ISSN 1810-4134

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2005

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5
И88

И88 **Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам:** Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – Вып. 3. – 168 с.: ил.

Сборник содержит работы, посвященные исследованию различных задач теории *L*-функций, диофантового анализа, а также работы, связанные с применением методов гомологической алгебры и функционального анализа в смежных вопросах.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области алгебры, теории чисел и функционального анализа.

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1810-4134

УДК 517.51

С.С. ВОЛОСИВЕЦ, Н.Ю. АГАФОНОВА

О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, $2 \leqslant p_n \leqslant N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \qquad 0 \leqslant x_n < p_n. \tag{1}$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = k/m_n$ брать разложение с конечным числом ненулевых x_n. Если $y \in [0, 1)$ имеет вид

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n/m_n, \qquad 0 \leqslant y_n < p_n, \tag{1'}$$

то по определению

$$x \oplus y = z = \sum_{i=1}^{\infty} z_n/m_n,$$

где $z_n = x_n + y_n (mod\ p_n)$, $0 \leqslant z_n < p_n$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Если $k \in \mathbf{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \qquad 0 \leqslant k_i < p_i, \tag{2}$$

то по определению полагаем для $x \in [0,1)$

$$\chi_k(x) = exp\left(2\pi i\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right).$$

Известно, что $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная полная в $L[0,1)$ система [1, §1.5], и что $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$ для почти всех $y \in [0,1)$ при фиксированном $x \in [0,1)$ и $n \in \mathbf{Z}_+$.

Коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ задаются формулой

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt.$$

Частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x).$$

Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$$

называется n-м ядром Дирихле. Известно, что $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}$, где X_E — характеристическая функция E. Отсюда следует, что

$$S_{m_n}(f)(x) = m_n \int_{k/m_n}^{(k+1)/m_n} f(t)\,dt,$$

где $x \in I_k^{(n)} = [k/m_n, (k+1)/m_n)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $0 \leqslant k < m_n$.

Пространство $L_p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ рассматривается с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Если $f, g \in L[0,1)$, то по определению $f * g = \int_0^1 f(x \ominus t)\,g(t)\,dt$. Известно, что $(\widehat{f * g})(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$, так что если f является конечным полиномом по системе $\{\chi_k\}$, то $f * g$ тоже является им.

Пространство $MC[0,1)$ функций со свойством

$$\lim_{h\to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0,$$

где

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1)} |f(x)|,$$

является банаховым относительно нормы $\|f\|_\infty$. Пространство $B[0,1)$ с нормой $\|f\|_\infty$ есть множество измеримых и ограниченных на $[0,1)$ функций. Будем отождествлять его с $L_\infty[0,1)$.

Пусть $UC[0,1)$ — пространство функций, ряды Фурье которых по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ сходятся равномерно. Последовательность $\{\lambda_\nu(x)\}_{\nu=0}^\infty$ является мультипликатором класса (X,Y), если для любой функции $f\in X[0,1)$ ряд

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda_n \hat{f}(n)\chi_n(x)$$

является рядом Фурье функции класса $Y[0,1)$.

Основная цель данной работы — описание последовательностей $\{\lambda_\nu(x)\}_{\nu=0}^\infty$ классов (L_p, UC), (MC, UC), (UC, UC). В тригонометрическом случае аналогичные результаты были получены Гесом [2], Карамата [3] и Харшиладзе [4] соответственно. В данной статье используется метод работы [4].

Пусть E — банахово пространство функций на $[0,1)$, непрерывно вложенное в $L[0,1)$, такое что для любых $f\in E$ и $u\in[0,1)$

$$\|f(t\oplus u)\|_E = \|f(t)\|_E.$$

Введем E_N — множество $f\in E$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_E = 0,$$

и норму

$$\|f\|_{E_N} = \sup_n \|S_n(f)(x)\|_E.$$

Теорема 1. *Пространство E_N с нормой $\|f\|_{E_N}$ является банаховым пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть последовательность $\{f^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна в E_N. Тогда для любого фиксированного n и $i, j > i_0$ имеем

$$\|S_n(f^{(i)}) - S_n(f^{(j)})\|_E < \varepsilon,$$

то есть $\{S_n(f^{(i)})\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна в E. В силу полноты E для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется g_n, такое что

$$\lim_{j\to\infty} \|g_n - S_n(f^{(j)})\|_E = 0.$$

Так как E непрерывно вложено в $L[0,1)$, функционалы

$$F_m(f) = \hat{f}(m) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_m(t)}\, dt$$

непрерывны на E, в частности

$$F_m(g_n) = \hat{g}_n(m) = \lim_{j\to\infty} \hat{S}_n(f^{(j)})(m) = \lim_{j\to\infty} F_m(S_n(f^{(j)})).$$

Отсюда сразу получаем, что $\hat{g}_n(m) = 0$ при $m \geqslant n$. При $m < n$ имеем

$$|\hat{g}_n(m) - \hat{f}^{(j)}(m)| = \left|\int_0^1 (g_n(x) - S_n(f^{(j)})(x))\overline{\chi_m(x)}dx\right| \leqslant \|g_n - S_n(f^{(j)})\|_1.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $j \to \infty$ в силу непрерывности вложения $E \subset L[0,1)$. Но тогда получаем, что

$$\hat{g}_n(m) = \lim_{j\to\infty} \hat{f}^{(j)}(m)$$

не зависит от n при $n > m$. Обозначим это значение через a_m. Докажем сходимость ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \chi_m(t)$$

в E. В силу фундаментальности $\{f^{(i)}\}$ в E_N находим

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{\nu=0}^{m-1} (\hat{f}^{(i)}(\nu) - \hat{f}^{(j)}(\nu))\chi_\nu(t)\right\|_E < \varepsilon, \quad i, j > i_0.$$

В пределе при $j \to \infty$ и каждом $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{m-1} (\hat{f}^{(i)}(\nu) - a_\nu)\chi_\nu(t) \right\|_E \leqslant \varepsilon, \quad i > i_0. \tag{3}$$

Оценим

$$\left\| \sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu \chi_\nu(t) \right\|_E \leqslant \left\| \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_\nu - \hat{f}^{(i)}(\nu))\chi_\nu(t) \right\|_E +$$

$$+ \left\| \sum_{\nu=0}^{m-1} (\hat{f}^{(i)}(\nu) - a_\nu)\chi_\nu(t) \right\|_E + \left\| \sum_{\nu=m}^{n-1} \hat{f}^{(i)}(\nu)\chi_\nu(t) \right\|_E .$$

Здесь i — фиксировано, $i > i_0$. Тогда первые два слагаемых справа не превосходят ε, а так как $f^{(i)} \in E_N$, то $S_n(f^{(i)})$ фундаментальны в E. Поэтому последнее слагаемое меньше ε при $n > m > N(\varepsilon)$. Таким образом, частичные суммы ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \chi_\nu(t)$$

фундаментальны в E и сходятся к функции $f \in E$. Сходимость $f^{(i)}$ к f следует из неравенства (3). Теорема доказана.

Замечание 1. Согласно аналогу теоремы М. Рисса [5] для $E = L_p[0,1)$, $1 < p < \infty$ верно равенство $E_N = E$. В этом случае $\{\chi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в E.

В общем случае также верна

Теорема 2. *Система $\{\chi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом в E_N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Согласно критерию базисности [6, с.19] достаточно показать, что для $f \in E_N$ и любого $n \in N$ $\|S_n(f)\|_{E_N} \leqslant \|f\|_{E_N}$, что легко следует из определения нормы в E_N. Минимальность системы следует из ее ортонормированности, а то, что замыкание линейной оболочки $\{\chi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает с E_N, следует из определения пространства E_N. Теорема доказана.

Пусть $T_a f(t) = f(t+a)$. Тогда $T_a f$ равномерно непрерывен по a в большинстве находящих применение пространств E (исключением является L^∞). Сформулируем аналог этого свойства для пространств E_N.

Лемма 1. Если $f \in E_N$, то для любого $\varepsilon > 0$, найдется $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$, такое, что для всех $h \in [0, \delta)$ и $a \in [0, 1)$ $\|T_{a\oplus h} f - T_a f\|_{E_N} < \varepsilon$.

Доказательство

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем n_0, такое, что при $n \geqslant n_0$

$$\left\| \sum_{\nu=n_0}^{n} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(t) \right\|_E < \varepsilon/2.$$

Имеем

$$\|T_{a\oplus h} f(t) - T_a f(t)\|_{E_N} = \sup_n \left\| \sum_{\nu=0}^{n} \hat{f}(\nu)(\chi_\nu(t \oplus a \oplus h) - \chi_\nu(t \oplus a)) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{\nu=0}^{n_0-1} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(t)\chi_\nu(a)(\chi_\nu(h) - 1) \right\|_E + \sup_{n\geqslant n_0} \left\| \sum_{\nu=n_0}^{n} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(t \oplus a \oplus h) \right\|_E +$$

$$+ \sup_{n\geqslant n_0} \left\| \sum_{\nu=n_0}^{n} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(t \oplus a) \right\|_E \leqslant 2\varepsilon/2 + \sum_{\nu=0}^{n_0-1} |\hat{f}(\nu)|\, |\chi_\nu(h) - 1|\, \|\chi_\nu(t)\|_E.$$

Но при $n_0 \in [m_k, m_{k+1})$ и $h < 1/m_{k+1}$ все $\chi_\nu(h) = 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant n_0 - 1$. Таким образом, при $\delta = 1/m_{k+1}$ получаем утверждение леммы.

Пусть теперь

$$l_n(f) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \hat{f}(\nu) = \int_0^1 f(t) \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \chi_\nu(t)\, dt.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность* $\{\lambda_\nu\}$ *принадлежала* (E_N, UC), *необходимо и достаточно, чтобы нормы функционалов* $l_n(f)$ *в* E_N *были ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Необходимость. Пусть $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty} \in (E_N, UC)$, то есть для любой $f \in$ $\in E_N$ ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu \hat{f}(\nu)\chi_\nu(t)$$

сходится равномерно. В частности, при $t = 0$ получаем сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu \hat{f}(\nu).$$

Таким образом, последовательность $l_n(f)$ сходится (и ограничена) на каждом $f \in E_N$. По теореме Банаха—Штейнгауза получаем ограниченность норм l_n в E_N.

Достаточность. Пусть нормы l_n ограничены в E_N. Так как $l_n(\chi_\nu) =$ $= \lambda_\nu$ при $n \geqslant \nu + 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} l_n(f) =: l(f)$ существует на всех полиномах по системе $\{\chi_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$. Так как в E_N полиномы по системе $\{\chi_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ плотны, отсюда следует сходимость l_n на всех $f \in E_N$. Теперь отметим, что

$$l_n(T_a f) = l_n\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(t \oplus a)\right) =$$

$$= l_n\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(a)\chi_\nu(t)\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \hat{f}(\nu)\chi_\nu(a).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что $l_n(T_a f)$ сходится к $l(T_a f)$ равномерно по a.

Найдем $\delta = 1/m_{k+1}$ из леммы 1. Тогда любое a попадает в некоторый полуинтервал $[i/m_{k+1}, (i+1)/m_{k+1})$. Имеем

$$|l_n(T_a f) - l(T_a f)| \leqslant |l_n(T_a f) - l_n(T_{i/m_{k+1}} f)| +$$

$$+ |l_n(T_{i/m_{k+1}} f) - l(T_{i/m_{k+1}} f)| + |l(T_{i/m_{k+1}} f) - l(T_a) f|.$$

По условию $|l_n(f)| \leqslant M\|f\|_{E_N}$ и в пределе $|l(f)| \leqslant M\|f\|_{E_N}$. Поэтому первое и последнее слагаемые меньше $M\varepsilon$. Так как i/m_{k+1} фиксировано, при $n > n_1(\varepsilon)$, среднее слагаемое станет меньшим ε. Значит, при

$n > n_1(\varepsilon)$ $|l_n(T_a f) - l(T_a f)| \leqslant (2M+1)\varepsilon$, что завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *(Аналог теоремы Карамата—Геса)* Пусть $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Тогда $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ принадлежит (L_p, UC) тогда и только тогда, когда нормы

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \chi_\nu(t) \right\|_q$$

ограничены.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Как отмечено в замечании 1, $L_{pN} = L_p$. С другой стороны, норма функционала

$$h(f) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

равна $\|g\|_q$, откуда получаем утверждение следствия.

Следствие 2. Последовательность $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ принадлежит (UC, UC) тогда и только тогда, когда числа

$$A_n = \sup \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu a_\nu : t_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \chi_\nu(x), \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|S_k(t_n)\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

ограничены.

Достаточно заметить, что $l_n(f) = l_n(S_n(f))$, поэтому норму в UC можно вычислять по t_n, таким что

$$\|t_n\|_{UC} = \sup_k \|S_k(t_n)\|_\infty \leqslant 1.$$

Следствие 3. Последовательность $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ принадлежит (L_N, UC) тогда и только тогда, когда числа

$$B_n = \sup \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu a_\nu : t_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \chi_\nu(x), \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|S_k(t_n)\|_1 \leqslant 1 \right\}$$

ограничены.

Напомним, что функциями Радемахера называются функции

$$\varphi_\nu(t) = sign\,\sin(2^{\nu+1}\pi t),\ \nu \in \mathbf{Z}_+.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \chi_\nu(x)\varphi_\nu(t)$$

и обозначим его частичную сумму порядка n через $S_{n,t}(x)$.

Теорема 4. (Аналог теоремы Зигмунда—Пэли)

1. Если

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 < \infty,$$

то при почти всех $t \in [0,1)$ равномерно по $x \in [0,1)$ $S_{n,t}(x) = o(\ln^{1/2} n)$.
2. Если $f \in L[0,1)$ такова, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 (\ln(\nu+1))^{1+\varepsilon} < \infty$$

при некотором $\varepsilon > 0$, то при почти всех $t \in [0,1)$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\chi_\nu(x)\varphi_\nu(t)$$

сходятся равномерно по $x \in [0,1)$.

Доказательство

1. В [7, т. 1, с. 342] показано, что если

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 = \gamma^2 < \infty,$$

то для

$$g(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(t)$$

верно неравенство

$$\int_0^1 \exp(\mu |g(t)|^2) dt \leqslant K(\mu\gamma^2)$$

при достаточно малых μ или γ.

Если
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 = \gamma^2,$$
то при $c_\nu = a_\nu \chi_\nu(x)$
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu|^2 = \gamma^2.$$

Поэтому
$$\int_0^1 \exp(\mu |S_{n,t}(x)|^2) dt \leqslant K(\mu\gamma^2) =: K$$
равномерно по x. Меняя порядок интегрирования, находим, что
$$\int_0^1 \int_0^1 \exp(\mu |S_{n,t}(x)|^2) dx\, dt \leqslant K, \tag{4}$$
где K не зависит от n. Пусть $n \in [m_k, m_{k+1})$. Тогда число $M_n(t)$, равное наибольшему значению $|S_{n,t}(x)|$, есть значение $|S_{n,t}(x)|$ на некотором $I_i^{(k+1)}$. Имеем
$$\int_0^1 \exp(\mu |S_{n,t}(x)|^2) dx \geqslant \int\limits_{I_i^{(k+1)}} \exp(\mu |S_{n,t}(x)|^2) dx = m_{k+1}^{-1} \exp(\mu M_n^2(t)) \geqslant$$
$$\geqslant (Nn)^{-1} \exp(\mu M_n^2(t)).$$
Интегрируя последнее неравенство по $t \in [0, 1)$, получаем
$$\int_0^1 \exp(\mu M_n^2(t)) dt \leqslant C_1(K, N) n,$$
откуда
$$\int_0^1 \exp(\mu (M_n^2(t) - \alpha \ln\ n)) dt \leqslant C_1 n^{1-\mu\alpha}, \quad \alpha > 0.$$
При $\alpha\mu = 3$ правая часть есть общий член сходящегося ряда. По теореме Леви находим, что ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\mu M_n^2(t) - 3 \ln n)$$

сходится почти всюду. В частности, $(\mu M_n^2(t) - 3\ln n) \leqslant 0$ при почти всех t и достаточно больших n. Из этого неравенства следует $M_n = O(\ln^{1/2} n)$. Для доказательства п. 2 достаточно и этой оценки, однако заметим, что полагая $a_1 = ... = a_k = 0$, мы уменьшаем γ^2, тем самым позволяя увеличиваться μ. Таким образом, при $n > n(\mu)$ имеем $M_n^2 \leqslant 3\ln n/\mu$ и μ можно сделать сколь угодно большим. Утверждение 1 доказано.

2. Рассмотрим

$$p_{n,t}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(x)\varphi_\nu(t)(\ln(\nu+1))^{1/2+\epsilon/2}.$$

Согласно условию теоремы и доказанному в п. 1 $p_{\nu,t}(x) = o(\ln^{1/2}\nu)$ при почти всех $t \in [0,1)$ равномерно по x. Для фиксированного $t \in [0,1)$ с таким свойством имеем согласно преобразованию Абеля

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(x)\varphi_\nu(t) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-2} p_{\nu,t}(x)\left((\ln(\nu+1))^{-1/2-\varepsilon/2} - (\ln(\nu+2))^{-1/2-\varepsilon/2}\right) +$$

$$+p_{n-1,t}(x)(\ln n)^{-1/2-\varepsilon/2}. \tag{5}$$

Так как при $\alpha > 0$ и $k \geqslant 2$

$$(\ln\, k)^{-\alpha} - (\ln\,(k+1))^{-\alpha} \leqslant \alpha(\ln\, k)^{-\alpha-1}1/k$$

по теореме Лагранжа, то общий член суммы в правой части (5) имеет порядок $o((\nu+1)^{-1}(\ln(\nu+1))^{-1-\varepsilon/2})$, а

$$p_{n-1,t}(x)(\ln n)^{-1/2-\varepsilon/2} = o(\ln^{-\varepsilon/2} n).$$

По признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}(\nu)\chi_\nu(x)\varphi_\nu(t)$$

сходится равномерно на $[0,1)$ при данном t. Теорема доказана.

Следствие 4. Существует последовательность $\{\lambda_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, сходящаяся к нулю и не принадлежащая классу (UC, UC).

Д о к а з а т е л ь с т в о

По теореме 4 существует $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $\varepsilon_k = \pm 1$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \chi_k(x)/k$$

сходится равномерно. С другой стороны, для $\lambda_k = \varepsilon_k / \ln(k+1)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon_k \chi_k(x)/k = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(x)(k \ln(k+1))^{-1}.$$

Последний ряд, очевидно, расходится в $x = 0$ и не может сходиться равномерно.

Для формулировки и доказательства следующих теорем введем новые обозначения. Пусть

$$P_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(k) = 0,\ k \geqslant n\},$$

$$E_n(t)_p = inf\{\|t - t_n\| : t_n \in P_n\},\ \omega_n(t)_p = \sup_{0<h<1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p.$$

Для убывающей к нулю последовательности ε_n рассмотрим пространство

$$ME_p(\varepsilon) = \{f \in L_p[0,1) : E_n(f)_p \leqslant C\varepsilon_n\}.$$

Здесь C не зависит от n и при $p = \infty$ везде далее $L_\infty[0,1)$ заменяется на $MC[0,1)$. Далее, пусть

$$\sigma_n(f)(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} S_k(f)(x).$$

Тогда $\sigma_n(f) = f * K_n$, где

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} D_n(x)/n.$$

Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_p = 0$$

для $f \in L_p[0,1)$ и что $\|K_n\|_1$ ограничены [8]. Приводимая ниже теорема дает достаточные условия

$$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (ME_p(\varepsilon), UC).$$

Положим

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \chi_k(x).$$

Теорема 5. *Пусть* $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— убывающая к нулю последовательность, удовлетворяющая* Δ_2*-условию:* $\varepsilon_k \leqslant C\varepsilon_{Nk}$, $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда из соотношений*

$$\varepsilon_n \|\Lambda_n(t)\|_q = o(1),\ n \to \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \|\Lambda_\nu/n\|_q = O(1), \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(x-0)/n = 0, q = 1, \tag{8}$$

для всех x с конечным разложением (1), следует, что

$$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (ME_p(\varepsilon), UC).$$

Доказательство

Известно, что для $f \in L_p[0,1)$, $g \in L_q[0,1)$ $f * g \in MC[0,1)$ (при $p = \infty$, как указывалось выше, рассматривается $MC[0,1)$) и при этом

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{9}$$

В 2π-периодическом случае доказательство аналогичного факта см. [9, с. 70]. При $q = \infty$ согласно (7) получаем, что λ_k есть коэффициенты Фурье функции $\Lambda \in B[0,1)$ (см. [10] при $p_n = 2$), для $q = 1$ из (7) и (8) находим, что λ_k есть коэффициенты Фурье—Стилтьеса борелевской меры $d\mu$ на $[0,1)$ (в случае $p_n = 2$ см. [11]). При $1 < q < \infty$ аналогично [7, с. 234] доказывается, что $\Lambda(t) \in L_q[0,1)$. Во всех случаях получаем, что $f_1 = f * \Lambda$ или $f_1 = f * d\mu$ принадлежит $MC[0,1)$. Докажем сходимость $\|s_n(f_1) - f_1\|_\infty$ к нулю. Пусть $m_k \le n < m_{k+1}$. Тогда $S_n(f_1) = f * \Lambda_n = $ $= f * D_{m_k} * \Lambda_n + (f - f * D_{m_k}) * \Lambda_n$, то есть

$$S_n(f_1) = S_{m_k}(f_1) + (f - S_{m_k}(f)) * \Lambda_n. \tag{10}$$

Первое слагаемое правой части (10) стремится к f_1. Что касается второго слагаемого, по неравенству А.В. Ефимова [1, § 10.5] и условию имеем

$$\|f - S_{m_k}(f)\|_p \le 2E_{m_k}(f)_p \le 2\varepsilon_{m_k} \le C\varepsilon_{m_{k+1}} \le C\varepsilon_n$$

и, используя (6) и (9), видим,что обе части (10) равномерно сходятся к f_1. Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть $f \in L_p[0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, такова, что $\omega_n(f)_p \leqslant \omega_n$, где ω_n убывает,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$$

и $\omega_n \leqslant C\omega_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Если для $\varepsilon_n = \omega_k$ при $m_k \leqslant n < m_{k+1}$ верны соотношения (6) и (7) (и (8) при $p = 1$)

$$\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (E_p(\varepsilon), UC).$$

Доказательство

Согласно неравенству А.В. Ефимова [1]

$$E_{m_k}(f)_p \leqslant \omega_k(f)_p.$$

Поэтому для $n \in [m_k, m_{k+1})$ имеем

$$E_n(f)_p \leqslant E_{m_k}(f)_p \leqslant \omega_k = \varepsilon_n.$$

Значит, условия теоремы 5 выполнены и следствие доказано.

Пусть $\Phi(u)$ — выпуклая, непрерывная на $[0,\infty)$ функция, такая что

$$\Phi(0) = 0, \qquad \lim_{u\to\infty} \Phi(u)/u = +\infty$$

и

$$\lim_{u\to 0}\Phi(u)/u = 0.$$

Функция

$$\Psi(v) = \sup_{u\geqslant 0}(uv - \Phi(u))$$

называется дополнительной по Юнгу функцией для $\Phi(u)$ и обладает такими же свойствами. Введем пространство $L_\Phi[0,1)$, состоящее из измеримых функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_\Phi = \sup\left\{\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| : \int_0^1 \Psi(|g(x)|)\,dx \leqslant 1\right\}.$$

Пространства $L_p[0,1), 1 < p < \infty$ являются частным случаем пространств Орлича L_Φ при $\Phi(u) = u^p$. Подробнее об этих пространствах см. [12].

Лемма 2. Пусть $U_n(f) = f * \Lambda_n, \Lambda_n \in P_n$, рассматривается как оператор из $L[0,1)$ в E, где $E = L_\Phi[0,1), E = L[0,1)$ или $E = MC[0,1)$. Тогда при $E = L_p[0,1), 1 \leqslant p < \infty$ или $E = MC[0,1)$ имеет место равенство

$$\|U_n\| = \|\Lambda_n\|_E,$$

а при $E = L_\Phi$ в общем случае имеем

$$(1/2)\|\Lambda_n\|_E \leqslant \|U_n\| \leqslant \|\Lambda_n\|_E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть далее E^* — пространство, сопряженное к E для $E \neq MC[0,1)$, и $E^* = L[0,1)$ для $E = MC[0,1)$. Известно, что для

$$E = L_p[0,1) \quad 1 \leqslant p < \infty \qquad E^* = L_q[0,1)$$

и при этом

$$\sup_{\|g\|_q \leqslant 1}\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| = \|f\|_p.$$

Кроме того, аналогично классическому случаю, если $f \in MC[0,1)$, то

$$\sup_{\|g\|_1 \leqslant 1} \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| = \|f\|_\infty. \tag{11}$$

Для $E = L_\Phi[0,1)$ имеем $E^* = L_\Psi[0,1)$. При этом [12, с. 91] имеет место неравенство Гельдера

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leqslant \|f\|_\Phi \, \|g\|_\Psi. \tag{12}$$

Там же [12, с.89] отмечено, что если

$$\int_0^1 \Psi(|g(x)|)\, dx \leqslant 1,$$

то

$$\|g\|_\Psi \leqslant \int_0^1 \Psi(|g(x)|)\, dx + 1 \leqslant 2,$$

откуда получаем неравенство для $f \in L_\Phi[0,1)$

$$\|f\|_\Phi \leqslant \sup \left\{ \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| : \|g\|_\Psi \leqslant 2 \right\} =$$

$$= 2 \sup \left\{ \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| : \|g\|_\Psi \leqslant 1 \right\}.$$

В итоге

$$(1/2)\|f\|_\Phi \leqslant \sup_{\|g\|_\Psi \leqslant 1} \left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leqslant \|f\|_\Phi. \tag{13}$$

Пусть U_n — оператор из условия леммы. Тогда

$$\|U_n\| = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \|\Lambda_n * f\|_E =$$

$$= \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \sup_{\|g\|_{E^*} \leqslant 1} \left| \int_0^1 g(t) \int_0^1 f(x)\Lambda_n(t \ominus x)dx\, dt \right| =$$

$$= \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \sup_{\|g\|_{E^*} \leqslant 1} \left| \int_0^1 f(x) \int_0^1 g(t)\overline{\Lambda_n(x \ominus t)}dt\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \sup_{\|g\|_{E^*} \leqslant 1} \|f\|_1 \left\| \int_0^1 g(t)\overline{\Lambda_n(x \ominus t)}dt \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|g\|_{E^*}\leqslant 1} \|g\|_{E^*}\|\overline{\Lambda_n}\|_E = \|\Lambda_n\|_E.$$

Здесь использованы теорема Фубини и (9), или заменяющее (9), неравенство

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi, \tag{14}$$

легко следующее из неравенства Гельдера (12). С другой стороны, согласно (13),

$$\|\Lambda_n\|_\Phi \leqslant 2 \sup\left\{\int_0^1 g(t)\Lambda_n(x\ominus t)\,dt : x\in[0,1),\ \|g\|_\Psi \leqslant 1\right\}, \tag{15}$$

так как любую функцию $g(t)$, $\|g\|_\Psi \leqslant 1$ можно представить в виде

$$g_1(x\ominus t), \qquad \|g_1\|_\Psi \leqslant 1.$$

В силу (11) и неравенства Гельдера имеем

$$\|\Lambda_n\|_\Phi \leqslant 2 \sup_{\|g\|_\Psi\leqslant 1}\ \sup_{\|f\|_1\leqslant 1}\left|\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\Lambda_n(x\ominus t)dt\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{\|g\|_\Psi\leqslant 1}\ \sup_{\|f\|_1\leqslant 1} \|g\|_\Psi \left\|\int_0^1 f(x)\overline{\Lambda_n(t\ominus x)}dx\right\|_\Phi = 2\sup_{\|f\|_1\leqslant 1}\|f*\overline{\Lambda_n}\|_\Phi.$$

Последнее выражение есть $2\,\|U_n\|$, где $U_n : L[0,1) \to L_\Phi[0,1)$. Аналогично проводятся вычисления при $E = L_p[0,1), 1 \leqslant p < \infty$, и $E = MC[0,1)$, с той разницей, что в (15) будет равенство с константой 1. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть* $E = L_\Phi[0,1)$, $E = L[0,1)$ *или* $E = MC[0,1)$. *Тогда* $\{\lambda_k\} \in (L, E_N)$ *в том и только том случае, когда нормы* $\|\Lambda_n\|_E$ *ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{\lambda_k\} \in (L, E_N)$ и для $U_n(f) = f * \Lambda_n,\ f \in L[0,1),\ U(f) \in E$ мы имеем $\|U_n(f) - U(f)\|_E \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда нормы $\|U_n(f)\|_E$ ограничены и по теореме Банаха—Штейнгауза $\|U_n(f)\|_{L\to E}$ тоже ограничены. По лемме 2 $\|\Lambda_n\|_E$ ограничены.

Обратно, пусть теперь нормы $\|\Lambda_n\|_E$ ограничены. Поскольку для $f \in$ $\in P_m$ $U_n(f) = f$ при $n > m$, то в этом случае $U(f) \in E_N$. Плотность множества

$$\mathbf{P} = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$$

в $E = L_\Phi[0,1)$ доказывается с помощью формулы [8, с. 98]

$$S_{m_n}(f)(x) = \int_{k/m_n}^{(k+1)/m_n} f(t)\,dt, \quad x \in [k/m_n, (k+1)/m_n). \tag{16}$$

По теореме Банаха—Штейнгауза о продолжении с плотного множества [13, с. 272] $\|U_n(f) - U(f)\|_E \to 0$ для всех $f \in L[0,1)$, то есть $U(f) \in E_N$ при всех $f \in L[0,1)$. Теорема доказана.

Теперь несколько усилим теорему 6.

Теорема 7. *Пусть E — те же, что в теореме 6. Тогда $\{\lambda_k\} \in (L_N, E_N)$ в том и только том случае, когда нормы $\|\Lambda_n\|_E$ ограничены.*

Доказательство

Поскольку $L_n \subset L$, имеем $(L, E_N) \subset (L_N, E_N)$. Тем самым достаточность условия $\|\Lambda_n\|_E = O(1)$, $n \to \infty$ установлена. Пусть теперь $\{\lambda_k\} \in (L_N, E_N)$. Как показал Качмаж [14, с. 260], отсюда следует ограниченность оператора

$$Uf = (E) - \lim_{n\to\infty} U_n f.$$

Включение $g \in E_N$ влечет $(g - S_n(g)) \in E_N$ Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|S_m(U(f)) - S_n(U(f))\|_E \leqslant C \sup_{m\in\mathbb{N}} \|S_m(f - S_n(f))\|_1 =$$
$$= C \sup_{m\geqslant n} \|S_m(f) - S_n(f)\|_1.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $f \in L_N$. Значит, левая часть тоже стремится к нулю, что дает фундаментальность $S_m(Uf)$ и $Uf \in E_N$. Теорема доказана.

Результат теоремы 7 сводится к равенству $(L_N, E_N) = (L, E_N)$. Докажем близкие равенства для равномерной сходимости. Сначала сформулируем близкие к лемме 2 и теореме 6 результаты.

Лемма 3. Пусть E такие как в теореме 6, и $U_n(f) = f * \Lambda_n$ рассматривается как оператор из E в $MC[0,1)$. Тогда при $E = L_p[0,1),\ 1 \leqslant p < \infty$ или $E = MC[0,1)$ имеем равенство $\|U_n\| = \|\Lambda_n\|_{E^*}$, где $E^* = L[0,1)$ для $E = MC[0,1)$ и является сопряженным к E в остальных случаях. При $E = L_\Phi[0,1)$ имеем

$$(1/2)\|\Lambda_n\|_{E^*} \leqslant \|U_n\| \leqslant \|\Lambda_n\|_{E^*}.$$

Доказательство

Согласно (8) или (14)

$$\|U_n\| = \sup_{\|f\|_E \leqslant 1} \|\Lambda_n * f\|_\infty \leqslant \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \|\Lambda_n\|_{E^*}\, \|f\|_E = \|\Lambda_n\|_{E^*}.$$

Для $E = L_\Phi[0,1)$ имеем [15]

$$\|\Lambda_n\|_\Psi \leqslant 2\,\sup\left\{\int_0^1 g(t)\Lambda_n(x \ominus t)\,dt : x \in [0,1),\ \|g\|_\Phi \leqslant 1\right\} = 2\|U_n\|.$$

Аналогично разбираются случаи других E. Лемма доказана.

Следующая теорема позволяет распространить следствие 1 на предельные случаи $p = 1$ и $p = \infty$.

Теорема 8. *Пусть E — одно из пространств $L_\Phi[0,1)$, $L[0,1)$ или $MC[0,1)$. Включение*

$$\{\lambda_k\} \in (E, UC)$$

справедливо тогда и только тогда, когда нормы $\|\Lambda_n\|_{E^*}$ ограничены (E^* те же, что и в лемме 3).

Доказательство

Пусть $\{\lambda_k\} \in (E, UC)$ и $f \in E$. Тогда

$$\|f * \Lambda_n - U(f)\|_\infty \to 0$$

при $n \to \infty$, откуда

$$\|U_n(f)\|_\infty = \|f * \Lambda_n\|_\infty$$

ограничены и по теореме Банаха—Штейнгауза нормы $U_n : E \to MC[0,1)$ ограничены. По лемме 3 $\|\Lambda_n\|_{E^*} = O(1), n \to \infty$. Если же $\|\Lambda_n\|_{E^*}$ ограничены, то нормы U_n тоже ограничены по лемме 3, и для плотного в E множества

$$\mathbf{P} = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$$

$U_n(f)$ сходятся в $MC[0,1)$ к $U(f)$. По теореме Банаха—Штейнгауза [13, с. 272] это верно для всех $f \in E$. Теорема доказана.

Теорема 9. *Имеет место равенство*

$$(L_p, UC) = (L_p, MC) = (L_p, B), \qquad 1 < p < \infty.$$

Доказательство

По следствию 1 или теореме 8 $\{\lambda_k\} \in (L_p, UC)$ равносильно $\|\Lambda_n\|_q = O(1), n \to \infty$. Поскольку $UC[0,1) \subset MC[0,1) \subset B[0,1)$, то $(L_p, UC) \subset (L_p, MC) \subset (L_p, B)$, и достаточно показать, что из $\{\lambda_k\} \in (L_p, B)$ следует, что $\|\Lambda_n\|_q$ ограничены.

Пусть $f \in L_p[0,1)$, $U(f) \in B[0,1)$. Тогда $\|S_{m_n}(U(f))\|_\infty \leqslant \|U(f)\|_\infty$ (легко выводится из формулы (16)). Тогда $V_n(f) = S_{m_n}(U(f))$ ограничены по норме, как операторы из $L_p[0,1)$ в $B[0,1)$ (или, что то же самое, в $MC[0,1)$). Но $V_n(f) = \Lambda_{m_n} * f$ и по лемме 3 $\|\Lambda_{m_n}\|_q$ тоже ограничены. Ватари [5] доказал, что если $g \in L_q, 1 < q < \infty$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ $\|S_k(g)\|_q \leqslant C\|g\|_q$.

При $m_{n-1} \leqslant k < m_n$ получаем

$$\|\Lambda_n\|_q = \|S_k(\Lambda_{m_n})\|_q \leqslant C\,\|S_{m_n}(\Lambda_{m_n})\|_q = C\|\Lambda_{m_n}\|_q,$$

то есть $\|\Lambda_n\|_q$ ограничены. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Goes G.* Multiplikatoren fuer starke konvergenz von Fourier Reihen // Studia Math. 1958. V. 17. P. 299–311.

3. *Karamata J.* Suite de fonctionnelles lineares et facteurs de convergence des series de Fourier // Journal de Math. Pures et Appl. 1956. V. 35. P. 87–95.

4. *Харшиладзе Ф.И.* Множители равномерной сходимости // Труды Тбилисского матем.ин-та. 1960. Т. 27. С. 195–208.

5. *Watari C.* On generalized Walsh-Fourier series // Tohoku Math. J. 1958. V. 10. P. 211–241.

6. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.:Мир, 1965. Т.1.

8. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М.,Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Изд-во ЭЛМ, 1981.

9. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М.:Мир, 1985. Т.1.

10. *Morgenthaler G.W.* On Walsh-Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 84, № 2. P. 472–507.

11. *Fine N.* Fourier-Stieltjes series of Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 86, № 1. P. 246–257.

12. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

14. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

УДК 517.51

С.С. ВОЛОСИВЕЦ

О некоторых алгебрах p-абсолютно непрерывных функций[1]

В работе изучается возможность введения структуры банаховой алгебры на множествах функций ограниченной p-вариации, последовательность наилучших приближений или дробных модулей непрерывности которых принадлежит пространству l^q со степенным весом.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в обратных теоремах приближения тригонометрическими полиномами появляются выражения вида

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)_X$$

или

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma q-1} E_\nu^q(f)_X\right)^{1/q},$$

где X — некоторое банахово пространство 2π-периодических функций, $E_n(f)_X$ — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами в X [1, гл.6]. Как показано в работах Г. Суноути [2], З. Дитциана и В. Тотика [3], принадлежность функции f пространству Бесова $B^p_{\alpha,s}$, $p, s \geqslant 1$, $\alpha > 0$, 2π-периодических функций или его аналогу на отрезке равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\alpha s-1} E_n^s(f)_{L_p}, \tag{0}$$

где $E_n(f)_{L_p}$ — наилучшее приближение алгебраическими (в случае отрезка) или тригонометрическими многочленами (в периодическом случае).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Поэтому вызывает интерес изучение классов функций, для которых сходится ряд (0) или его аналоги и обобщения. Линейность таких классов очевидна. Менее тривиальным является вопрос о введении структуры банаховой алгебры на этих классах. Напомним, что линейное пространство функций X является банаховой алгеброй, если

1) X — банахово пространство относительно некоторой нормы $\|f\|_X$;

2) если $f, g \in X$, то $fg \in X$ и при этом

3) $\|fg\|_X \leqslant \|f\|_X \|g\|_X$.

Можно немного ослабить последнее условие, заменив его на

3′) $\|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X \|g\|_X$.

В этом случае можно ввести новое внутреннее произведение $f \odot g = fg/C$, для которого условие 3) будет выполняться. Далее мы будем использовать определение алгебры функций, вводя новое $f \odot g$. Результаты о банаховых алгебрах непрерывных функций, для которых ряд (0) или некоторые его обобщения сходятся при $p = \infty$, были получены Ф. Перес-Акостой в работах [4–6], из которых [6] содержит наиболее общие формулировки. В нашей работе обобщение результатов Ф. Перес-Акосты идет в двух направлениях. Во первых, вместо непрерывных функций рассматриваются p-абсолютно непрерывные функции, изучавшиеся Е. Лавом [7] и особенно А.П. Терехиным [8]. Во-вторых, мы в ряде типа (0) заменяем наилучшие приближения на модули непрерывности различных порядков. Дадим необходимые определения. В первую очередь мы рассматриваем случай отрезка, хотя все результаты переносятся и на периодический случай.

Пусть $1 < p < \infty$, $\xi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — разбиение $[a, b]$. Положим по определению (f принадлежит пространству $B[a, b]$ ограниченных на $[a, b]$ функций)

$$\kappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup_{|\xi|\leqslant\delta} \kappa_\xi^p(f),$$

где $\delta \in [0, b-a]$, $|\xi| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$ — диаметр разбиения ξ. Пространство

$$C_p[a,b] = \left\{ f \in B[a,b] : \lim_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0 \right\}$$

является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_p = max(\omega_{1-1/p}(f, b-a), \|f\|_\infty),$$

где

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Этот факт установлен в [7]. Пусть $\mathcal{P}_n$ — пространство полиномов степени не выше n и $E_n(f)_p = \inf\{\|f-t\|_p : t \in \mathcal{P}_n\}$. Для $\gamma, q > 0$, $1 < p < \infty$ рассмотрим выражения

$$S_{p,q,\gamma}(f) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma q - 1} E_k^q(f)_p \right)^{1/q}, \tag{1}$$

$$S_{p,q,\gamma}(f, \omega_{1-1/p}) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{\gamma q - 1} \omega_{1-1/p}^q(f, 1/k) \right)^{1/q}. \tag{2}$$

(в (2) считаем $b - a \geqslant 1$ без потери общности). Чтобы для (1) и (2) выполнялось неравенство треугольника, надо потребовать $q \geqslant 1$. Имеет место неравенство

$$E_k(f)_p \leqslant C\omega_{1-1/p}(f, 1/k). \tag{3}$$

В [8] доказан аналог (3) для периодических функций. Используя метод индуцированных функций (по $f \in C_p[a,b]$ строится функция $\varphi(t) = f(\cos t(b-a)/2 + (a+b)/2)$, наследующая свойства f, и ее тригонометрический полином наилучшего приближения является четным, то есть многочленом от $\cos t$), неравенство (3) для периодического случая переносится на непериодический. Основы метода индуцированных функций можно найти в [9, гл. 3, §1], а само неравенство (3) было получено

А.П. Терехиным в [10]. Таким образом, из конечности (2) следует конечность (1).

Теперь введем пространство $B_{p,q,\gamma}[a,b]$, $1 < p < \infty$, $\gamma > 0$, $q \geqslant 1$, состоящее из функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{p,q,\gamma}} = (\|f\|_p^q + S_{p,q,\gamma}^q(f))^{1/q}. \tag{4}$$

Его подпространство $B_{p,q,\gamma}^{x_0}$[a,b] состоит из функций f, для которых $f(x_0) = 0$, где $x_0 \in [a,b]$ — фиксированная точка. При выполнении этого условия p-вариация $V_p(f,[a,b]) := \omega_{1-1/p}(f, b-a) \geqslant \|f\|_\infty$. Аналогично вводятся пространства $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ и $\Omega_{p,q,\gamma}^{x_0}[a,b]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Omega_{p,q,\gamma}} = (\|f\|_p^q + S_{p,q,\gamma}^q(f, \omega_{1-1/p}))^{1/q}. \tag{4$'$}$$

Теперь напомним, что для $k \in \mathbf{N}$, $0 < \delta \leqslant (b-a)/k$, $f \in B[a,b]$ по определению

$$\omega_k(f,\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|\Delta_h^k f(x)\|_{B[a,b-kh]}, \quad \Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^{k-i} f(x+ih).$$

Хорошо известно свойство этих модулей непрерывности

$$\omega_k(f, n\delta) \leqslant n^k \omega_k(f,\delta), \quad 0 < n\delta \leqslant (b-a)/k. \tag{5}$$

Отметим, что для $f \in C_p[a,b]$ верен аналог (5)

$$\omega_{1-1/p}(f, n\delta) \leqslant n^{1-1/p} \omega_{1-1/p}(f,\delta). \tag{5$'$}$$

Это свойство было получено А.П. Терехиным в [10], доказательство его можно найти в [11].

Везде далее $1 < p < \infty$, $\gamma > 0$, $q \geqslant 1$. Одинаковые константы в разных местах обозначают разные числа.

Лемма 1. Пусть $f, g \in B[a,b]$ — такие, что $\|f\|_p$ и $\|g\|_p$ конечны, то есть f и g — функции ограниченной p-вариации. Тогда

$$\|fg\|_p \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_p + \|g\|_\infty \|f\|_p, \tag{6}$$

$$\omega_{1-1/p}(fg,\delta) \leqslant \|f\|_\infty \omega_{1-1/p}(g,\delta) + \|g\|_\infty \omega_{1-1/p}(f,\delta), \quad 0 < \delta \leqslant b-a. \tag{7}$$

Доказательство

Для разбиения $\xi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})|^p \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p |g(x_i)|^p \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})|^p |f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p} \leqslant \|g\|_\infty \kappa_\xi^p(f) + \|f\|_\infty \kappa_\xi^p(g).$$

Переходя к точной верхней грани по $|\xi| \leqslant \delta$, доказываем (7). Сочетая (7) с очевидным неравенством $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_p$, получаем (6). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $g, f \in B[a,b]$, $k \in \mathbf{N}$, $0 < \delta \leqslant (b-a)/k$. Тогда

$$\omega_k(fg,\delta) \leqslant \sum_{i=0}^k C_k^i \omega_i(f,\delta)\omega_{k-i}(g,\delta), \quad \omega_0(f,\delta) = \|f\|_\infty.$$

Лемма 2 доказывается в [12, с. 22] с помощью тождества

$$\Delta_h^k fg(x_0) = \sum_{i=0}^k C_k^i \Delta_h^i f(x_0) \Delta_h^{k-i} g(x_0 + ih).$$

Следующая лемма приведена в [13, с. 49] с наброском доказательства. Дадим его здесь для полноты изложения.

Лемма 3. Пусть $k, m \in \mathbf{N}$, $0 < \delta \leqslant (b-a)/(k+m)$, а $\omega_{k+m}(f,\delta)$ не является тождественным нулем. Тогда

$$\omega_k(f,\delta)\omega_m(f,\delta) \leqslant A(k,m,f)\omega_{k+m}(f,\delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Известно тождество (см. [1, с. 118])

$$\Delta_{2h}^k f(x) - 2^k \Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{k} C_k^\mu \Delta_h^{k+1} f(x+\nu h).$$

Из него легко получается , что при $0 < h \leqslant (b-a)/(k+1)$

$$\omega_k(f,h) \leqslant C_1(k)\omega_{k+1}(f,h) + 2^{-k}\omega_k(f,2h). \tag{8}$$

Применяя (8) несколько раз, получаем

$$\omega_k(f,h) \leqslant C_2(k) \sum_{\nu=0}^{p} \omega_{k+1}(f,2^\nu h)2^{-k\nu} + 2^{-k(p+1)}\omega_k(f,2^{p+1}h) \tag{9}$$

(считаем h настолько малым, что $(k+1)2^p h$ и $2^{p+1}kh$ меньше $b-a$). Пусть

$$p = \left[\log_2(\omega_{k+1}(f,h))^{-1/(k+1)}\right].$$

Из (5) следует, что $h^{k+1} = O(\omega_{k+1}(f,h))$ и $\lim\limits_{h\to 0} = 0$, за исключением случая $\omega_{k+1}(f,h) = O(h^{k+1})$. В последнем случае согласно неравенству Маршо (см.[1, с. 117])

$$\omega_k(f,h) = O(h^k) = O(\omega_{k+1}^{k/(k+1)}(f,h)).$$

В общем случае, используя (5), получаем из (9) при достаточно малых h

$$\omega_k(f,h) \leqslant C_2(k)\left(\sum_{\nu=0}^{p} 2^\nu\right)\omega_{k+1}(f,h) + 2^{-kp}\|f\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant C_3(k)2^p\omega_{k+1}(f,h) + 2^{-pk}\|f\|_\infty \leqslant (C_3(k) + \|f\|_\infty)\omega_{k+1}^{k/(k+1)}(f,h).$$

В итоге получаем неравенство

$$\omega_k(f,h) \leqslant C_4(k,f)\omega_{k+1}^{k/(k+1)}(f,h)$$

при достаточно малых h, откуда согласно (5) следует, что оно верно при всех $h \in (0,(b-a)/(k+1)]$. Теперь легко вывести неравенство

$$\omega_k^m(f,h) \leqslant C_5(k,m,f)\omega_m^k(f,h),$$

где $k \leqslant m$, а $0 < h \leqslant (b-a)/m$. Отсюда находим, что

$$\omega_k^{m+k}(f,h) \leqslant C_5(m+k,k,f)\omega_{m+k}^k(f,h)$$

и

$$\omega_m^{m+k}(f,h) \leqslant C_5(m+k,m,f)\omega_{m+k}^m(f,h)$$

при соответствующих h. Перемножая последние неравенства, доказываем лемму 3.

Лемма 4. a) Если f имеет нуль на $[a,b]$, то $\|f\|_p = E_0(f)_p$;

b) Если $r,s \in \mathbf{Z}_+,\ f,g \in C_p[a,b]$, то

$$E_{r+s}^q(fg)_p \leqslant C(q)\left[E_r^q(f)_pE_s^q(g)_p + \|f\|_p^qE_s^q(g)_p + \|g\|_p^qE_r^q(f)_p\right].$$

c) Если $f,g \in C_p[a,b]$, $r,s \in \mathbf{Z}_+$ и f,g имеют нули на $[a,b]$, то

$$E_{r+s}^q(fg)_p \leqslant C(q)\left[E_r^q(f)_pE_s^q(g)_p + E_0^q(f)_pE_s^q(g)_p + E_0^q(g)_pE_r^q(f)_p\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

a) Ясно, что

$$V_p(f-c,[a,b]) = V_p(f,[a,b]) \geqslant \|f\|_\infty,$$

где $c \in \mathbf{R}$. Если $f-c$ не обращается в нуль на $[a,b]$, то

$$\|f-c\|_\infty \geqslant \|f\|_\infty$$

и $\|f-c\|_p \geqslant \|f\|_p$. Если же $f-c$ обращается в нуль на $[a,b]$, то

$$V_p(f-c,[a,b]) \geqslant \|f-c\|_\infty$$

и

$$\|f-c\|_p = V_p(f-c,[a,b]) = \|f\|_p.$$

Таким образом, в любом случае $\|f-c\|_p \geqslant \|f\|_p$.

b) Пусть $t_r \in \mathcal{P}_r$ и $u_s \in \mathcal{P}_s$ — полиномы наилучшего приближения для f и g соответственно в $C_p[a,b]$. Тогда по лемме 1 и неравенству Гельдера

$$E^q_{r+s}(fg)_p \leqslant \|fg - t_r u_s\|_p^q \leqslant (\|f(g-u_s)\|_p + \|(f-t_r)u_s\|_p)^q \leqslant$$

$$\leqslant (\|f\|_\infty E_s(g)_p + \|f\|_p\|g-u_s\|_\infty + \|f-t_r\|_p\|u_s\|_\infty + \|f-t_r\|_\infty\|u_s\|_p)^q \leqslant$$

$$\leqslant (2\|f\|_p E_s(g)_p + E_r(f)_p(\|g-u_s\|_p + \|g\|_p))^q \leqslant$$

$$\leqslant 3^{q-1}(2^q\|f\|_p^q E_s^q(g)_p + E_r^q(f)_p E_s^q(g)_p + E_r^q(f)_p\|g\|_p^q).$$

Итак, a) и b) доказаны, откуда следует c). Лемма доказана.

Лемма 5. Если $t_n \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего приближения для $f \in B_{p,q,\gamma}[a,b]$ в $C_p[a,b]$, то он является таковым и в $B_{p,q,\gamma}[a,b]$.

Доказательство

Если $\|f-t_n\|_p = E_n(f)_p$, то $E_k(f-t_n)_p$ равно $E_k(f)_p$ при $k \leqslant n$ и совпадает с $E_k(f)_p$ при $k > n$. Пусть $t \in \mathcal{P}_n$ — произвольный многочлен. Тогда

$$\|f-t\|^q_{B_{p,q,\gamma}} = \|f-t\|_p^q + \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\gamma q-1}E_k(f-t)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}E_k^q(f)_p \geqslant$$

$$\geqslant \|f-t_n\|_p^q + \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\gamma q-1}E_n(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}E_k^q(f)_p = \|f-t_n\|^q_{B_{p,q,\gamma}}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Так как p-вариация функции не изменяется при сдвиге на константу, при использовании нормы $\|f\|_p$ многочлен наилучшего приближения не является единственным. Если $V_p(f,[a,b]) > \|f\|_\infty$, то все константы $c \in \mathbf{R}$ со свойством $\|f-c\|_\infty \leqslant V_p(f,[a,b])$ дают наилучшее приближение нулевого порядка. То же верно для $E_n(f)_p$, $n \in \mathbf{N}$.

Замечание 2. Все результаты данного раздела переносятся на периодический случай.

Замечание 3. Лемма 4 верна и в случае $0 < q < 1$. Для доказательства вместо неравенства Гельдера используется неравенство Йенсена.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы покажем, что пространства $B_{p,q,\gamma}[a,b]$, $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ и их подпространства $B^{x_0}_{p,q,\gamma}[a,b]$, $\Omega^{x_0}_{p,q,\gamma}[a,b]$ являются банаховыми алгебрами. Начнем с их полноты.

Теорема 1. *Пространство $B_{p,q,\gamma}[a,b]$ полно относительно своей нормы.*

Доказательство

Пусть последовательность f_n фундаментальна в $B_{p,q,\gamma}[a,b]$. В частности, она фундаментальна в $C_p[a,b]$ и в силу полноты последнего пространства она сходится к $f \in C_p[a,b]$ по норме этого пространства. Известно, что любое наилучшее приближение является полунормой, откуда

$$|E_k(f_n)_p - E_k(f)_p| \leqslant E_k(f_n - f)_p \leqslant \|f - f_n\|_p.$$

Поэтому при фиксированном N выражение

$$\sum_{k=0}^{N} (k+1)^{\gamma q-1} E_k(f_n)_p \tag{10}$$

при $n \to \infty$ стремится к

$$\sum_{k=0}^{N} (k+1)^{\gamma q-1} E_k(f)_p. \tag{11}$$

Поскольку последовательность f_n фундаментальна в $B_{p,q,\gamma}[a,b]$, выражение (10) ограничено константой K, не зависящей от n и N, и ей же ограничено (11) для всех N, то есть $f \in B_{p,q,\gamma}[a,b]$. Докажем теперь сходимость f_n к f в $B_{p,q,\gamma}[a,b]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем достаточно большое n_0, такое что

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} (k+1)^{\gamma q-1} E_k^q(f_n)_p < \varepsilon^q \tag{12}$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. В самом деле, из фундаментальности f_n в $B_{p,q,\gamma}[a,b]$ следует существование конечной $\varepsilon/2$-сети $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{j}$ для $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $B_{p,q,\gamma}[a,b]$. Для каждого n_i найдем m_i со свойством

$$\sum_{k=m_i+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}E_k^q(f_{n_i})_p < \varepsilon^q/2^q, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j.$$

Если $\|f_n - f_{n_i}\|_{B_{p,q,\gamma}} < \varepsilon/2$, то при $n_0 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant j} m_i$ имеем

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}E_k^q(f_n)_p \leqslant 2^{q-1}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}(E_k^q(f_n-f_{n_i})_p+E_k^q(f_{n_i})_p) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{q-1}\left(\|f_n - f_{n_i}\|_{B_{p,q,\gamma}}^q + \sum_{k=m_i+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}(E_k^q(f_{n_i})_p\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{q-1}(\varepsilon^q/2^q + \varepsilon^q/2^q) = \varepsilon^q.$$

Таким образом, (12) доказано и оно верно при замене f_n на f. Поэтому

$$\|f - f_n\|_{B_{p,q,\gamma}}^q \leqslant \|f - f_n\|_p^q + \sum_{k=0}^{n_0}(k+1)^{\gamma q-1}E_k^q(f - f_n)_p +$$

$$+2^{q-1}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}(E_k^q(f_n)_p + E_k^q(f)_p) \leqslant$$

$$\leqslant \|f - f_n\|_p^q + \sum_{k=0}^{n_0}(k+1)^{\gamma q-1}E_k^q(f - f_n)_p + 2^q\varepsilon^q.$$

Так как

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} E_k(f - f_n)_p \leqslant \lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_p = 0,$$

то при $n > N(\varepsilon)$ последнее выражение меньше $(2^q + 1)\varepsilon^q$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 4. Поскольку любой многочлен принадлежит любому из пространств $B_{p,q,\gamma}[a,b]$, все эти пространства нетривиальны.

Замечание 5. В доказательстве теоремы 1 использовались плотность алгебраических многочленов в $C_p[a,b]$, что следует из (3), и полнота $C_p[a,b]$.

Для любого пространства $X[a,b]$, удовлетворяющего этим требованиям, можно ввести пространство $B_{q,\gamma}(X)[a,b]$ с нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_X^q + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma q - 1} E_k^q(f)_X \right)^{1/q}$$

и установить его банаховость. При $0 < q < 1$ можно рассмотреть квазинорму

$$\|f\|_X^q + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma q - 1} E_k^q(f)_X$$

и доказать полноту относительно нее.

Теорема 2. *Пусть $f, g \in B_{p,q,\gamma}[a,b]$. Тогда $fg \in B_{p,q,\gamma}$ и при этом*

$$S_{p,q,\gamma}^q(fg) \leqslant C(q,\gamma)(\|f\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(g) + \|g\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(f)).$$

Если же f, g обращаются в нуль на $[a,b]$, то

$$S_{p,q,\gamma}^q(fg) \leqslant C(q,\gamma) S_{p,q,\gamma}^q(g) S_{p,q,\gamma}^q(f).$$

Доказательство

Согласно лемме 4 при $r = s = k$ и $r = k+1$, $s = k$ находим, что

$$(2k+1)^{\gamma q - 1} E_{2k}^q(fg)_p \leqslant$$

$$\leqslant C_1(q,\gamma)(k+1)^{\gamma q - 1} \left(E_k^q(f)_p E_k^q(g)_p + \|f\|_p^q E_k^q(g)_p + \|g\|_p^q E_k^q(f)_p \right). \quad (13)$$

$$(2k+2)^{\gamma q - 1} E_{2k+1}^q(fg)_p \leqslant$$

$$\leqslant C_1(q,\gamma)(k+1)^{\gamma q - 1} \left(E_{k+1}^q(f)_p E_k^q(g)_p + \|f\|_p^q E_k^q(g)_p + \|g\|_p^q E_{k+1}^q(f)_p \right). \quad (14)$$

Здесь $C_1(q,\gamma) = \max(2^{\gamma q - 1}, 1) C(q)$, где $C(q)$ — константа из леммы 4. Складывая неравенства (13) и (14) по k от 0 до ∞ и учитывая, что $E_{k+1}(f)_p \leqslant E_k(f)_p$, получаем

$$S_{p,q,\gamma}^q(fg) \leqslant 2C_1(q,\gamma) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma q - 1} E_k^q(f)_p E_k^q(g)_p + \|f\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(g) + \right.$$

$$+\|g\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(f)\Bigg) \leqslant 3C_1(q,\gamma)\left(\|f\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(g) + \|g\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(f)\right).$$

Для доказательства последнего неравенства теоремы вместо пункта b) леммы 4 надо воспользоваться пунктом c). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f, g \in B_{p,q,\gamma}[a,b]$. Тогда существует $K(q,\gamma)$, такое что

$$\|fg\|_{B_{p,q,\gamma}} \leqslant K(q,\gamma)\|f\|_{B_{p,q,\gamma}}\|g\|_{B_{p,q,\gamma}}.$$

Доказательство

Пусть $C(q,\gamma)$ — константа из теоремы 2. По теореме 2 и лемме 1

$$\|fg\|_{B_{p,q,\gamma}}^q = \|fg\|_p^q + S_{p,q,\gamma}^q(fg) \leqslant 2^q\|f\|_p^q\|g\|_p^q +$$

$$+C(q,\gamma)\left(\|g\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(f) + \|f\|_p^q S_{p,q,\gamma}^q(g)\right) \leqslant \max(2^q, C(q,\gamma))\|f\|_{B_{p,q,\gamma}}^q\|g\|_{B_{p,q,\gamma}}^q.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. Пространства $B_{p,q,\gamma}[a,b]$ и $B_{p,q,\gamma}^{x_0}[a,b]$ являются банаховыми алгебрами относительно своей нормы, обычных сложения и умножения на число и внутреннего произведения $f \odot g(x) = f(x)g(x)/K$, где K — константа из следствия 1.

Доказательство

Ясно, что из $f(x_0) = g(x_0) = 0$ следует $f \odot g(x_0) = 0$ и что из $f_n(x_0) = 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$ следует $f(x_0) = 0$. Поэтому все утверждения следствия вытекают из теорем 1, 2 и следствия 1.

Замечание 6. Результаты Переса-Акосты [6], соответствующие теоремам 1 и 2, следствиям 1 и 2, получаются, если в определении $B_{p,q,\gamma}[a,b]$ заменить $\|f\|_p$ на $\|f\|_\infty$.

Переходя к аналогам теорем 1 и 2 для пространств $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ и $\Omega_{p,q,\gamma}^{x_0}[a,b]$, отметим, что из $(5')$ как обычно следует, что либо $\omega_{1-1/p}(f,\delta) \equiv 0$, либо

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) \geqslant C\delta^{1-1/p}$$

(см.[1, с.116]). В последнем случае при $\gamma \geqslant 1 - 1/p$ ряд (2) расходится и $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ состоит только из констант. С другой стороны, согласно [8], для любой абсолютно непрерывной функции f, такой что $f' \in L_p[a,b]$, имеем

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) \leqslant \|f'\|_{L_p}\delta^{1-1/p},$$

так что при $\gamma < 1-1/p$ пространство $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ является нетривиальным.

ТЕОРЕМА 1$'$. *Пусть $\gamma < 1-1/p$. Тогда пространство $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ полно относительно нормы* (4$'$).

Доказательство

Снова из фундаментальности последовательности f_n в $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ следует сходимость f_n в $C_p[a,b]$ к функции $f \in C_p[a,b]$. В силу неравенства Минковского для последовательностей $\omega_{1-1/p}(f,\delta)$ полуаддитивен по функции. Отсюда легко следует, что

$$|\omega_{1-1/p}(f_n,1/k) - \omega_{1-1/p}(f,1/k)| \leqslant \omega_{1-1/p}(f_n - f,1/k) \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2$'$. *Пространства $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ и $\Omega^{x_0}_{p,q,\gamma}[a,b]$ являются банаховыми алгебрами относительно своей нормы, обычных сложения и умножения на число и внутреннего произведения $f \odot g(x) = f(x)g(x)/2$.*

Доказательство

Используя (7) и неравенство Гельдера, находим, что

$$\|fg\|_{\Omega_{p,q,\gamma}} \leqslant 2^q\|f\|_p^q\|g\|_p^q +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}2^{q-1}(\|f\|_\infty^q\omega_{1-1/p}^q(g,1/k) + \|g\|_\infty^q\omega_{1-1/p}^q(f,1/k)) \leqslant$$

$$\leqslant 2^q(\|f\|_p^q\|g\|_p^q + S^q_{p,q,\gamma}(g,\omega_{1-1/p})\|f\|_\infty^q + S^q_{p,q,\gamma}(f,\omega_{1-1/p})\|g\|_\infty^q) \leqslant$$

$$\leqslant 2^q\|f\|^q_{\Omega_{p,q,\gamma}}\|g\|^q_{\Omega_{p,q,\gamma}}.$$

Таким образом, $\Omega_{p,q,\gamma}[a,b]$ — банахова алгебра. Остальные утверждения доказываются аналогично следствию 2.

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть $X[a,b]$ — банахово пространство функций, такое что множество многочленов плотно в нем,

$$\omega(f,\delta)_X = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|f(x+h)-f(x)\|_{X[a,b-h]}$$

и $\Omega_{q,\gamma}(X)[a,b]$ есть множество функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_X^q + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^{\gamma q-1}\omega^q(f,1/k)_X\right)^{1/q}.$$

Анализ доказательства теорем $1'$ и $2'$ показывает, что для того чтобы $\Omega_{q,\gamma}(X)[a,b]$ было банаховой алгеброй, надо потребовать, чтобы X было алгеброй и чтобы выполнялось неравенство вида

$$\omega(fg,\delta)_X \leqslant M(\omega(f,\delta)_X\|g\|_X + \omega_(g,\delta)_X\|f\|_X). \tag{15}$$

Кроме того, нужно, чтобы $f\in X[a,b]$ принадлежала $X[a,b-h]$, $0<h<$ $<b-a$, и чтобы $\|f\|_{X[a,b-h]}\leqslant\|f\|_{X[a,b]}$. Ясно, что для $X[a,b]=C[a,b]$ эти свойства выполнены. Имеет место

Теорема 3. *Пространство $\Omega_{q,\gamma}(C)[a,b]$ является банаховой алгеброй относительно своей нормы, обычных сложения и умножения на число и внутреннего произведения $f\odot g(x)=f(x)g(x)/2$.*

Пространство $\Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$ можно задать как множество функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\|f\|_\infty^q + \sum_{i=1}^{\infty}(i+1)^{\gamma q-1}\omega_k^q(f,1/i)\right)^{1/q}. \tag{16}$$

Аналогично рассуждениям перед теоремой $1'$ легко видеть, что при $\gamma\geqslant k$ это пространство состоит из функций f, таких что $\omega_k(f,\delta)\equiv 0$, то есть из многочленов степени не выше $k-1$.

Лемма 6. Пусть $f \in C[a,b]$ не является многочленом степени не выше $k-1$, $\delta \in (0,(b-a)/k]$. Тогда $\omega_k(f^2,\delta) \leqslant C(k,f)\omega_k(f,\delta)$.

Доказательство

Пусть $A(k,m,f)$ — константа из леммы 3. Тогда имеем по леммам 2 и 3

$$\omega_k(f^2,\delta) \leqslant \sum_{i=0}^{k} C_k^i \omega_i(f,\delta)\omega_{k-i}(f,\delta) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i A(i,k-i,f) + 2\|f\|_\infty\right)\omega_k(f,\delta),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть* $f,g \in \Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$, $\gamma < k$. *Тогда*

$$fg \in \Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b].$$

Доказательство

Ясно, что $\Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$ — линейное пространство. Если f и g не являются многочленами степени не выше $k-1$ и принадлежат $\Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$, то f^2, g^2, $(f+g)^2$ также принадлежат ему по лемме 6. Согласно равенству $fg = ((f+g)^2 - f^2 - g^2)/2$ находим, что $fg \in \Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$. Если $f,g \in \mathcal{P}_{k-1}$, то, поскольку k-я производная многочлена непрерывна, имеем согласно [1, с.116] $\omega_k(fg,\delta) = O(\delta^k)$ и в силу условия ряд в (16) сходится. Наконец, если только $g \in \mathcal{P}_{k-1}$, то к f^2 и $(f+g)^2$ применяется лемма 6, а g^2 как многочлен принадлежит $\Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$. Теорема доказана.

Замечание 7. Методом доказательства теоремы 1 легко установить, что пространство $\Omega_{q,\gamma}(C,\omega_k)[a,b]$ — банахово. С другой стороны, в константу $A(k,m,f)$ леммы 3 норма входит нелинейно, поэтому оценки типа (15) не получается и вопрос о банаховой алгебре остается открытым. Все теоремы 1–4, $1'$, $2'$ распространяются на периодический случай.

Замечание 8. В работе Перес-Акоста [4] рассматривал классы, аналогичные $B_{p,q,\gamma}[a,b]$, при $p=\infty$ и с заменой $E_n(f)_\infty$, на приближение интерполяционными многочленами по данной сетке узлов. Вопрос о введении структуры банаховой алгебры в подобных классах интересен и для p-вариационной метрики. В периодическом случае следует отметить такую задачу. Пусть $B_{q,\gamma}(C,\sigma)$ — пространство 2π-периодических непрерывных функций, для которых конечна норма

$$\|f\| = \left(\|f\|_\infty^q + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{\gamma q-1} \|f-\sigma_k\|_\infty^q \right)^{1/q},$$

где σ_k — средние Фейера ряда Фурье функции f. При каких условиях на q и γ это пространство будет банаховой алгеброй? Ясно, что для аналогичных средних Валле—Пуссена ответ утвердительный при всех допустимых q и γ (по поводу определения этих средних см. [14, с.133 и 135]).

Библиографический список

1. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

2. *Sunouchi G.I.* Derivative of a trigonometric polynomial of best approximation // Absract spaces and approximation. Proc Conf. Oberwolfach, July 18–27, 1968. Birkhauser-Verlag, 1969. P. 233–241.

3. *Ditzian Z., Totik V.* Remarks on Besov spaces and best polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104. № 4. P. 1059–1066.

4. *Perez-Acosta F.* On certain Banach spaces in connection with interpolation theory //J. Comput. Appl. Math. 1997. V. 83. P. 55–69.

5. *Perez-Acosta F.* Best polynomial approximation in Besov spaces // J. Comput. Appl. Math. 1997. V.85. P.315-323.

6. *Perez-Acosta F.* Certain Banach algebras in connection with Besov spaces //J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 246. P. 493–502.

7. *Love E.R.* A generalization of absolute continuity // J. London Math. Soc. 1951. V. 26. № 1. P. 1–13.

8. *Терехин А.П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Известия вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

9. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.

10. *Терехин А.П.* Приближение функций ограниченной p-вариации: Дис.… канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1965.

11. *Volosivets S.S.* Convergence of series of Fourier coefficients of p-absolutely continuous functions // Analysis Math. 2000. V. 26. P. 63–80.

12. *Шевчук И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992.

13. *Тригуб Р.М.* Приближение функций с заданным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961. С.47–51.

14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т.1.

[12pt]article

[russian]babel amssymb amsmath amsthm amscd [mathscr]eucal graphics graphicx

ТЕОРЕМА Предложение Гипотеза

Лемма Определение Замечание Замечание

Пример Следствие Следствие

УДК 511.3+517.5

А.В. ЕРМОЛЕНКО, В.В. КРИВОБОК, Е.В. СЕЦИНСКАЯ

К проблеме обобщенных характеров для числовых полей

Известная гипотеза Н.Г. Чудакова [1] утверждает, что функция натурального аргумента $h(n)$, удовлетворяющая условиям:

1. $h(n)$ — конечнозначная;

2. $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p;

3. $S(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n) = O(1)$,

является периодической функцией, то есть характером Дирихле.

В данной статье аналогичная гипотеза высказывается для определенного класса характеров числовых полей.

Определение 1. Пусть $h(\mathfrak{a})$ — мультипликативная функция, определенная на группе идеалов и удовлетворяет следующим условиям:

1. $h(\mathfrak{a})$ — конечнозначная;

2. $h(\wp) \neq 0$ почти для всех простых идеалов $\wp$;

3. $S(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leqslant x} h(\mathfrak{a}) = O(1)$.

Такие функции будем называть обобщенными числовыми характерами.

Замечание 1. Даже в случае характеров Дирихле не известно, имеет ли место условие 3. В настоящее время доказано [2,3], что $S(x, \chi) = O(x^{1-\frac{1}{\nu}})$, где χ — характер Дирихле.

Основным результатом работы является доказательство того факта, что к классу обобщенных числовых характеров можно отнести норменные характеры Дирихле.

Определение 2. Характер Дирихле χ поля k называется норменным, если существует такой числовой характер χ_1 такой, что

$$\chi(\wp) = \chi_1(\wp).$$

Известно [4], что для норменного характера имеет место разложение L–функции в произведение классических L–функций, то есть

$$L(s, \chi)$$

Теорема 1. *Пусть степенной ряд $g(z)$ отвечает L-функции числового поля k и пусть для него существует полином $P_n(z)$, корни которого лежат на единичной окружности, такой что*

$$|g(z) \cdot P_n(z)| < c, \qquad |z| < 1. \tag{1}$$

Тогда почти во всех точках $z = e^{2\pi i\varphi}$ единичной окружности, аргументы которых φ являются рациональными числами, существуют конечные радиальные производные вида

$$\lim_{r \to 1-0} g^{(m)}(re^{2\pi i\varphi}), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{2}$$

Замечание 2. Е.В. Сецинской [1] было показано, что для степенных рядов, отвечающих произведениям классических L-функций Дирихле, выполняются условия теоремы 1.

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд утверждений. Имеет место

Лемма 1. Для простого числа p, натурального α и числового поля k, не содержащего корни p-й степени из единицы, существует циклическое круговое расширение L_1 поля k, группа Галуа которого имеет порядок p^α.

Доказательство

Известно [2], что группа Галуа расширения $L = k(\sqrt[p^{\alpha+1}]{1})$ изоморфна прямой сумме циклической группы порядка $p-1$ и циклической группы порядка p^α. Таким образом, существует подполе L_1, которое является расширением Галуа поля k степени p^α.

Лемма 2. Любой числовой характер Дирихле χ_2 модуля p^α имеет вид

$$\chi_2(n) = e^{\frac{2\pi i k}{p^\alpha} ind\ n}, \quad \text{где} \quad (n, p) = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство леммы 2 приведено в [3].

