представление (*), при чем* $|a_n| < \frac{\sigma}{p}$.

Следующая теорема уточняет последнее утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $p, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$, f *— целая функция, представленная в виде (*),*

$$\psi(x) = \left(\sigma - |a_n|p - \frac{b_{n-1}p}{x^{1/n}} - \varepsilon(x)\right),\ x \in \mathbb{R}_+,$$

где $b_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k|$, $\varepsilon(x)$ *— положительная функция из* $C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\varepsilon'(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\varepsilon(x)}{\ln x} = +\infty$,

$$F^p_{\sigma,\alpha,\psi} = \Big\{ f \in H\left(\mathbb{C}\right) : \|f\|^p_{\sigma,\alpha,\psi} = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma r^\alpha + \right.$$

$$+\psi(r^{\alpha}))\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^{p}d\vartheta dr<+\infty\Big\},$$

где $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) функция f *вида (*) принадлежит* $F^p_{\sigma,\alpha}$ *и слабо обратима в* $F^p_{\sigma,\alpha,\psi}$*;*

б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sigma/p-|a_n|-\psi(x)}{x^{1/2}}dx=+\infty.$

Теорема 3. *Существует функция* φ *— монотонно растущая, положительная на* R_+*, такая что* $f \in F^p_{\sigma,\alpha,\varphi}$*,* $pf \in F^p_{\sigma,\alpha,\varphi}$*,для произвольного многочлена* p*,такая,что* $1/f \in F^p_{\sigma,\alpha,\varphi}$*, в то же время*

$$\inf\left\{\|Qf-1\|_{F^p_{\sigma,\alpha,\varphi}}=C_f>0,\quad Q\in P\right\}.$$

Замечание 1. Аналоги теорем 1 и 2 при $p = +\infty$ и при более общих весовых функциях ранее были установлены в работах автора [7, 8].

Замечание 2. Отметим,что аналог теоремы 3 в случае весовых пространств аналитических функциq в круге бsл установлен в работах [7,8], а в случае весовых пространств Бергмана в единичном круге в работе [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Zhu K.* Analysis on Fock Spaces. Springer-Verlag, 2012. Vol. 263. 355 p. (Graduate Texts in Mathematics).

[2] *Джрбашян М. М* О представимости некоторых классов целых функций // Дан. Арм. ССР. 1947 Т. 7, № 5. С. 193–197.

[3] *Джрбашян М. М* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения института математики и механики Арм. ССР. 1948. № 2. С. 3–48.

[4] *Дильмухаметова М., Муллабаева А. У., Напалков В. В.* Обобщение Пространства Фока // Уфимск. матем. журн. 2010. Т. 2, № 1. С. 51–58.

[5] *Nikolskii N. K.* Operators,functions and systems: an easy reading. Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toplitz. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2002. (Mathematical Surveys and Monographs. Iss. 92).

[6] *Хавин В.П* Методы и структура коммутативного гармонического анализа // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ, 1987. Т. 15.

[7] *Шамоян Ф.А.* Слабая обратимость в некоторых пространствах аналитических функций // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 74, С. 157–161.

[8] *Шамоян Ф.А.* О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60, № 5. С. 191–202.

[9] *Borichev A., Hedenmalm H.* Harmonic function of maximal growth: invertibility and ciclicity in Bergman spaces // J. Amer Math. Soc. 1997. Vol. 10. P. 921–946.

УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, Россия)
tadgius@gmail.com

В работе иследованы аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена тригонометрических сумм Фурье для функций из весовых пространств Соболева с переменным показателем. Получены оценки приближения функций из этих пространств средними Валле Пуссена.

Ключевые слова: весовые пространства Лебега с переменным показателем, пространства типа Соболева, средние Валле Пуссена.

ON APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN WEIGHTED VARIABLE EXPONENT LEBESGUE AND SOBOLEV SPACES BY DE LA VALLEE-POUSSIN MEANS

T. N. Shakh-Emirov (Makhachkala, Russia)
tadgius@gmail.com

We study the approximative propeties of the de la Vallee-Poussin mean for the trigonometric Fourier sums for the functions from weighted variable exponent Sobolev spaces. The Estimates of the approximation for functions from these spaces by de la Valle-Poussin means are obtained.

Keywords: weighted variable exponent Lebesgue spaces, Sobolev type spaces, de la Valee-Poussin means.

Введение

Пусть $p = p(x)$ — измеримая 2π-периодическая функция такая, что $p(x) \geq 1$ почти всюду, $w = w(x)$ — суммируемая неотрицательная почти всюду положительная 2π-периодическая функция. Весовым пространством Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ назовем множество 2π-периодических измеримых функций, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)} w(x)dx < \infty.$$

Как показано в [1], норму в пространстве $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ можно определить следующим образом

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{p(\cdot),w}([-\pi,\pi]) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)dx \leq 1\right\}.$$

Рассмотрим в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ подпространство $W^{r,p(x)}_{2\pi,w}$ из $r-1$-раз непрерывно дифференциируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi,\pi]$, а $f^{(r)}(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$. В настоящей работе исследуются аппроксимативные свойства средних Валле Пуссена тригонометрических сумм Фурье для функций из $W^{r,p(x)}_{2\pi,w}$. Напомним их определение.

Пусть $f(x)$ – интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ 2π-периодическая функция,

$$a_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ b_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt$$

— коэффициенты Фурье,

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

— частичная сумма ряда Фурье. Средние Валле Пуссена определяются следующим образом

$$V^n_m(f,x)=\frac{1}{m+1}[S_n(f,x)+\ldots+S_{n+m}(f,x)].$$

Основной результат

Для формулировки результата нам потребуется наложить некоторые ограничения на переменные показатели и весовые функции. Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим класс 2π-периодических переменных показателей, для которых выполнено условие Дини–Липшица

$$|p(x)-p(y)|\ln\frac{2\pi}{|x-y|}\le c,\ x,y\in[-\pi,\pi].$$

Пусть $E=[-\pi,\pi]$, $E_1=\{x\in E:p(x)=1\}$, $E_2=E\setminus E_1$. Через $\mathcal{H}(E,p)$ обозначим класс весов, удовлетворяющих условиям

$$w(x)\ge C_1(w)>0 \text{ для почти всех } x\in E_1,$$

$$\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot),1}(E_2)<\infty,\ \frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1,\ x\in E_2.$$