Лемма 3. Любой характер Дирихле χ_1 числового поля k, согласованный с группой Галуа расширения L_1 поля k, определенного в лемме 1, имеет вид

$$\chi_1(\mathfrak{a}) = e^{\frac{2\pi ik}{p^\alpha} ind\ N(\mathfrak{a})}, \quad \text{где} \quad (N(\mathfrak{a}), p) = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Покажем, что любой характер χ_1, согласованный с группой Галуа расширения L_1 поля k, является норменным характером, т.е. существует числовой характер χ_2, согласованный с группой Галуа циклического кругового расширения поля (Q) степени p^α такой, что

$$\chi_1(\mathfrak{a}) = \chi_2(N(\mathfrak{a})), \quad \text{где} \quad (N(\mathfrak{a}), p) = 1. \tag{3}$$

Действительно, в [4], гл. VII, § 10.4 показано, что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} J_k & \xrightarrow{\theta'} & G_1 \\ {\scriptstyle N_{k/\mathbb{Q}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle i}\big\downarrow \\ J_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\theta} & G_2 \end{array},$$

где $G_1 = Gal(L_1/k),\ G_2 = Gal(L_2/\mathbb{Q}),\ L_2 \subset \mathbb{Q}(\sqrt[p^{\alpha+1}]{1}),\ [L_2 : \mathbb{Q}] = p^\alpha$, i — вложение, θ — отображение взаимности, является точной диаграммой. Отсюда сразу следует формула (3). В силу (3) утверждение леммы 3 является следствием леммы 2.

Лемма 4. Пусть ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

продолжим мероморфным образом на комплексную плоскость с единственным полюсом первого порядка в точке $s = 1$. Тогда соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{N=1}^{\infty} a_n z^n$$

вдоль действительного направления в точке $z = 1$ ведет себя следующим образом:

$$g(x) = \frac{A}{1-x} + g_1(x),$$

где $g_1(x)$ имеет в точке $x = 1$ односторонние производные любого порядка.

Обратно, если степенной ряд в точке $z = 1$ ведет себя таким образом, то соответствующий ряд Дирихле определяет мероморфную функцию с единственным простым полюсом в точке $s = 1$.

Доказательство

Доказательство леммы 4 приведено в работах [5], [6].

Лемма 5. Пусть абелево расширение Галуа L поля k не содержит корней p-й степени из единицы, а L_1 — циклическое круговое расширение поля k, определенное в лемме 1. Тогда расширение $k \subset L \circ L_1$, где $L \circ L_1$ — композит полей, является расширением Галуа, группа Галуа которого изоморфна прямому произведению групп $G \times G_1$, где $G = Gal(L/k)$, $G_1 = Gal(L_1/k)$.

Доказательство

При условиях леммы 5 расширения L и L_1 являются линейно разделенными расширениями, и утверждение леммы 5 следует из общего факта, имеющего место для линейно разделенных расширений [2].

Лемма 6. Пусть χ — характер Дирихле числового поля k модуля m, согласованный с группой Галуа абелева расширения $k \subset L$, где поле L не содержит корней степени p из единицы. Тогда ряд Дирихле вида

$$\varphi_{C_i,l}(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in C_i \\ N(\mathfrak{a}) \equiv l (mod\ p^{\alpha})}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{4}$$

где C_i — класс смежности относительной группы классов идеалов A_m/H_m, продолжим мероморфным образом на комплексную плоскость с единственным простым полюсом в точке $s = 1$.

Доказательство

Рассмотрим сначала случай, когда в формуле (4) $(l,p)=1$.

Пусть χ_2 — характер Дирихле поля k модуля m_1, соответствующий абелевому расширению $k \subset L \circ L_1$, где $m_1 = m \cdot (p^\alpha)$ и где L_1 — циклическое круговое расширение поля k степени p^α. В силу леммы 5 и леммы 3 характер χ_2 имеет вид

$$\chi_2(\mathfrak{a}) = \chi_j(\mathfrak{a}) \cdot e^{\frac{2\pi ik}{p^\alpha} ind\ N(\mathfrak{a})}, \quad (\mathfrak{a}, m_1) = 1, \tag{5}$$

где χ_j — характер Дирихле поля k, согласованный с группой Галуа расширения $k \subset L$.

Для L-функции Дирихле с характером вида (5) получаем следующее представление:

$$L_{j,k}(s) = \sum_{C_j} \sum_{\substack{1 \leqslant l' \leqslant p^\alpha \\ (l',p)=1}} \chi_j(C_j) e^{\frac{2\pi ikl'}{p^\alpha}} \varphi_{C_j,l}(s). \tag{6}$$

Это равенство получается на основании того факта, что когда $N(\mathfrak{a})$ по модулю p^α пробегает приведенную систему вычетов, то и $ind(N(\mathfrak{a}))$ пробегает приведенную систему вычетов по $mod\ p^\alpha$. В представлении (6) число l таково, что

$$ind\ N(\mathfrak{a}) \equiv l'(mod\ p^\alpha), \quad \text{а} \quad N(\mathfrak{a}) \equiv l(mod\ p^\alpha).$$

Представление (6) определяет систему линейных уравнений относительно функций $\varphi_{C_j,l}(s)$, определитель которой отличен от нуля. Действительно, характеры Дирихле, согласованные с группой Галуа расширения $k \subset L \circ L_1$, образуют линейно независимую систему функций.

Следовательно, имеют место равенства вида

$$\varphi_{C_j,l}(s) = \sum_{j,k} \alpha_{i,k} L_{j,k}(s), \tag{7}$$

что и доказывает утверждение леммы 6 в случае $(l,p)=1$.

В случае, когда p делит l, возникает аналогичная ситуация, которая связана с числовыми характерами по модулю p^{α_1}, где $\alpha_1 < \alpha$, то есть все предыдущие леммы, в том числе и лемма 6, рассматриваются для случая p^{α_1}, где α_1 — некоторое натуральное, меньшее чем α. Этот факт завершает доказательство леммы 6.

Доказательство теоремы 1

Доказательство утверждения теоремы 1 в случае, когда $\varphi = \frac{q}{p^\alpha}$, $q < < p^\alpha$, $(q,p) = 1$ и когда характер Дирихле χ поля k согласован с группой Галуа абелевого расширения $k \subset L$, где L не содержит корни p-й степени из единицы, следует из леммы 6. Действительно, в силу (6) имеет место равенство

$$\begin{aligned} g_\varphi(z) &= \sum_{C_j} \sum_{\substack{1 \leqslant l' \leqslant p^\alpha \\ (l',p)=1}} \chi(C_j) e^{\frac{2\pi i q l'}{p^\alpha}} \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in C_j \\ N(\mathfrak{a}) \equiv l (mod\ p^\alpha)}} z^{N(\mathfrak{a})} = \\ &= \sum_{C_j} \sum_{\substack{1 \leqslant l' \leqslant p^\alpha \\ (l',p)=1}} \chi(C_j) e^{\frac{2\pi i q l'}{p^\alpha}} g_{j,l}(z), \end{aligned} \tag{8}$$

где $g_{j,l}(z)$ — степенной ряд, отвечающий ряду Дирихле вида (4). Из представления (8), леммы 6 и леммы 4 получаем, что степенной ряд $g(z)$ в точке $z = z_0$, где $z_0 = e^{i\varphi}$, ведет себя в радиальном направлении следующим образом:

$$g(z) = \frac{B}{z - z_0} + g_1(z), \tag{9}$$

где $g_1(z)$ имеет в точке z_0 радиальные производные любого порядка.

Тогда в силу условия (1) теоремы 1 и представления (9) получаем: либо точка z_0 совпадает с одним из нулей многочлена $P_k(z)$, либо константа B в представлении (9) равна нулю.

Рассмотрим теперь случай

$$\varphi = \frac{q_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{q_2}{p_2^{\alpha_2}} = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{10}$$

В этом случае имеет место равенство

$$g_{\varphi}(z)=\sum_{C_j}\sum_{l=0}^{p_1^{\alpha_1-1}}\sum_{k=0}^{p_2^{\alpha_2-1}}\chi(C_j)e^{2\pi i\left(\frac{q_1 l}{p_1^{\alpha_1}}+\frac{q_2 k}{p_2^{\alpha_2}}\right)}g_{j,l,k}(z),$$

где $g_{j,l,k}(z)$ — степенной ряд, отвечающий ряду Дирихле вида

$$g_{i,l,k}(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\in C_j\\ N(\mathfrak{a})\equiv l(mod\ p_1^{\alpha_1})\\ N(\mathfrak{a})\equiv k(mod\ p_2^{\alpha_2})}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}. \tag{11}$$

Для доказательства того что для ряда Дирихле вида (11) имеет место утверждение леммы 6, необходимо рассмотреть в качестве абелевого расширения композит полей $k\subset(L\circ L_1)\circ L_2$, где L_2 — циклическое круговое расширение поля k степени $p_2^{\alpha_2}$, и провести доказательство леммы 6 в случае характера χ_2 вида

$$\chi_2(\mathfrak{a})=\left(\chi_j(\mathfrak{a})e^{\frac{2\pi i q_1 N(\mathfrak{a})}{p_1^{\alpha_1}}}\right)\cdot e^{\frac{2\pi i q_2 N(\mathfrak{a})}{p_2^{\alpha_2}}}.$$

Ясно, что все рассуждения, приведенные в лемме 6, будут иметь место и в этом случае. Таким образом, утверждение теоремы 1 имеет место и в случае представления (10). Ясно, что теорема 1 будет иметь место и в общем случае

$$\varphi=\frac{q_1}{p_1^{\alpha_1}}+\frac{q_2}{p_2^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{q_s}{p_s^{\alpha_s}}.$$

Это и завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 3. Отметим, что результат, аналогичный результату теоремы 1, имеет место и для степенных рядов $g(z)$, отвечающих L-функциям Гекке. При этом схема доказательства этого факта незначительно отличается от предложенной здесь схемы доказательства теоремы 1.

Библиографический список

1. *Сецинская Е.В.* Граничное поведение степенных рядов, отвечающих

L-функциям числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.

2. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

3. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.

4. *Хейльброн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.

5. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания одного класса рядов Дирихле, определяющих целые функции // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988.

6. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Дифференциальные уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991.

УДК 511.3+517.5

В.Н. КУЗНЕЦОВ, Е.В. СЕЦИНСКАЯ, В.В. КРИВОБОК

О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad s=\sigma+it,\qquad \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1. \tag{1}$$

В данной работе дается описание рядов Дирихле (1), определяющих целые функции первого порядка, выраженное в терминах поведения соответствующего степенного ряда:

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n \tag{2}$$

в граничной точке $z = 1$. А именно доказывается следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть дан ряд Дирихле вида (1). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$f(s)$ определяет целую функцию с условием роста модуля*

$$|f(s)| \leqslant c \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|},$$

где A — положительная константа;

2. *соответствующий степенной ряд $g(z)$ определяет функцию, регулярную в точке $z = 1$.*

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. Если ряд Дирихле вида (1) при условии $|f(s)| \leqslant c \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|}$ определяет мероморфную функцию с единственно возможным простым полюсом в точке $s = 1$, то при $0 < \rho < e^{-(A+1)}$ ряд

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k + s},$$

где $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) \cdot \Gamma(s))$, абсолютно сходится при всех значениях $s \neq 1, 0, -1, \ldots, -n, \ldots$

Доказательство

Известно, что

$$Res_{s=-k}\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Тогда утверждение леммы сразу следует из оценки $|f(s)| \leqslant c \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|}$.

Лемма 2. Если ряд Дирихле вида (1) при условии $\sigma < -\sigma_0$ определяет мероморфную функцию с единственно возможным простым полюсом в точке $s = 1$, то для любого $0 < \rho < e^{-(A+1)}$ для функции $f(s) \cdot \Gamma(s)$ имеет место разложение

$$f(s) \cdot \Gamma(s) = \Phi_\rho(s) + \rho^s \cdot \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s},$$

где $\Phi_\rho(s)$ — целая функция и $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) \cdot \Gamma(s))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Заметим, что ряд

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s}$$

сходится в силу леммы 1. Рассмотрим интегральную формулу для $\Gamma(s)$

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

сделаем замену переменных $t = nx$, получим

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-nx} n^s x^{s-1} dx,$$

отсюда

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

Умножим обе части равенства на коэффициент a_n и просуммируем его по $n = \overline{1, \infty}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^\infty a_n e^{-nx} x^{s-1} dx = \int\limits_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

Пусть $g(z)$ — степенной ряд, соответствующий ряду Дирихле $f(s)$, то есть

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Тогда последнее равенство запишется следующим образом:

$$f(s)\cdot\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx. \tag{3}$$

Разобьем интеграл (3) на два интеграла

$$f(s)\cdot\Gamma(s)=\int\limits_0^\rho g(e^{-x})x^{s-1}dx+\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx=I_1+I_2,$$

где $0<\rho<e^{-(A+1)}$, $A>0$.

Интеграл I_2 равномерно сходится в любой полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$, так как можарируется сходящимся интегралом, не зависящим от s. Действительно,

$$|I_2|=\left|\int\limits_\rho^\infty\sum_{n=1}^\infty a_ne^{-nx}x^{s-1}dx\right|\leqslant\int\limits_\rho^\infty\left|\sum_{n=1}^\infty a_ne^{-nx}\right|\left|x^{s-1}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_\rho^\infty\left|\sum_{n=1}^\infty a_ne^{-nx}\right|x^{\sigma-1}dx.$$

Далее, пусть $|a_k|=\max\limits_{i=1,2,\ldots}|a_i|$, тогда

$$\left|\sum_{n=1}^\infty a_ne^{-nx}\right|=|a_1e^{-x}+a_2e^{-2x}+\ldots+a_ke^{-kx}+\ldots|\leqslant$$

$$\leqslant|a_1|e^{-x}+|a_2|e^{-2x}+\ldots+|a_k|e^{-kx}+\ldots\leqslant|a_k|\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}=$$

$$=M_1\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}=M_1\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$|I_2|\leqslant M_1\int\limits_\rho^\infty\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)x^{\sigma-1}dx.$$

Так как под интегралом $x \geqslant \rho$, то

$$\frac{1}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-\rho}}.$$

В итоге получается, что

$$|I_2| \leqslant \frac{M_1}{1-e^{-\rho}} \int\limits_{\rho}^{\infty} e^{-x} x^{\sigma-1} dx = M_2 \rho^{\sigma-1} \int\limits_{\rho}^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \rho^{\sigma_1-1} \int\limits_{\rho}^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\sigma_2-1} dx < c(\sigma_2, \sigma_1).$$

Тогда, по теореме Вейерштрасса, о том, что равномерный предел аналитических функций в любой ограниченной области определяет в пределе аналитическую функцию, интеграл I_2 определяет целую функцию. Обозначим ее через

$$\Phi_\rho(s) = \int\limits_{\rho}^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}.$$

Рассмотрим теперь интеграл $I_1 = \int\limits_0^\rho g(e^{-x}) x^{s-1}$. Докажем, что при $s \neq 1, 0, -1, \ldots, -n, \ldots$ имеет место разложение

$$\frac{1}{\rho^s} \int\limits_0^\rho g(e^{-x}) x^{s-1} dx = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s},$$

где $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) \cdot \Gamma(s))$.

Для доказательства рассмотрим следующую функцию:

$$h_\rho(s) = \frac{1}{\rho^s} \int\limits_0^\rho g(e^{-x}) x^{s-1} dx - \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s}.$$

Покажем, что $h_\rho(s) \equiv 0$.

Заметим, что $h_\rho(s)$ является целой, ограниченной при $\sigma < 0$ функцией. Кроме того,

$$h_\rho(\sigma) \xrightarrow{\sigma\to\infty} 0. \qquad (5)$$

Действительно, преобразуем $h_\rho(s)$

$$h_\rho(s) = \frac{1}{\rho^s}\int\limits_0^\rho g(e^{-x})x^{s-1}dx - \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s} = \frac{1}{\rho^s}\int\limits_0^\rho g(e^{-x})x^{s-1}dx +$$

$$+\frac{1}{\rho^s}\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx - \frac{1}{\rho^s}\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx - \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s} =$$

$$= \frac{f(s)\cdot\Gamma(s)}{\rho^s} - \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s} - \frac{1}{\rho^s}\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

В результате получаем, что

$$h_\rho(s) = \varphi_\rho(s) - \frac{1}{\rho^s}\Phi_\rho(s), \tag{6}$$

где

$$\varphi_\rho(s) = \frac{f(s)\cdot\Gamma(s)}{\rho^s} - \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s}.$$

Оценим второе слагаемое правой части равенства (6) при $\sigma < 0$.

$$\left|\frac{1}{\rho^s}\Phi_\rho(s)\right| = \left|\frac{1}{\rho^s}\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx\right| = \left|\frac{1}{\rho^s}\right|\cdot\left|\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx\right| \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\overset{(4)}{\leqslant} \frac{M_1}{\rho^\sigma}\int\limits_\rho^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}x^{\sigma-1}dx \leqslant \frac{M_1'}{\rho^\sigma}\int\limits_\rho^\infty x^{\sigma-1}dx,$$

так как $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ — ограниченная функция.

Таким образом, получаем, что

$$\left|\frac{1}{\rho^s}\Phi_\rho(s)\right| \leqslant \frac{M_1'}{\rho^\sigma}\int\limits_\rho^\infty x^{\sigma-1}dx = \frac{M_1'}{\rho^\sigma}\cdot\left.\frac{x^\sigma}{\sigma}\right|_\rho^\infty \overset{\sigma\leq 0}{=} 0 - \frac{M_1'}{\rho^\sigma}\cdot\frac{\rho^\sigma}{\sigma} =$$

$$= -\frac{M_1'}{\sigma} \overset{\sigma\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В результате имеем

$$\frac{1}{\rho^s}\Phi_\rho(s) \overset{\sigma\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_\rho(s)$. Эта функция является целой, так как представляет разность двух целых функций. Оценим поведение $\varphi_\rho(s)$ при $\sigma < 0$. Из функционального уравнения для $\Gamma(s)$

$$\Gamma(s-1)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \qquad s \notin \mathbb{Z}$$

следует, что

$$\varphi_\rho(s) = \frac{f(s)\pi}{\rho^s\Gamma(s-1)\sin\pi s} - \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s}.$$

Оценим функцию $\varphi_\rho(s)$ в окрестности точки $s = -n$ радиуса δ ($\frac{1}{2} < \delta < 1$). Рассмотрим последовательность $\tau_n = \max\limits_{|s+n|=\delta}|\varphi_\rho(s)|$. Эта последовательность ограничена, более того

$$\tau_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Действительно, в силу условия $|f(s)| \leqslant c\cdot e^{|s|\ln|s|+A|s|}$, выбора ρ ($0 < < \rho < e^{-(A+1)}$) и ассимптотики для $\Gamma(s)$ при $\sigma < 0$

$$\ln\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(|s|^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(s) \approx e^{\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s - s + O(1)},$$

получаем, что

$$\max_{|s+n|=\delta}\left|\frac{f(s)}{\rho^s\Gamma(1-s)}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Аналогично оценивается ряд $\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\dfrac{\alpha_k\rho^k}{k+s}$, так как

$$\max_{|s+n|=\delta}\left|\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s}\right| = \max_{|s+n|=\delta}\left|\frac{1}{s}\cdot\sum_{-1\leqslant k\leqslant\frac{|s|}{2}-1}\frac{\alpha_k\rho^k}{1+\frac{k}{s}} + \sum_{k>\frac{|s|}{2}-1}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|s+n|=\delta}\left(\frac{2}{|s|}\cdot\sum_{-1\leqslant k\leqslant\frac{|s|}{2}-1}|\alpha_k|\rho^k\right)+\max_{|s+n|=\delta}\left|\sum_{k>\frac{|s|}{2}-1}\frac{\alpha_k\rho^k}{k+s}\right|.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=-1}^{\infty}|\alpha_k|\rho^k<\infty$ и

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\qquad \max_{|s+n|=\delta}\left|\frac{1}{\sin\pi s}\right|<c_1,$$

получаем выполнение (8). А условия (6) и (8) доказывают (5).

Покажем теперь, что $h_\rho(s)$ ограничена в полуплоскости

$$D_1:\ \sigma>1+\varepsilon_0,\qquad \text{где}\qquad \varepsilon_0>0.$$

Действительно, в этой полуплоскости ограничена функция $\sum\limits_{k=-1}^{\infty}\dfrac{\alpha_k\rho^k}{k+s}$, так как этот ряд сходится при $\alpha_k<\rho^k$ и

$$\left|\frac{1}{\rho^s}\cdot\int\limits_0^\rho g(e^{-x})x^{s-1}dx\right|\overset{(4)}{\leqslant}\frac{M_1}{\rho^\sigma}\int\limits_0^\rho\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}x\cdot x^{\sigma-2}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_1''}{\rho^\sigma}\cdot\int\limits_0^\rho x^{\sigma-2}dx<c.$$

Отсюда следует ограниченность функции $h_\rho(s)$ в области D_1.

Покажем, что $h_\rho(s)$ ограничена в полуплоскости

$$D_2:\ \sigma\leqslant 1+\varepsilon_0,\qquad \text{где}\qquad \varepsilon_0>0.$$

Выше было показано, что $h_\rho(s)$ ограничена вдоль отрицательной полуоси $\sigma\leqslant 1+\varepsilon_0$. Разбив полуплоскость D_2 полуосью в отрицательном направлении на две части и применяя к каждой из этих частей теорему Флагмена—Линделефа об оценке модуля функции в угловой области [1], получаем ограниченность $h_\rho(s)$ на рассматриваемых частях, а значит, и в полуплоскости D_2. Таким образом, получаем, что $h_\rho(s)\equiv\mathrm{const}$.

Следствие 1. При условиях леммы 2 функция

$$\psi_\rho(s) = \frac{1}{\rho^s} \cdot \int_0^\rho g(e^{-x}) x^{s-1} dx \qquad (9)$$

при $s \neq 1, 0, -1, \ldots, -n, \ldots$ разлагается в ряд

$$\psi_\rho(s) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s},$$

где $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) \cdot \Gamma(s))$.

Лемма 3. Пусть ряд Дирихле вида (1) при условии $|f(s)| \leqslant c \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|}$ определяет мероморфную функцию с единственно возможным простым полюсом в точке $s = 1$. Тогда в некоторой окрестности нуля выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kx} = \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k x^k,$$

где $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) \cdot \Gamma(s))$.

Доказательство

Рассмотрим функцию

$$\psi_\rho(s+2) = \frac{1}{\rho^{s+2}} \cdot \int_0^\rho g(e^{-x}) x^{s+1} dx.$$

Применяя следствие 1, получаем

$$\psi_\rho(s+2) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s+2}. \qquad (10)$$

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{k+2} = x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k. \qquad (11)$$

Из неравенства $|f(s)| \leqslant c \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|}$ и того, что $Res_{s=-k}\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}$, следует оценка для α_k:

$$\alpha_k = O\left(e^{(A+1)k}\right).$$

Значит, ряд (11) сходится при $|x| < e^{-(A+1)}$. Таким образом, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{k+2} \in C[0,\rho].$$

Покажем, что $x^2 g(e^{-x}) \in C[0,\rho]$. Действительно,

$$|x^2 g(e^{-x})| \overset{(4)}{\leqslant} x^2 M_1 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}},$$

а

$$\frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-x}} \in C[0,\rho].$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{\rho^{s+2}} \int\limits_0^{\rho} \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k x^{k+2} \right) \cdot x^{s-1} dx = \frac{1}{\rho^{s+2}} \int\limits_0^{\rho} \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k x^{k+s+1} \right) dx =$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s+2}.$$

Подставляя это равенство в (10), получим при $\sigma > 0$

$$\int\limits_0^{\rho} \left[g(e^{-x}) x^2 - \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k x^{k+2} \right] x^{s-1} dx = 0,$$

следовательно, выполняется равенство для $r \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^{\rho} \left[g(e^{-x}) x^2 - \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k x^{k+2} \right] x^{r} dx = 0, \tag{12}$$

а так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{k+2} \in C[0,\rho]$ и $x^2 g(e^{-x}) \in C[0,\rho]$, то из (12), в силу полноты $\{x^r\}_{r=0}^{\infty}$ в пространстве $C[0,\rho]$, получаем, что при $x \in [0,\rho]$

$$g(e^{-x}) = \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k x^k.$$

Доказательство теоремы 1

В одну сторону доказательство теоремы 1 следует из леммы 3. Докажем обратное утверждение этой теоремы. Таким образом, пусть функция

$g(e^{-x})$ в некоторой окрестности нуля радиуса $\rho_0 > 0$ раскладывается в ряд

$$g(e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Отсюда следует, что при $0 < \rho < \rho_0$ и $s \neq 0, -1, \ldots, -n, \ldots$ получаем разложение вида

$$\int\limits_0^{\rho} g(e^{-x}) x^{s-1} dx = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \rho^k}{k+s}, \tag{13}$$

где ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$ абсолютно сходится.

В силу (3) и (13) функция $f(s)$ является целой. Из свойств целой функции $\frac{1}{\Gamma(s)}$ следует, что $\forall\ k = \overline{-1, \infty}$ функция $\dfrac{s-1}{\Gamma(s)(k+s)}$ является целой и

$$\frac{|s-1|}{|\Gamma(s)| \cdot |k+s|} \leqslant c_1 \cdot e^{|s| \ln |s| + |s|}, \tag{14}$$

где c_1 не зависит от k.

Из (13) и (14) получаем

$$\left| \frac{s-1}{\Gamma(s)} \cdot \int\limits_0^{\rho} g(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| \leqslant c_1 \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|}, \tag{15}$$

где $A = -\ln \rho_0 + 1$.

При $\sigma \leqslant 1 + \varepsilon_0$ получаем следующую оценку:

$$\left| \int\limits_{\rho}^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| \overset{(4)}{\leqslant} M_1 \int\limits_{\rho}^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) x^{\sigma-1} dx \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \rho^{\sigma} \int\limits_{\rho}^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{\rho} \right)^{\sigma-1} dx \leqslant M_3 \rho^{\sigma} \leqslant M_4 e^{(A-1)|s|}. \tag{16}$$

Выполнение условий (15), (16) и (3) дают оценку $|f(s)| \leqslant c \cdot e^{|s| \ln |s| + A|s|}$ теоремы 1 при $\sigma \leqslant 1 + \varepsilon_0$. Очевидно, что эта оценка выполняется и в полуплоскости $\sigma > 1 + \varepsilon_0$.

Библиографический список

1. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

2. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, вып. 6.

УДК 539.3+517.4

Т.А. КУЗНЕЦОВА, К.А. БАЕВ, С.В. ЧУМАКОВА

Спектральный критерий локальной потери устойчивости тонких оболочечных конструкций произвольной конфигурации

В данной статье указан достаточно широкий класс оболочечных конструкций и класс нелинейных моделей, описывающих поведение этих оболочечных конструкций при воздействии различных нагрузок, для которых доказывается спектральный критерий локальной потери устойчивости.

При нагрузках, близких к критическим, то есть близких к тем нагрузкам, при которых наблюдается «прощелкивание» оболочки, в отдельных точках и в малых окрестностях таких точек возникают критические напряжения, в результате которых локально появляются малые вмятины. На языке решений модельной задачи это означает, что в окрестности отдельных точек нарушается однозначность решения нелинейных уравнений. В этом случае говорят о локальной потере устойчивости тонких оболочечных конструкций.

В статьях [1], [2] были получены спектральные критерии локальной потери устойчивости в статическом и динамическом случае соответственно для прямоугольных в плане оболочек. В [3] была указана актуальность решения задачи определения точек локальной потери устойчивости и была получена вычислительная схема реализации спектрального критерия для прямоугольных в плане оболочек.

Здесь будет получен спектральный критерий потери устойчивости для оболочек общего плана.

Рассмотрим класс тонких оболочек, серединная поверхность которых Ω является областью с кусочногладкими границами и которые жестко закреплены по краям. Для таких оболочек будем рассматривать геометрически нелинейные модели в рамках теории Кирхгофа—Лява или теории Тимошенко. Решения модельных задач рассматриваются в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$. Вопросы существования и единственности решений таких нелинейных моделей изучались в работе [4]. А именно было показано, что решение $\bar{u}^0$ нелинейной системы уравнений, полученное в данный момент времени, является единственным решением, если линейный, самосопряженный оператор вида

$$Aw = A_0 w - \varphi_1(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varphi_2(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \varphi_3(x,y,t)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \qquad (1)$$

где A_0 – это оператор $\alpha\Delta^2$ в случае модели Кирхгофа—Лява и оператор $-\alpha\Delta$ в случае модели Тимошенко, а функции $\varphi_i(x,y,t)$ однозначно определены решением $\bar{u}^0$ и параметрами $\bar{q}^0$, отвечающими решению $\bar{u}^0$, действующий в пространстве функций из $L_2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям, отвечающих жесткому закреплению краев оболочек, является положительно определенным.

Аналогичный факт имеет место и в статическом случае.

В работах [1], [2] в случае прямоугольных в плане оболочек было показано, что единственность решений нелинейной системы уравнений как в статическом, так и в динамическом случае равносильна положительной определенности операторов вида (1), рассматриваемых в каждой точке области Ω.

В данной работе аналогичный факт доказывается в случае области Ω с кусочногладкой границей.

А именно доказывается спектральный критерий локальной потери устойчивости, который в статическом случае формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Точка $M(x_0, y_0)$ тогда и только тогда является точкой локальной потери устойчивости, когда в этой точке спектр оператора вида (1) содержит нулевое значение.*

Замечание 1. Как известно [5], в случае кусочногладкой границы области Ω, оператор вида (1), действующий в пространстве функций из $L_2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$W|_\Gamma = \left.\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}\right|_\Gamma = 0,$$

является самосопряженным оператором. Следовательно, этот оператор имеет вещественный спектр. В случае положительной определенности его спектр строго положительный (см. по этому поводу, например [6]).

Замечание 2. В данной работе мы приведем доказательство только утверждения теоремы 1. Аналогичный результат имеет место и в динамическом случае. Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться рассуждениями, приведенными в работе [2].

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд утверждений.

В работе [4] задача однозначности решений нелинейных уравнений из описанного выше класса модельных задач была сведена к задаче однозначности решений некоторой последовательности линейных операторных уравнений вида

$$A_0 w + \varphi_1(x, y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi_2(x, y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varphi_3(x, y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \tag{2}$$

в пространстве функций из $L_2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$W|_\Gamma = \left.\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}\right|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Изучим прежде всего задачу однозначности решений уравнений вида (2) в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (3).

Во-первых, рассмотрим случай постоянных функций $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$. Обозначим их T_x, T_y, T_{xy} соответственно. Оператор, стоящий в левой части уравнения (2), обозначим A.

Задача единственности уравнений вида (2) в этом случае изучалась в [7]. Как показано в [5], оператор A является самосопряженным оператором, действующим в пространстве функций H_0, удовлетворяющих условию (3). Следовательно, существует ортонормированный базис этого пространства, состоящий из собственных векторов. Спектр этого оператора является вещественным. В [7]показано,что спектр такого оператора является строго положительным, если

$$|T_x| < C, \quad |T_y| < C, \quad |T_{xy}| < C, \tag{4}$$

где C – некоторая константа.

Итак, при условии (4) оператор A будет положительно определенным и уравнение (2) в пространстве H_0 будет иметь единственное (нулевое) решение.

Иная ситуация возникает, если $|T_x|$, $|T_y|$, $|T_{xy}|$ возрастают. Тогда оператор A перестает быть положительно определенным и уравнение (2) может иметь ненулевое решение. Для пояснения последнего факта рассмотрим уравнение вида

$$A_0 w - \lambda \left(-T\right) w = 0, \tag{5}$$

где оператор $-T$ определяется следующим образом:

$$-Tw = -T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{6}$$

где $T_x \geqslant 0$, $T_y \geqslant 0$, $T_{xy} \geqslant 0$.

Как показано в [7], оператор вида (6) является положительно определенным оператором, действующим в пространстве H_0. Далее, в [7], гл. V,

§ 29 показано, что в этом случае уравнение (5) при определенных значениях λ:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots,$$

где $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$ имеет ненулевое решение f_n из пространства H_0, при этом f_n, отвечающие различным значениям λ_n, образуют ортогональную систему функций в H_0.

Таким образом, если $T_x \geqslant 0, \quad T_y \geqslant 0, \quad , T_{xy} \geqslant 0$, то либо уравнение

$$A_0 w + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{7}$$

имеет только нулевое решение и в этом случае спектр оператора A строго положительный, либо имеет ненулевые решения, среди которых конечное число ортогональных функций f_n, и спектр оператора A в этом случае содержит нулевое значение, а любое решение уравнения (7) в пространстве H_0 можно представить в виде

$$W = \sum_n{}' C_n f_n, \tag{8}$$

где суммирование происходит по тем n, для которых f_n — решение уравнения (7).

Рассуждения, приведенные в [7], гл. V, § 29, показывают, что подобный результат имеет место и в случае произвольных знаков у величин T_x, T_y, T_{xy} за исключением случая, когда оператор вида (6) после поворота системы координат приводится к виду

$$-Tw = -T'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T'_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

где $T'_x \leqslant 0$, $T'_y \leqslant 0$.

Далее, рассмотрим разбиение области Ω на N областей Ω_i с кусочногладкими границами. Будем считать, что T_x, T_y, T_{xy} — кусочно-постоянные функции, а именно являются константами на Ω_i.

Рассмотрим следующую задачу в области Ω_i

$$A_0 w + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \tag{9}$$

$$W|_{\Gamma_i} = \left.\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}\right|_{\Gamma_i} = 0. \tag{10}$$

В силу предыдущих рассуждений и конкретно формулы (8) имеет место

Лемма 1. Если задача (9) имеет нетривиальные решения, то каждое такое решение можно представить в виде

$$W_{i,N} = \sum_n{}' \beta_{n,i} f_{n,i}. \tag{11}$$

Отметим, что любое множество ненулевых функций $W_{i,N}$ определяет некоторое ненулевое решение задачи (2), (3) в случае кусочно-постоянных функций $\varphi_i(x, y)$.

Наконец, рассмотрим случай произвольных T_x, T_y, T_{xy}.

Допустим, что существует точка $(x_0, y_0) \in \Omega$, для которой в случае $T_x = \varphi_1(x, y)$, $T_y = \varphi_2(x, y)$, $T_{xy} = \varphi_3(x, y)$ задача (9), (10) в некоторой области $\Omega_{i,N}$ имеет ненулевое решение.

Покажем, что в этом случае существует ненулевое решение задачи (2), (3) в случае непрерывных функций $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$.

В качестве начального приближения рассмотрим некоторую функцию W_1, порожденную функциями вида (11), где $0 < \beta_{n,i} < c_1$.

Допустим, что мы построили функцию W_{N-1} задачи (2), (3) в случае разбиения области Ω на 2_{N-1} частей и в случае кусочно-постоянных функций $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$. Тогда функцию W_N определим следующим образом.

Рассмотрим разбиение области Ω на 2_N частей и на Ω_i рассмотрим задачу вида

$$A_0 w + \varphi_1(x_i, y_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi_2(x_i, y_i) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varphi_3(x_i, y_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \tag{12}$$

где (x_i, y_i) – некоторая точка, принадлежащая области Ω_i.

Положим

$$W_{i,N} = \overline{W}_{i,N} + w_{N-1}/\Omega, \tag{13}$$

где $\overline{W}_{i,N}$ — решение следующего уравнения:

$$A_0 w + \varphi_1(x_i, y_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi_2(x_i, y_i)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varphi_3(x_i, y_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = q_{N,i}(x, y) \tag{14}$$

с однородными граничными уравнениями в области Ω_i,

где $$q_{N,i}(x,y) = A_0 w_{N-1} + \varphi_1(x_i, y_i)\frac{\partial^2 w_{N-1}}{\partial x^2} + \varphi_2(x_i, y_i)\frac{\partial^2 w_{N-1}}{\partial y^2} + \\ + \varphi_3(x_i, y_i)\frac{\partial^2 w_{N-1}}{\partial x \partial y}. \tag{15}$$

Ясно, что если $\overline{W}_{i,N}$ — некоторое решение уравнения (14), то функция $W_{i,N}$ вида (13) является решением задачи (12). Задача (14) имеет решение. Этот факт доказывается на основании тех же рассуждений, что приведены в [8], гл. I, § 4.3.