В [2] показано, что $f(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ — суммируемая функция, если $w(x)\in\mathcal{H}(E,p)$. Таким образом, для $f(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ можно определить функцию Стеклова

$$s_h(f)=s_h(f,x)=\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{h} f(x+t)dt.$$

Ввиду того, что (см. [3])

$$\|s_h(f)\|_{p(\cdot),w} \leq c(p,w)\|f\|_{p(\cdot),w},$$

можно показать, что

$$\lim_{h\to 0}\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot),w} = 0.$$

назовем модулем непрерывности величину

$$\Omega(f,0)_{p(\cdot),w} = 0,\ \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w} = \sup_{0<h<\delta}\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot),w},$$

а через $E_n(f)_{p(\cdot),w}$ обозначим величину наилучшего приближения функции $f(x) \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n

$$E_n(f)_{p(\cdot),w} = \inf_{T_n}\|f - T_n\|_{p(\cdot),w}.$$

Далее, пусть $N = \left[\frac{1}{h}\right]$, где $[a]$ – целая часть числа a, $\lambda = \frac{1}{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$x_k = (k\lambda - 1)\pi,\ \Delta_k(\lambda) = [x_k, x_{k+1}],$$

$$\tilde{\Delta}_k(\lambda) = \Delta_{k-1}(\lambda) \cup \Delta_k(\lambda) \cup \Delta_{k+1}(\lambda)$$

$$p_k = \underline{p}(\tilde{\Delta}_k(\lambda)) = ess \inf_{x\in\tilde{\Delta}_k(\lambda)} p(x).$$

Нам потребуются следующие системы отрезков

$$\mathfrak{B}^1_\varepsilon = \{\Delta_k(\lambda) : p_k = 1, |\Delta_k(\lambda)| < \varepsilon\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

$$\mathfrak{B}^{p(\cdot)}_\varepsilon \left\{\tilde{\Delta}_k(\lambda) : p_k > 1, |\tilde{\Delta}_k(\lambda)| < 3\varepsilon\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть $p = p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $w(x) \in \mathcal{H}(E,p)$, $r \geq 1$ $f \in W^{r,p(x)}_{2\pi,w}$, $b > 0$, $n \leq bm$,*

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^1_\varepsilon}\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx \leq c(p,w),$$

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^{p(\cdot)}_\varepsilon}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(B)-1}}dx\right)^{\underline{p}(B)-1} \leq c(p,w),$$

Тогда имеют место следующие оценки

$$\|f - V^n_m(f)\|_{p(\cdot),w} \leq \frac{c_r(b,p,w)}{(n+1)^r}E_n(f^{(r)})_{p(\cdot),w},$$

$$\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot),w} \leq \frac{c_r(b,p,w)}{(n+1)^r} \Omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n+1}\right)_{p(\cdot),w}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.

[2] *Магомед-Касумов М. Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16, № 3. С. 38–46.

[3] *Шах-Эмиров Т. Н.* О равномерной ограниченности некоторых семейств интегральных операторов свертки в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Известия Сарат. ун-та. Нов. Сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4(1). С. 422–427.

УДК 517.652

К РЕШЕНИЮ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЭРМИТА ДЛЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. В. Шустов (Москва, Россия)
vshustov@gosniias.ru

Рассмотрена задача о построении интерполяционного многочлена Эрмита для функции n переменных при условии, что в точках регулярной многомерной сетки узлов заданы матрицы производных этой функции. В данной постановке имеет место теорема о существовании многочлена Эрмита многих переменных, который удовлетворяет заданным условиям, наложенным на значения его производных в узловых точках. Указывается соответствие полученной общей формулы известным частным решениям интерполяционной задачи Эрмита.

Ключевые слова: интерполяционный многочлен Эрмита, многомерная интерполяция, формула Тейлора, функция многих переменных.

TO THE SOLUTION OF HERMITE INTERPOLATION PROBLEM FOR THE FUNCTION OF MANY VARIABLES

V. V. Shustov (Moscow, Russia)
vshustov@gosniias.ru

The problem of constructing the Hermite interpolation polynomial for a function of n variables is considered under the condition that derivative's matrices this function are given at the points of a regular multidimensional nodes grid. On this condition, there is a theorem on the existence Hermite polynomial of many variables, which satisfies the given conditions imposed on the values of its derivatives at the nodal points. The correspondence of the obtained general formula to the known particular solutions of Hermite interpolation problem is indicated.

Keywords: Hermite interpolation polynomial, multidimensional interpolation, Taylor formula, function of many variables.

Введение

Известно решение интерполяционной задачи Эрмита о построении многочлена по значениям функции и ее производных, заданным в точках сетки узлов, для случая функции одной переменной, представленное, например, в [1, с. 163] или [2], а также полученное более простым способом в [3].

Можно отметить частный вид этих многочленов, когда производные функции заданы только на концах отрезка [4], и обобщение задачи интерполяции двухточечными многочленами Эрмита на случай функции n переменных, представленное в [5].

Для интерполяции функций одной переменной разработан ряд методов, основанных на использовании многочленов Лагранжа, сплайн-функций, многочленов Бернштейна, реализованных в кривых Безье, B-сплайнов и другие. Задача многомерной интерполяции рассматривались в ряде работ, там же отмечены трудности, возникающие при решении этой задачи [1, с. 181]. Подход, который сводит многомерную интерполяцию к последовательности одномерных, возможен, но его сложность и трудоемкость значительно возрастают с увеличением числа переменных.

Более перспективным представляется расширение постановки общей интерполяционной задачи Эрмита с функции одной переменной до функции многих переменных. При этом рассматривается случай, когда многомерная сетка узловых точек является регулярной и, соответственно, представляется тензорным произведением одномерных сеток по каждой переменной. Далее используются представления и терминология, используемые в [6], в частности, то, что производные функции многих переменных представляются в общем случае многомерными матрицами частных производных.

Задача многомерной интерполяции решается при условии, когда в узлах регулярной пространственной сетки заданы n — мерные матрицы производных до порядка m включительно. В данной постановке имеет место следующая теорема.

Теорема и ее частные случаи

Теорема. *Пусть в n-мерной области* $\mathbf{D}^n \subset \mathbf{E}^n$ введена регулярная сетка узлов $\mathbf{C}$

$$C = \left\{x^1_{i^1}\right\}^{l_1}_{i^1=0} \times \ldots \times \{x^n_{i^n}\}^{l_n}_{i^n=0}\,,$$

являющаяся декартовым произведением одномерных сеток вида $C^s = [x^s_0, x^s_1, \ldots x^s_{l_n}]$, $s = 1, 2 \ldots n$. *Индекс вверху s означает номер координаты, индекс внизу i означает номер узла. Пусть в узлах сетки заданы значения функции и всех ее частных производных до порядка m включительно*

$$\nabla^{(j)} f_{i^1,\ldots,i^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,\ldots,i^n}, \qquad j = 0, 1, \ldots m.$$

Тогда существует многочлен $H(x)$ от n переменных, $x = (x^1, \ldots,\ x^n)$, определенный в области $\boldsymbol{D}^n$, удовлетворяющий условиям, наложенным на значения функции и ее производных в узлах сетки

$$\nabla^{(j)} H(x^1_{i^1}, \ldots x^n_{i^n},) = \nabla^{(j)} f_{i^1,\ldots,i^n}, i^s = \{0, 1, \ldots,\ l_s\}, s\ = 1, 2, \ldots, n$$

и который может быть представлен в виде

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{l_1} \cdots \sum_{i^n=0}^{l_n} \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^m_j(x^1, \ldots, x^n)}{j!} (\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,\ldots,i^n},$$

где функции влияния $\varphi_j^m(x^1,...,x^n)$ *определены соотношением*

$$\varphi_j^m(x^1,...,x^n) = \omega_{i^1,...,i^n}(x^1,...,x^n)\sum_{k=0}^{m-j}\frac{1}{k!}(\Delta x * \nabla)^{(k)}\left(\frac{1}{\omega_{i^1,...,i^n}(x^1,...,x^n)}\right),$$

выражение$(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,,...,i^n}$*есть соответствующий член многочлена Тейлора для функции n переменных* [6, с. 10], *который представляется формулой*

$$(\Delta x * \nabla)^{(j)} f_{i^1,...,i^n} = \left((x^1 - x^1_{i^1})\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + (x^n - x^n_{i^n})\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f_{i^1,...,i^n},$$

выражение $\omega_{i^1,...,i^n}(x^1,...,x^n)$*определяется формулой*

$$\omega_{i^1,...,i^n}(x^1,...,x^n) = \frac{\Omega_{i^1}(x)}{(x^1 - x^1_{i^1})^{m+1}}, ..., \frac{\Omega_{i^n}(x)}{(x^n - x^n_{i^n})^{m+1}}, \text{ где}$$

$$\Omega_{i^s}(x) = \prod_{t^s=0}^{l_s}(x^s - x^s_{t^s})^{m+1}, s = 1, 2...n.$$

При использовании обозначений для вектора переменных $x = x^1, \ldots, x^n)$*, мультииндекса узловой точки* $i = (i^1, \ldots, i^n)$ *и дифференциалов функции* $d^j f(x)$ *высших порядков [7, с. 317] как*

$$d^j f(x) = \left((x^1 - x^1_{i^1})\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + (x^n - x^n_{i^n})\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{(j)} f(x)$$

формула для интерполяционного многочлена Эрмита $H(x)$ *для функции n переменных может быть записана в более компактном и обозримом виде:*

$$H(x) = \sum_{i^1=0}^{l_1} ... \sum_{i^n=0}^{l_n}\sum_{j=0}^{m}\left\{\frac{d^j f_i}{j!}\left(\omega_i(x)\sum_{k=0}^{m-j}\frac{1}{k!}d^k\left[\frac{1}{\omega_i(x)}\right]\Bigg|_{x=x_i}\right)\right\},$$

где

$$\omega_i(x) = \prod_{s=1}^{n}\left[\frac{1}{(x^s - x^s_{i^s})^{m+1}}\prod_{t^s=0}^{l_s}(x^s - x^s_{t^s})^{m+1}\right].$$

Идея доказательства теоремы основана, так же, как и в [3] на использовании формулы Тейлора применительно к функции многих переменных.

Частный случай 1. Пусть значения функции и ее производных заданы только в одной точке $x_0 = (x_0^1, ...x_0^n,)$, т.е сетка узлов **C** вырождается в единственную точку. Тогда функция влияния $\omega_{i^1,...,i^n}(x^1, ..., x^n) = 1$ и многочлен Эрмита для функции многих переменных превращается в многочлен Тейлора функции многих переменных:

$$H(x) = T(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}(\Delta x * \nabla)^{(j)} f(x_0).$$

Частный случай 2. Пусть задана функция только одной переменной ($n = 1$). В этом случае полученная формула для интерполяционного многочлена Эрмита $H(x)$, для функции одной переменной принимает вид

$$H(x) = \sum_{i=0}^{l} \omega_i(x) \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} f_i^{(j)} \frac{(x - x_i)^{j+k}}{j!k!} \left[\frac{1}{\omega_i(x)}\right]_{x=x_i}^{(k)},$$

которая с точностью до обозначений соответствует формуле, приведенной в [1, с. 172] для одинакового порядка m производных в узлах сетки

$$m_i = m, \quad i = 0, 1...l.$$

С развитием электронно-вычислительной техники многомерные многочлены Эрмита могут использоваться для интерполяции сеточных функций и для аппроксимации функций многих переменных, обладающих требуемым уровнем гладкости. Отметим, что интерполяционные многочлены Эрмита многих переменных дают явное выражение для приближающей функции, не требуя решение уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1 М. : Физматлит, 1962. 464 с.

[2] *Spitzbart A.* A generalization of Hermite's interpolation formula // Amer. Math. Monthly. 1960. Vol. 67. P. 42–46.

[3] *Шустов В. В.* Простое решение интерполяционной задачи Эрмита // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. Т. 70, № 4. С. 146–151.

[4] *Шустов В. В.* О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1091–1108.

[5] *Шустов В. В.* К задаче многомерной интерполяции функций двухточечными многочленами Эрмита от n переменных // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы международ. Сарат. зимн. шк. Саратов : Научная книга, 2018. С. 361–364.