Рассмотрим некоторую последовательность решений $W_{i,N}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^N$ задачи (12) вида (13). Они образуют нетривиальное решение W_N задачи (2),(3) в случае кусочно-постоянных функций φ_1, φ_2, φ_3.

Относительно последовательности $\{W_N\}$ имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. Существует такая последовательность разбиений области Ω, для которой последовательность функций $\{W_N\}$ ограничена в пространстве Соболева $H_0^2(\Omega)$.

Доказательство леммы 2 повторяет доказательство леммы 7 в работе [9].

Лемма 3. При условии леммы 2 существует такая последовательность функций $\{W_{N_k}\}$, которая сходится в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство леммы 3 повторяет доказательство леммы 8 в работе [9].

Утверждения лемм 2 и 3 позволяют провести рассуждения, аналогичные тем, что проведены в работе [8], гл. I, § 4.3, в силу которых получается следующий результат.

Лемма 4. Пусть в области Ω существует точка x_0, y_0, для которой задача (9) при $T_x = \varphi_1(x_0, y_0)$, $T_y = \varphi_2(x_0, y_0)$, $T_{xy} = \varphi_3(x_0, y_0)$ имеет нетривиальное решение. Тогда задача (2), (3) имеет нетривиальное решение.

Как следствие леммы 4, получаем спектральный критерий неоднозначности решения задачи (2), (3). Имеет место

Лемма 5. Задача (2),(3) тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда существует точка $(x_0, y_0) \in \Omega$, в которой спектр оператора A вида

$$A_w = A_0 w + \varphi_1(x_0, y_0)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi_2(x_0, y_0)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varphi_3(x_0, y_0)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (16)$$

содержит нулевое значение.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1

Как уже говорилось выше, наличие точек локальной потери устойчивости оболочечных конструкций связано с неоднозначностью решения соответствующей нелинейной локальной задачи.

В [4] неоднозначность решения модельной задачи при заданных параметрах $\overline{q}_0$ была сведена к неоднозначности решения задачи (2), (3), где функции $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ однозначно определяются некоторым решением модельной задачи, определяемой $\overline{q}_0$. Таким образом, утверждение теоремы 1 непосредственно следует из утверждения леммы 4.

Библиографический список

1. *Кузнецова Т.А., Шабанов Л.Е., Чумакова С.В.* Спектральный критерий потери статической учтойчивости прямоугольных в плане оболочечных конструкций // Проблемы прочности элементов конструкций под

действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2003. С. 143–146.

2. *Кузнецов В.Н., Кузнецова Т.А., Чумакова С.В.* Операторные методы в нелинейной механике // Исследование по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 70–80.

3. *Шабанов Л.Е.* Вопросы численной реализации метода последовательных возмущений параметров при расчете оболочечных конструкций: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.

4. *Кузнецов В.Н.* Метод последовательных возмущений параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций: Дис.... д-ра. техн. наук. Саратов, 2000.

5. *Соболев С.А.* Применение функционального анализа к математической физике. Л.: Наука, 1950.

6. *Рис Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

7. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1957.

8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

9. *Кузнецов В.Н., Кузнецова Т.А., Чумакова С.В., Шабанов Л.Е.* Операторный подход в задаче статической потери устойчивости оболочечных конструкций // Исследование по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 59–70.

УДК 519.21

Н.Н. МАНУЙЛОВ

Двухцветный сдвиг окружности[1]

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается орбита $Orb_\varepsilon(x) = \{S^\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty$, порожденная начальной точкой x и двухцветным сдвигом $S_\varepsilon = S_\varepsilon(g,1)$ для иррациональностей $\tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, где $g = 2, 3, \ldots$ Двухцветный сдвиг S_ε определен на единичном полуинтервале следующим образом:

$$x \longmapsto x + g\tau_g \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^+,$$
$$x \longmapsto x + \tau_g \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^-,$$

где I_ε^+ и I_ε^- – полуинтервалы из подразбиения единичного полуинтервала

$$I = I_\varepsilon^+ \oplus I_\varepsilon^-.$$

При этом $I_\varepsilon^+ = [0, \varepsilon)$ и $I_\varepsilon^- = [\varepsilon, 1)$, где ε – непрерывный параметр, принимающий произвольное значение из единичного полуинтервала I.

В.Г. Журавлевым [1] был изучен двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(2,1)$ для квадратичной иррациональности $\tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$x \longmapsto x + 2\tau_1 \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^+,$$
$$x \longmapsto x + \tau_1 \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^-.$$

В нашем случае двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(g,1)$ для τ_g, где $g = 1$, сводится к простому сдвигу

$$x \longmapsto x + \tau_1 \bmod 1.$$

По этой причине рассмотрен класс иррациональностей τ_g, где $g = 2, 3, 4, \ldots$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00368.

Изучение двухцветного сдвига S_ε опирается на следующее разбиение:

$$I = C_1^0 \oplus C_2^0 \oplus \cdots \oplus C_g^0 \oplus \cdots \oplus C_1^m \oplus \cdots \oplus C_g^m \oplus \cdots ,$$

где $\oplus$ — некоммутативная операция прикладывания полуинтервалов, $m \equiv 0 \bmod 2g$ и C_k^m – открытые справа полуинтервалы, имеющие длину $\tau_g^{-(m/g+1)}$.

Для любых начальных точек x и любого ε из I существует предел

$$\nu^+(\varepsilon, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{\ell : 0 \le S_\varepsilon^\ell(x) < \varepsilon, \ell = 0, 1, , n-1\},$$

равный частоте попадания точек орбиты $Orb_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty$ в полуинтервал $I_\varepsilon^+ = [0, \varepsilon)$ при действии на x двухцветным сдвигом S_ε.

В теореме 1 доказана точная формула для частоты $\nu^+(\varepsilon, x)$:

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{1}{g-1}\left(\frac{1}{A_\varepsilon} - 1\right),$$

где

$$A_\varepsilon = \frac{1}{g}\left(1 + (g-1)\tau_g^{-\left(\frac{m}{g}+2\right)}\right)$$

для ε из полуинтервала C_i^m, где $i \in \{2, \ldots, g\}$,

$$A_\varepsilon = \frac{1}{g}\left(1 + (g-1)\tau_g^{-\left(\frac{m}{g}+2\right)}\right) + (g-1)(\tau_g^{-\left(\frac{m}{g}+1\right)} - (\varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g)))$$

для ε из полуинтервала C_1^m. Значение $\varepsilon_k(\tau_g)$ вычисляется по формуле

$$\varepsilon_k(\tau_g) = 1 - \tau_g^{-([k/g]+1)}(\tau_g - (k \bmod g)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где квадратные скобки $[\cdot]$ обозначают целую часть числа.

Теорема 1 дает два следствия.

1. Для частоты $\nu^+(\varepsilon)$ отсутствует равномерное распределение по $\bmod\ 1$.
2. Для ε существуют полуинтервалы $C_i^m \ni \varepsilon$, $i \in \{2, \ldots, g\}$, когда частота $\nu^+(\varepsilon)$ принимает постоянное значение. Для ε существуют полуинтервалы $C_1^m \ni \varepsilon$, когда частота $\nu^+(\varepsilon)$ монотонно растет. Все полуинтервалы роста и постоянства частоты найдены.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХЦВЕТНОГО СДВИГА

Возьмем иррациональность $\alpha > 0$. Рассмотрим зависящее от $\varepsilon \in I = [0,1)$ непрерывное семейство $S_\varepsilon(a,b)$ сдвигов двухцветного единичного полуинтервала $I = I_\varepsilon^+ \oplus I_\varepsilon^-$, в каждой области которого I_ε^+ и I_ε^- свой вектор сдвига.

Двухцветный сдвиг $S_\varepsilon(a,b) : I \longrightarrow I$ с целыми параметрами $a, b \in \mathbb{Z}$ зависит от раскраски единичного полуинтервала

$$I = I_\varepsilon^+ \oplus I_\varepsilon^-,$$

где $I_\varepsilon^+ = [0,\varepsilon)$, $I_\varepsilon^- = [\varepsilon,1)$, и определяется двухцветным полем

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x + a\alpha \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^+, \\ x &\longmapsto x + b\alpha \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^-. \end{aligned} \tag{1}$$

Выберем в качестве α квадратичную иррациональность $\tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, где $g = 2, 3, 4, \ldots$ Основной моделью в настоящей работе выбран двухцветный сдвиг (рис. 1.1)

$$S_\varepsilon = S_\varepsilon(g,1).$$

Для τ_g формулы (1) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &\longmapsto x + g\tau_g \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^+, \\ x &\longmapsto x + \tau_g \bmod 1, \text{ если } x \in I_\varepsilon^-. \end{aligned} \tag{2}$$

Теперь становится очевидным, что для иррациональности $\tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ двухцветный сдвиг вырождается и сводится к простому сдвигу точки окружности на иррациональный вектор

$$x \longmapsto x + \tau_1 \bmod 1.$$

Рис. 1.1. Развертка двухцветного сдвига $S_\varepsilon(1,1)$ для τ_1.

Универсальность собственных разбиений Фибоначчи порядка g проявляется в виде существования резонанса непрерывного параметра ε с некоторым уровнем разбиений Фибоначчи порядка g [2,3].

Разобъем единичный полуинтервал на примыкающие друг к другу и открытые справа полуинтервалы

$$I = C_1^0 \oplus C_2^0 \oplus \cdots \oplus C_g^0 \oplus \cdots \oplus C_1^m \oplus \cdots \oplus C_g^m \oplus \cdots ,$$

где $\oplus$ – некоммутативная операция прикладывания полуинтервалов и $m \equiv 0 \bmod 2g$. Выберем полуинтервалы C_i^m, для $i \in \{1, 2, \ldots, g\}$ таким образом, чтобы

$$|C_i^m| = \tau_g^{-(m/g+1)}. \qquad (3)$$

Обозначим через $W^m = C_1^m \oplus \cdots \oplus C_g^m$. Исследование двухцветного сдвига $S_\varepsilon(g, 1)$ опирается на следующее разбиение единичного полуинтервала

$$I = W^0 \oplus W^{2g} \oplus \cdots \oplus W^m \oplus \cdots , \qquad (4)$$

где $m \equiv 0 \bmod 2g$.

На рис. 1.2. и рис. 1.3. приведены примеры развертки траектории начальной точки, порожденной двухцветным сдвигом. Как видно из этих рисунков, развертка делится на две области: область, попав в которую точка уже не выходит Att_ε — аттрактор, и область, в которую точка не попадает совсем или попав, выходит в аттрактор через конечное число шагов $Spir_\varepsilon$ — спираль.

Рис. 1.2. Развертка двухцветного сдвига $S_\varepsilon(2, 1)$ для τ_2.

Рис. 1.3. Развертка двухцветного сдвига $S_\varepsilon(5, 1)$ для τ_5.

2. РАСКРАСКА ПОЛУИНТЕРВАЛОВ

Введем обозначение $m' = m + g - 1$, где параметр $m \equiv 0 \bmod 2g$ при $m \geqslant 0$ и

$$k = \left[\frac{m'}{g}\right] = \frac{m}{g}.$$

Через квадратные скобки обозначим целую часть числа.

Рассмотрим объединение

$$X = \bigcup_{i=1}^{g} E^{m'}_{F^{i(g)}_{k+2}}(1-\tau_g) \cup G^{m'}_{F^{g(g)}_{k+1}}(1-\tau_g),$$

состоящее из полуинтервалов разбиения Фибоначчи $CTil^{+}_{1-\tau_g}(m')$ порядка g [3], где $F^{i(g)}_{k+2}$, $F^{g(g)}_{k+1}$, $i = 1, \ldots, g$ — члены последовательностей, вычисляемых по рекуррентным формулам:

$$F^{i(g)}_{n+2} = F^{i(g)}_{n+1} + F^{i(g)}_{n}, \quad F^{i(g)}_{1} = 1,\ F^{i(g)}_{2} = i$$

для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

С помощью глобальных координат [4] полуинтервалов разбиения Фибоначчи порядка g явно получаем,что X представляет собою последовательность, приложенных друг к другу полуинтервалов

$$X = \bigoplus_{i=1}^{g} E^{m'}_{F^{i(g)}_{k+2}}(1-\tau_g) \oplus G^{m'}_{F^{g(g)}_{k+1}}(1-\tau_g),$$

где $\oplus$ — некоммутативная операция прикладывания полуинтервалов.

Вернемся к раскраске полуинтервалов или, другими словами, принадлежности полуинтервалов разбиения $CTil^{+}_{1-\tau_g}(m')$ либо $I^{+} = [0, \varepsilon)$, либо $I^{-} = [\varepsilon, 1)$.

Пусть $\varepsilon \in W^m$, где $m \equiv 0 \bmod 2g$ и W^m (4) образована приложенными друг к другу полуинтервалами C^m_i (3) при $i = 1, \ldots, g$.

Рассмотрим случай $\varepsilon \in C^m_i \subset W^m$. С помощью тех же глобальных координат [4] доказывается тот факт, что

$$I^{-}_{\varepsilon} = X^{m'}_{i\ -} = E^{m'}_{F^{i(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)^{-} \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{g} E^{m'}_{F^{j(g)}_{k+2}}(1-\tau_g) \oplus G^{m'}_{F^{g(g)}_{k+1}}(1-\tau_g). \quad (5)$$

Длина $|E^{m'}_{F^{i(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)^-|$ вычисляется как

$$|E^{m'}_{F^{i(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)^-| = |E^{m'}_{F^{i(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)| - (\varepsilon - \varepsilon_{m+i-1}(\tau_g)),$$

где

$$\varepsilon_j(\tau_g) = 1 - \tau_g^{-([j/g]+1)}(\tau_g - (j \bmod g)), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Для длин полуинтервалов разбиения $CTil^+_{1-\tau_g}(m')$, согласно [3], справедливы формулы:

$$|G^{m'}(1-\tau_g)| = g^{m'} = \tau_g^{-(k+2)}, \quad |E^{m'}(1-\tau_g)| = e^{m'} = \tau_g^{-(k+1)}. \tag{7}$$

3. АТТРАКТОР И СПИРАЛЬ

Определим длину $|Att_\varepsilon|$ аттрактора Att_ε как сумму длин, входящих в него полуинтервалов из $CTil^+_{1-\tau_g}(m')$. Пусть $\varepsilon \in C^m_i$, где $i \in \{2, \ldots, g\}$, и $m \equiv 0 \bmod 2g$. В этом случае аттрактор состоит из двух цепей

$$Att_\varepsilon = \widehat{G^{m'}_1}(1-\tau_g) + \widehat{E^{m'}_1}(1-\tau_g),$$

при этом в цепи $\widehat{G^{m'}_1}(1-\tau_g)$ находится $\frac{1}{g}(F^{g(g)}_{k+1} + g - 1)$ полуинтервалов вида $G^{m'}(1-\tau_g)$, а цепь $\widehat{E^{m'}_1}(1-\tau_g)$ содержит $\frac{1}{g}F^{g(g)}_{k+2}$ полуинтервалов вида $G^{m'}(1-\tau_g)$. Таким образом,

$$|Att_\varepsilon| = \frac{1}{g}(F^{g(g)}_{k+1} + g - 1)g^{m'} + \frac{1}{g}F^{g(g)}_{k+2}e^{m'},$$

где $g^{m'}$ и $e^{m'}$ длины полуинтервалов $G^{m'}_1(1-\tau_g)$, $E^{m'}_1(1-\tau_g)$ разбиения $CTil^+_{1\tau_g}(m')$ соответственно (7). При этом учитываем, что однотипные полуинтервалы разбиения имеют равные длины.

Продолжая рассуждения, получим

$$\begin{aligned} |Att_\varepsilon| &= \frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1} + g - 1\right)\tau_g^{-(k+2)} + \frac{1}{g}F^{g(g)}_{k+2}\tau_g^{-(k+1)} = \\ &= \frac{1}{g}\tau_g^{-(k+2)}\left(\tau_g^{k+2} + g - 1\right) = \frac{1}{g}\left(1 + (g-1)\tau_g^{-(k+2)}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $k = \left[\frac{m+g-1}{g}\right] = \frac{m}{g}$, то окончательно можем записать, что

$$|Att_\varepsilon| = \frac{1}{g}\left(1 + (g-1)\tau_g^{-\left(\frac{m}{g}+2\right)}\right).$$

Длину $|Spir_\varepsilon|$ спирали $Spir_\varepsilon$ легко вычислить из равенства

$$|Spir_\varepsilon| = 1 - |Att_\varepsilon|, \tag{8}$$

или в явном виде

$$|Spir_\varepsilon| = \frac{g-1}{g}\left(1 - \tau_g^{-\left(\frac{m}{g}+2\right)}\right).$$

Пусть теперь $\varepsilon \in C_1^m$. Полуинтервал $E^{m'}_{F^{1(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)$ принадлежит аттрактору и имеет подразбиение

$$E^{m'}_{F^{1(g)}_{k+2}}(1-\tau_g) = ^+ E^{m'}_{F^{1(g)}_{k+2}}(1-\tau_g) \oplus E^{m'}_{F^{1(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)^-, \tag{9}$$

где согласно (5)

$$|^+E^{m'}_{F^{1(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)| = \varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g),$$

$$|E^{m'}_{F^{1(g)}_{k+2}}(1-\tau_g)^-| = e^{m'}(1-\tau_g) - (\varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g)).$$

Аттрактор состоит из двух цепей

$$Att_\varepsilon = \widehat{G_1^{m'}}(1-\tau_g) + \widehat{E_1^{m'}}(1-\tau_g).$$

Причем в цепи $\widehat{E_1^{m'}}(1-\tau_g)$ содержится $\frac{1}{g}\left(F^{1(g)}_{k+2} + (g-1)\right)$ полуинтервалов с длиной $e^{m'}$, $\frac{g-1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1} + (g-1)\right)$ полуинтервалов с длиной $\varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g)$, а также $\frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+2} - F^{1(g)}_{k+2} - (g-1)\right)$ полуинтервалов с длиной $e^{m'} - (\varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g))$. В цепи $\widehat{G_1^{m'}}(1-\tau_g)$ находится $\frac{1}{g}(F^{g(g)}_{k+1} + g - 1)$ полуинтервалов длины $g^{m'}$.

Используя свойство $F^{g(g)}_{k+2} - F^{1(g)}_{k+2} = (g-1)F^{g(g)}_{k+1}$, получим

$$\frac{g-1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1} + (g-1)\right) - \frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+2} - F^{1(g)}_{k+2} - (g-1)\right) = g - 1.$$

И далее,

$$
\begin{aligned}
|Att_\varepsilon| \; &= \frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1}+g-1\right)\tau_g^{-(k+2)}+\frac{1}{g}\left(F^{1(g)}_{k+2}+g-1\right)\tau_g^{-(k+1)}+\\
&+\frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1}-F^{1(g)}_{k+1}-g+1\right)(\tau_g^{-(k+1)}-(\varepsilon-\varepsilon_m(\tau_g)))+\\
&+(g-1)(\tau_g^{k+1}-(\varepsilon-\varepsilon_m(\tau_g)))+\\
&+\frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1}-F^{1(g)}_{k+1}-g+1\right)(\varepsilon-\varepsilon_m(\tau_g))=\\
&=\frac{1}{g}\left(F^{g(g)}_{k+1}+g-1\right)\tau_g^{-(k+2)}+\frac{1}{g}F^{g(g)}_{k+2}\tau_g^{-(k+2)}+(g-1)\tau_g^{-(k+1)}-\\
&-(g-1)(\varepsilon-\varepsilon_m(\tau_g))=\\
&=\frac{1}{g}\left(1+(g-1)\tau_g^{-(s+2)}\right)+(g-1)(\tau_g^{-(s+1)}-(\varepsilon-\varepsilon_m(\tau_g))).
\end{aligned}
$$

Предложение 1. *1. Длина аттрактора $|Att_\varepsilon|$ вычисляется по формулам:*

$$|Att_\varepsilon|=\frac{1}{g}\left(1+(g-1)\tau_g^{-\left(\frac{m}{g}+2\right)}\right) \tag{10}$$

для ε из полуинтервала C^m_i (3), где $i\in\{2,\dots,g\}$,

$$|Att_\varepsilon|=\frac{1}{g}\left(1+(g-1)\tau_g^{-(\frac{m}{g}+2)}\right)+(g-1)(\tau_g^{-(\frac{m}{g}+1)}-(\varepsilon-\varepsilon_m(\tau_g))) \tag{11}$$

для ε из полуинтервала C^m_1 (3).

2. Длина аттрактора $|Att_\varepsilon|$ как функция от $\varepsilon\in I=[0,1)$ непрерывна и имеет предельное значение

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1}|Att_\varepsilon|=\frac{1}{g}. \tag{12}$$

Доказательство

Формулы (10), (11) доказаны ранее. При $\varepsilon\uparrow 1$ индекс m содержащего ε полуинтервала стремится к бесконечности и формула (12) вытекает из (10), (11).

4. ЧАСТОТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ОРБИТ

Из вложенного разбиения $CTil^+_{1-\tau_g}(m')$ выделим

$$I^1_{m'}(1-\tau_g)=G^{m'}_1(1-\tau_g)\oplus E^{m'}_1(1-\tau_g)$$

и рассмотрим ограничение двухцветного сдвига $S_\varepsilon = S_\varepsilon(g, 1)$ (1) на полуинтервал $I^1_{m'}(1-\tau_g)$ или его производную $d^{m'}S_\varepsilon = S_\varepsilon | I^1_{m'}(1-\tau_g)$. Ограничение двухцветного сдвига на полуинтервал $I^1_{m'}(1-\tau_g)$ производит перестановку полуинтервалов $G_1^{m'}(1-\tau_g)$ и $E_1^{m'}(1-\tau_g)$:

$$G_1^m(1-\tau_g) \oplus E_1^m(1-\tau_g) = E^m_{\sharp E^m(1-\tau_g)+1}(1-\tau_g) \oplus G^m_{\sharp G^m(1-\tau_g)+1}(1-\tau_g).$$

А это означает, что производная

$$d^{m'}S_\varepsilon \simeq S_1$$

изоморфна некоторому простому сдвигу S_1 окружности на иррациональный вектор.

Введем в рассмотрение меру на аттракторе Att_ε

$$\mu | Att_\varepsilon = \frac{\mu(x)}{|Att_\varepsilon|}, \tag{13}$$

где μ — мера Хаара на торе $I \simeq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, Att_ε — длина аттрактора (см. предложение 1) и $x \in Att_\varepsilon$.

В.Г. Журавлевым в [1] для $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ доказано равенство меры (13) и

$$\mu_\varepsilon(x) = \frac{\mu(x)}{\int_I d_\varepsilon(x) d\mu}.$$

Мера $\mu_\varepsilon(x)$ инвариантна и нормирована относительно интегрального преобразования

$$T_\varepsilon = \int S_1 d_\varepsilon,$$

где d_ε — подходящая целозначная функция или распределение на единичном полуинтервале.

Для иррациональностей τ_g, где $g = 2, 3, \ldots$, алгоритм доказательства аналогичен. Таким образом, следствием метрического изоморфизма

$$S_\varepsilon | Att_\varepsilon \simeq T_\varepsilon$$

является равномерное распределение орбиты $Orb_\varepsilon(x) = S^\ell_\varepsilon(x)$ начальной точки $x \in Att_\varepsilon$ на множестве Att_ε, где S^ℓ_ε, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, обозначает ℓ-кратную композицию двухцветного сдвига S_ε.

Для любых начальных точек $x \in Att_\varepsilon$ и любого ε из $I = [0, 1)$ существует предел

$$\nu^+(\varepsilon, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\{\ell : 0 \le S_\varepsilon^\ell(x) < \varepsilon, \ell = 0, 1, , n-1\}, \tag{14}$$

равный частоте попадания точек орбиты $Orb_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty$ в полуинтервал $I_\varepsilon^+ = [0, \varepsilon)$ при действии на x двухцветым сдвигом $S_\varepsilon = S_\varepsilon(g, 1)$. Более того, этот предел $\nu^+(\varepsilon) = \nu^+(\varepsilon, x)$ не зависит от выбора начальной точки $x \in Att_\varepsilon$. А так как для любой точки x из I существует такой номер итерации $\ell(\varepsilon)$, зависящий только от параметра ε, что $S_\varepsilon^{\ell(\varepsilon)}(x)$ принадлежит аттрактору Att_ε, то предел (14) существует для всех $x \in I$ и не зависит от выбора начальной точки x. Этот общий предел $\nu^+(\varepsilon)$ назовем частотой попадания точек орбиты $Orb_\varepsilon(x)$ или просто — точки x в полуинтервал I_ε^+.

Частоту попадания $\nu^+(\varepsilon)$ легко найти как отношение мер

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{\mu|Att_\varepsilon(Att_\varepsilon^+)}{\mu|Att_\varepsilon(Att_\varepsilon)},$$

где $Att_\varepsilon^+ = Att_\varepsilon \cap I_\varepsilon^+$. Вспоминая определение (13) меры $\mu|Att_\varepsilon$, записываем $\mu|Att_\varepsilon(Att_\varepsilon) = 1$ и поэтому получаем равенство

$$\mu|Att_\varepsilon(Att_\varepsilon^+) = \frac{|Att_\varepsilon^+|}{|Att_\varepsilon|},$$

при этом было использовано сокращение $|Att_\varepsilon^+| = \mu(Att_\varepsilon^+)$. В получающейся формуле частоты попадания точек в полуинтервал I_ε^+

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{|Att_\varepsilon^+|}{|Att_\varepsilon|} \tag{15}$$

мера аттрактора $|Att_\varepsilon|$ уже вычислена в предложении 1 и осталось найти только меру $|Att_\varepsilon^+|$.

Технически удобно рассмотреть вначале длину аттрактора $Att_\varepsilon^- = Att_\varepsilon \cap I^-$. Для параметра $\varepsilon \in C_i^m$, где $i \in \{2, 3, \dots, g\}$, аттрактор Att_ε^- состоит из одного полуинтервала с длиной $g^{m'} = \tau_g^{-(\frac{m}{g}+2)}$, то есть

$$Att_\varepsilon^- = \tau_g^{-(\frac{m}{g}+2)}.$$

Если $\varepsilon \in C_1^m$, то аттрактор состоит из одного полуинтервала с длиной $g^{m'}$ и из g полуинтервалов с длиной ${\tau_g}^{-(\frac{m}{g}+1)} - (\varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g))$, то есть

$$Att_\varepsilon^- = {\tau_g}^{-(\frac{m}{g}+2)} + g({\tau_g}^{-(\frac{m}{g}+1)} - (\varepsilon - \varepsilon_m(\tau_g))).$$

Сопоставляя последние формулы с (10), (11), замечаем неожиданно простое соотношение

$$|Att_\varepsilon^-| = \frac{g}{g-1}|Att_\varepsilon| - \frac{1}{g-1}$$

между мерами множества Att_ε^- и аттрактора Att_ε, справедливое для любого параметра $\varepsilon \in I$. Из соотношения

$$|Att_\varepsilon^+| = |Att_\varepsilon| - |Att_\varepsilon^-| = \frac{1}{g-1}\left(1 - |Att_\varepsilon|\right) \tag{16}$$

вытекает формула частоты

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{1}{g-1}\left(\frac{1}{|Att_\varepsilon|} - 1\right)$$

попадания точек орбит в множество $Att_\varepsilon^+ = Att_\varepsilon \cap I_\varepsilon^+$.

Теорема 1. *Пусть x — произвольная точка из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$ и $Orb_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty$ — ее орбита относительно действия двухцветного сдвига $S_\varepsilon = S_\varepsilon(g, 1)$ (1) для квадратичных чисел $\tau_g = \frac{g+\sqrt{g^2+4}}{2}$, где $g = 2, 3, \ldots$ Тогда частота $\nu^+(\varepsilon)$ попадания точек орбиты $Orb_\varepsilon(x)$ в полуинтервал $I_\varepsilon^+ = [0, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in I$ вычисляется по формуле*

$$\nu^+(\varepsilon) = \frac{1}{g-1}\left(\frac{1}{|Att_\varepsilon|} - 1\right), \tag{17}$$

где $|Att_\varepsilon|$ — мера (10), (11) аттрактора Att_ε.

Замечание 1. Частоту попадания $\nu^-(\varepsilon)$ точек орбиты $Orb_\varepsilon(x) = \{S_\varepsilon^\ell(x)\}_{\ell=0}^\infty$ в полуинтервал $I_\varepsilon^- = [\varepsilon, 1)$ можно считать по формуле

$$\nu^-(\varepsilon) = 1 - \nu^+(\varepsilon).$$

Замечание 2. Из

$$|Spir_\varepsilon| = 1 - |Att_\varepsilon|$$

и (16) вытекает совсем не очевидная формула

$$|Spir_\varepsilon| = (g-1)|Att_\varepsilon^+| \tag{18}$$

между мерами множества Att_ε^+ и множества спиралей $Spir_\varepsilon = I \setminus Att_\varepsilon$.

Библиографический список

1. *Zhuravlev V.* One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotation of a circle // Preprint of Max-Planck-Institut für Mathematik. 2004 № 59.

2. *Журавлев В.Г.* Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. (В печати)

3. *Мануйлов Н.Н.* Перенормировки на одномерном торе // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2004. (В печати)

4. *Мануйлов Н.Н., Шутов А.В.* Глобальный порядок разбиения окружности // Молодежь.Образование.Экономика: Сб. науч. ст. участников 5-й Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых, аспирантов и студентов, 4 мая 2004 г. Ярославль; Ремдер, 2004. С. 314–320.

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ

Расслоенные толерантные пространства

В статье определяются расслоенные толерантные пространства, являющиеся в теории толерантных пространств естественным аналогом топологических расслоенных пространств. В предлагаемой работе доказывается, что толерантное накрытие [1] определяет расслоенное толерантное пространство, структурной группой которого является фундаментальная группа базы накрытия. Основная теорема статьи утверждает, что проекция расслоенного толерантного пространства является толерантным расслоением в смысле Гуревича.

Настоящая статья использует обозначения и результаты статьи [2], помещенной в этом же сборнике.

Определение 1. Расслоенным толерантным пространством назовем набор

$$\xi = ((E, \overline{\tau}), (B, \tau), (F, \vartheta), p),$$

в котором $(E, \overline{\tau})$, (B, τ), (F, ϑ) — толерантные пространства, а $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ — толерантное отображение, такое что для каждой точки $x \in B$ и соответствующей толерантной звезды $\overline{x} = \tau\langle x \rangle = \{x' \in B | \; x' \tau x\}$ имеется толерантный гомеоморфизм

$$\varphi_{\overline{x}} : \tau\langle x \rangle \times F \to p^{-1}(\tau\langle x \rangle),$$

удовлетворяющий условию

$$p \circ \varphi_{\overline{x}} = pr_1, \tag{1}$$

где pr_1 — проекция на первый декартов сомножитель.

Толерантные пространства $(E, \overline{\tau})$, (B, τ), (F, ϑ) в соответствии с традицией назовем пространством расслоения, базой расслоения и общим (или типичным) слоем. Толерантное отображение p будем называть проекцией.

Подпространство $p^{-1}(x), \overline{\tau}$ в $(E, \overline{\tau})$ назовем слоем над точкой $x \in B$. Из определения 1 следует, что отображение

$$z \in F \longmapsto \varphi_{\overline{x}}(x, z) \in p^{-1}(x)$$

является для каждой точки $x \in B$ толерантным гомеоморфизмом пространства (F, ϑ) на пространство $(p^{-1}(x), \overline{\tau})$.

Определение 2. Пусть $\xi = (E, B, F, p)$ — расслоенное толерантное пространство и G — некоторая группа толерантных гомеоморфизмов слоя (F, ϑ) на себя. Группу G назовем структурной группой расслоенного толерантного пространства ξ, если для каждого слоя $p^{-1}(x)$ имеется совокупность $\Phi(x) = \{\varphi\}$ толерантных гомеоморфизмов $\varphi : F \to p^{-1}(x)$, на которую транзитивно действует справа группа G по формуле

$$(\forall\ g \in G)\ \ (\forall\ \varphi \in \Phi(x)) \quad \varphi \cdot g = \varphi \circ g \in \Phi(x);$$

при этом должно выполняться условие

$$x_2 \in \tau\langle x_1\rangle \Rightarrow \varphi_{\overline{x}_1}|\,\{x_2\} \times F \in \Phi(x_2). \tag{2}$$

Из определения 2, в частности из транзитивности действия группы G, следует, что для точек $x_1,\ x_2,\ x_3 \in B$, таких что $x_3 \in \tau\langle x_1\rangle \cap \tau\langle x_2\rangle$, найдется элемент $g \in G$, такой что

$$\varphi_{\overline{x}_2}|\,\{x_3\} \times F = (\varphi_{\overline{x}_1}|\,\{x_3\} \times F) \circ g.$$

Отметим, что одно расслоенное толерантное пространство может допускать разные структурные группы.

Определение 3. Два расслоенных толерантных пространства $\xi_1 = (E_1, B, F, p_1)$ и $\xi_2 = (E_2, B, F, p_2)$ будем называть эквивалентными, если существует толерантный гомеоморфизм $h : (E_1, \overline{\tau}_1) \to (E_2, \overline{\tau}_2)$, такой что

$$p_2 \circ h = p_1. \tag{3}$$

Если же у этих расслоенных толерантных пространств одна и та же структурная группа G и дополнительно имеется свойство

$$(\forall\ x \in B)\ \ (\forall\ \varphi \in \Phi_1(x)) \quad h \circ \varphi \in \Phi_2(x), \tag{4}$$

то ξ_1 и ξ_2 будем называть G-эквивалентными.

Приведем примеры.

<u>*Пример*</u> 1. *(Тривиальное расслоенное толерантное пространство)* Пусть (B, τ) и (F, ϑ) — произвольные толерантные пространства. Определим тривиальное расслоенное толерантное пространство:

$$\xi = ((B \times F, \tau \times \vartheta), (B, \tau), (F, \vartheta), pr_1)\,.$$

Определение 4. Расслоенное толерантное пространство $\xi = (E, B, F, p)$ назовем тривиализуемым, если оно эквивалентно тривиальному пространству $(B \times F, B, F, pr_1)$.

Очевидно, что эквивалентность $h : E \to B \times F$ из определения 4 должна иметь вид $h = (p, h_2)$, где $h_2 : (E, \overline{\tau}) \to (F, \vartheta)$ — толерантное отображение.

Предложение 1. *Расслоенное толерантное пространство* $\xi = (E, B, F, p)$ *тривиализуемо тогда и только тогда, когда оно допускает тривиальную структурную группу.*

Доказательство

Если ξ — тривиализуемо, то имеется толерантный гомеоморфизм $h : B \times F \to E$ с условием $p \circ h = pr_1$. Это позволяет в определении 1 для ξ взять

$$(\forall\ x \in B) \quad \varphi_{\overline{x}} = h\,|\tau\langle x\rangle \times F\ ,$$

а в определении 2 для ξ и тривиальной группы G положить

$$(\forall\ x \in B) \quad \Phi(x) = \{\varphi_{\overline{x}}\,|\{x\} \times F = h\,|\{x\} \times F\} \text{ — одноэлементное.}$$

Обратно, пусть $\xi = (E, B, F, p)$ допускает тривиальную структурную группу G, транзитивно действующую на $\Phi(x)$. Значит, для любой точки $x \in B$ множество $\Phi(x)$ одноэлементно и состоит из толерантного гомеоморфизма $\varphi_x : F \to p^{-1}(x)$, такого что (см. (2))

$$(\forall\ x_2 \in \tau\langle x_1\rangle) \quad \varphi_{x_2} = \varphi_{\overline{x}_1}|\,\{x_2\} \times F. \qquad (5)$$

В частности

$$(\forall\ x \in B) \quad \varphi_x = \varphi_{\overline{x}}|\,\{x\} \times F. \tag{6}$$

Рассмотрим два отображения $h : E \to B \times F$, $h^{-1} : B \times F \to E$, определяемые формулами

$$(\forall\ y \in E) \quad h(y) = \left(p(y), \varphi^{-1}_{p(y)}(y)\right),$$

$$(\forall\ (x,z) \in B \times F) \quad h^{-1}(x,z) = \varphi_x(z).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся во взаимной обратности отображений h и h^{-1}. А так как по построению $pr_1 \circ h = p$, то остается доказать толерантность h и h^{-1}.

Пусть $y_1 \overline{\tau} y_2$, тогда для точек $x_1 = p(y_1)$ и $x_2 = p(y_2)$ имеем $x_2 \in \tau\langle x_1 \rangle$. Следовательно (см. (5) и (6)),

$$\varphi_{x_2} = \varphi_{\overline{x}_1}|\,\{x_2\} \times F, \qquad \varphi_{x_1} = \varphi_{\overline{x}_1}|\,\{x_1\} \times F. \tag{7}$$

Если обозначить $\varphi^{-1}_{x_1}(y_1) = z_1$, $\varphi^{-1}_{x_2}(y_2) = z_2$, то из (7) следует

$$y_1 = \varphi_{x_1}(z_1) = \varphi_{\overline{x}_1}(x_1, z_1), \qquad y_2 = \varphi_{x_2}(z_2) = \varphi_{\overline{x}_1}(x_2, z_2).$$

Отсюда, в силу того что $x_2 \in \tau\langle x_1 \rangle$, а также $\varphi_{\overline{x}_1} : \tau\langle x_1 \rangle \times F \to p^{-1}\left(\tau\langle x_1 \rangle\right)$ — толерантный гомеоморфизм, и что $y_1 \overline{\tau} y_2$, следует $\tau \times \theta$-толерантность

$$h(y_1) = \left(p(y_1), \varphi^{-1}_{p(y_1)}(y_1)\right) = (x_1, z_1)\tau\times\vartheta(x_2, z_2) = \left(p(y_2), \varphi^{-1}_{p(y_2)}(y_2)\right) = h(y_2).$$

Толерантность отображения h^{-1} доказывается еще проще. Предложение 1 доказано.

<u>*Пример*</u> 2. *(Толерантный лист Мебиуса)* Рассмотрим декартов квадрат $(I_{2n} \times I_{2n}, \iota_{2n} \times \iota_{2n})$ толерантного отрезка и произведем в нем отождествление точек

$$(\forall\ k = \overline{0, 2n}) \quad (\forall\ l = \overline{0, 2n}) \quad \left(\frac{k}{2n}, \frac{l}{2n}\right) \equiv \left(\frac{k}{2n}, \frac{l}{2n}\right)$$

$$\left(0, \frac{l}{2n}\right) \equiv \left(1, \frac{2n-l}{2n}\right). \tag{8}$$

Обозначим через M_{2n} множество классов по отношению эквивалентности $\equiv$. Определим на M_{2n} отношение толерантности μ_{2n}, полагая μ_{2n}-толерантными классы, имеющие $(\iota_{2n} \times \iota_{2n})$-толерантные представители. Толерантное пространство (M_{2n}, μ_{2n}) назовем толерантным листом Мебиуса.

Если отождествить концы толерантного отрезка (I_{2n}, ι_{2n}), то получим толерантную окружность (S^1_{2n}, τ_{2n}). Определим толерантное отображение $p : (M_{2n}, \mu_{2n}) \to (S^1_{2n}, \tau_{2n})$ формулой

$$\left(\forall\, k = \overline{0, 2n}\right) \quad \left(\forall\, l = \overline{0, 2n}\right) \quad p\left(\frac{k}{2n}, \frac{l}{2n}\right) = \frac{k}{2n},$$

согласованной с проведенными выше отождествлениями.

Предложение 2. *Четверка* $\xi = (M_{2n}, S^1_{2n}, I_{2n}, p)$ *является расслоенным толерантным пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Возьмем точку $x \in S^1_{2n}$, заданную своим представителем $\frac{k}{2n}$, $k = \overline{0, 2n}$. Если $\frac{k}{2n} \neq \frac{0}{2n} \equiv \frac{2n}{2n}$, то имеем совпадение толерантных пространств

$$\tau_{2n}\left\langle \frac{k}{2n} \right\rangle \times I_{2n} = \left\{ \frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n} \right\} \times I_{2n} = p^{-1}\left(\tau_{2n}\left\langle \frac{k}{2n} \right\rangle \right).$$

Поэтому в качестве толерантного гомеоморфизма $\varphi_{\overline{x}}$ можно взять тождественное отображение.

Если же $\dfrac{k}{2n} = \dfrac{0}{2n} \equiv \dfrac{2n}{2n}$, то $\tau_{2n}(x) = \left\{ \dfrac{2n-1}{2n}, 0 \equiv 1, \dfrac{1}{2n} \right\}$ и

$$p^{-1}(\tau_{2n}\langle x \rangle) = \left\{ \left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{l'}{2n} \right), \left(0, \frac{l}{2n} \right) \equiv \right.$$

$$\left. \equiv \left(1, \frac{2n-l}{2n} \right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{l''}{2n} \right) \right| l, l', l'' = \overline{0, 2n} \right\}.$$

При этом

$$\mu_{2n}\left\langle \left(0, \frac{l}{2n} \right) \equiv \left(1, \frac{2n-l}{2n} \right) \right\rangle = \left\{ \left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{l+\varepsilon'}{2n} \right), \left(0, \frac{l+\varepsilon}{2n} \right) \equiv \right.$$

$$\equiv \left(1, \frac{2n-(l+\varepsilon)}{2n}\right), \left(\frac{1}{2n}, \frac{2n-(l+\varepsilon'')}{2n}\right) \middle| \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \in \{-1,0,1\} \right\}.$$

В этом случае толерантный гомеоморфизм $\varphi_{\overline{x}}$ можно задать следующим образом:

$$\varphi_{\overline{x}}\left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{l}{2n}\right) = \left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{l}{2n}\right),$$

$$\varphi_{\overline{x}}\left(0 \equiv 1, \frac{l}{2n}\right) = \left(0, \frac{l}{2n}\right) \equiv \left(1, \frac{2n-l}{2n}\right),$$

$$\varphi_{\overline{x}}\left(\frac{1}{2n}, \frac{l}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2n}, \frac{2n-l}{2n}\right).$$

В обоих случаях очевидно выполняется условие (1): $p \circ \varphi_{\overline{x}} = pr_1$. Предложение 2 доказано.

Отметим, что $\xi = (M_{2n}, S^1_{2n}, I_{2n}, p)$ не тривиализуемо, так как тривиальная группа не может транзитивно действовать на двухэлементном множестве

$$\left\{\varphi_{\frac{2n-1}{2n}}\middle|\{0 \equiv 1\} \times I_{2n} \neq \varphi_{\frac{1}{2n}}\middle|\{0 \equiv 1\} \times I_{2n}\right\}.$$

Отсутствие тривиализации показывает и следующее «геометрическое» рассуждение. При наличии тривиализирующего толерантного гомеоморфизма $h : M_{2n} \to S^1_{2n} \times I_{2n}$, ввиду его послойности, толерантная окружность $S^1_{2n} \times \left\{\frac{n}{2n}\right\} \subset M_{2n}$ должна отобразиться в толерантную кривую, пересекающую все слои I_{2n} в $S^1_{2n} \times I_{2n}$ и состоящую из внутренних точек этого пространства. Но тогда линейно связное дополнение

$$M_{2n} \backslash \left(S^1_{2n} \times \left\{\frac{n}{2n}\right\}\right)$$

должно быть толерантно гомеоморфно пространству

$$S^1_{2n} \times I_{2n} \backslash h\left(S^1_{2n} \times \left\{\frac{n}{2n}\right\}\right),$$

которое состоит из двух компонент линейной связности.

Пример 3. *(Толерантные накрытия)* Все необходимые сведения по толерантным накрытиям можно найти в работе [1].

Предложение 3. *Если $p : (\overline{X}, \overline{\tau}) \to (X, \tau)$ — толерантное накрытие с линейно связными пространствами $(\overline{X}, \overline{\tau})$ и (X, τ), а $x_0 \in X$ — произвольная точка базы, то система $\xi = (\overline{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ является расслоенным толерантным пространством, допускающим в качестве структурной группы фундаментальную группу $\pi(X, x_0)$.*

Доказательство

Ввиду линейной связности (X, τ) можно зафиксировать для каждой точки $x \in X$ толерантный путь $\omega(x)$ в (X, τ), соединяющий точку x_0 с x. Для построения $\varphi_{\overline{x}}$ на $\tau\langle x\rangle \times p^{-1}(x_0)$ каждой точке $y \in \tau\langle x\rangle$ сопоставим толерантный путь $\alpha(x, y)$ длины 1 из точки x в точку y. Тогда толерантный путь $\omega(x) * \alpha(x, y)$ соединит x_0 с y. В доказательстве теоремы 9 работы [1], с помощью поднятий толерантного пути ω с началами в каждой точке слоя $p^{-1}(\omega(0))$, был определен толерантный гомеоморфизм

$$\varphi_{[\omega]} : p^{-1}(\omega(0)) \to p^{-1}(\omega(1)),$$

зависящий лишь от класса $[\omega]$ толерантной гомтопности пути ω. С его помощью определим

$$(\forall\ y \in \tau\langle x\rangle) \quad \big(\forall\ z \in p^{-1}(x_0)\big) \quad \varphi_{\overline{x}}(y, z) = \varphi_{[\omega(x)*\alpha(x,y)]}(z). \tag{9}$$

Тем самым мы получаем биекцию

$$\varphi_{\overline{x}} : \tau\langle x\rangle \times p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(\tau\langle x\rangle),$$

которая по построению удовлетворяет свойству

$$p \circ \varphi_{\overline{x}} = pr_1. \tag{10}$$

Остается проверить толерантность отображений $\varphi_{\overline{x}}$ и $\varphi_{\overline{x}}^{-1}$. Пусть $y, y' \in \tau\langle x\rangle$ и $y\tau y'$. Тогда

$$\varphi_{\overline{x}}(y, z) = \varphi_{[\omega(x)*\alpha(x,y)]}(z) = \varphi_{[\omega(x)*\alpha(x,y')*\alpha(y',y)]}(z). \tag{11}$$

Это следует из того, что толерантный путь $\alpha(x,y') * \alpha(y',y) * \alpha^{-1}(x,y)$ толерантно гомотопен тождественному, так как лежит в классе толерантности, а все классы толерантности стягиваются.

Воспользовавшись свойствами отображений $\varphi_{[\omega]}$ (см. доказательство теоремы 9 в [1]), из (11) получаем

$$\varphi_{\overline{x}}(y,z) = \varphi_{[\alpha(y',y)]}(\varphi_{\overline{x}}(y',z)).$$

Так как $\alpha(y,y')$ — толерантный путь длины 1, то по построению отображения $\varphi_{[\omega]}$ имеем толерантность $\varphi_{\overline{x}}(y,z)\overline{\tau}\varphi_{\overline{x}}(y',z)$, что доказывает толерантность отображения $\varphi_{\overline{x}}$, ввиду дискретности пространства $p^{-1}(x)$, которому принадлежит z.

Обратно, пусть $\varphi_{\overline{x}}(y,z)\overline{\tau}\varphi_{\overline{x}}(y',z')$. Тогда применяя к этой паре отображение p и формулу (10), получаем $y\tau y'$. Далее предположим противное: $z \neq z'$. Тогда биективность $\varphi_{[\omega]}$ дает, что $\varphi_{[\omega(x)]}(z) \neq \varphi_{[\omega(x)]}(z')$. При этом $\varphi_{[\omega(x)]}(z),\ \varphi_{[\omega(x)]}(z') \in p^{-1}(x)$. С другой стороны, срезы этих точек имеют толерантные между собой точки

$$\varphi_{\overline{x}}(y,z) = \varphi_{[\alpha(x,y)]}(\varphi_{[\omega(x)]}(z)) \in \overline{\tau}\langle\varphi_{[\omega(x)]}(z)\rangle,$$

$$\varphi_{\overline{x}}(y',z') = \varphi_{[\alpha(x,y')]}(\varphi_{[\omega(x)]}(z')) \in \overline{\tau}\langle\varphi_{[\omega(x)]}(z')\rangle.$$

Этот факт противоречит предложению 3 работы [1]. Итак, $\xi = (\overline{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ — расслоенное толерантное пространство.

Рассмотрим теперь группу $G = \pi(X, x_0)$, действующую на дискретном толерантном пространстве $p^{-1}(x_0)$ как группа толерантных гомеоморфизмов по формуле

$$(\forall\ [\gamma] \in \pi(X,x_0)) \quad \big(\forall\ z \in p^{-1}(x_0)\big) \quad [\gamma]\cdot z = \varphi_{[\gamma^{-1}]}(z).$$

И для каждой точки $x \in X$ определим семейство

$$\Phi(x) = \left\{\varphi_{[\omega]} : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x)\right\},$$

где ω пробегает множество толерантных путей в (X,τ) с началом $\omega(0) = x_0$ и концом $\omega(1) = x$. Группа $\pi(X,x_0)$ действует справа на этих семействах

$$(\forall\, \varphi_{[\omega]} \in \Phi(x)) \quad (\forall\, [\gamma] \in \pi(X,x_0)) \quad \varphi_{[\omega]}\cdot[\gamma] = \varphi_{[\omega]}\circ\varphi_{[\gamma^{-1}]} = \varphi_{[\gamma^{-1}*\omega]} \in \Phi(x).$$

Это действие транзитивно:

$$(\forall\, \varphi_{[\omega]},\ \varphi_{[\omega']} \in \Phi(x)) \quad \varphi_{[\omega']} = \varphi_{[\omega'*\omega^{-1}*\omega]} = \varphi_{[\omega]}\circ\varphi_{[\omega'*\omega^{-1}]} = \varphi_{[\omega]}\cdot[\omega*(\omega')^{-1}],$$

так как $[\omega*(\omega')^{-1}] \in \pi(X,x_0)$.

Наконец, если $y \in \tau\langle x\rangle$, то, применив (9), получаем

$$\varphi_{\overline{x}}|\{y\}\times p^{-1}(x_0) = \varphi_{[\omega(x)*\alpha(x,y)]} \in \Phi(y).$$

Все это означает, что $\xi = (\overline{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ допускает в качестве структурной группы фундаментальную группу $\pi(X,x_0)$. Предложение 3 доказано.

<u>*Пример*</u> 4. *(Векторные толерантные расслоения)* Рассмотрим метрические толерантные пространства $(\mathbb{R}^n,\tau_d)$ и $(\mathbb{C}^n,\tau_d)$, в которых толерантность τ_d определяется условием

$$x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}\ \tau_d\ y = (y_i)_{i=\overline{1,n}} \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{n=1}^{n}|x_i-y_i|^2} < d,$$

где d —фиксированное положительное действительное число.

Назовем действительным (комплексным) n-мерным векторным толерантным расслоением расслоенное толерантное пространство ξ, слоем которого является пространство $(\mathbb{R}^n,\tau_d)$ (или $(\mathbb{C}^n,\tau_d)$), а структурной группой является ортогональная группа $O(n)$ (или унитарная группа $U(n)$).

Докажем теперь, что проекция всякого расслоенного толерантного пространства является толерантным расслоением в смысле Гуревича. В отличие от аналогичного утверждения в топологии в толерантном случае на базу не накладывается никаких дополнительных условий.

Теорема 1. *Пусть* $\xi = ((E,\overline{\tau}),(B,\tau),(F,\vartheta),p)$ *— расслоенное толерантное пространство. Тогда его проекция* $p:(E,\overline{\tau})\to(B,\tau)$ *является толерантным расслоением (в смысле Гуревича).*

Доказательство

Примем обозначения статьи [2]. Через $(\wp(B),\varkappa_B)$ обозначим пространство толерантных путей в пространстве (B,τ). В пространстве $(E\times\wp(B),\overline{\tau}\times\varkappa_B)$ рассмотрим пространство

$$\overline{B}=\{(y,\omega_n)|\ \omega_n(0)=p(y)\}$$

и толерантное отображение $\overline{p}:(\wp(E),\varkappa_E)\to(\overline{B},\overline{\tau}\times\varkappa_B)$, такое что

$$(\forall\,\overline{\omega}_n\in\wp(E))\quad \overline{p}(\overline{\omega}_n)=(\overline{\omega}_n(0),p\circ\overline{\omega}_n).$$

Для доказательства теоремы 1, согласно предложению 2 статьи [2], нам достаточно построить накрывающую функцию $\lambda:(\overline{B},\overline{\tau}\times\varkappa_B)\to$ $\to(\wp(E),\varkappa_E)$ для p, представляющую собой толерантное отображение правое обратное к $\overline{p}$:

$$\overline{p}\circ\lambda=\mathbb{I}_{\overline{B}}.$$

Пусть $\omega_n:(I_n,\iota_n)\to(B,\tau)$ — произвольный толерантный путь в (B,τ). Обозначим через $x_k=\omega_n\left(\frac{k}{n}\right),\ k=\overline{0,n}$ точки траектории пути ω_n. Пусть $y\in E$ и $p(y)=\omega_n(0)=x_0$, то есть $(y,\omega_n)\in\overline{B}$. Построим толерантный путь $\lambda(y,\omega_n)=\overline{\omega}_n:I_n\to E$ индуктивно по точкам его траектории $y_k=\overline{\omega}_n\left(\frac{k}{n}\right),\ k=\overline{0,n}$, определяя начальную точку $y_0=y$. По условию имеем $p(y_0)=x_0$. Тогда можно зафиксировать точку

$$z_0=pr_2\circ\varphi^{-1}_{\overline{x_0}}(y_0),$$

которая является единственной точкой $z_0\in F$ удовлетворяющей условию

$$\varphi_{\overline{x}_0}(x_0,z_0)=y_0.$$

Следующую точку траектории $\overline{\omega}_n$ определим формулой

$$y_1 = \varphi_{\overline{x}_0}(x_1, z_0). \tag{12}$$

Так как $\varphi_{\overline{x}_0}$ — толерантный гомеоморфизм, $x_0 = \omega_n(0)\ \tau\ \omega_n\left(\frac{1}{n}\right) = x_1$, то $y_1 = \varphi_{\overline{x}_0}(x_1, z_0)\ \overline{\tau}\ \varphi_{\overline{x}_0}(x_0, z_0) = y_0$. При этом построенная точка y_1 лежит над x_1. В самом деле, по формулам (12) и (1)

$$p(y_1) = p \circ \varphi_{\overline{x}_0}(x_1, z_0) = pr_1(x_1, z_0) = x_1.$$

Продолжая индуктивно процесс построения толерантного пути $\overline{\omega}_n\left(\frac{k}{n}\right) =$ $= y_k$, предположим, что уже построены точки $y_0, \ldots, y_k \in E$, такие что

$$(\forall\ i = \overline{0, k-1}) \quad y_i \overline{\tau} y_{i+1} \quad \text{и} \quad (\forall\ i = \overline{0, k}) \quad p(y_i) = x_i.$$

Как и выше, однозначно определяется точка $z_k \in F$, такая что

$$z_k = pr_2 \circ \varphi^{-1}_{\overline{x}_k}(y_k) \quad \text{и} \quad \varphi_{\overline{x}_k}(x_k, z_k) = y_k. \tag{13}$$

И по аналогии с (12) определяем

$$y_{k+1} = \varphi_{\overline{x}_k}(x_{k+1}, z_k). \tag{14}$$

И те же соображения, что и раньше, дают

$$y_{k+1} = \varphi_{\overline{x}_k}(x_{k+1}, z_k)\ \overline{\tau}\ \varphi_{\overline{x}_k}(x_k, z_k) = y_k;$$

$$p(y_k) = p \circ \varphi_{\overline{x}_k}(x_{k+1}, z_k) = pr_1(x_{k+1}, z_k) = x_{k+1}.$$

Тем самым в пространстве $(E, \overline{\tau})$ индуктивно построен толерантный путь $\lambda(y, \omega_n) = \overline{\omega}_n$, такой что

$$(\forall\ k = \overline{0, n}) \quad \overline{\omega}_n\left(\frac{k}{n}\right) = y_k, \quad p \circ \overline{\omega}_n = \omega_n, \quad \overline{\omega}_n(0) = y_0 = y.$$

Следовательно, построено отображение $\lambda : \overline{B} \to \wp(E)$, такое что $\overline{p} \circ \lambda = \mathbb{I}_{\overline{B}}$.

Осталось показать толерантность отображения λ. Пусть $(y,\omega_n),(y',\omega'_m) \in \overline{B}$ и $y\overline{\tau}y'$, $\omega_n \varkappa_B \omega'_m$. Последнее означает ([2], определение 5), что существуют подходящие наборы элементарных преобразований, превращающие пути ω_n и ω'_m в просто толерантно гомотопные:

$$\eta^{\pm}(k_1,\varepsilon_1)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}(k_s,\varepsilon_s)(\omega_n) = \alpha_r \approx \alpha'_r = \eta^{\pm}(k'_1,\varepsilon'_1)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}(k'_t,\varepsilon'_t)(\omega'_m).$$

Рассмотрим пути $\overline{\omega}_n = \lambda(y,\omega_n)$ и $\overline{\omega'}_m = \lambda(y',\omega'_m)$ и применим к ним те же элементарные преобразования

$$\eta^{\pm}(k_1,\varepsilon_1)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}(k_s,\varepsilon_s)(\overline{\omega}_n) = \beta_r, \quad \eta^{\pm}(k'_1,\varepsilon'_1)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}(k'_t,\varepsilon'_t)(\overline{\omega'}_m) = \beta'_r. \tag{15}$$

Поскольку обратные элементарные преобразования являются частичными (см. условие (1) в [2]), то следует обсудить возможность их применения к $\overline{\omega}_n$ и $\overline{\omega'}_m$. В самом деле, пусть в траектории пути ω_n имеем $x_k = x_{k+1}$. Тогда формулы (13) и (14) показывают, что

$$y_k = \varphi_{\overline{x}_k}(x_k,z_k), \quad y_{k+1} = \varphi_{\overline{x}_k}(x_{k+1},z_k) = \varphi_{\overline{x}_k}(x_k,z_k) = y_k.$$

Таким образом,

$$x_k = \omega_n\left(\frac{k}{n}\right) = \omega_n\left(\frac{k+1}{n}\right) = x_{k+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_k = \lambda(y,\omega_n)\left(\frac{k}{n}\right) = \lambda(y,\omega_n)\left(\frac{k+1}{n}\right) = y_{k+1}. \tag{16}$$

Из свойства (16) можно сделать еще один важный вывод: $\beta_r = \lambda(y,\alpha_r) = \overline{\alpha}_r$ и $\beta'_r = \lambda(y',\alpha'_r)\overline{\alpha'}_r$. Поэтому для доказательства толерантности λ нам надо показать, что

$$\alpha_r \approx \alpha'_r \Rightarrow \overline{\alpha}_r \approx \overline{\alpha'}_r.$$

Обозначим для краткости $\alpha_r\left(\frac{k}{r}\right) = x_k$, $\alpha'_r\left(\frac{k}{r}\right) = x'_k$, $\overline{\alpha}_r\left(\frac{k}{r}\right) = y_k$, $\overline{\alpha'}_r\left(\frac{k}{r}\right) = y'_k$. При этом имеем по условию $x_k\tau x'_l$ при $|k-l| \leqslant 1$. Нам надо показать, что

$$(\forall\ k,l=\overline{0,\eta}) \quad |k-l|\leqslant 1 \Rightarrow y_k\overline{\tau}y'_l.$$

По предположению $y_0 = y\overline{\tau}y' = y'_0$. А по построению λ

$$y_0 = \varphi_{\overline{x}_0}(x_0, z_0)\overline{\tau}y'_0 = \varphi_{\overline{x'_0}}(x'_0, z'_0).$$

Так как $x_0 \in \tau\langle x'_0\rangle$, то дополнительно имеем $y_0 = \varphi_{\overline{x'_0}}(x_0, u_0)$ для некоторого однозначно определенного $u_0 \in F$. Отсюда толерантная гомеоморфность $\varphi_{\overline{x'_0}}$ влечет $u_0\vartheta z'_0$. Последняя толерантность вместе с $x_0\tau x'_1$ показывает, что

$$y_0 = \varphi_{\overline{x'_0}}(x_0, u_0)\overline{\tau}y'_1 = \varphi_{\overline{x'_0}}(x'_1, z'_0).$$

Аналогично доказывается, что $y_1\overline{\tau}y'_0$.

Рассмотрим теперь другое представление для точки y'_1. А именно для точки $x'_1 \in \tau\langle x_0\rangle$ имеется однозначно определенная точка $u'_0 \in F$, такая что

$$y'_1 = \varphi_{\overline{x'_0}}(x'_1, z'_0) = \varphi_{\overline{x}_0}(x'_1, u'_0). \qquad (17)$$

Так как $y_0 = \varphi_{\overline{x}_0}(x_0, z_0)$, то доказанная толерантность $y'_1\overline{\tau}y_0$ влечет толерантность $z_0\vartheta u'_0$. Если к этому добавить $x_1\tau x'_1$, то формула $y_1 = \varphi_{\overline{x}_0}(x_1, z_0)$ вместе с (17) показывает, что $y_1\overline{\tau}y'_1$.

Таким образом, все четыре точки $y_0,\ y'_0,\ y_1,\ y'_1$ попарно $\overline{\tau}$-толерантны. Те же самые рассуждения и формулы (13) и (14) по индукции доказывают, что любая четверка $y_k,\ y'_k,\ y_{k+1},\ y'_{k+1},\ k = \overline{0, r-1}$ состоит из попарно $\overline{\tau}$-толерантных точек. Это означает, что $\overline{\alpha}_r \approx \overline{\alpha'}_r$, чем завершается доказательство теоремы 1.

Библиографический список

1. *Небалуев С.И.* Фундаментальная группа, толерантные пространства и толерантные накрытия // Чебышевский сборник: Тр. VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5, вып. 3. С. 144–152.

2. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3. (В печати)

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ, И.А. КЛЯЕВА

Толерантное расслоение пространства толерантных путей

В статье строится толерантное пространство толерантных путей и доказывается, что оно определяет толерантное расслоение в смысле Гуревича.

В алгебраической топологии важную роль играют расслоения, связанные с пространством непрерывных путей. Такую же роль должно играть в теории толерантных пространств пространство толерантных путей.

Толерантное пространство [1] является математической моделью понятия схожести и представляет собой пару (X, τ), состоящую из базисного множества X и отношения толерантности $\tau \subset X \times X$, которое должно быть рефлексивным и симметричным. Если $(x_1, x_2) \in \tau$, то будем называть точки x_1 и x_2 толерантными и записывать $x_1 \tau x_2$. Толерантным отображением $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ толерантных пространств (X, τ) и (Y, θ) назовем отображение $f : X \to Y$, сохраняющее толерантность точек, то есть для $x_1 \tau x_2$ получаем $f(x_1) \theta f(x_2)$.

Роль единичного отрезка в гомотопической теории толерантных пространств играют пространства (I_n, ι_n), в которых $I_n = \{\frac{k}{n} | k = \overline{0, n}\}$ — множество точек деления единичного отрезка на n частей, а толерантность ι_n задается условием

$$\frac{k}{n}\iota_n\frac{l}{n} \Leftrightarrow |k-l| \leqslant 1.$$

Определение 1. Два толерантных отображения $f_0, f_1 : (X,\tau) \to (Y,\theta)$ назовем толерантно гомотопными относительно подмножества $A \subset X$ и обозначим $f_0 \sim f_1(relA)$, если существует натуральное число n и толерантное отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \to (Y,\theta)$, такое что

1) $(\forall x \in X)\ F(x,0) = f_0(x)$;

2) $(\forall x \in X)\ F(x,1) = f_1(x)$;

3) $(\forall x \in A)(\forall k = \overline{0,n})\ F(x, \frac{k}{n}) = f_0(x)$.

Множество A может быть и пустым, тогда условие 3) является излишним. В этом случае будем использовать обозначение $f_0 \sim f_1$.

Если в определении 1 можно взять $n = 1$, то толерантную гомотопность будем называть простой или одношаговой и записывать $f_0 \approx f_1$. Простая толерантная гомотопность отображений f_0, f_1 означает, что

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1\tau x_2 \Rightarrow f_0(x_1)\theta f_1(x_2).$$

Определение 2. Толерантное отображение $p : (E,\overline{\tau}) \to (B,\tau)$ удовлетворяет условию накрывающей толерантной гомотопии относительно пространства (Y,θ), если для любых толерантных отображений

$$f' : (Y,\theta) \to (E,\overline{\tau}) \quad \text{и} \quad F : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (B,\tau),$$

для которых $F(y,0) = (p \circ f')(y)$ при $y \in Y$, существует толерантное отображение $F' : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (E,\overline{\tau})$, такое что $F'(y,0) = f'(y)$ и $p \circ F' = F$.

Определение 3. Толерантное отображение $p : (E,\overline{\tau}) \to (B,\tau)$ назовем толерантным расслоением (в смысле Гуревича), если p обладает свойством накрывающей толерантной гомотопии относительно любого толерантного пространства (Y, θ). В этом случае $(E, \overline{\tau})$ будем называть пространством расслоения, (B, τ) — базой расслоения, $p^{-1}(b)$ — слоем над точкой $b \in B$.

Определение 4. Толерантным путем длины n в пространстве (X, τ) назовем толерантное отображение $\omega_n : (I_n, \iota_n) \to (X, \tau)$. Точки $\omega_n(0)$ и $\omega_n(1)$ называются началом и концом пути ω_n. Если $\omega_n(0) = \omega_n(1) = x_0$, то ω_n называется толерантной петлей в точке x_0.

Для каждого толерантного пути ω_n и для каждого натурального числа $m \geqslant n$ определим толерантный путь $\omega_{m,n} : (I_m, \iota_m) \to (X, \tau)$, такой что

$$\omega_{m,n} = \begin{cases} \omega_n\left(\frac{k}{n}\right) & k = \overline{0, n}; \\ \omega_n(1) & k = \overline{n, m}. \end{cases}$$

Путь $\omega_{m,n}$ назовем продлением пути ω_n.

На множестве толерантных путей в пространстве (X, τ) может быть определена частичная операция произведения путей ω_n и ω'_m, у которых $\omega_n(1) = \omega'_m(0)$. Результатом этой операции будет новый путь $\omega_n * \omega'_m$ длины $n + m$, определяемый формулой

$$\omega_n * \omega'_m\left(\frac{k}{n+m}\right) = \begin{cases} \omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & k = \overline{0, n}; \\ \omega'_m\left(\frac{k-n}{m}\right), & k = \overline{n, m}. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(X)$ множество толерантных путей в пространстве (X, τ). Если $M \in \mathbb{N}$, то определим в $\mathfrak{P}(X)$ два подмножества

$$\mathfrak{P}_M(X) = \{\omega_n \in \mathfrak{P}(X) | n \leqslant M\}, \quad \mathfrak{P}'_M(X) = \{\omega_n \in \mathfrak{P}(X) | n = M\}.$$

Зададим на множестве $\mathfrak{P}(X)$ структуру толерантного пространства. Для этого сначала определим прямые и обратные элементарные преобразования толерантных путей, представляющие собой вставки или сокращения малого постоянного пути. Пусть $\omega_n : (I_n, \iota_n) \to (X, \tau)$ — толерантный путь длины n. В множестве $\{0, \ldots, n\} \times \{0, 1, 2\}$ рассмотрим подмножество

$$P(n) = \{(k,\varepsilon)|\ k = \overline{1, n-1},\ \varepsilon = \overline{0,2}\} \cup \{(k,\varepsilon)|\ k = 0,\ k = n,\ \varepsilon = \overline{0,1}\}.$$

Для каждой пары $(k,\varepsilon) \in P(n)$ определим отображение $\eta^+(k,\varepsilon) : \mathfrak{P}'_n(X) \to \mathfrak{P}'_{n+\varepsilon}(X)$ формулой

$$(\forall\ l = \overline{0, n+\varepsilon})\ (\eta^+(k,\varepsilon)(\omega_n)) \left(\frac{l}{n+\varepsilon}\right) = \begin{cases} \omega_n\left(\frac{l}{n}\right), & l = \overline{0,k}; \\ \omega_n\left(\frac{k}{n}\right), & l = \overline{k, k+\varepsilon}; \\ \omega_n\left(\frac{l-\varepsilon}{n}\right), & l = \overline{k+\varepsilon, n+\varepsilon}. \end{cases}$$

Толерантность пути $\eta^+(k,\varepsilon)(\omega_n)$ очевидна.

Рассмотрим теперь еще одно множество

$$Q(n) = \{(k,\varepsilon)|k = \overline{1, n-3},\ \varepsilon = \overline{0,2}\} \cup$$
$$\cup \{(k,\varepsilon)|k = 0, k = n-2, k = n-1, \varepsilon = \overline{0,1}\}$$

Если толерантный путь $\omega_n \in \mathfrak{P}(X)$ таков, что

$$(\exists\ (k,\varepsilon) \in Q(n))(\forall\ l = \overline{0,\varepsilon}) \qquad \omega_n\left(\frac{k+l}{n}\right) = \omega_n\left(\frac{k}{n}\right), \tag{1}$$

то определим частичное отображение $\eta^-(k,\varepsilon) : \mathfrak{P}'_n(X) \to \mathfrak{P}'_{n-\varepsilon}(X)$ на путях со свойством (1) формулой

$$(\forall\ l = \overline{0, n-\varepsilon}) \quad (\eta^-(k,\varepsilon)(\omega_n)) \left(\frac{l}{n-\varepsilon}\right) = \begin{cases} \omega_n\left(\frac{l}{n}\right), & l = \overline{0,k}; \\ \omega_n\left(\frac{l+\varepsilon}{n}\right), & l = \overline{k, n-\varepsilon}. \end{cases}$$

Вновь определенный путь за счет свойства (1) также является толерантным.

Отображения $\eta^+(k,\varepsilon)$, $\eta^-(k,\varepsilon)$ будем называть прямым и обратным элементарным преобразованием толерантных путей. Договоримся обозначать символом $\eta^\pm(k,\varepsilon)$ элементарное преобразование, которое может быть как прямым, так и обратным. Траектории путей ω_n и $\eta^\pm(k,\varepsilon)(\omega_n)$ одинаковые. В частности, элементарные преобразования сохраняют начало и конец пути:

$$(\eta^\pm(k,\varepsilon)(\omega_n))(0) = \omega_n(0), \qquad (\eta^\pm(k,\varepsilon)(\omega_n))(1) = \omega_n(1). \tag{2}$$

Определение 5. Два толерантных пути ω_n и ω'_m в пространстве (X,τ) назовем $\varkappa_X$-толерантными и будем писать $\omega_n\varkappa_X\omega'_m$, если с помощью элементарных преобразований, соответствующих некоторым различным точкам путей ω_n и ω'_m, эти пути можно преобразовать в пути одинаковой длины, которые будут просто толерантно гомотопны друг другу. Другими словами,

$$(\exists\ 0 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n) \quad (\exists\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \overset{s}{\times}\ \{0,1,2\})$$

$$(\exists\ 0 \leqslant k'_1 < \ldots < k'_t \leqslant m) \quad (\exists\ (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_t) \in \overset{t}{\times}\ \{0,1,2\})$$

$$\eta^{\pm}(k_1,\varepsilon_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(k_s,\varepsilon_s)(\omega_n) = \alpha_r : (I_r,\iota_r) \to (X,\tau),$$

$$\eta^{\pm}(k'_1,\varepsilon'_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(k'_t,\varepsilon'_t)(\omega'_m) = \alpha'_r : (I_r,\iota_r) \to (X,\tau),$$

$$(\forall\ k,l = \overline{0,r}) \qquad |k-l| \leqslant 1 \Rightarrow \alpha_r\left(\frac{k}{r}\right)\tau\alpha'_r\left(\frac{l}{r}\right). \tag{3}$$

Очевидно, что определенное выше отношение $\varkappa_X$ рефлексивно и симметрично и значит, является отношением толерантности на множестве $\mathfrak{P}(X)$ толерантных путей в пространстве (X,τ). Таким образом, имеем толерантное пространство $(\mathfrak{P}(X),\varkappa_X)$, которое будем называть пространством толерантных путей. Отметим, что в работе [2] использовалась иная толерантная структура на множестве $\mathfrak{P}(X)$.