[6] *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ : в 2 т. Т. 2 М. : Высшая школа, 1981. 584 с.

[7] *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ : в 2 т. Т. 1 М. : Высшая школа, 1970. 590 с.

УДК 517.52

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ЯДЕР ДИРИХЛЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

В. И. Щербаков (гор. Жуковский Московской области, Россия)
kafmathan@mail.ru (для В. И. Щербакова)

Получена оценка снизу для ядер Дирихле по системам Прайса и обобщённым системам Хаара относительно S- и V-мажорант (V-мажоранта — это определённая Н. Я. Виленкиным функция $\left[\frac{1}{t}\right]$), которые оказались различными для простых и составных p_n. Показано, что ранее полученная оценка сверху ядер Дирихле, вообще говоря, неулучшаемая; она не может быть улучшена в случае простых p_n с $\sup\limits_n p_n = \infty$.

Ключевые слова: абелева группа, модифицированный отрезок $[0,1]$ и непрерывность на нём, системы Прайса и Виленкина, обобщённые системы Хаара, ядра Дирихле и их S- и V-мажоранты.

LOWER ESTIMATES OF DIRICHLET'S KERNELS BY GENERALIZED HAARS AND WALSH'S SYSTEMS

V. I. Shcherbakov (Zhukovsky of Moscow district, Russia)
kafmathan@mail.ru (for V. I. Sherbakov)

Lower bound estimations for Dirichlet's kernels on Price's and generalized Haar's systems regarding S- and V-majorants are received (V-majorant is a function $\frac{1}{t}$, obtained by N. Ja. Vilenkin) are obtained. These estimations turned out to be different for a prime and composite p_n. It is proved that a previously received estimations cannot be improved in general and it cannot be improved in the case of prime unbounded p_n.

Ключевые слова: Abelian group; modification segment $[0,1]$ and a continuous functions on it, Price's and Vilenkin's systems, a generalized Haar's systems, a Dirichlet's kernels and it's S- and V-majorants.

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' — целые с $0 \leq a_k < p_{k+1}$, $1 \leq a_s < p_{s+1}$, $0 \leq n' < m_s$, а любое действительное число $x \in [0,1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \text{ где } x_n - \text{ целые с } 0 \leq x_n < p_n. \tag{2}$$

Если x — p_n-иррационально, а также $x = 0$ или $x = 1$, то его представление в виде равенства (2) единственно; для $x = \frac{l}{m_n}$ имеется два его разложения по формуле (2), одно из которых — конечно ($x_k = 0$ при $k > n$), которое мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другое — бесконечно ($x_k = p_k - 1$ для $k > n$); его будем записывать как $\frac{l}{m_n}$. Таким образом, отрезок $[0, 1]$ перешел в абелеву группу последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \dots p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n и обратной операцией $\dot{-}$.

Положив $\frac{l}{m_n} - < \frac{l}{m_n}$, с $[0, 1]$ на G переносится упорядочивание точек, и, следовательно, на G определён отрезок $[a, b] = \{x \in G \mid a \leq x \leq b\}$. А так как группа G и отрезок $[0, 1]$ различаются лишь на счётное множество точек, то с $[0, 1]$ на G переносятся понятия меры и ннтеграла Лебега, а токже ортогональные и ортонормированные системы функций. Рассмотрим следующие ортонормированные системы функций:

1. $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \psi_0(x) \equiv 1;\ \psi_{m_k}(x) = \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}$ и $\psi_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{s} (\psi_{m_k}(x))^{a_k}$, а также

2. $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \gamma_0(x) \equiv 1;$

$$\gamma_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k}\exp(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}) & \text{, если } x \in G_k \\ 0 & \text{, для } x \in G \setminus G_k \end{cases}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$ и $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = (\gamma_{m_s}(x \dot{-} (\frac{n'}{m_s})))^{a_s}$, где числа s, a_s и n' — определены равенством (1) , и $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G$.

Систему $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называют системой Прайса [1] (для простых p_n на нульмерной компактной абелевой группе она переходит в системы Виленкина [2]). Для $p_n \equiv p$ она становится системой Крестенсона (или Крестенсона–Леви) [3], а при $p_n \equiv 2$ — системой Уолша [4] в нумерации Пэли [5]. Пусть $D_n(x \dot{-} t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\psi_k(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi_k(x \dot{-} t)$ $-n$-е ядро Дирихле по системе Прайса.

Систему же $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, как правило, называют обобщённой системой Хаара (или системой типа Хаара). При $p_n \equiv 2$ она (на отрезке $[0, 1]$) переходит в систему Хаара [6]; для $\sup\limits_n p_n < \infty$ эта система рассматривалась (также на отрезке $[0, 1]$) Н. Я. Виленкиным [7], Б. И. Голубовым и А. И. Рубинштейном [8]; для любых p_n (тоже на отрезке $[0, 1]$) — Б. И. Голубовым [9]; на нульмерных компактных абелевых группах она исследовалась С. Ф. Лукомским [10]. Пусть $D_n(x, t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \gamma_k(x)\gamma_k(t)$ — n-е ядро Дирихле по обобщённой системе Хаара.

Известны следующие мажоранты ядер Дирихле по системам Прайса (а также системам Виленкина) и обобщённым системам Хаара: $V(t) = m_{n+1}$ для $t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}]$ и

$$S(t) = \frac{m_n}{\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}}}, \text{ если } t \in [\frac{l}{m_{n+1}}, \frac{l+1}{m_{n+1}}-], \text{ где } l = 1, 2, \ldots, p_{n+1}-1 \text{ и } n = 1, 2, \ldots$$

В [2] $V(t)$ названа как $[\frac{1}{t}]$, а $S(t)$ в [11] обозначена как $q(t)$.

В [2, 11] и [12] получены следующие оценки:

$$|D_n(x)| \le 2S(x) \le V(x) \text{ для всех } x \in G \setminus \{0\} \text{ и любых целых } n > 0 \text{ и}$$

$$|D_n(x,t)| \le S(x\dot{-}t) \le \frac{V(x\dot{-}t)}{2}, \text{ если } x \in G \setminus \{0\} \text{ и } n = 1, 2, \ldots .$$

В [11] также получена оценка снизу:

Теорема S. *Для всех* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *найдётся целое* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t)$, *удовлетворяющее условию* $1 \le j \le p_{n+1}-1$ *и такое, что выполнено неравенство*

$$|D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge \frac{S(x\dot{-}t)}{2}. \tag{3}$$

Оценку (3) можно улучшить, ибо справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Для любого целого* $n > 0$ *и при всех* x *и* t *удовлетворяющих условию* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *найдётся целое* $j = j(x\dot{-}t)$ *с* $1 \le j \le p_{n+1}-1$ *такие, что имеет место неравенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge \frac{\sqrt{3}}{2} S(x\dot{-}t). \tag{4}$$

Теорема 2. *Для всякого целого* $n > 0$ *можно подобрать* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *и целое* $j = j(x\dot{-}t)$ *с* $1 \le j \le p_{n+1}-1$ *такие, что справедлива оценка*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge \frac{\sqrt{3}}{2\pi} V(x\dot{-}t). \tag{5}$$

Для простых $p_{n+1} \ge 5$ неравенства (4) и (5) можно улучшить, ибо выполнены

Теорема 3. *Если число* p_{n+1} *простое, то для любых* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *существует целое* $j = j(x\dot{-}t)$ *с* $1 \le j \le p_{n+1}-1$ *такое, что имеет место неравенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \ge (1 - \frac{\pi^2}{8p_{n+1}^2}) S(x\dot{-}t) \text{ и} \tag{6}$$

Теорема 4. *Для простых* p_{n+1} *существуют* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *и целое* $j = j(x\dot{-}t)$ *с* $1 \leq j \leq p_{n+1} - 1$ *такие, что справедлива оценка*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \geq \frac{1}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{8p_{n+1}^2})V(x\dot{-}t) =$$

$$= (\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8p_{n+1}^2})V(x\dot{-}t). \qquad (7)$$

Отметим, что требование на то, чтобы вся последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ состояла бы только из простых чисел, в теоремах 3 и 4 не накладывается.

В случае составных p_{n+1} неравенства (6) и (7) для любых x и t с $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$, вообще говоря, неверны, ибо имеет место следующая

Теорема 5. *Если* p_{n+1} *кратно 3, то оценки (4) и (5), вообще говоря, неулучшаемы.*

Для составных p_{n+1} имеют место следующие утверждения:

Теорема 6. *Если* p_{n+1} *является целой степенью двойки* $(p_{n+1} = 2^k)$, *то для любых* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *можно подобрать целое* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t)$, *удовлетворяющие условию* $1 \leq j \leq p_{n+1} - 1$, *такие, что выполнено равенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| = S(x\dot{-}t);$$

Теорема 7. *В случае, когда* $p_{n+1} = 2^k$ *при некотором целом* $k > 0$ *найдутся* x, t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *и* $j \in \{1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1\}$, *при которых справедливо равенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| = \frac{V(x\dot{-}t)}{2\pi}.$$

В случае, когда p_{n+1} не является целой степенью двойки, верны следующие теоремы:

Теорема 8. *для всех* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *найдётся целое* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t)$ *такое, что имеет место неравенство*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \geq (1 - \frac{\pi^2}{8q_{n+1}^2})S(x\dot{-}t),$$

где q_{n+1} *— наименьший и отличный от единицы положительный нечётный делитель числа* p_{n+1}.

Теорема 9. *Существуют* x *и* t *с* $x\dot{-}t \in [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-]$ *а также* $j = j(x,t) = j(x\dot{-}t) \in \{1, 2, \ldots, p_{n+1}-1\}$ *такие, что справедлива оценка*

$$|D_{jm_n}(x,t)| = |D_{jm_n}(x\dot{-}t)| \geq \frac{1}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{8q_{n+1}^2})V(x\dot{-}t) = (\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8q_{n+1}^2})V(x\dot{-}t),$$

где q_{n+1} *определено в теореме 8.*

Отметим, что q_{n+1} должно быть простым (как **наименьший** и **отличный от единицы** *положительный* **нечётный делитель**.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Price J. J.* Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math., 1957. Vol. 9, № 3. P. 413–425.

[2] *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.

[3] *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pac. J. Math. 1955. Vol. 5, № 1. P. 17–31.

[4] *Walsh J. L.* A constructive of normal orthonormal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, № 1. P. 5–24.

[5] *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthonormal functions // Proc. of London Math. Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.

[6] *Haar A.* Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme // Math. An. 1910. Vol. 69. P. 331–371.

[7] *Качмаж С. Штейнгауз Г.* Теория ортгональных рядов / дополнения Н. Я. Виленкина. М. : Физматгиз, 1958. § 1, п. 6. С. 475–479.

[8] *Голубов Б. И. Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.

[9] *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.

[10] *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.

[11] *Щербаков В. И.* О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. МГУ. Сер. матем. 1983. № 2. С. 37–42.

[12] *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для бобщённых систем Хаара // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 3. С. 446–473.

УДК 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ: НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ[1]

В. А. Юрко (Саратов, Россия)

YurkoVA@info.sgu.ru

Рассматриваются дифференциальные операторы второго порядка на конечном интервале с отклоняющимся аргументом. Установлены свойства спектральных характеристик и исследуется нелинейная обратная задача, состоящая в восстановлении операторов по их спектрам. Разработаны конструктивные алгоритмы для решения обратных задач этого класса и доказана единственность решения.

Ключевые слова: Дифференциальные операторы, отклоняющийся аргумент, обратная спектральная задача.

ON RECOVERING DIFFERENTIAL OPERATORS WITH DEVIATING ARGUMENT: NONLINEAR CASE[1]

V. A. Yurko (Saratov, Russia)

YurkoVA@info.sgu.ru

Second order differential operators on a finite interval with deviating argument are considered. Properties of spectral characteristics are established, and a nonlinear inverse problem is studied which consist in recovering operators from their spectra. We suggest a constructive algorithms for solving such inverse problems and prove the uniqueness of the solution.

Keywords: Differential operators, deviating argument, inverse spectral problem.