Договоримся вместо символа $\varkappa_X$ использовать $\varkappa$, если будет ясно, о каком пространстве (X,τ) идет речь.

Заметим, что из свойств (2) и (3) следует, что

$$\omega_n\varkappa\omega'_m \Rightarrow \omega_n(0)\tau\omega'_m(0), \quad \omega_n(1)\tau\omega'_m(1), \tag{4}$$

то есть концы и начала $\varkappa$-толерантных путей будут τ-толерантны.

Предложение 1. *Пусть толерантные пути* ω_{n_1}, ω'_{n_2}, γ_{m_1}, γ'_{m_2} *в пространстве* (X,τ) *таковы, что* $\omega_{n_1}\varkappa\omega'_{n_2}$, $\gamma_{m_1}\varkappa\gamma'_{m_2}$ *и* $\omega_{n_1}(1) = \gamma_{m_1}(0)$, $\omega'_{n_2}(1) = \gamma'_{m_2}(0)$, *тогда* $(\omega_{n_1} * \gamma_{m_1})\varkappa(\omega'_{n_2} * \gamma'_{m_2})$.

Доказательство

Из предположения $\omega_{n_1} \varkappa \omega'_{n_2}$, согласно определению 5, следует, что

$$(\exists\, 0 \leqslant k_1 < \ldots < k_{s_1} \leqslant n_1) \quad (\exists\, (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s_1}) \in \overset{s_1}{\times} \{0,1,2\})$$

$$(\exists\, 0 \leqslant k'_1 < \ldots < k'_{s_2} \leqslant n_2) \quad (\exists\, (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{s_2}) \in \overset{s_2}{\times} \{0,1,2\})$$

$$\eta^{\pm}(k_1, \varepsilon_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(k_{s_1}, \varepsilon_{s_1})(\omega_{n_1}) = \alpha_{r_1},$$

$$\eta^{\pm}(k'_1, \varepsilon'_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(k'_{s_2}, \varepsilon'_{s_2})(\omega'_{n_2}) = \alpha'_{r_1},$$

$$(\forall\, k, l = \overline{0, r_1}) \quad |k - l| \leqslant 1 \Rightarrow \alpha_{r_1}\left(\frac{k}{r_1}\right) \tau \alpha'_{r_1}\left(\frac{l}{r_1}\right).$$

Аналогично из условия $\gamma_{m_1} \varkappa \gamma'_{m_2}$ следует, что

$$(\exists\, 0 \leqslant l_1 < \ldots < l_{t_1} \leqslant m_1) \quad (\exists\, (\delta_1, \ldots, \delta_{t_1}) \in \overset{t_1}{\times} \{0,1,2\})$$

$$(\exists\, 0 \leqslant l'_1 < \ldots < l'_{t_2} \leqslant m_2) \quad (\exists\, (\delta'_1, \ldots, \delta'_{t_2}) \in \overset{t_2}{\times} \{0,1,2\})$$

$$\eta^{\pm}(l_1, \delta_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(l_{t_1}, \delta_{t_1})(\gamma_{m_1}) = \beta_{r_2},$$

$$\eta^{\pm}(l'_1, \delta'_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(l'_{t_2}, \delta'_{t_2})(\gamma'_{m_2}) = \beta'_{r_2},$$

$$(\forall\, k, l = \overline{0, r_2}) \quad |k - l| \leqslant 1 \Rightarrow \beta_{r_2}\left(\frac{k}{r_2}\right) \tau \beta'_{r_2}\left(\frac{l}{r_2}\right).$$

Тогда имеем

$$\eta^{\pm}(k_1, \varepsilon_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(k_{s_1}, \varepsilon_{s_1}) \circ \eta^{\pm}(n_1 + l_1, \delta_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(n_1 + l_{t_1}, \delta_{t_1})(\omega_{n_1} * \gamma_{m_1}) =$$

$$= \alpha_{r_1} * \beta_{r_2}.$$

Аналогично

$$\eta^{\pm}(k'_1, \varepsilon'_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(k'_{s_2}, \varepsilon'_{s_2}) \circ \eta^{\pm}(n_2 + l'_1, \delta'_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(n_2 + l'_{t_2}, \delta'_{t_2})(\omega'_{n_2} * \gamma'_{m_2}) =$$

$$= \alpha'_{r_1} * \beta'_{r_2}.$$

Может получиться так, что $k_{s_1} = n_1 + l_1$, и тем самым нарушается условие строгого возрастания в определение 5. Но это может быть лишь в случае $k_{s_1} = n_1$ и $l_1 = 0$. Тогда $\varepsilon_{s_1} \leqslant 1$, $\delta_1 \leqslant 1$ и поэтому

$$\eta^{+}(k_{s_1}, \varepsilon_{s_1}) \circ \eta^{+}(n_1 + l_1, \delta_1) = \eta(n_1, \varepsilon_{s_1}) \circ \eta(n_1, \delta_1) = \eta(n_1, \varepsilon_{s_1} + \delta_1)$$

является элементарным преобразованием, соответствующим внутренней точке пути $\omega_{n_1} * \gamma_{m_1}$ с $0 \leqslant \varepsilon_{s_1} + \delta_1 \leqslant 2$.

Рассмотрим еще один возможный случай:

$$\eta^{+}(n_1, \varepsilon_{s_1}) \circ \eta^{-}(n_1, \delta_1) = \begin{cases} \eta^{-}(n_1, \delta_1), & \varepsilon_{s_1} = 0; \\ \eta^{+}(n_1, \varepsilon_1), & \delta_1 = 0; \\ \mathbf{1}, & \delta_1 = s_1 = 1. \end{cases}$$

Так как других вариантов быть не может, то очевидный факт простой толерантной гомотопии $\alpha_{r_1} * \beta_{r_2} \approx \alpha'_{r_1} * \beta'_{r_2}$ показывает, что

$$(\omega_{n_1} * \gamma_{m_1}) \varkappa (\omega'_{n_2} * \gamma'_{m_2}).$$

Предложение 1 доказано.

Пусть теперь $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ — произвольное толерантное отображение. В пространстве $(E \times \mathfrak{P}(B), \overline{\tau} \times \varkappa_B)$ рассмотрим подпространства, определенные на подмножествах,

$$\overline{B} = \{(a, \omega_n) \in E \times \mathfrak{P}(B) | \omega_n(0) = p(a)\}, \ \overline{B}_M = \{(a, \omega_n) \in \overline{B} | n \leqslant M\},$$

где $M \in \mathbb{N}$. Понятно, что $\overline{B}_M \subset \overline{B}_{M+1}$, $\overline{B} = \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} \overline{B}_M$.

Определим отображение $\overline{p} : \mathfrak{P}(E) \to \overline{B}$ формулой

$$(\forall\, \overline{\omega}_n \in \mathfrak{P}(E)) \quad \overline{p}(\overline{\omega}_n) = (\overline{\omega}_n(0), p \circ \overline{\omega}_n). \tag{5}$$

Так как начала $\varkappa_E$-толерантных путей будут $\overline{\tau}$-толерантны (см.(4)), а элементарные преобразования толерантных путей и простая толерантная гомотопность сохраняются при композиции с толерантным отображением p, то, следовательно, отображение

$$\overline{p} : (\mathfrak{P}(E), \varkappa_E) \to (\overline{B}, \overline{\tau} \times \varkappa_B)$$

будет толерантным.

Толерантное отображение $\lambda : (\overline{B}, \overline{\tau} \times \varkappa_B) \to (\mathfrak{P}(E), \varkappa_E)$, являющееся правым обратным к $\overline{p}$, так что

$$\overline{p} \circ \lambda = \mathbf{1}_{\overline{B}},$$

назовем, следуя традиции, накрывающей функцией для p.

Переходя к ограничениям $\overline{p}_M = \overline{p}|\mathfrak{P}_M(E)$ и $\lambda_M = \lambda|\overline{B}_M$, получим

$$\overline{p}_M \circ \lambda_M = \mathbf{1}_{\overline{B}_M}. \tag{6}$$

Толерантное отображение $\lambda_M : (\overline{B}_M, \overline{\tau} \times \varkappa_B) \to (\mathfrak{P}_M(E), \varkappa_E)$ будем называть накрывающей функцией для p длины M.

Предложение 2. *Пусть $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ — толерантное отображение, и пусть для любого $M \in \mathbb{N}$ существует накрывающая функция λ_M для p длины M. Тогда отображение p является толерантным расслоением (в смысле Гуревича).*

Доказательство

Пусть имеются толерантные отображения:

$$f' : (Y, \theta) \to (E, \overline{\tau}), \qquad F : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \to (B, \tau)$$

такие, что $F(y, 0) = (p \circ f')(y)$.

Определим вспомогательное отображение $g : (Y, \theta) \to (\mathfrak{P}'_M(E), \varkappa_E)$

$$(\forall\ k = \overline{0, M}) \qquad (g(y))\left(\frac{k}{M}\right) = F\left(y, \frac{k}{M}\right).$$

Из толерантности F следует, что для $y_1 \theta y_2$ толерантные пути $g\,(y_1)$ и $g\,(y_2)$ одной и той же длины M будут просто толерантно гомотопны:

$$\left(\forall k, l = \overline{0, M}\right)\ |k - l| \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\,(y_1)\left(\frac{k}{M}\right) = F\left(y_1, \frac{k}{M}\right) \tau F\left(y_2, \frac{l}{M}\right) = g\,(y_2)\left(\frac{l}{M}\right).$$

Следовательно, $g\,(y_1)\, \varkappa_B g\,(y_2)$, причем в этом случае нет необходимости применять элементарные преобразования. Таким образом, установлено, что g — толерантное отображение.

Построим теперь отображение $F' : Y \times I_M \to E$. Для этого сначала заметим, что $p\,(f'\,(y)) = (p \circ f')\,(y) = F\,(y, 0) = g\,(y)\,(0)$. Это значит, что для любого $y \in Y$ пара $(f'\,(y)\,, g\,(y)) \in \overline{B}_M$.

Из формул (5) и (6) следует, что для пары $(a, \omega_n) \in \overline{B}_M$ имеем равенство $(a, \omega_n) = (\lambda_M (a, \omega_n)(0), p \circ \lambda_M (a, \omega_n))$. Откуда следует, что во-первых,

$$a = \lambda_M (a, \omega_n)(0), \tag{7}$$

а во-вторых,

$$\omega_n = p \circ \lambda_M (a, \omega_n). \tag{8}$$

Из (8), в частности, следует, что длина пути $\lambda_M (a, \omega_n)$ в пространстве $(E, \overline{\tau})$ совпадает с длиной пути ω_n в пространстве (B, τ).

Все сказанное выше позволяет определить отображение F' следующим образом:

$$(\forall y \in Y) \left(\forall \frac{k}{M} \in I_M\right) \quad F'\left(y, \frac{k}{M}\right) = (\lambda_M (f'(y), g(y))) \left(\frac{k}{M}\right).$$

Отображение $F' : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \to (E, \overline{\tau})$ очевидно является толерантным как композиция толерантных отображений. Из формулы (7) следует, что $F'(y, 0) = (\lambda_M (f'(y), g(y)))(0) = f'(y)$. А из формулы (8) получаем, что

$$(p \circ F') \left(y, \frac{k}{M}\right) = p (\lambda_M (f'(y), g(y))) \left(\frac{k}{M}\right) =$$

$$= (p \circ \lambda_M (f'(y), g(y))) \left(\frac{k}{M}\right) = g(y) \left(\frac{k}{M}\right) = F\left(y, \frac{k}{M}\right),$$

то есть $p \circ F' = F$.

Таким образом, p — толерантное расслоение в смысле Гуревича.

Предложение 2 доказано.

Рассмотрим теперь линейно связное толерантное пространство (X, τ) и пространство $(\mathfrak{P}(X, x_0), \varkappa_X)$ толерантных путей в пространстве (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$. Определим отображение $p : \mathfrak{P}(X, x_0) \to X$

$$p(\omega_n) = \omega_n (1). \tag{9}$$

Из свойства (4) следует, что отображение $p : (\mathfrak{P}(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$ является толерантным.

Теорема 1. *Толерантное отображение* $p : (\mathfrak{P}(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$, *определенное формулой (9), является толерантным расслоением (в смысле Гуревича). При этом слой* $p^{-1}(x_0)$ *этого расслоения над точкой* $x_0 \in X$ *представляет собой пространство* $(\mathfrak{O}(X, x_0), \varkappa_X)$ *толерантных петель пространства* (X, τ) *в точке* x_0.

Доказательство

Из предложения 2 следует, что для доказательства достаточно построить накрывающую функцию λ_M для отображения p произвольной длины $M \in \mathbb{N}$. Для этого в пространстве

$$(\mathfrak{P}(X, x_0) \times \mathfrak{P}_M(X), \varkappa_X \times \varkappa_X)$$

рассмотрим подпространство, определенное на подмножестве

$$\overline{X}_M = \{(\gamma_m, \omega_n) \,|p(\gamma_m) = \gamma_m(1) = \omega_n(0), \gamma_m(0) = x_0, n \leqslant M\}. \tag{10}$$

Рассмотрим еще одно толерантное пространство $\left(\mathfrak{P}_M(\mathfrak{P}(X, x_0)), \varkappa_{\mathfrak{P}(X)}\right)$, элементами базисного множества которого будут отображения

$$\overline{\omega}_n : (I_n, \iota_n) \to (\mathfrak{P}(X, x_0), \varkappa_X), \ n \leqslant M,$$

такие что

$$\left(\forall\ k, l = \overline{0, n}\right)\ |k - l| \leqslant 1 \Rightarrow \overline{\omega}_n\left(\frac{k}{n}\right)\varkappa_X \overline{\omega}_n\left(\frac{l}{n}\right). \tag{11}$$

Определим толерантное отображение

$$\overline{p}_M : \left(\mathfrak{P}_M(\mathfrak{P}(X, x_0)), \varkappa_{\mathfrak{P}(X)}\right) \to \left(\overline{X}_M, \varkappa_X \times \varkappa_X\right)$$

формулой

$$\overline{p}_M(\overline{\omega}_n) = (\overline{\omega}_n(0), p \circ \overline{\omega}_n). \tag{12}$$

Толерантность отображения $\overline{p}_M$ доказана в предложении 2 для общего случая. В формуле (12) $\overline{\omega}_n(0)$ — толерантный путь в пространстве (X, τ)

с началом в точке $x_0 \in X$, а $p \circ \overline{\omega}_n = \omega_n$ — толерантный путь в (X, τ) длины $n \leqslant M$, составленный из концов толерантных путей $\overline{\omega}_n\left(\frac{k}{n}\right)$, $k = \overline{0,n}$, то есть

$$\left(\forall\ k = \overline{0,n}\right) \quad \omega_n\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\overline{\omega}_n\left(\frac{k}{n}\right)\right)(1)\,. \tag{13}$$

Теперь построим толерантное отображение

$$\lambda_M : \left(\overline{X}_M, \varkappa_X \times \varkappa_X\right) \to \left(\mathfrak{P}_M\left(\mathfrak{P}\left(X, x_0\right)\right), \varkappa_{\mathfrak{P}(X)}\right),$$

которое будет являться накрывающей функцией длины M для отображения p, то есть будет правым обратным к $\overline{p}_M$:

$$\overline{p}_M \circ \lambda_M = \mathbf{1}_{\overline{X}_M}. \tag{14}$$

Пусть $(\gamma_m, \omega_n) \in \overline{X}_M$. Поставим в соответствие паре (γ_m, ω_n) толерантный путь $\lambda_M\left(\gamma_m, \omega_n\right) : \left(I_n, \iota_n\right) \to \left(\mathfrak{P}\left(X, x_0\right), \varkappa_X\right)$, определенный формулой

$$\left(\forall\ k = \overline{0,n}\right)\ \lambda_M\left(\gamma_m, \omega_n\right)\left(\frac{k}{n}\right) = \gamma_m * \omega_n^{(k)} : \left(I_{m+k}, \iota_{m+k}\right) \to \left(X, \tau\right), \tag{15}$$

где для $k = \overline{1,n}$ толерантные пути $\omega_n^{(k)} : (I_k, \iota_k) \to (X, \tau)$ таковы, что

$$\left(\forall l = \overline{0,k}\right) \quad \omega_n^{(k)}\left(\frac{l}{k}\right) = \omega_n\left(\frac{l}{n}\right), \tag{16}$$

а для $k = 0$ полагаем

$$\gamma_m * \omega_n^{(0)} = \gamma_m. \tag{17}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\forall\ k = \overline{0,n}\right)\left(\lambda_M\left(\gamma_m, \omega_n\right)\left(\frac{k}{n}\right)\right)(0) = \left(\gamma_m * \omega_n^{(k)}\right)(0) = \gamma_m\left(0\right) = x_0, \tag{18}$$

то есть $\left(\forall\ k = \overline{0,n}\right) \lambda_M\left(\gamma_m, \omega_n\right)\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathfrak{P}\left(X, x_0\right)$.

Из толерантности отображений γ_m и ω_n следует, что имеется простая толерантная гомотопность

$$\left(\forall\ k = \overline{0,n-1}\right)\ \eta^+\left(m+k, 1\right)\left(\gamma_m * \omega_n^{(k)}\right) \approx \gamma_m * \omega_n^{(k+1)},$$

что, согласно определению 5, означает

$$\left(\forall\ k=\overline{0,n-1}\right)\ \left(\lambda_M\left(\gamma_m,\omega_n\right)\left(\frac{k}{n}\right)\right)\varkappa_X\left(\lambda_M\left(\gamma_m,\omega_n\right)\left(\frac{k+1}{n}\right)\right). \quad (19)$$

Из (15), (18) и (19) следует, что $\lambda_M\left(\gamma_m,\omega_n\right)$ — толерантный путь в пространстве $\left(\mathfrak{P}\left(X,x_0\right),\varkappa_X\right)$ длины $n\leqslant M$. Таким образом, построено отображение

$$\lambda_M:\overline{X}_M\to\mathfrak{P}_M\left(\mathfrak{P}\left(X,x_0\right)\right).$$

Докажем толерантность этого отображения.

Пусть $\left(\gamma_{m_1},\omega_{n_1}\right)$, $\left(\gamma'_{m_2},\omega'_{n_2}\right)\in\overline{X}_M$ и $\gamma_{m_1}\varkappa_X\gamma'_{m_2}$, $\omega_{n_1}\varkappa_X\omega'_{n_2}$. Выпишем соответствующие последовательности элементарных преобразований:

$$\eta^{\pm}\left(k_1,\varepsilon_1\right)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}\left(k_{s_1},\varepsilon_{s_1}\right)\left(\omega_{n_1}\right)=\alpha_{r_1},\ 0\leqslant k_1<\ldots<k_{s_1}\leqslant n_1;$$

$$\eta^{\pm}\left(k'_1,\varepsilon'_1\right)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}\left(k'_{s_2},\varepsilon'_{s_2}\right)\left(\omega'_{n_2}\right)=\alpha'_{r_1},\ 0\leqslant k'_1<\ldots<k'_{s_2}\leqslant n_2;$$

$$\alpha_{r_1}\approx\alpha'_{r_1};$$

$$\eta^{\pm}\left(l_1,\delta_1\right)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}\left(l_{t_1},\delta_{t_1}\right)\left(\gamma_{m_1}\right)=\beta_{r_2},\ 0\leqslant l_1<\ldots<l_{t_1}\leqslant m_1;$$

$$\eta^{\pm}\left(l'_1,\delta'_1\right)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}\left(l'_{t_2},\delta'_{t_2}\right)\left(\gamma'_{m_2}\right)=\beta'_{r_2},\ 0\leqslant l'_1<\ldots<l'_{t_2}\leqslant m_2;$$

$$\beta_{r_2}\approx\beta'_{r_2}.$$

Обозначим через $\overline{\omega}_{n_1}=\lambda_M\left(\gamma_{m_1},\omega_{n_1}\right)$, $\overline{\omega}'_{n_2}=\lambda_M\left(\gamma'_{m_2},\omega'_{n_2}\right)$ — толерантные пути в пространстве. Теперь следует проверить наличие толерантности

$$\overline{\omega}_{n_1}\varkappa_{\mathfrak{P}(X)}\overline{\omega}'_{n_2}. \quad (20)$$

Для этого выполним следующие элементарные преобразования:

$$\eta^{\pm}\left(k_1,\varepsilon_1\right)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}\left(k_{s_1},\varepsilon_{s_1}\right)\left(\overline{\omega}_{n_1}\right)=\overline{\alpha}_{r_1};$$

$$\eta^{\pm}\left(k'_1,\varepsilon'_1\right)\circ\ldots\circ\eta^{\pm}\left(k'_{s_2},\varepsilon'_{s_2}\right)\left(\overline{\omega}'_{n_2}\right)=\overline{\alpha}'_{r_1}.$$

Тогда формулы (15), (16), (17) дают нам следующее:

$$\left(\forall\ i=\overline{0,r_1}\right)\quad\overline{\alpha}_{r_1}\left(\frac{i}{r_1}\right)=\gamma_{m_1}*\alpha^{(i)}_{r_1},\ \ \overline{\alpha}'_{r_1}\left(\frac{i}{r_1}\right)=\gamma'_{m_2}*\alpha'^{(i)}_{r_1},$$

где $\alpha_{r_1}^{(i)}$, $\alpha_{r_1}'^{(i)}$ определяются по аналогии с (16), (17).

Для доказательства толерантности (20) следует доказать, что пути $\overline{\alpha}_{r_1}$ и $\overline{\alpha}'_{r_1}$ просто толерантно гомотопны в пространстве $(\mathfrak{P}(X, x_0), \varkappa_X)$. То есть надо проверить, что

$$\left(\forall\, i, j = \overline{0, r_1}\right) \quad |i - j| \leqslant 1 \Rightarrow \gamma_{m_1} * \alpha_{r_1}^{(i)} \varkappa_X \gamma'_{m_2} * \alpha_{r_1}'^{(j)}. \tag{21}$$

Подробно разберем случай $j = i + 1$ (в случае $j = i$ доказательство условия (21) еще проще). Применим следующие элементарные преобразования:

$$\eta^{\pm}(l_1, \delta_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}(l_{t_1}, \delta_{t_1}) \circ \eta^{+}(m_1 + i, 1)\left(\gamma_{m_1} * \alpha_{r_1}^{(i)}\right) =$$

$$= \left((\beta_{r_2} * \alpha_{r_1})^{(r_2+i)}\right)_{r_2+i+1, r_2+i};$$

$$\eta^{\pm}(l'_1, \delta'_1) \circ \ldots \circ \eta^{\pm}\left(l'_{t_2}, \delta'_{t_2}\right)\left(\gamma'_{m_2} * \alpha_{r_1}'^{(i+1)}\right) = \left(\beta'_{r_2} * \alpha'_{r_1}\right)^{(r_2+i+1)}.$$

Условия $\beta_{r_2} \approx \beta'_{r_2}$, $\alpha_{r_1} \approx \alpha'_{r_1}$ влекут $\beta_{r_2} * \alpha_{r_1} \approx \beta'_{r_2} * \alpha'_{r_1}$, а это в свою очередь влечет $\left((\beta_{r_2} * \alpha_{r_1})^{(r_2+i)}\right)_{r_2+i+1, r_2+i} \approx \left(\beta'_{r_2} * \alpha'_{r_1}\right)^{(r_2+i+1)}$, что согласно определению 5, дает толерантность (21), а вместе с ней доказывает (20). Таким образом, толерантность отображения λ_M доказана и осталось проверить, что отображение λ_M является правым обратным к $\overline{p}_M$.

Пусть $(\gamma_m, \omega_n) \in \overline{X}_M$. Формулы (15) и (17) дают нам следующее:

$$\lambda_M(\gamma_m, \omega_n)(0) = \gamma_m * \omega_n^{(0)} = \gamma_m,$$

а формулы (15), (9), (16) показывают, что для $k = \overline{0, n}$

$$(p \circ \lambda_M(\gamma_m, \omega_n))\left(\frac{k}{n}\right) = p\left(\gamma_m * \omega_n^{(k)}\right) =$$

$$= \left(\gamma_m * \omega_n^{(k)}\right)(1) = \omega_n^{(k)}(1) = \omega_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Отсюда, применяя формулу (12), получаем

$$(\overline{p}_M \circ \lambda_M)(\gamma_m, \omega_n) = (\lambda_M(\gamma_m, \omega_n)(0), p \circ \lambda_M(\gamma_m, \omega_n)) = (\gamma_m, \omega_n),$$

что и доказывает (14).

Итак, нами построена накрывающая функция λ_M длины M для толерантного отображения $p : (\mathfrak{P}(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$. Согласно предложению 2, отсюда следует, что p является толерантным расслоением в смысле Гуревича. Утверждение теоремы 1 о слое $p^{-1}(x_0)$ является очевидным. Но несмотря на его очевидность, оно играет важную роль в построении спектральных последовательностей толерантного расслоения p. Теорема 1 доказана.

Библиографический список

1. *Zeeman E.C.* The topology of frain and visual perception, in The Topology of 3-Manifolds. New-York: M.K.Ford(ed), 1962.
2. *Небалуев С.И.* Толерантное пространство путей и основная теорема о поднятии толерантного отображения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5.

УДК 513.2

В.П. ПАНТЕЛЕЕВ

Конечно-разностный подход в задаче определения целых положительных решений уравнения Ферма

Рассмотрим уравнение Ферма

$$x^n + y^n = z^n \qquad \text{при} \quad n > 2. \tag{1}$$

Относительно целых положительных решений уравнения (1) будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При $n > 2$ рассматриваемое уравнение (1) не имеет целых положительных решений, удовлетворяющих условию: $x > z - y$.*

В основе доказательства теоремы 1 лежат отдельные свойства конечных приращений функции x^n. Эти свойства предварительно изучим при условии $x > z - y = 1$.

В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Уравнение*

$$(x+y)^n - (x+y-1)^n = x^n \qquad \text{при} \quad n > 2 \tag{2}$$

не имеет целых положительных решений.

Доказательству теоремы 1 предпошлем одно утверждение. Обозначим:

$$\Delta F'_x = x^n - (x-1)^n, \tag{3}$$

$$\Delta f''_x = [x^n - (x-1)^n] - [(x-1)^n - (x-2)^n], \tag{4}$$

где $\Delta F'_x$ — приращение степенной функции при $\Delta x = 1$; $\Delta f''_x$ — приращение второго порядка. Ясно, что $\Delta F'_x$ — нечетные, а $\Delta f''_x$ — четные числа. При данном обозначении имеет место

Лемма 1. $\Delta F'_x$ и $\Delta f''_x$ — возрастающие функции от x и n: $\Delta F'_x > x$ при $x > 1$ и $n > 1$, а $\Delta f''_x$ — при $x > 2$ и $n > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Выражение (3) можно записать в виде

$$\Delta F'_x = [(x-1)+1]^n - (x-1)^n = a_1(x-1)^{n-1} + a_2(x-1)^{n-2} + \ldots + 1.$$

Очевидно, что $a_1(x-1)^{n-1} > x - 1$, то есть можно записать, что $a_1(x-1)^{n-1} + 1 > x$. Тогда при $n > 1$ $a_1(x-1)^{n-1} + \ldots + 1 > x$ или $\Delta F'_x > x$. Преобразуем выражение (4)

$$\Delta f''_x = [(x-1)+1]^n - (x-1)^n - [(x-2)+1]^n - (x-2)^n =$$

$$= [a_1(x-1)^{n-1} + \ldots + 1] - [a_1(x-2)^{n-1} + \ldots + 1] =$$

$$= a_1[(x-1)^{n-1} - (x-2)^{n-1}] + \ldots + a_m.$$

Выражение $(x-1)^{n-1} - (x-2)^{n-1}$ — суть приращение при показателе степени $n-1$. В силу того что при $n > 1 \quad a_1(x-1)^{n-1} + \ldots + 1 > x$ или $\Delta F'_x > x$, $\Delta F'_{x-1} > x-1$, тогда при $n > 2 \quad \Delta f''_x > a_1 \Delta F'_{x-1} > x - 1 + 1$. Следовательно, $\Delta f''_x > x$, что и доказывает утверждение леммы 1.

Доказательство теоремы 1

Представим степенное число в виде последовательной суммы приращений:

$$x^n = 1 + \Delta F'_{x=2} + \Delta F'_{x=3} + \ldots + \Delta F'_{x-1} + \Delta F'_x = 1 + \sum_{i=2}^{x} \Delta F'_{xi} + 1 \quad (5)$$

и запишем $\Delta F'_x$ в виде суммы разностей второго порядка:

$$\Delta F'_x = \Delta f''_{x=2} + \Delta f''_{x=3} + \ldots + \Delta f'_x + 1 = \sum_{i=2}^{x} \Delta f''_{xi} + 1. \quad (6)$$

Здесь количество членов под знаком суммы $x_i = x - 1$.

Выражение

$$\sum_{i=2}^{x} \Delta f''_{xi}$$

представляет собой число чисел между степенями x_n и $(x-1)^n$. Обозначим

$$\sum_{i=2}^{x} \Delta f''_{xi} = \Delta f'_x.$$

Если основание степени увеличивается на некоторое целое число y, то приращение степенного числа $(x+y)^n$ можно записать в виде

$$\Delta F'_{(x+y)} = \Delta f'_x + \sum_{i=x+1}^{x+y} \Delta f''_{xi} + 1. \quad (7)$$

То есть приращение степени $(x+y)^n$ равно числу чисел между степенями x^n и $(x-1)^n$ плюс сумма приращений второго порядка последующих степеней до $(x+y)^n$ и плюс единица. На основании (7) получаем:

$$x^n = 1 + (\Delta f'_{x=2} + 1) + (\Delta f'_{x=3} + 1) + \ldots + (\Delta f'_x + 1) = \sum_{i=2}^{x} \Delta f'_{xi} + x. \quad (8)$$

Запишем (8) в виде

$$x^n = \sum_{i=2}^{x-1} \Delta f'_{xi} + (x-1) + 1. \tag{9}$$

Здесь $x_i = x - 1$, $(x-1)_i = x - 2$. Подставив выражения (7) и (9) в уравнение (2), приведем его к виду

$$\sum_{i=2}^{x-1} \Delta f'_{xi} + \Delta f'_x + (x-1) + 1 = \Delta f'_x + \sum_{i=x+1}^{x+y} \Delta f''_{xi} + 1. \tag{10}$$

Исключив из уравнения (10) одинаковые члены, получим:

$$\sum_{i=2}^{x-1} \Delta f'_{xi} + (x-1) = \sum_{i=x+1}^{x+y} \Delta f''_{xi}. \tag{11}$$

В силу (11) должно выполняться условие

$$x > \Delta f''_x. \tag{12}$$

Но, как показано в лемме при $n > 2$, имеет место противоположное неравенство. Это и доказывает утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2

Перейдем к рассмотрению уравнения Ферма. Запишем его в виде $z^n - y^n = x^n$. Уравнение $z^n - y^n = x^n$ в результате преобразований в силу уравнений (6)–(10) приводится к виду

$$\underline{\sum_{i=x-(z-y)+1}^{x}} \Delta F'_{xi} + \sum_{i=x-(z-y)+2}^{y+1} \Delta f''_{xi} + \ldots + \sum_{i=x+1}^{z} \Delta f''_{xi} =$$

$$= [x-(z-y)] + \sum_{i=2}^{x-(z-y)} \Delta f'_{xi} + \underline{\sum_{i=x-(z-y)+1}^{x}} \Delta F'_{xi}.$$

В силу условия теоремы 2 $x > z - y$.

Для удобства преобразования запишем: $x = [x-(z-y)] + (z-y)$.

Тогда в силу (6) и (7) имеем

$$x^n = 1 + \Delta F'_{x=2} + \Delta F'_{x=3} + \ldots + \Delta F'_x = 1 + \sum_{i=2}^{x-(z-y)} \Delta F'_{xi} + \sum_{i=x-(z-y)+1}^{x} \Delta F'_{xi} =$$

$$= [x-(z-y)] + \sum_{i=2}^{x-(z-y)} \Delta f'_{xi} + \underline{\sum_{i=x-(z-y)+1}^{x} \Delta F'_{xi}}.$$

Соответственно преобразуется сумма приращений:

$$(z^n - y^n) = \Delta F'_{(y+1)} + \Delta F'_{(y+2)} + \ldots + \Delta F'_z =$$

$$= (\Delta F'_{[x-(z-y)+1]} + \sum_{i=x-(z-y)+2}^{y+1} \Delta f''_{xi}) + (\Delta F'_{[x-(z-y)+2]} +$$

$$+ \sum_{i=x-(z-y)+3}^{y+2} \Delta f''_{xi}) + \ldots + (\Delta F'_x + \sum_{i=x+1}^{z} \Delta f''_{xi}) =$$

$$= \underline{\sum_{i=x-(z-y)+1}^{x} \Delta F'_{xi}} + \sum_{i=x-(z-y)+2}^{y+1} \Delta f''_{xi} + \sum_{i=x+1}^{z} \Delta f''_{xi}.$$

Выражения $(z^n - y^n)$ и x^n имеют одинаковый член

$$\underline{\sum_{i=x-(z-y)+1}^{x} \Delta F'_{xi}}$$

после удаления которого уравнение рассматриваемой суммы приращений приводится к виду

$$\sum_{i=x-(z-y)+2}^{z+1} \Delta f''_{xi} + \ldots + \sum_{i=x+1}^{z} \Delta f''_{xi} = [x-(z-y)] + \sum_{i=2}^{x-(z-y)} \Delta f'_{xi}.$$

Здесь требуется выполнение условия $[x-(z-y)] > \Delta f''_{x-(z-y)}$.

Но при $n > 2$ в силу леммы 1 $\Delta f''_{[x-(z-y)]} > [x-(z-y)]$, следовательно, $z^n \neq\ y^n + x^n$, что и доказывает утверждение теоремы 2.

Рассмотрим применение данного подхода для описания множества целых положительных решений уравнения $z^2 = x^2 + y^2$. Запишем это уравнение в приращениях

$$z^2 = 1 + \Delta F'_{(x=2)} + \Delta F'_{(x=3)} + \ldots + \Delta F'_x + \ldots + \Delta F'_y + \ldots + \Delta F'_z.$$

Пусть $\Delta F'_z = z^2 - (z-1)^2 = 2z - 1$. $\Delta f''_z = [2z-1] - [2(z-1)-1] = 2$.

$$\Delta F'_z = 1 + \sum_{i=2}^{z} \Delta f''_{xi} = 1 + \sum_{i=2}^{z} 2i = x^2.$$

Откуда $2(z-1) = x^2 - 1$ или $2z - 2 = x^2 - 1$, откуда $z = \frac{x^2+1}{2}$. Отсюда, например, при $x = 5$ получим $z = \frac{5^2+1}{2} = 13$, то есть $13^2 - 12^2 = 5^2$.

Библиографический список

1. *Натансон И.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Недра, 1968.

УДК 517.927.25

В.Н. ПОЛЯКОВ

О некоторых вопросах теории формально нормальных операторов

Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}$; через $D(A)$ обозначим область его определения, через $R(A)$ мы обозначим область его изменения, а через $\mathfrak{N}(A)$ аннулирующее подпространство этого оператора.