Рассмотрим краевые задачи $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2$:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0,$$

где $a \in [\pi/3, \pi/2)$, h и H_j — комплексные числа, $q(x)$ — комплекснозначная функция, $q(x) \in L(a, \pi)$ и $q(x) = 0$ п.в. на $(0, a)$. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ – решение уравнения (1) при условиях $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Собственные значения $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$ задачи $\mathcal{L}_j$ совпадают с нулями целой функции $\mathcal{P}_j(\lambda) := \varphi'(\pi, \lambda) + H_j\varphi(\pi, \lambda)$, которая называется характеристической функцией для $\mathcal{L}_j$. В статье исследуется нелинейная обратная задача восстановления $q(x), h, H_j$ по заданным спектрам $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j = 1, 2$. Отметим, что в [1] установлена единственность решения обратной задачи для уравнений с запаздыванием в весьма частном случае. В [2, 3] изучался линейный случай $a \geq \pi/2$, а в [4] исследовался нелинейный случай $a \in [2\pi/5, \pi/2)$ для краевого условия Дирихле в нуле.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00102).

[1]This work was supported by the RFBR (project No. 19-01-00102)

Обозначим $A := \dfrac{1}{2}\int\limits_a^\pi q(t)\,dt$. Тогда

$$\sqrt{\mu_{nj}} = n + (h + H_j + A\cos na)/(\pi n) + o(1/n), \quad n \to \infty. \qquad (2)$$

Задание спектра $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию:

$$\mathcal{P}_j(\lambda) = \pi(\mu_{0j} - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{nj} - \lambda}{n^2}, \quad j = 1, 2. \qquad (3)$$

Положим $\Delta_k(\lambda) := \varphi^{(k)}(\pi, \lambda)$, $k = 0, 1$. Тогда

$$\Delta_0(\lambda) = (\mathcal{P}_1(\lambda) - \mathcal{P}_2(\lambda))/(H_1 - H_2),\ \Delta_1(\lambda) = (\mathcal{P}_1(\lambda)H_2 - \mathcal{P}_2(\lambda)H_1)/(H_2 - H_1). \quad (4)$$

Пусть $\lambda = \rho^2$. Обозначим

$$A_1 = \int\limits_{2a}^{\pi} q(t)dt\int\limits_a^{t-a} q(s)ds,\ Q_1(t) = q(t)\int\limits_a^{t-a} q(s)ds,\ Q_2(t) = q(t)\int\limits_{t+a}^{\pi} q(s)ds,$$

$$Q_3(t) = \int\limits_{t+a}^{\pi} q(s)q(s-t)ds,\ Q_\mp(\xi) = Q_1(\xi/2 + \pi/2 + a) - Q_2(\xi/2 + \pi/2) \mp Q_3(\xi/2 + \pi/2).$$

Тогда

$$\Delta_0(\lambda) = \cos\rho\pi + \frac{h\sin\rho\pi}{\rho} + \frac{A\sin\rho(\pi - a)}{\rho} - \frac{hA\cos\rho(\pi - a)}{\rho^2} + \frac{d_0(\rho)}{2\rho}, \ (5)$$

$$\Delta_1(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + h\cos\rho\pi + A\cos\rho(\pi - a) + \frac{hA\sin\rho(\pi - a)}{\rho} + \frac{d_1(\rho)}{2}, \ (6)$$

$$d_0(\rho) = -\int\limits_a^\pi q(t)\sin\rho(2t - \pi - a)\,dt + \frac{h}{\rho}\int\limits_a^\pi q(t)\cos\rho(2t - \pi - a)\,dt - \frac{A_1\cos\rho(\pi - 2a)}{2\rho}$$

$$-\frac{hA_1\sin\rho(\pi - 2a)}{2\rho^2} + \frac{1}{4\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi + \frac{h}{4\rho^2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi, \quad (7)$$

$$d_1(\rho) = \int\limits_a^\pi q(t)\cos\rho(2t - \pi - a)\,dt + \frac{h}{\rho}\int\limits_a^\pi q(t)\sin\rho(2t - \pi - a)\,dt + \frac{A_1\sin\rho(\pi - 2a)}{2\rho}$$

$$-\frac{hA_1\cos\rho(\pi - 2a)}{2\rho^2} + \frac{1}{4\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi - \frac{h}{4\rho^2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi. \quad (8)$$

Пусть заданы спектры $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j=1,2$. Построим функции $\mathcal{P}_j(\lambda)$, $j=1,2$, используя (3). Затем, учитывая (2), вычисляем

$$H_1 - H_2 = \pi \lim_{n\to\infty} (\sqrt{\mu_{n1}} - \sqrt{\mu_{n2}})n. \tag{9}$$

Строим функцию $\Delta_0(\lambda)$ с помощью (4). Используя (5), находим h и A :

$$A = \lim_{n_k\to\infty} (-1)^{n_k+1}(\sin a n_k)^{-1}(\Delta_0(n_k^2) - (-1)^{n_k})n_k, \tag{10}$$

$$h = \lim_{n\to\infty} \Big((2n+1/2)\Delta_0((2n+1/2)^2) - A\sin(2n+1/2)(\pi - a)\Big), \tag{11}$$

где n_k выбраны так, что $|\sin a n_k| > \delta > 0$. Используя (2), вычисляем H_1 и H_2, а затем строим функцию $\Delta_1(\lambda)$ согласно (4). Теперь можно найти функции $d_k(\rho)$, $k=0,1$, с помощью (5)-(6). Для упрощения выкладок предположим, что $q(x)$ и $q'(x)$ абсолютно непрерывны на $[a,\pi]$. Интегрирование по частям в (7)-(8) дает

$$2\rho d_0(\rho) = B_0\cos\rho(\pi - a) + \int_a^\pi g(t)\cos\rho(2t - \pi - a)dt - A_1\cos\rho(\pi - 2a)$$

$$-\frac{hA_1\sin\rho(\pi-2a)}{\rho} + \frac{1}{2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\cos\rho\xi\, d\xi + \frac{h}{2\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi, \tag{12}$$

$$2\rho d_1(\rho) = B_1\sin\rho(\pi - a) + \int_a^\pi g(t)\sin\rho(2t - \pi - a)dt + A_1\sin\rho(\pi - 2a)$$

$$-\frac{hA_1\cos\rho(\pi-2a)}{\rho} + \frac{1}{2}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_+(\xi)\sin\rho\xi\, d\xi - \frac{h}{2\rho}\int\limits_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)} Q_-(\xi)\cos\rho\xi\, d\xi, \tag{13}$$

где $g(x) = -q'(x) + 2hq(x)$, $B_0 = q(\pi) - q(a)$, $B_1 = q(\pi) + q(a)$. Используя (12)-(13), находим B_0, B_1 и A_1:

$$A_1 = 2\lim_{m_k\to\infty} \Big(\rho_{m_k} d_1(\rho_{m_k})(\sin\alpha m_k\pi)^{-1}\Big), \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \lim_{n\to\infty} \Big(2\rho_{n1}d_1(\rho_{n1}) - A_1\sin\rho_{n1}(\pi - 2a)\Big),\ \rho_{n1} = (2n+1/2)\pi/(\pi - a), \\ B_0 &= \lim_{n\to\infty} \Big(2\rho_{n0}d_0(\rho_{n0}) + A_1\cos\rho_{n0}(\pi - 2a)\Big),\ \rho_{n0} = 2n\pi/(\pi - a), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\alpha = (\pi - 2a)/(\pi - a) < 1$, и m_k выбраны так, что $|\sin\alpha m_k\pi| > \delta > 0$.

Так как B_0 и B_1 известны, , то мы можем найти $q(a)$ и $q(\pi)$ по формулам $q(\pi)=(B_1+B_0)/2$ и $q(a)=(B_1-B_0)/2$. Рассмотрим теперь функции

$$\left.\begin{aligned} d_0^*(\rho)&=2\rho d_0(\rho)-B_0\cos\rho(\pi-a)+A_1\cos\rho(\pi-2a)+\frac{hA_1\sin\rho(\pi-2a)}{\rho},\\ d_1^*(\rho)&=2\rho d_1(\rho)-B_1\sin\rho(\pi-a)-A_1\sin\rho(\pi-2a)+\frac{hA_1\cos\rho(\pi-2a)}{\rho}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Из (12)–(13) получаем

$$d_0^*(\rho)=\int_a^\pi g(t)\cos\rho(2t-\pi-a)dt+\frac{1}{2}\int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_+(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi+\frac{h}{2\rho}\int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_-(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi,$$

$$d_1^*(\rho)=\int_a^\pi g(t)\sin\rho(2t-\pi-a)dt+\frac{1}{2}\int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_+(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi+\frac{h}{2\rho}\int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}Q_-(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi.$$

Интегрирование по частям дает

$$2\rho d_0^*(\rho)=b_0\sin\rho(\pi-a)+\omega_0\sin\rho(\pi-2a)-\int_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)}g_0(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi-\int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}G(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi, \tag{17}$$

$$2\rho d_1^*(\rho)=b_1\cos\rho(\pi-a)+\omega_1\cos\rho(\pi-2a)+\int_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)}g_0(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi+\int_{-(\pi-2a)}^{(\pi-2a)}G(\xi)\cos\rho\xi\,d\xi, \tag{18}$$

где $G(\xi)=Q_+'(\xi)-hQ_-(\xi)$, $g_0(\xi)=g_1((\xi+\pi+a)/2)/2$, $g_1(x)=g'(x)$, $b_0=g(a)+g(\pi)$, $b_1=g(a)-g(\pi)$, $\omega_0=Q_+(\pi-2a)+Q_+(-(\pi-2a))$, $\omega_1=Q_+(\pi-2a)-Q_+(-(\pi-2a))$.
Используя (17)–(18), находим b_0, b_1, ω_0 и ω_1:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0&=2\lim_{m_k\to\infty}\Big(\rho_{m_k}d_0^*(\rho_{m_k})(\sin\alpha m_k\pi)^{-1}\Big),\\ \omega_1&=2\lim_{r_k\to\infty}\Big(\rho_{r_k}d_1^*(\rho_{r_k})(\cos\alpha(2r_k+1/2)\pi)^{-1}\Big),\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} b_0&=\lim_{n\to\infty}\Big(2\rho_n^0d_0^*(\rho_n^0)-\omega_0\sin\rho_n^0(\pi-2a)\Big),\ \rho_n^0=(2n+1/2)\pi/(\pi-a),\\ b_1&=\lim_{n\to\infty}\Big(2\rho_n^1d_1^*(\rho_n^1)-\omega_1\cos\rho_n^1(\pi-2a)\Big),\ \rho_n^1=2n\pi/(\pi-a),\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где r_k выбраны так, что $|\cos\alpha(2r_k+1/2)\pi|>\delta>0$.

Так как b_0 и b_1 известны, то мы можем найти $g(a)$ и $g(\pi)$ по формулам $g(\pi)=(b_0-b_1)/2$ и $g(a)=(b_0+b_1)/2$, и следовательно, можем найти

$q'(a)$ и $q'(\pi)$ по формулам $q'(a) = -g(a) + 2hq(a)$, $q'(\pi) = -g(\pi) + 2hq(\pi)$. Построим теперь функции

$$\left.\begin{aligned} D_0(\rho) &= 2\rho d_0^*(\rho) - b_0 \sin\rho(\pi - a) - \omega_0 \sin\rho(\pi - 2a), \\ D_1(\rho) &= 2\rho d_1^*(\rho) - b_1 \cos\rho(\pi - a) - \omega_1 \cos\rho(\pi - 2a). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из (17)–(18) получаем

$$D_0(\rho) = -\int\limits_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} R(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi, \quad D_1(\rho) = \int\limits_{-(\pi-a)}^{(\pi-a)} R(\xi)\sin\rho\xi\,d\xi, \tag{22}$$

$$R(\xi) = g_0(\xi) + G(\xi), \tag{23}$$

и $G(\xi) \equiv 0$ при $\xi \notin (-(\pi-2a), \pi-2a)$. Используя (22), построим функцию $R(\xi)$. Так как $G(\xi) \equiv 0$ при $\xi \notin (-(\pi - 2a), \pi - 2a)$, то мы можем найти $g_0(\xi)$ при $\xi \notin (-(\pi - 2a), \pi - 2a)$ по формуле $g_0(\xi) = R(\xi)$. Это дает

$$q''(x) - 2hq'(x) = -2R_1(x), \quad x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi], \tag{24}$$

где $R_1(x) := R(2x - \pi - a)$. Так как $q(a), q'(a), q(\pi), q'(\pi)$ известны, то мы можем построить потенциал $q(x)$ при $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, решая линейное уравнение (24).