Замкнутый плотно заданный в $\mathfrak{B}$ оператор N_0 называется формально нормальным, если $D(N_0) \subseteq D(N_0^*)$ и $||N_0 f|| = ||N_0^* f||$ для всех $f \in D(N_0)$. Обозначим через $\bar{N}_0$ сужение оператора N_0^* на $D(N_0)$. Мы будем предполагать, что оператор N_0 имеет ограниченный обратный оператор N_0^{-1}, и рассмотрим здесь задачу о расширении формально нормального оператора N_0 до нормального оператора N, действующего либо в исходном пространстве $\mathfrak{B}$, либо в более широком гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}_1$. Вопросы, связанные с расширением формально нормальных операторов, рассматривались, в частности в работах [3–5]. Излагаемые здесь результаты примыкают к нашей работе [5], в которой изложено доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть N_0 — формально нормальный в $\mathfrak{B}$ оператор с ограниченным обратным N_0^{-1}. Если N — нормальное расширение оператора N_0 в $\mathfrak{B}$, то имеют место следующие разложения в прямую сумму*

$$D(N) = D(N_0) + (\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 + W, \tag{1}$$

$$D(N*) = D(\bar{N}_0) + (\tilde{A}^{*-1} + C^*)\tilde{U}_1 + W, \tag{2}$$

где W — некоторое подпространство в $V = \mathfrak{N}(N_0^*)$ и в $U = \mathfrak{N}(\bar{N}_0^*)$ одновременно $V_1 = V \ominus W$, $U_1 = U \ominus W$, а $\tilde{V}_1 \subset V_1$ и $\tilde{U}_1 \subset U_1$ — множества, плотные в V_1 и U_1 соответственно, $\tilde{A}$ — некоторое фиксированное расширение оператора N_0, заключенное в $\bar{N}_0^*$ и такое, что

1) $R(\tilde{A}) = \mathfrak{B}$,

2) существует ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$,

C — замкнутый оператор с областью определения $\tilde{V}_1$ и областью изменения $R(C) \subset U_1$. C^* — оператор с областью определения $\tilde{U}_1$ и областью изменения $R(C^*) \subset V_1$ и сопряженный с C, то есть такой, что $(C^*u, v) = (u, Cv)$ для $u \in \tilde{U}_1, v \in \tilde{V}_1$. Кроме того,

$$(\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 = (\tilde{A}^{*-1} + C^*)\tilde{U}_1, \tag{3}$$

а оператор

$$(\tilde{A}^{-1} + C)^{-1}(\tilde{A}^{*-1} + C^*) \tag{4}$$

является изометрическим.

Обратно, пусть существует замкнутый линейный оператор C с плотной в V_1 областью определения $\tilde{V}_1$, где V_1 — некоторое подпространство в V, $W = V \ominus V_1$ с областью изменения $R(C) \subset U \ominus W$. Пусть C^* — оператор с областью определения $\tilde{U}_1$, где $\tilde{U}_1 \subset U \ominus W$, и областью изменения $R(C^*) \subset V_1$, сопряженный с оператором C. Пусть *также выполняются условия (3) и (4). Тогда оператор N, определяемый соотношением (1), причем*

$$Nf = \bar{N}^* f, \qquad f \in D(N), \tag{5}$$

является нормальным расширением оператора N_0.

Здесь мы докажем несколько теорем, примыкающих к теореме 1.

Теорема 2. *В принятых обозначениях справедливы формулы:*

$$\tilde{A}^{-1}V + U = \mathfrak{N}(N_0^* \bar{N}_0^*), \qquad \tilde{A}^{*-1}U + V = \mathfrak{N}(\bar{N}_0^* N_0^*). \tag{6}$$

Доказательство

Докажем первое из приведенных соотношений. Так как

$$\bar{N}_0^* \tilde{A}^{-1} v = v, \quad v \in V,$$

то $N_0^* \bar{N}_0^* \tilde{A}^{-1} v = N_0^* v = 0$. Таким образом,

$$\tilde{A}^{-1}V \subset \mathfrak{M} = \mathfrak{N}(N_0^* \bar{N}_0^*).$$

В то же время очевидно, что $U \subset \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$\tilde{A}^{-1}V + U \subset \mathfrak{M}.$$

Пусть теперь x — произвольный элемент из $\mathfrak{M}$. Тогда $x \in D(\bar{N}_0^*)$ и, следовательно,

$$x = f_0 + \tilde{A}^{-1} v_1 + u_1, \quad f_0 \in D(N_0), \quad v_1 \in V, \quad u_1 \in U.$$

Так как $N_0^* \bar{N}_0^* x = 0$, то $\bar{N}_0^* x \in V$. А так как $\bar{N}_0^* x = N_0 f_0 + v_1$ и в то же время

$$N_0^*(N_0 f_0 + v_1) = N_0^* N_0 f_0 + N_0^* v_1 = N_0^* N_0 f_0 = 0,$$

то $N_0 f_0 \in V$. Но $\mathfrak{B} = R(N_0) + V$, поэтому $N_0 f_0 = 0$, а так как оператор N_0^{-1} существует, то и $f_0 = 0$. Таким образом,

$$x = \tilde{A}^{-1} v_1 + u_1 \in \tilde{A}^{-1} f_0 + U,$$

то есть

$$\mathfrak{M} \subset \tilde{A}^{-1}V + U,$$

и тем самым первое из доказываемых соотношений установлено.

Второе доказывается аналогично. Теорема 2 доказана.

В связи с этой теоремой заметим, что в работах Э.А. Коддингтона [3,4] описание нормальных расширений формально нормального оператора дается в терминах, связанных с подпространствами $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}(E + N_0^* \bar{N}_0^*)$ и $\bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}(E + \bar{N}_0^* N_0^*)$ (E — единичный оператор).

Следуя Э.А. Коддингтону [3], для элементов $u \in D(\bar{N}_0^*)$ и $v \in D(N_0^*)$ определяем форму $< u, v >$, полагая

$$< u, v >= (\bar{N}_0^* u, v) - (u, N_0^* v). \tag{7}$$

Следующее предложение «параллельно» одной теореме Э.А. Коддингтона [3].

Теорема 3. *Если N — нормальное расширение в $\mathfrak{B}$ формально нормального оператора N_0, такое что*

$$D(N) = D(N_0) + (\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 + W, \tag{8}$$

то $D(N)$ может быть описано как множество всех элементов $u \in$ $\in D(\bar{N}_0^*)$, удовлетворяющих условию $< u, \alpha >= 0$ для всех

$$\alpha \in (\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 + W = (\tilde{A}^{*-1} + C^*)\tilde{U}_1 + W.$$

Доказательство

Пусть $u \in D(N)$, следовательно,

$$u = f_0 + (\tilde{A}^{-1} + C)v_1 + w_1, \quad f_0 \in D(N_0), \quad v_1 \in \tilde{V}_1, \quad w_1 \in W.$$

Тогда, положив $\alpha = (\tilde{A}^{*-1} + C^*)u_1 + w_2$, будем иметь

$$< u, \alpha >= (N_0 f_0 + \bar{N}_0^* \tilde{A}^{-1} v_1 + \bar{N}_0^* C v_1, \alpha) -$$

$$-(f_0+\tilde{A}^{-1}v_1+Cv_1+w_1, N_0^*\tilde{A}^{*-1}u_1+N_0^*C^*u_1)=$$

$$=(N_0f_0+v_1, \tilde{A}^{*-1}u_1+C^*u_1+w_2)-(f_0+\tilde{A}^{-1}v_1+Cv_1+w_1, u_1)=$$

$$=(N_0f_0, \tilde{A}^{*-1}u_1)+(N_0f_0, C^*u_1)+(N_0f_0, w_2)+(v_1, \tilde{A}^{*-1}u_1)+(v_1, C^*u_1)+$$

$$+(v_1, w_2)-(f_0, u_1)-(\tilde{A}^{-1}v_1, u_1)-(Cv_1, u_1)-(w_1, u_1).$$

Но так как $N_0\subset\tilde{A}\subset\bar{N}_0^*$, $\tilde{V}_1\perp W$, $\tilde{U}_1\perp W$, то

$$(v_1, w_2)=(w_1, u_1)=(f_0, N_0^*C^*u_1)=(f_0, N_0^*w_2)=0,$$

$$(N_0f_0, \tilde{A}^{*-1}u_1)-(f_0, u_1)=(\tilde{A}^{-1}N_0f_0, u_1)-(f_0, u_1)=0.$$

Следовательно, если $u\in D(N)$ и $\alpha=(\tilde{A}^{*-1}+C^*)u_1+w_1$, то

$$<u,\alpha>=(v_1, C^*u_1)-(Cv_1, u_1)+(v_1, \tilde{A}^{*-1}u_1)-(\tilde{A}^{-1}v_1, u_1)=0.$$

Пусть теперь элемент $\tilde{u}\in D(\bar{N}_0^*)$ таков, что $<\tilde{u},\alpha>=0$ для всех $\alpha\in(\tilde{A}^{-1}+C)\tilde{V}_1+W$. Так как $\tilde{u}\in D(\bar{N}_0^*)$, то $\tilde{u}=f_0+\tilde{A}^{-1}v+u$, $v\in$ $\in V$, $u\in U$. Пусть $\alpha=\tilde{A}^{*-1}u_1+C^*u_1+w_1$. Тогда

$$<\tilde{u},\alpha>=(N_0f_0+v, \tilde{A}^{*-1}u_1+C^*u_1+w_1)-(f_0+\tilde{A}^{-1}v+u, u_1)=0. \quad (9)$$

Но

$$(N_0f_0, \tilde{A}^{*-1}u_1)-(f_0, u_1)=0, \quad (v, \tilde{A}^{*-1}u_1)-(\tilde{A}^{-1}v, u_1)=0,$$

$$(N_0f_0, C^*u_1)=0, \quad (N_0f_0, w_1)=0.$$

Следовательно,

$$<\tilde{u},\alpha>=(v, C^*u_1)+(v, w_1)-(u, u_1)=0. \quad (10)$$

В качестве α возьмем в (9) любой элемент $w\in W$. Тогда $(N_0f_0+v, w)=0$ или $(v, w)=0$ (напомним, что, как отмечено в [5], W — аннулирующее подпространство операторов N и N^*), а отсюда следует, что $v\in V_1$. Тогда из (10) имеем

$$(v, C^*u_1)-(u, u_1)=0.$$

Положим $u = u_2 + w_2$, тогда

$$(C^* u_1, v) = (u_1, u_2) + (u_1, w_2) = (u_1, u_2), \qquad (u_2 \in U_1, \quad w_2 \in W).$$

Отсюда следует, что $v \in D(C), \quad Cv = u_1$, то есть $u = Cv + w_2$. Поэтому $\tilde{u} = f_0 + \tilde{A}^{-1} v + Cv + w_2$, то есть $\tilde{u} \in D(N)$. Теорема доказана.

При помощи результатов теоремы 1 можно охарактеризовать один класс расширений оператора N_0, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}_1$, содержащем $\mathfrak{B}$ как подпространство.

Теорема 4. *Пусть N_0 есть максимальный формально нормальный оператор в пространстве $\mathfrak{B}$, причем оператор N_0^{-1} существует и ограничен. Если N_1 — нормальное расширение оператора N_0 в пространстве $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B}_2$, такое что $D(N_1) \cap \mathfrak{B}_2$ плотно в $\mathfrak{B}_2$ и оператор $N_2 = N_1 |_{D(N_1) \cap \mathfrak{B}_2}$ имеет ограниченный обратный N_2^{-1} в $\mathfrak{B}_2$, то имеют место разложения в прямую сумму*

$$D(N_1) = D(N) + (\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 + W, \tag{11}$$

$$D(N_1^*) = D(\bar{N}) + (\tilde{A}^{*-1} + C^*)\tilde{U}_1 + W, \tag{12}$$

где $N = N_0 \oplus N_2$, W — некоторое подпространство в $V = \mathfrak{N}(N^*)$ и в $U = \mathfrak{N}(\bar{N}^*)$ одновременно, $V_1 = V \ominus W, \quad U_1 = U \ominus W$, а $\tilde{V}_1 \subset V_1$ и $\tilde{U}_1 \subset U_1$ — множества, плотные в V_1 и в U_1 соответственно, C — замкнутый линейный оператор с областью определения $\tilde{V}_1$ и областью изменения $R(C) \subset U_1$, C^* — оператор с областью определения $\tilde{U}_1$ и областью изменения $R(C^*) \subset V_1$ и сопряженный с C, то есть такой, что $(C^* u, v) = (u, Cv)$ для $u \in \tilde{U}_1, \quad v \in \tilde{V}_1$. Кроме того, имеет место равенство

$$(\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 = (\tilde{A}^{*-1} + C^*)\tilde{U}_1 \tag{13}$$

и, наконец, оператор

$$(\tilde{A}^{-1} + C)^{-1}(\tilde{A}^{*-1} + C^*) \tag{14}$$

есть оператор изометрический.

Обратно, если N_2 — формально нормальный оператор в $\mathfrak{B}_2$, для которого существует в $\mathfrak{B}_2$ ограниченный обратный N_2^{-1} и если существует замкнутый линейный оператор C с плотной в V_1 областью определения $\tilde{V}_1$, где V_1 — некоторое подпространство в $V = \mathfrak{N}(N^*)$, с областью изменения $R(C) \subset U \ominus W$, где $U = \mathfrak{N}(\bar{N}^*)$, $\quad W = V \ominus V_1$, такой, что выполняются условия (13) и (14), причем C^* — оператор с областью определения $\tilde{U}_1 \subset U \ominus W$ и областью изменения $R(C^*) \subset V_1$, сопряженный с оператором C, $\tilde{A}$ — некоторое фиксированное расширение формально нормального оператора $N = N_0 \oplus N_2$, являющееся сужением оператора $\bar{N}^*$ и обладающее свойствами:

1) $R(\tilde{A}) = \mathfrak{B}_1$;

2) оператор $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$,

$\tilde{A}^*$ — оператор, сопряженный с $\tilde{A}$, то оператор N_1, определяемый соотношениями

$$D(N_1) = D(N) + (\tilde{A}^{-1} + C)\tilde{V}_1 + W, \tag{15}$$

$$N_1 f = \bar{N}^* f, \quad f \in D(N_1), \tag{16}$$

является нормальным расширением оператора N_0 в пространстве $\mathfrak{B}_1$.

Доказательство

Для доказательства теоремы 4 отметим прежде всего, что если пересечение области определения оператора N_1 с $\mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \ominus \mathfrak{B}$ плотно в $\mathfrak{B}_2$, то, как показано в работе [4], сужение N_2 оператора N_1 на $D(N_1) \cap \mathfrak{B}_2$ есть формально нормальный оператор в $\mathfrak{B}_2$, а оператор $N = N_0 \oplus N_2$ формально нормален в $\mathfrak{B}_1$ и удовлетворяет условию $N_0 \subset N \subset N_1 \subset \bar{N}^*$. Если еще оператор N_2 имеет ограниченный обратный оператор, то ограниченный обратный будет иметь и оператор N. Поэтому утверждения теоремы 4 получаются применением доказательства нашей теоремы 1 из [5] к оператору N.

Библиографический список

1. *Вишик М.И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. матем. об-ва. 1952. Т. 1.
2. *Бирман М.Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Матем. сб. 1956. Т.38, № 4.
3. *Coddington E.* Normal extensions of formally normal operators // Pacific J. Math. 1960. № 10.
4. *Biriuk G., Coddington E.* Normal extensions of unbounded formally normal operators // J. of Math. and Mech. 1964. V. 13, № 4.
5. *Поляков В.Н.* Об одном классе формально нормальных операторов // Мат. заметки. 1967. Т.2, № 6.

УДК 517.5

П.А. ТЕРЕХИН

Абсолютные системы представления и наилучшее приближение[1]

Пусть $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — система ненулевых замкнутых подпространств гильбертова пространства H. Говорят, что $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *система представления из подпространств абсолютно сходящимися рядами,* короче — *абсолютная система представления,* если для любого вектора $f \in H$ справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n, \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-2569.2005.1) РФФИ. Проект 03-01-00390, программы «Университеты России», проект УР 04.01.040, программы «Ведущие научные школы», проект НШ-1295.2003.1.

где $h_n \in H_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и ряд в правой части (1) абсолютно сходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| < \infty. \tag{2}$$

Установим критерий абсолютной системы представления в терминах величин наилучшего приближения

$$E_n(f) = \inf_{h_n \in H_n} \|f - h_n\| \tag{3}$$

вектора $f \in H$ элементами подпространства H_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Для того чтобы система $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подпространств гильбертова пространства H являлась абсолютной системой представления, необходимо и достаточно существования постоянной $0 \leqslant q < 1$ такой, что для любого вектора $f \in H$ выполняется неравенство*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n(f) \leqslant q\|f\|. \tag{4}$$

Доказательство

Необходимость. Пусть $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — абсолютная система представления. Обозначим P_n — оператор ортогонального проектирования пространства H на подпространство H_n и положим

$$\mathbf{P}f = (P_1 f, P_2 f, \ldots, P_n f, \ldots), \qquad f \in H.$$

Заметим, что ядро $Ker(\mathbf{P})$ оператора $\mathbf{P}$ тривиально: $Ker(\mathbf{P}) = \{0\}$, поскольку система подпространств $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ полная в H. Найдем образ $Im(\mathbf{P})$ оператора $\mathbf{P}$. Для этого рассмотрим пространство $\mathbf{N}$ абсолютно сходящихся нуль-рядов $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| < \infty,$$

где $h_n \in H_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, рассмотрим аннулятор $\mathbf{N}^{\perp}$ пространства $\mathbf{N}$, то есть множество всех ограниченных последовательностей

$\mathbf{h}' = (h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где по-прежнему $h'_n \in H_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$(\mathbf{h}, \mathbf{h}') = \sum_{n=1}^{\infty}(h_n, h'_n) = 0$$

для всех $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{N}$. Докажем равенство

$$Im(\mathbf{P}) = \mathbf{N}^{\perp}. \tag{5}$$

Пусть $\mathbf{h}' = (h'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{N}^{\perp}$. Определим функционал l на пространстве H посредством равенства

$$l(f) = \sum_{n=1}^{\infty}(h_n, h'_n),$$

если справедливо представление (1) абсолютно сходящимся рядом (2). Такое определение корректно, так как если имеют место два различных абсолютно сходящихся представления

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(2)},$$

то последовательность $\left(h_n^{(1)} - h_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит пространству нуль-рядов $\mathbf{N}$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n^{(1)} - h_n^{(2)}, h'_n\right) = 0.$$

Теперь покажем, что функционал l ограниченный. Стандартным рассуждением с использованием теоремы об открытом отображении получаем существование постоянной $C > 0$ такой, что для любого вектора $f \in H$ в представлении (1) элементы h_n подпространств H_n могут быть выбраны так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\| \leqslant C\|f\|.$$

Отсюда находим

$$|l(f)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|(h_n, h'_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}}\|h'_n\| \leqslant C\|f\| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}}\|h'_n\|.$$

Ограниченность функционала l показана. По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве функционалу l соответствует элемент $g \in H$ такой, что $l(f) = (f, g)$ для всех $f \in H$. Проверим равенство $\mathbf{h}' = \mathbf{P}g$. В самом деле, для любой последовательности $\mathbf{h} = (h_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|h_n\| < < \infty$, полагая $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$, получаем

$$(\mathbf{h}, \mathbf{h}') = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, h_n') = l(f) = (f, g) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n h_n, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, P_n g) = (\mathbf{h}, \mathbf{P}g).$$

Равенство $\mathbf{h}' = \mathbf{P}g$ проверено. Тем самым доказано включение $\mathbf{N}^{\perp} \subset \subset Im(\mathbf{P})$. Обратное включение $Im(\mathbf{P}) \subset \mathbf{N}^{\perp}$ почти очевидно. Действительно, если $f \in H$ и $\mathbf{h} = (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{N}$, то

$$(\mathbf{h}, \mathbf{P}f) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, P_n f) = \sum_{n=1}^{\infty} (P_n h_n, f) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, f) = (0, f) = 0.$$

Это означает, что $\mathbf{P}f \in \mathbf{N}^{\perp}$ для всех $f \in H$, так-что $Im(\mathbf{P}) \subset \mathbf{N}^{\perp}$. Таким образом, доказано равенство (5). Следовательно, оператор $\mathbf{P}$ взаимно однозначно отображает пространство H на пространство $\mathbf{N}^{\perp}$. Наделяя последнее l_{∞}-нормой

$$\|\mathbf{h}'\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n'\|,$$

относительно которой пространство $\mathbf{N}^{\perp}$ будет полным (как аннулятор), по теореме Банаха об обратном операторе получаем оценку

$$\|\mathbf{P}f\|_{\infty} \geqslant c\|f\|,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от вектора $f \in H$. Отсюда, по определению оператора $\mathbf{P}$, находим

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n f\| \geqslant c\|f\|.$$

Окончательно с учетом равенства $E_n(f) = \sqrt{\|f\|^2 - \|P_n f\|^2}$ будем иметь

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} E_n(f) \leqslant \sqrt{1-c^2}\|f\|.$$

Итак, получено соотношение (4) с постоянной $q = \sqrt{1-c^2} < 1$. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что имеет место соотношение (4). Пусть $q < r < 1$ и $f \in H$. Выберем номер n_1 и вектор $g_1 \in H_{n_1}$ так, чтобы $\|f - g_1\| < r\|f\|$. Положим $f_1 = f - g_1$. Далее, если номера n_i и вектора f_i, g_i уже определены для всех $i < k$, то выберем номер n_k и вектор $g_k \in H_{n_k}$ из условия $\|f_{k-1} - g_k\| < r\|f_{k-1}\|$ и положим $f_k = f_{k-1} - g_k$. По индукции построены последовательности (n_k), (f_k) и (g_k). Заметим, что согласно построению для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$f = g_1 + g_2 + \ldots + g_k + f_k.$$

Кроме того, имеем

$$\|f_k\| = \|f_{k-1} - g_k\| < r\|f_{k-1}\| < \ldots < r^k\|f\|.$$

Таким образом, получаем представление

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k,$$

где $g_k \in H_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k-1} - f_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} (r^{k-1} + r^k)\|f\| = \frac{1+r}{1-r}\|f\|.$$

Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$h_n = \sum_{n_k = n} g_k.$$

Ясно, что $h_n \in H_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \infty.$$

Осталось проверить равенство

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} h_n.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем номер k_0, такой что

$$\sum_{k>k_0} \|g_k\| < \varepsilon.$$

Обозначим $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_{k_0}\}$. Видим, что если $n_k > n_0$, то $k > k_0$. При $n \geqslant n_0$ будем иметь

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} h_k \right\| = \left\| f - \sum_{n_k \leqslant n} g_k \right\| = \left\| \sum_{n_k > n} g_k \right\| \leqslant \sum_{n_k > n} \|g_k\| \leqslant \sum_{k>k_0} \|g_k\| < \varepsilon.$$

Итак, произвольный вектор $f \in H$ допускает представление (1) абсолютно сходящимся рядом (2). Достаточность, а вместе с ней и теорема доказана.

Приведем пример применения доказанной теоремы 1. Пусть функция $\varphi(t)$ имеет носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$ на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим порожденное этой функцией семейство функций-всплесков на отрезке $[0,1]$

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k), \qquad j = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1.$$

Предположим, что $\varphi \in L_2[0,1]$, и поставим вопрос: при каких условиях на функцию φ для любой функции $f \in L_2[0,1]$ справедливо представление

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk}\varphi_{jk},$$

ряд в правой части которого абсолютно сходится «по пачкам»:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk}\varphi_{jk} \right\| < \infty.$$

Ответ на поставленный вопрос известен (см. [1] и [2]). Необходимое и достаточное условие состоит в отличие от нуля интеграла от функции φ:

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \neq 0.$$

Этот результат становиться более прозрачным, если воспользоваться теоремой 1 с учетом следующей асимптотики величин наилучшего приближения (3) применительно к данной ситуации.

Теорема 2. *Пусть supp* $\varphi \subset [0,1]$ *и* $\varphi \in L_2[0,1]$. *Положим*

$$E_j(f) = \inf_{c_0,c_1,\ldots c_{2^j-1}} \left\| f - \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k \varphi_{jk} \right\|, \qquad j = 0,1,\ldots, \quad f \in L_2[0,1].$$

Тогда для любой функции $f \in L_2[0,1]$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{j\to\infty} E_j(f) = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\chi_{[0,1]} - \lambda\varphi\| \cdot \|f\|. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Заметим, что если предельное соотношение (6) справедливо для функций f из некоторого плотного в $L_2[0,1]$ множества, то (6) будет выполняться вообще для всех функций $f \in L_2[0,1]$. Пусть далее f — ступенчатая функция вида

$$f = \sum_{m=1}^{2^n-1} a_m \chi_{[m2^{-n},(m+1)2^{-n}]}.$$

При $j > n$ будем иметь

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k \varphi_{jk} \right\|^2 = \sum_{m=0}^{2^n-1} \sum_{k=m2^{j-n}}^{(m+1)2^{j-n}-1} \int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} |a_m - c_k \varphi_{jk}(t)|^2 dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x = 2^j t - j$. Получим

$$\int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} |a_m - c_k \varphi_{jk}(t)|^2 dt = 2^{-j} \int_0^1 |a_m - c_k 2^{j/2} \varphi(x)|^2 dx. \tag{7}$$

Очевидно, что $|a_m|^2 2^{-j} \inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\chi_{[0,1]} - \lambda\varphi\|^2$ — наименьшее значение, которое принимает интеграл (7) как функция переменного c_k. Следовательно,

$$E_j^2(f) = \sum_{m=0}^{2^n-1} 2^{j-n} |a_m|^2 2^{-j} \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\chi_{[0,1]} - \lambda\varphi\|^2 = \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\chi_{[0,1]} - \lambda\varphi\|^2 \cdot \|f\|^2.$$

Библиографический список

1. *Filippov V. I., Oswald P.* Representation in L_p by Series of Translates and Dilates of One Function // J. Approx. Theory. 1995. V. 82. P. 15–29.
2. *Терехин П. А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Математика. 1999. Т. 8(447). С. 74–81.

УДК 517.51

Е.В. ШИШКОВА

Построение расширенных операторов, дающих приближение к функции и ее производным на отрезке[1]

Рассмотрим семейство интегральных операторов:

$$T_{\alpha k}f = \int\limits_a^b K_{\alpha k}(x,t)f(t)dt = a_k \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left((t-x)^2-\alpha^2\right)^k f(t)dt, \quad k=1,2,\dots, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, a_k выбираются из условия $T_{\alpha k}1 \equiv 1$ и имеют вид

$$a_k = A_k \alpha^{-(2k+1)}, \quad A_k = \left(2\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+1}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Известно [1], что если $f(x) \in C\,[a,b]$, то $\|T_{\alpha k}f - f\|_{C_\varepsilon} \to 0$ при $\alpha \to 0$, где $C_\varepsilon[a,b] = C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $\varepsilon > \alpha$.

Поставим задачу: построить расширенные операторы $\widetilde{T}^p_{\alpha k}$ $(p = \overline{0,k})$, такие что $\left\|\widetilde{T}^p_{\alpha k}f - f^{(p)}\right\|_{C[a,b]} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ — 1295.2003.1).

Лемма 1. Для любого натурального числа k и A_k из (2) справедливо неравенство

$$(-1)^k \cdot A_k > 0.$$

Доказательство

Из определения A_k, используя формулу бинома Ньютона и свойство биномиальных коэффициентов $C_k^n = C_k^{k-n}$, получаем:

$$(-1)^k \cdot A_k = (-1)^k \left(2 \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n}{2(k-n)+1} \right)^{-1} = \left(2 \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n}{2n+1} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n C_k^n}{n+\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{k} (-1)^n C_k^n \int\limits_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} dt \right)^{-1} =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{k} C_k^n (-t)^n dt \right)^{-1} = \left(\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^k dt \right)^{-1} > 0.$$

Лемма доказана.

В [2] приведена

Лемма 2. Для любого натурального числа k и $m = \overline{0, k-1}$ справедливо:

$$\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{m}{2}\right]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^m = 0.$$

Теорема 1. *Операторы*

$$\widetilde{T}_{\alpha k} f = \int\limits_a^b \tilde{K}_{\alpha k}(x,t) f(t) dt,$$

где $\tilde{K}_{\alpha k}(x,t)$ *при* $x \in [a, a+\alpha]$*:*

$$\tilde{K}_{\alpha k}(x,t) = a_k \cdot \begin{cases} A_{\alpha k}(x,t) + C_{\alpha k}(x,t), & t \in [a, 2a-x+\alpha] \\ C_{\alpha k}(x,t), & t \in [2a-x+\alpha, x+\alpha] \\ 0, & t \in [x+\alpha, b] \end{cases}$$

при $x \in [a+\alpha, b-\alpha]$*:*

$$\tilde{K}_{\alpha k}(x,t) = a_k \cdot \begin{cases} C_{\alpha k}(x,t), & t \in [x-\alpha, x+\alpha] \\ 0, & t \in [a, x-\alpha] \cup [x+\alpha, b] \end{cases}$$

при $x \in [b-\alpha, b]$*:*

$$\tilde{K}_{\alpha k}(x,t) = a_k \cdot \begin{cases} 0, & t \in [a, x-\alpha] \\ C_{\alpha k}(x,t), & t \in [x-\alpha, 2b-x-\alpha] \\ B_{\alpha k}(x,t) + C_{\alpha k}(x,t), & t \in [2b-x-\alpha, b] \end{cases}$$

$$A_{\alpha k}(x,t) = \left((2a-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k, \tag{3}$$

$$B_{\alpha k}(x,t) = \left((2b-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k, \tag{4}$$

$$C_{\alpha k}(x,t) = \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k, \tag{5}$$

дают равномерное приближение к любой непрерывной функции $f(x)$ *на всем отрезке* $[a,b]$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Построим расширенный оператор путем продолжения непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ за границы отрезка $[a,b]$ четным образом по аналогии с [3]. Пусть

$$f_1(x) = \begin{cases} f(2a-x), & x < a \\ f(x), & a \leqslant x \leqslant b \\ f(2b-x), & x > b. \end{cases}$$

Разобьем $[a,b]$ на три отрезка:$[a, a+\alpha]$, $[a+\alpha, b-\alpha]$ и $[b-\alpha, b]$ и применим к $f_1(x)$ оператор (1):

1. Пусть $x \in [a, a+\alpha]$, тогда $2a - x + \alpha \leqslant x + \alpha$ и

$$\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f_1(t)dt = \left(\int\limits_{x-\alpha}^{a} + \int\limits_{a}^{x+\alpha}\right) \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f_1(t)dt =$$

$$= \int\limits_{x-\alpha}^{a} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(2a-t)dt + \int\limits_{a}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{2a-x+\alpha} \left((2a-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt + \int\limits_{a}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{2a-x+\alpha} \left\{\left((2a-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k + \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k\right\} f(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{2a-x+\alpha}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt \equiv \tilde{T}_{\alpha k} f.$$

2. На отрезке $x \in [a+\alpha, b-\alpha]$ $\quad T_{\alpha k} f_1 = T_{\alpha k} f \equiv \tilde{T}_{\alpha k} f.$

3. Пусть $x \in [b-\alpha, b]$, тогда $x - \alpha \leqslant 2b - x - \alpha$ и

$$\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f_1(t)dt = \int\limits_{x-\alpha}^{b} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{b}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(2b-t)dt = \int\limits_{x-\alpha}^{b} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt -$$

$$- \int\limits_{b}^{2b-x-\alpha} \left((2b-t_1-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t_1)dt_1 = \int\limits_{x-\alpha}^{2b-x-\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k f(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{2b-x-\alpha}^{b} \left\{\left((2b-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k + \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k\right\} f(t)dt \equiv \tilde{T}_{\alpha k} f.$$

Отсюда следует вид оператора в формулировке теоремы.

Докажем, что $\left\|\widetilde{T}_{\alpha k} f - f\right\|_{C[a,b]} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Заметим, если $f(t) \equiv 1$, то $f_1(t) \equiv 1$ и $\widetilde{T}_{\alpha k} 1 = T_{\alpha k} 1 \equiv 1$. Следовательно,

$$f(x) = \int_a^b \widetilde{K}_{\alpha k}(x,t) f(x) dt.$$

Рассмотрим

$$\left\| \widetilde{T}_{\alpha k} f - f \right\|_{C[a,b]} =$$

$$= \max \left\{ \max_{a \leqslant x \leqslant a+\alpha} \left| \widetilde{T}_{\alpha k} f - f \right|, \max_{a+\alpha \leqslant x \leqslant b-\alpha} \left| \widetilde{T}_{\alpha k} f - f \right|, \max_{b-\alpha \leqslant x \leqslant b} \left| \widetilde{T}_{\alpha k} f - f \right| \right\}.$$

При $x \in [a+\alpha, b-\alpha]$: $\left| \widetilde{T}_{\alpha k} f - f \right| = |T_{\alpha k} f - f| \to 0$.

Пусть $x \in [a, a+\alpha]$. Тогда, если $a \leqslant t \leqslant x+\alpha$, то $-\alpha \leqslant t - x \leqslant \alpha$ и

$$\left| \widetilde{T}_{\alpha k} f - f \right| = |a_k| \left| \int_a^{2a-x+\alpha} \left\{ \left((2a-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k + \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k \right\} \times \right.$$

$$\left. \times (f(t) - f(x)) dt + \int_{2a-x+\alpha}^{x+\alpha} \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k (f(t) - f(x)) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |a_k| \left\{ \int_a^{2a-x+\alpha} \left| \left((2a-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k + \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k \right| \times \right.$$

$$\left. \times |f(t) - f(x)| \, dt + \int_{2a-x+\alpha}^{x+\alpha} \left| \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k \right| |f(t) - f(x)| \, dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\alpha) \left(\int_a^{2a-x+\alpha} \left| a_k \left((2a-t-x)^2 - \alpha^2\right)^k \right| dt + \right.$$

$$\left. + \int_a^{x+\alpha} \left| a_k \left((t-x)^2 - \alpha^2\right)^k \right| dt \right),$$

где $\omega(\alpha) = \sup\limits_{|t-x| \leqslant \alpha} |f(t) - f(x)|$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

В первом интеграле $a \leqslant t \leqslant 2a - x + \alpha$, поэтому $(2a - t - x)^2 - \alpha^2 \leqslant 0$, а во втором интеграле $a \leqslant t \leqslant x + \alpha$, поэтому $(t - x)^2 - \alpha^2 \leqslant 0$, следовательно, по лемме 1 $a_k \left((2a - t - x)^2 - \alpha^2\right)^k \geqslant 0$ и $a_k \left((t - x)^2 - \alpha^2\right)^k \geqslant 0$, значит, модули под знаками интегралов можно опустить. Отсюда следует оценка:

$$\left|\widetilde{T}_{\alpha k} f - f\right| \leqslant \omega(\alpha).$$

Очевидно, $\omega(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$ в силу непрерывности функции $f(x)$.

Аналогичная оценка получается и в случае $x \in [b - \alpha, b]$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) \in C^k[a, b]$. Тогда операторы*

$$\widetilde{T}^p_{\alpha k} f = (-1)^p \int\limits_a^b \frac{d^p \tilde{K}_{\alpha k}(x, t)}{dt^p} f(t) dt, \quad p = \overline{0, k},$$

где $\tilde{K}_{\alpha k}(x, t)$ — ядра операторов $\widetilde{T}_{\alpha k}$ из теоремы 1 , $\alpha > 0$ — параметр, дают равномерное приближение к p-й производной функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ $\left(\left\|\widetilde{T}^p_{\alpha k} f - f^{(p)}\right\|_{C[a,b]} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0\right)$, если $f^{(p-1)}(a) = f^{(p-1)}(b) = f^{(p-3)}(a) = f^{(p-3)}(b) = ... = f(a) = f(b) = 0$ при p нечетном и $f^{(p-1)}(a) = f^{(p-1)}(b) = f^{(p-3)}(a) = f^{(p-3)}(b) = ... = = f'(a) = f'(b) = 0$ при p четном.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим $A_{\alpha k}(x, t), B_{\alpha k}(x, t)$ и $C_{\alpha k}(x, t)$ из (3), (4) и (5) соответственно.