Далее, в силу (23) имеем

$$q''(x) - 2hq'(x) = -2R_1(x) + Q_1'(x + a/2) - Q_2'(x - a/2) + Q_3'(x - a/2)$$

$$-2hQ_1(x+a/2) + 2hQ_2(x-a/2) + 2hQ_3(x-a/2), \; x \in [3a/2, \pi - a/2]. \tag{25}$$

Так как $q(x)$ известна при $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, то соотношение (25) является линейным относительно $q(x)$. В частности, если $a \in [2\pi/5, \pi/2)$, то правая часть в (25) является известной функцией. Решая линейное уравнение (25), находим $q(x)$ при $x \in [3a/2, \pi - a/2]$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задание спектров $\{\mu_{nj}\}_{n\geq 0}$, $j = 1, 2$, однозначно определяет потенциал $q(x)$ и коэффициенты h, H_1, H_2. Решение обратной задачи может быть найдено по следующему алгоритму:*

1) строим $\mathcal{P}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, согласно (3);

2) находим $H_1 - H_2$ посредством (2);

3) вычисляем $\Delta_0(\lambda)$, используя (4);

4) Ннаходим A и h с помощью (5), например, по формулам (10)–(11);

5) вычисляем H_1 и H_2, используя (2);

6) строим функцию $\Delta_1(\lambda)$ посредством (4);

7) находим функции $d_j(\rho)$, $j = 0, 1$, с помощью (5) и (6);

8) вычисляем B_0, B_1 и A_1, используя (12)-(13), например, согласно (14)–(15);

9) находим $q(\pi) = (B_1 + B_0)/2$ и $q(a) = (B_1 - B_0)/2$;

10) строим функции $d_j^*(\rho)$, $j = 0, 1$, по формуле (16);

11) вычисляем ω_0, ω_1, b_0 и b_1, используя (17)–(18), например, посредством (19)–(20);

12) находим $g(a) = (b_0 + b_1)/2$ и $g(\pi) = (b_0 - b_1)/2$;

13) вычисляем $q'(a) = -g(a) + 2hq(a)$ и $q'(\pi) = -g(\pi) + 2hq(\pi)$;

14) строим функции $D_j(\rho)$, $j = 0, 1$, согласно (21);

15) находим $R(\xi)$, используя (22);

16) вычисляем потенциал $q(x)$ при $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, решая уравнение (24);

17) вычисляем потенциал $q(x)$ при $x \in [3a/2, \pi - a/2]$, используя (25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse problems for differential operators with a constant delay // Applied Mathematics Letters. 2012. Vol. 25, № 11. P. 1999–2004.

[2] *Vladičić V. Pikula M.* An inverse problem for Sturm–Liouville-type differential equation with a constant delay // Sarajevo J. Math. 2016. Vol. 12 (24), № 1. P. 83–88.

[3] *Buterin S. A., Yurko V. A.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large constant delay // Analysis and Mathematical Physics. 2019. Vol. 9, № 1. P. 17–27.

[4] *Bondarenko N. P., Yurko V. A.* An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Applied Mathematics Letters. 2019. Vol. 83. P. 140–144.

УДК 517.51

МАССИВНЫЕ МНОЖЕСТВА ХЕЛСОНА

А. В. Янина (Москва, Россия)
yanina.stv@yandex.ru

Теорема Вика утверждает, что на окружности существуют множества Хелсона Хаусдорфовой размерности 1. Мы показываем, что подобный результат имеет место и в многомерном случае.

Ключевые слова: абсолютно сходящиеся ряды Фурье, множества Хелсона, теорема Вика.

MASSIVE HELSON SETS

A. V. Yanina (Moscow, Russia)
yanina.stv@yandex.ru

Wik's theorem states the existence of Helson set of Hausdorff dimension 1 on the circle. We obtain a similar result in the multidimensional case.

Keywords: absolutely convergent Fourier series, Helson sets, Wik's theorem.

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — окружность, $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор (здесь $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел). Мы рассматриваем линейное пространство $A(\mathbb{T}^n)$ непрерывных на $\mathbb{T}^n$ функций, ряды Фурье которых

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{i(k,t)}$$

сходятся абсолютно. $A(\mathbb{T}^n)$ — банахова алгебра относительно естественной нормы

$$||f||_{A(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(k)|$$

и обычного умножения функций, часто её называют алгеброй Винера.

Компакт $E \subset \mathbb{T}^n$ называется множеством Хелсона, если всякая непрерывная на E функция может быть продолжена до функции из алгебры Винера.

Считается, что множества Хелсона должны быть чрезвычайно «редкими», так, например, хорошо известно, что они не могут содержать длинных арифметических прогрессий. Поэтому совершенно неожиданным оказался результат И. Вика [1], из которого следует, что на окружности существуют множества Хелсона Хаусдорфой размерности 1.

В связи с этим результатом В. В. Лебедевым был поставлен вопрос о существовании массивных множеств Хелсона на торе произвольной размерности. Отметим, что множество Хелсона на $\mathbb{T}^n$ при $n \geq 2$ не может содержать декартово произведение двух бесконечных множеств, поэтому существование массивных многомерных множеств Хелсона из теоремы Вика не следует.

Нам удалось показать, что справедлива следующая

Теорема. *На* $\mathbb{T}^n$ *существует множество Хелсона, размерность Минковского которого равна* n.

В том случае, если позволит время, мы обсудим также и некоторые смежные вопросы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Wik I.* Some examples of sets with linear independence // Arkiv for Matematik. 1964. Vol. 5, № 3–4. P. 207–214.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 20-й международной
Саратовской зимней школы

Оригинал-макет подготовили: *О. А. Королева, В. А. Халова*

Подписано в печать 17.01.2020. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 27,9 (30,0). Объем данных 3.37 Мб. Заказ 9.

Управление по издательской деятельности Саратовского университета
410012, Саратов, Астраханская, 83
https://www.sgu.ru/research/nauchnye-izdaniya-sgu/prodolzhayushchiesya-izdaniya