Заметим, что по формуле бинома Ньютона

$$A_{\alpha k}(x, t) = \left((t + x - 2a)^2 - \alpha^2\right)^k = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s C^s_k \alpha^{2s} (t + x - 2a)^{2(k-s)},$$

следовательно, дифференцируя почленно m раз сумму для $m = \overline{0, p-1}$, $p = \overline{1, k}$ (т.е. $m = \overline{0, k-1}$), имеем

$$\left.\frac{d^m A_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=2a-x+\alpha} =$$

$$= \left.\sum_{s=0}^{\left[k-\frac{m}{2}\right]} (-1)^s C_k^s \alpha^{2s} C_{2(k-s)}^m m!(t+x-2a)^{2(k-s)-m}\right|_{t=2a-x+\alpha} =$$

$$= m!\alpha^{2k-m} \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{m}{2}\right]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^m = 0$$

по лемме 2, то есть

$$\left.\frac{d^m A_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=2a-x+\alpha} = 0, \text{ для любого } m = \overline{0, p-1}. \tag{6}$$

Аналогично,

$$\left.\frac{d^m B_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=2b-x-\alpha} = 0, \quad m = \overline{0, p-1} \tag{7}$$

и

$$\left.\frac{d^m C_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=x\pm\alpha} = 0, \quad m = \overline{0, p-1}. \tag{8}$$

Заметим также, что

$$\left.\frac{d^m A_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=a} = m! \sum_{s=0}^{\left[k-\frac{m}{2}\right]} (-1)^s C_k^s C_{2(k-s)}^m \alpha^{2s} (x-a)^{2(k-s)-m} =$$

$$= (-1)^m \left.\frac{d^m C_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=a}, \tag{9}$$

и

$$\left.\frac{d^m B_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=b} = (-1)^m \left.\frac{d^m C_{\alpha k}(x,t)}{dt^m}\right|_{t=b}. \tag{10}$$

Запишем оператор $\widetilde{T}_{\alpha k}$, определенный в теореме 1, в виде

$$\widetilde{T}_{\alpha k}f = a_k \cdot \begin{cases} \int\limits_a^{2a-x+\alpha} A_{\alpha k}(x,t)f(t)dt + \int\limits_a^{x+\alpha} C_{\alpha k}(x,t)f(t)dt, & x \in [a, a+\alpha] \\ \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} C_{\alpha k}(x,t)f(t)dt, & x \in [a+\alpha, b-\alpha] \\ \int\limits_{2b-x-\alpha}^{b} B_{\alpha k}(x,t)f(t)dt + \int\limits_{x-\alpha}^{b} C_{\alpha k}(x,t)f(t)dt, & x \in [b-\alpha, b]. \end{cases} \tag{11}$$

Применим оператор $\widetilde{T}^p_{\alpha k}$ из (11) к $f^{(p)}(x)$ и произведем p раз интегрирование по частям.

1) Пусть $x \in [a, a+\alpha]$. Учитывая (6),(8) и (9) и полагая $f^{(p-1)}(a) = f^{(p-3)}(a) = ... = f(a) = 0$ при p нечетном и $f^{(p-1)}(a) = f^{(p-3)}(a) = ... = f'(a) = 0$ при p четном, получим:

$$\widetilde{T}_{\alpha k}f^{(p)} = a_k \left(\int\limits_a^{2a-x+\alpha} A_{\alpha k}(x,t)f^{(p)}(t)dt + \int\limits_a^{x+\alpha} C_{\alpha k}(x,t)f^{(p)}(t)dt \right) =$$

$$= a_k \left(A_{\alpha k}(x,t)f^{(p-1)}(t)\Big|_{t=a}^{2a-x+\alpha} + C_{\alpha k}(x,t)f^{(p-1)}(t)\Big|_{t=a}^{x+\alpha} - \right.$$

$$- \frac{dA_{\alpha k}(x,t)}{dt}f^{(p-2)}(t)\Big|_{t=a}^{2a-x+\alpha} - \frac{dC_{\alpha k}(x,t)}{dt}f^{(p-2)}(t)\Big|_{t=a}^{x+\alpha} + ...+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}A_{\alpha k}(x,t)}{dt^{p-1}}f(t)\Big|_{t=a}^{2a-x+\alpha} + (-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}C_{\alpha k}(x,t)}{dt^{p-1}}f(t)\Big|_{t=a}^{x+\alpha} +$$

$$\left. +(-1)^p \int\limits_a^{2a-x+\alpha} \frac{d^pA_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt + (-1)^p \int\limits_a^{x+\alpha} \frac{d^pC_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt \right) =$$

$$= (-1)^p a_k \left(\int\limits_a^{2a-x+\alpha} \frac{d^pA_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt + \int\limits_a^{x+\alpha} \frac{d^pC_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt \right) \equiv \widetilde{T}^p_{\alpha k}f.$$

2) пусть $x \in [a+\alpha, b-\alpha]$. Используя (8), имеем

$$\widetilde{T}_{\alpha k}f^{(p)} = a_k \left(C_{\alpha k}(x,t)f^{(p-1)}(t)\Big|_{t=x-\alpha}^{x+\alpha} - \frac{dC_{\alpha k}(x,t)}{dt}f^{(p-2)}(t)\Big|_{t=x-\alpha}^{x+\alpha} dt + ...+ \right.$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}C_{\alpha k}(x,t)}{dt^{p-1}}f(t)\Big|_{t=x-\alpha}^{x+\alpha}+(-1)^p\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\frac{d^pC_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt\Bigg)=$$

$$=(-1)^pa_k\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\frac{d^pC_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt\equiv\widetilde{T}^p_{\alpha k}f.$$

3) пусть $x\in[b-\alpha,b]$. Применяя (7), (8) и (10) и полагая $f^{(p-1)}(b)=$ $=f^{(p-3)}(b)=...=f(b)=0$ при p нечетном и $f^{(p-1)}(b)=f^{(p-3)}(b)=...=$ $=f'(b)=0$ при p четном, получим:

$$\widetilde{T}_{\alpha k}f^{(p)}=a_k\Bigg(\int\limits_{2b-x-\alpha}^{b}B_{\alpha k}(x,t)f^{(p)}(t)dt+\int\limits_{x-\alpha}^{b}C_{\alpha k}(x,t)f^{(p)}(t)dt\Bigg)=$$

$$=a_k\Bigg(B_{\alpha k}(x,t)f^{(p-1)}(t)\Big|_{t=2b-x-\alpha}^{b}+C_{\alpha k}(x,t)f^{(p-1)}(t)\Big|_{t=x-\alpha}^{b}-$$

$$-\frac{dB_{\alpha k}(x,t)}{dt}f^{(p-2)}(t)\Big|_{t=2b-x-\alpha}^{b}-\frac{dC_{\alpha k}(x,t)}{dt}f^{(p-2)}(t)\Big|_{t=x-\alpha}^{b}+...+$$

$$+(-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}B_{\alpha k}(x,t)}{dt^{p-1}}f(t)\Big|_{t=2b-x-\alpha}^{b}+(-1)^{p-1}\frac{d^{p-1}C_{\alpha k}(x,t)}{dt^{p-1}}f(t)\Big|_{t=x-\alpha}^{b}+$$

$$+(-1)^p\int\limits_{2b-x-\alpha}^{b}\frac{d^pB_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt+(-1)^p\int\limits_{x-\alpha}^{b}\frac{d^pC_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt\Bigg)=$$

$$=(-1)^p\int\limits_{2b-x-\alpha}^{b}\frac{d^pB_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt+(-1)^p\int\limits_{x-\alpha}^{b}\frac{d^pC_{\alpha k}(x,t)}{dt^p}f(t)dt\equiv\widetilde{T}^p_{\alpha k}f.$$

Таким образом,из построения оператора $\widetilde{T}^p_{\alpha k}$ и теоремы 1 следует:

$$\left\|\widetilde{T}^p_{\alpha k}f-f^{(p)}\right\|_{C[a,b]}=\left\|\widetilde{T}_{\alpha k}f^{(p)}-f^{(p)}\right\|_{C[a,b]}\to 0\ \text{ при }\ \alpha\to 0.$$

Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Хромова Г.В.* О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика:

Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1984. Вып. 6. С. 53–58.

2. *Шишкова Е.В.* Решение задачи Колмогорова—Никольского для интегральных операторов с полиномиальными финитными ядрами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2004. Вып. 6. С. 149–152.

3. *Хромова Г.В.* О задаче восстановления функции // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1975. Вып. 5, ч. 2. С. 60–76.

УДК 519.517.948

Е.В. ШИШКОВА

О восстановлении решения вместе с его производной уравнения Абеля с приближенно заданной правой частью[1]

Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\beta-1}} dt = f(x), \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Пусть известно, что при данной правой части существует непрерывная функция $u(x)$, являющаяся решением уравнения (1). При этом вместо точной правой части нам известна функция $f_\delta(x)$, такая что $\|f - f_\delta\|_{L_2} \leqslant \delta$. В [1], используя общий подход из [2], по аналогии с [3] построен метод регуляризации уравнения (1), с помощью которого можно получать равномерное приближение к $u(x)$, а также к производной от решения (если $u(x) \in C^1[0,1]$).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ — 1295.2003.1).

Регуляризующие семейства операторов в этом случае имеют конструкцию

$$R_\alpha^p = \widetilde{T}_{\alpha 1}^p A^{-1}, \quad p = 0, 1,$$

где $\widetilde{T}_{\alpha 1}^p$ — операторы из теорем 1 и 2 статьи автора «Построение расширенных операторов, дающих приближение к функции и ее производным на отрезке» настоящего сборника при $k = 1$, дающие равномерное приближение к любой непрерывной функции ($p = 0$) и ее производной ($p = 1$) на отрезке $[0, 1]$ соответственно, а оператор A^{-1}[4]:

$$A^{-1} f = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\beta} dt.$$

Известна [1]

Теорема 1. *Операторы* $R_\alpha^p = \widetilde{T}_{\alpha 1}^p A^{-1}$ $(p = 0, 1)$ *имеют вид*

$$R_\alpha^p f = \frac{3}{2\alpha^3 \Gamma(3 - \beta - p)} \hat{R}_\alpha^p f,$$

где при $x \in [0, \alpha]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int\limits_0^{\alpha - x} \Big(R_{\alpha\beta 1}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau) \Big) f(\tau) d\tau + \int\limits_{\alpha - x}^{x + \alpha} R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau) f(\tau) d\tau;$$

при $x \in [\alpha, 1 - \alpha]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int\limits_0^{x - \alpha} \Big(R_{\alpha\beta 3}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau) \Big) f(\tau) d\tau + \int\limits_{x - \alpha}^{x + \alpha} R_{\alpha\beta 2}^p(x, \tau) f(\tau) d\tau;$$

при $x \in [1 - \alpha, 1]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int\limits_0^{x - \alpha} \Big(R_{\alpha\beta 3}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 4}^p(x, \tau) + R_{\alpha\beta 5}^p(x, \tau) \Big) f(\tau) d\tau +$$

$$+\int\limits_{x-\alpha}^{2-x-\alpha}\left(R^p_{\alpha\beta 4}(x,\tau)+R^p_{\alpha\beta 5}(x,\tau)\right)f(\tau)d\tau+\int\limits_{2-x-\alpha}^{1}R^p_{\alpha\beta 5}(x,\tau)f(\tau)d\tau;$$

$$R^p_{\alpha\beta 1}(x,\tau)=(\alpha(1-\beta-p)+\tau+x)(\alpha-x-\tau)^{1-\beta-p},$$

$$R^p_{\alpha\beta 2}(x,\tau)=(\alpha(1-\beta-p)+\tau-x)(x-\tau+\alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R^p_{\alpha\beta 3}(x,\tau)=(\alpha(1-\beta-p)-\tau+x)(x-\tau-\alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R^p_{\alpha\beta 4}(x,\tau)=(2+\alpha(1-\beta-p)-\tau-x)(2-x-\tau-\alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R^p_{\alpha\beta 5}(x,\tau)=(1-p)(1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta}-2(1-\tau)^{2-\beta-p}.$$

Каждый из операторов R^p_α $(p=0,1)$ *при* $0<\beta<\dfrac{1}{2}$ *является линейным ограниченным, действующим из* $L_2[0,1]$ *в* $C[0,1]$, *интегральным оператором.*

При этом если вместо $C[0,1]$ *рассматривать* $C[0,1-\varepsilon]$ $(\varepsilon>\alpha)$, *то* R^0_α *линеен и ограничен при* $0<\beta<1$.

В данной статье получены точные по порядку α двусторонние оценки для норм операторов R^p_α $(p=0,1)$ и указаны условия согласования параметра регуляризации α с погрешностью исходных данных δ.

Теорема 2. *При* $0<\beta<\dfrac{1}{2}$ *справедлива двусторонняя оценка:*

$$C^0_1(\beta)\alpha^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\leqslant\left\|R^0_\alpha\right\|_{L_2\to C}\leqslant C^0_2(\beta)\alpha^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)},\tag{2}$$

где

$$C^0_1(\beta)=\frac{3\cdot 2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\left(\frac{4}{5-2\beta}-2+\frac{(2-\beta)^2}{3-2\beta}\right)^{\frac{1}{2}},\tag{3}$$

$$C^0_2(\beta)=\frac{3}{2\Gamma(3-\beta)}\left(\frac{(1-\beta)^2(2-\beta)^2}{1-2\beta}\left\{1+2^{2-2\beta}+2\cdot 5^{1-2\beta}\right\}+\right.$$

$$+\frac{8(1-\beta)(2-\beta)}{3-2\beta}\left\{1+2^{3-2\beta}\right\}+4\left\{2^{3-2\beta}+3^{4-2\beta}+5^{4-2\beta}\right\}+$$

$$+\frac{4}{5-2\beta}\left\{1+5\cdot 2^{4-2\beta}+3^{5-2\beta}+3\cdot 5^{5-2\beta}\right\}+$$

$$+\frac{4(2-\beta)^2}{3-2\beta}\left\{2^{2-2\beta}+3^{3-2\beta}+5^{3-2\beta}\right\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Имеем

$$\left\|R^0_\alpha\right\|_{L_2\to C}=\frac{3}{2\alpha^3\Gamma(3-\beta)}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left(\int\limits_0^1\left(R^0_\alpha(x,\tau)\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $R^0_\alpha(x,\tau)$ — ядро оператора $\hat{R}^0_\alpha$ из теоремы 1.

1. Пусть $x\in[0,\alpha]$. Из теоремы 1 имеем

$$\int\limits_0^1\left(R^0_\alpha(x,\tau)\right)^2 d\tau=\int\limits_0^{\alpha-x}\Big((x+\alpha-\tau)^{1-\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau-x)+$$

$$+(\alpha-x-\tau)^{1-\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau+x)\Big)^2 d\tau+$$

$$+\int\limits_{\alpha-x}^{x+\alpha}\Big((x+\alpha-\tau)^{1-\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau-x)\Big)^2 d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{\alpha-x}(x+\alpha-\tau)^{2-2\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau-x)^2 d\tau+$$

$$+2\int\limits_0^{\alpha-x}(\alpha-x-\tau)^{2-2\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau+x)^2 d\tau+$$

$$+\int\limits_{\alpha-x}^{x+\alpha}\Big((x+\alpha-\tau)^{1-\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau-x)\Big)^2 d\tau\equiv 2I_1+2I_2+I_3,$$

так как для любых чисел a и b: $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$.

Сделав замены переменных $\tau_1=x+\alpha-\tau$ в I_1 и I_3 и $\tau_1=\alpha-x-\tau$ в I_2, имеем

$$I_1=\int\limits_{2x}^{x+\alpha}\tau_1^{2-2\beta}(\alpha(2-\beta)-\tau_1)^2 d\tau_1=$$

$$= \frac{(x+\alpha)^{3-2\beta}}{3-2\beta}\alpha^2(2-\beta)^2-\alpha(x+\alpha)^{4-2\beta}+\frac{(x+\alpha)^{5-2\beta}}{5-2\beta}-\frac{(2x)^{3-2\beta}}{3-2\beta}\alpha^2(2-\beta)^2+$$

$$+\alpha(2x)^{4-2\beta}-\frac{(2x)^{5-2\beta}}{5-2\beta}\leqslant\left\{\frac{2^{3-2\beta}}{3-2\beta}(2-\beta)^2-1+\frac{2^{5-2\beta}}{5-2\beta}+2^{4-2\beta}\right\}\alpha^{5-2\beta}.$$

$$I_2=\int\limits_0^{\alpha-x}\tau_1^{2-2\beta}(\alpha(2-\beta)-\tau_1)^2d\tau_1=\alpha^2(2-\beta)^2\frac{(\alpha-x)^{3-2\beta}}{3-2\beta}-\alpha(\alpha-x)^{4-2\beta}+$$

$$+\frac{(\alpha-x)^{5-2\beta}}{5-2\beta}\leqslant\left\{\frac{(2-\beta)^2}{3-2\beta}+\frac{1}{5-2\beta}\right\}\alpha^{5-2\beta}.$$

$$I_3=\frac{(x+\alpha)^{3-2\beta}}{3-2\beta}\alpha^2(2-\beta)^2-\alpha(x+\alpha)^{4-2\beta}+\frac{(x+\alpha)^{5-2\beta}}{5-2\beta}-\frac{(\alpha-x)^{3-2\beta}}{3-2\beta}\alpha^2(2-$$

$$-\beta)^2+\alpha(\alpha-x)^{4-2\beta}-\frac{(\alpha-x)^{5-2\beta}}{5-2\beta}\leqslant\left\{\frac{2^{3-2\beta}}{3-2\beta}(2-\beta)^2+\frac{2^{5-2\beta}}{5-2\beta}\right\}\alpha^{5-2\beta}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\left(R^0_\alpha(x,\tau)\right)^2d\tau\leqslant 2\left(\frac{(2-\beta)^2}{3-2\beta}\left(3\cdot 2^{2-2\beta}+1\right)+\frac{\left(3\cdot 2^{4-2\beta}+1\right)}{5-2\beta}-1+\right.$$

$$\left.+2^{4-2\beta}\right)\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_1(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

2. Пусть $x\in[\alpha,1-\alpha]$. Имеем

$$\int\limits_0^1\left(R^0_\alpha(x,\tau)\right)^2d\tau=\int\limits_0^{x-\alpha}\Big((x+\alpha-\tau)^{1-\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau-x)+$$

$$+(x-\alpha-\tau)^{1-\beta}(\alpha(1-\beta)+x-\tau)\Big)^2d\tau+$$

$$+\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(x+\alpha-\tau)^{2-2\beta}(\alpha(1-\beta)+\tau-x)^2d\tau\equiv J_1+J_2.$$

Очевидно,

$$J_2=\left(\frac{2^{5-2\beta}}{5-2\beta}-2^{4-2\beta}+\frac{(2-\beta)^2 2^{3-2\beta}}{3-2\beta}\right)\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_{21}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

В J_1 делаем замену $x-\alpha-\tau=\tau_1$:

$$J_1=\int\limits_0^{x-\alpha}\Big(\tau_1^{1-\beta}(\alpha(2-\beta)+\tau_1)-(\tau_1+2\alpha)^{1-\beta}(\tau_1+\alpha\beta)\Big)^2\,d\tau_1.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $x-\alpha\leqslant 3\alpha$, тогда:

$$J_1\leqslant\int\limits_0^{3\alpha}\Big(\tau_1^{1-\beta}(\alpha(2-\beta)+\tau_1)-(\tau_1+2\alpha)^{1-\beta}(\tau_1+\alpha\beta)\Big)^2\,d\tau_1\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{3\alpha}\Big(\tau_1^{2-\beta}+\alpha(2-\beta)\tau_1^{1-\beta}\Big)^2\,d\tau_1+$$

$$+2\int\limits_0^{3\alpha}\big(\alpha(2-\beta)(\tau_1+2\alpha)^{1-\beta}-(\tau_1+2\alpha)^{2-\beta}\big)^2\,d\tau_1=$$

$$=2\left(\frac{3^{5-2\beta}+5^{5-2\beta}}{5-2\beta}+3^{4-2\beta}+(2-\beta)^2\frac{3^{3-2\beta}+5^{3-2\beta}}{3-2\beta}-\right.$$

$$\left.-\,5^{4-2\beta}\right)\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_{22}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

2) если $x-\alpha>3\alpha$, разобьем J_1 на два интеграла:

$$J_1=\int\limits_0^{3\alpha}+\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}\equiv J_{11}+J_{12}.$$

По аналогии со случаем 1) имеем оценку

$$J_{11}\leqslant\tilde{C}_{22}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

В J_{12} $\tau_1\geqslant 3\alpha$ и $\dfrac{2\alpha}{\tau}\leqslant\dfrac{2\alpha}{3\alpha}<1$, поэтому, раскладывая скобки вида $\left(1+\dfrac{2\alpha}{\tau_1}\right)^\gamma$ в ряд Тейлора

$$\left(1+\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)^\gamma=1+\gamma\frac{2\alpha}{\tau_1}+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}\left(\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)^2+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!}\left(\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)^3+...,$$

и приводя подобные слагаемые получаем

$$J_{12}=(2-\beta)^2(1-\beta)^2\beta^2\alpha^6\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}\left(\frac{4}{3}\left(1-\frac{(1+\beta)}{4}\left(\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(1+\beta)(2+\beta)}{4\cdot 5}\left(\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)^2-...\right)+$$

$$\left.+2\left(-1+\frac{(1+\beta)}{3}\left(\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)-\frac{(1+\beta)(2+\beta)}{3\cdot 4}\left(\frac{2\alpha}{\tau_1}\right)^2+...\right)\right)^2\tau_1^{-2-2\beta}d\tau_1.$$

Учитывая, что

a)для любых положительных чисел a и b $(a-b)^2\leqslant(a+b)^2$;

b)$\dfrac{1+\beta}{4}<1,\dfrac{2+\beta}{5}<1,...,\dfrac{1+\beta}{3}<1,\dfrac{2+\beta}{4}<1,...$ так как $0<\beta<1$;

c) $\dfrac{2\alpha}{\tau_1}\leqslant\dfrac{2}{3}$;

d)$1+\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+...=\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=3$ как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем

$$J_{12}\leqslant(2-\beta)^2(1-\beta)^2\beta^2\alpha^6\left(\left(\frac{4}{3}+2\right)\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...\right)\right)^2\times$$

$$\times\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}\tau_1^{-2-2\beta}d\tau_1=100(2-\beta)^2(1-\beta)^2\beta^2\alpha^6\left(-\frac{(x-\alpha)^{-1-2\beta}}{1+2\beta}+\frac{(3\alpha)^{-1-2\beta}}{1+2\beta}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 100(2-\beta)^2(1-\beta)^2\beta^2\frac{3^{-1-2\beta}}{1+2\beta}\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_{23}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\left(R_\alpha^0(x,\tau)\right)^2d\tau\leqslant\left(\tilde{C}_{21}(\beta)+\tilde{C}_{22}(\beta)+\tilde{C}_{23}(\beta)\right)\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_2(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

3. Пусть $x\in[1-\alpha,1]$. Имеем

$$\int\limits_0^1\left(R_\alpha^0(x,\tau)\right)^2d\tau=\int\limits_0^{x-\alpha}\left((1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta}-\right.$$

$$-2(1-\tau)^{2-\beta}+(x-\alpha-\tau)^{1-\beta}(x-\tau+\alpha-\alpha\beta)+$$

$$+(2-x-\alpha-\tau)^{1-\beta}(2-x-\tau+\alpha-\alpha\beta)\Big)^2\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{x-\alpha}^{2-x-\alpha}\Big((1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta}-2(1-\tau)^{2-\beta}+$$

$$+(2-x-\alpha-\tau)^{1-\beta}(2-x-\tau+\alpha-\alpha\beta)\Big)^2\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{2-x-\alpha}^{1}\Big((1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta}-2(1-\tau)^{2-\beta}\Big)^2\,d\tau\equiv$$

$$\equiv I_1+I_2+I_3.$$

$$I_3=\int\limits_{0}^{x+\alpha-1}\Big((1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)\tau_1^{-\beta}-2\tau_1^{2-\beta}\Big)^2\,d\tau=$$

$$=(1-\beta)^2(2-\beta)^2(\alpha^2-(1-x)^2)^2\frac{(x+\alpha-1)^{1-2\beta}}{1-2\beta}-4(1-\beta)(2-\beta)(\alpha^2-(1-x)^2)\times$$

$$\times\frac{(x+\alpha-1)^{3-2\beta}}{3-2\beta}+4\frac{(x+\alpha-1)^{5-2\beta}}{5-2\beta}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{(1-\beta)^2(2-\beta)^2}{1-2\beta}+\frac{4}{5-2\beta}\right\}\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_{31}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

$$I_2\leqslant 2\int\limits_{x-\alpha}^{2-x-\alpha}\Big((1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta}-2(1-\tau)^{2-\beta}\Big)^2\,d\tau+$$

$$+2\int\limits_{x-\alpha}^{2-x-\alpha}\Big((2-x-\alpha-\tau)^{1-\beta}(2-x-\tau+\alpha-\alpha\beta)\Big)^2\,d\tau=$$

$$=2\int\limits_{x+\alpha-1}^{1-x+\alpha}\Big((1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)\tau_1^{-\beta}-2\tau_1^{2-\beta}\Big)^2\,d\tau_1+$$

$$+2\int\limits_{0}^{2-2x}\tau_1^{2-2\beta}(\tau_1+\alpha(2-\beta))^2d\tau_1\leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{(1-\beta)^2(2-\beta)^2\frac{2^{1-2\beta}}{1-2\beta}+\frac{4\cdot 2^{5-2\beta}}{5-2\beta}+\frac{4(1-\beta)(2-\beta)}{3-2\beta}+\frac{2^{5-2\beta}}{5-2\beta}+\right.$$
$$\left.+2^{4-2\beta}+\frac{(2-\beta)^2 2^{3-2\beta}}{3-2\beta}\right\}\alpha^{5-2\beta}\equiv \tilde{C}_{32}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

Сделав в I_1 замену $\tau_1 = x-\alpha-\tau$, имеем

$$I_1 = \int\limits_0^{x-\alpha}\left\{(1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(\tau_1-x+\alpha+1)^{-\beta}-\right.$$
$$-2(\tau_1-x+\alpha+1)^{2-\beta}+\tau_1^{1-\beta}(\tau_1+\alpha(2-\beta))+$$
$$\left.+(2-2x+\tau_1)^{1-\beta}(2-2x+\tau_1+\alpha(2-\beta))\right\}^2 d\tau_1.$$

Как и в пункте 2 для J_1 рассмотрим два случая:

1) $x-\alpha\leqslant 3\alpha$:

$$I_1 \leqslant \int\limits_0^{3\alpha}\left\{(1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(\tau_1-x+\alpha+1)^{-\beta}-\right.$$
$$-2(\tau_1-x+\alpha+1)^{2-\beta}+\tau_1^{1-\beta}(\tau_1+\alpha(2-\beta))+$$
$$\left.+(2-2x+\tau_1)^{1-\beta}(2-2x+\tau_1+\alpha(2-\beta))\right\}^2 d\tau_1\leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_0^{3\alpha}\left\{(1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(\tau_1-x+\alpha+1)^{-\beta}-\right.$$
$$\left.-2(\tau_1-x+\alpha+1)^{2-\beta}\right\}^2 d\tau_1+4\int\limits_0^{3\alpha}\left\{\tau_1^{1-\beta}(\tau_1+\alpha(2-\beta))\right\}^2 d\tau_1+$$
$$+4\int\limits_0^{3\alpha}\left\{(2-2x+\tau_1)^{1-\beta}(2-2x+\tau_1+\alpha(2-\beta))\right\}^2 d\tau_1\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2(1-\beta)^2(2-\beta)^2 5^{1-2\beta}}{1-2\beta}+\frac{8(1-\beta)(2-\beta)2^{3-2\beta}}{3-2\beta}+4\left(3^{4-2\beta}+5^{4-2\beta}\right)+$$
$$+\frac{4}{5-2\beta}\left(3^{5-2\beta}+3\cdot 5^{5-2\beta}\right)+\frac{4(2-\beta)^2}{3-2\beta}\left(3^{3-2\beta}+5^{3-2\beta}\right)\equiv\tilde{C}_{33}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

2) $x-\alpha>3\alpha$:

$$I_1=\int\limits_0^{3\alpha}+\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}=I_{11}+I_{12}.$$

Из первого случая

$$I_{11}\leqslant\tilde{C}_{33}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

В I_{12} $\tau_1\geqslant 3\alpha$ и $\dfrac{1+\alpha-x}{\tau}\leqslant\dfrac{2\alpha}{3\alpha}<1$, $\dfrac{2-2x}{\tau}\leqslant\dfrac{2\alpha}{3\alpha}<1$, поэтому, раскладывая скобки вида $\left(1+\dfrac{1+\alpha-x}{\tau_1}\right)^\gamma$ и $\left(1+\dfrac{2-2x}{\tau_1}\right)^\gamma$ в ряды Тейлора и приводя подобные слагаемые, получаем

$$I_{12}=(1-\beta)^2(2-\beta)^2\beta^2\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}\tau_1^{-2-2\beta}\left\{(\alpha^2-(1-x)^2)(1-x-\alpha)\times\right.$$

$$\times\left(-1+\frac{1+\beta}{2}\cdot\left(\frac{1-x+\alpha}{\tau_1}\right)-\frac{(1+\beta)(2+\beta)}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1-x+\alpha}{\tau_1}\right)^2+...\right)+$$

$$+\frac{(1-x+\alpha)^3}{3}\left(1-\frac{1+\beta}{4}\cdot\left(\frac{1-x+\alpha}{\tau_1}\right)+\frac{(1+\beta)(2+\beta)}{4\cdot 5}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1-x+\alpha}{\tau_1}\right)^2-...\right)+\frac{(2-2x)^3}{6}\left(-1+\frac{1+\beta}{4}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{2-2x}{\tau_1}\right)-\frac{(1+\beta)(2+\beta)}{4\cdot 5}\cdot\left(\frac{2-2x}{\tau_1}\right)^2+...\right)+\frac{\alpha(2-2x)^2}{2}\times$$

$$\left.\times\left(-1+\frac{1+\beta}{3}\cdot\left(\frac{2-2x}{\tau_1}\right)-\frac{(1+\beta)(2+\beta)}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{2-2x}{\tau_1}\right)^2+...\right)\right\}^2d\tau_1.$$

Исходя из тех же соображений, что и во 2-м случае пункта 2, имеем

$$I_{12}=(1-\beta)^2(2-\beta)^2\beta^2\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}\tau_1^{-2-2\beta}\left\{\alpha^2\cdot 2\alpha\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...\right)+\frac{(2\alpha)^2}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...\right)+$$

$$\frac{(2\alpha)^3}{6}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...\right)+$$

$$+\frac{(2\alpha)^2\alpha}{2}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...\right)\Bigg\}^2 d\tau_1=$$

$$=24^2(1-\beta)^2(2-\beta)^2\beta^2\alpha^6\int\limits_{3\alpha}^{x-\alpha}\tau_1^{-2-2\beta}d\tau_1\leqslant$$

$$\leqslant 24^2(1-\beta)^2(2-\beta)^2\beta^2\frac{3^{-1-2\beta}}{1+2\beta}\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_{34}(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\left(R_\alpha^0(x,\tau)\right)^2 d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\left(\tilde{C}_{31}(\beta)+\tilde{C}_{32}(\beta)+\tilde{C}_{33}(\beta)+\tilde{C}_{34}(\beta)\right)\alpha^{5-2\beta}\equiv\tilde{C}_3(\beta)\alpha^{5-2\beta}.$$

Таким образом, сравнивая $\tilde{C}_1(\beta)$, $\tilde{C}_2(\beta)$ и $\tilde{C}_3(\beta)$, получаем

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int\limits_0^1\left(R_\alpha^0(x,\tau)\right)^2 d\tau\leqslant\tilde{C}_3(\beta)\alpha^{5-2\beta},$$

откуда следует правая часть оценки (2) и выражение (4).

С другой стороны, все интегралы, рассмотренные в доказательстве, для которых были получены оценки сверху, кроме интеграла J_2 из второго пункта, оцениваем снизу нулем и получаем

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int\limits_0^1\left(R_\alpha^0(x,\tau)\right)^2 d\tau\geqslant J_2,$$

что дает левую часть оценки (2) и формулу(3). Теорема доказана.

Теорема 3. *При* $0<\beta<\dfrac{1}{2}$ *справедлива двусторонняя оценка:*

$$C_1^1(\beta)\alpha^{-\left(\frac{3}{2}+\beta\right)}\leqslant\left\|R_\alpha^1\right\|_{L_2\to C}\leqslant C_2^1(\beta)\alpha^{-\left(\frac{3}{2}+\beta\right)},$$

где

$$C_1^1(\beta) = \frac{3}{2\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{2^{3-2\beta}}{3-2\beta} - 2^{2-2\beta} + \frac{(1-\beta)^2 2^{1-2\beta}}{1-2\beta} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$C_2^1(\beta) = \frac{3}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{(1-\beta)^2 \beta^2 16 \cdot 3^{1-2\beta}}{1+2\beta} + \frac{(1-\beta)^2}{1-2\beta} \left\{ 3^{1-2\beta} + 2^{-2\beta} \right\} + \right.$$

$$\left. +4 \cdot 3^{1-\beta} 5^{1-\beta} + 2^{1-2\beta} + \frac{20}{3-2\beta} \left\{ 5^{2-2\beta} + 2^{-2\beta} \right\} - \frac{3}{3-2\beta} \right)^{1/2}.$$

Доказательство

аналогично доказательству теоремы 2.

Следствие 1. Для того чтобы

$$\Delta(\delta, R_\alpha^p, u) \equiv \sup \left\{ \left\| R_\alpha^p f_\delta - u^{(p)} \right\|_C : \| f_\delta - Au \|_{L_2} \leqslant \delta \right\} \to 0$$

при $\delta \to 0$ $(p = 0, 1)$, необходимо и достаточно так согласовать α с δ, чтобы $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta \cdot \alpha(\delta)^{-\frac{2p+1}{2} - \beta} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Доказательство

Доказательство следует из того, что при указанном согласовании

$$\left\| R_{\alpha(\delta)}^p f - u^{(p)} \right\|_C \to 0$$

при $\delta \to 0$ $\quad (p = 0, 1)$ (поскольку $R_\alpha^p f = \widetilde{T}_\alpha^p u$) и $\delta \left\| R_{\alpha(\delta)}^p \right\|_{L_2 \to C} \to 0$ при $\delta \to 0$, а эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы $\Delta(\delta, R_\alpha^p, u) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Библиографический список

1. *Шишкова Е.В.* Регуляризация уравнения Абеля в пространстве $C^1[0,1]$ // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2004. Вып. 7. С. 140–142.

2. *Хромова Г.В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 907–1002.

3. *Хромова Г.В.*. О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. 2001. Сер. 15. № 3. С. 5–9.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

УДК 519.21

А.В. ШУТОВ

О распределении дробных долей II[1]

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению распределения дробных долей $n\alpha + a$ по модулю 1. Основной характеристикой распределения является величина

$$r(\alpha, a, n, I) = N(\alpha, a, n, I) - n|I|,$$

где $I \subset (0;1)$ — некоторый интервал, и

$$N(\alpha, a, n, I) = \sharp\{k : 0 \leqslant k < n, < k\alpha + a > \in I\}.$$

Наибольший интерес представляют интервалы ограниченного остатка, то есть такие интервалы I, для которых

$$|r(\alpha, a, n, I)| < C,$$

где C не зависит от n.

В работах Гекке [1] и Кестена [2] было выяснено, что интервал I является интервалом ограниченного остатка тогда и только тогда, когда $|I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, причем

$$|r(\alpha, 0, n, I)| < |h|,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 02-01-00368.

где h — единственное целое число, для которого $|I| - h\alpha \in \mathbb{Z}$.

В работах В.Г. Журавлева [3], Н.Н. Мануйлова [4], А.В. Шутова [5] было выяснено, что наибольший интерес при изучении интервалов ограниченного остатка представляют так называемые собственные интервалы [6], [7], на которых отображение первого возвращения для поворота окружности вновь является поворотом окружности. В частности, было доказано, что для иррациональностей с ограниченными неполными частными разложения в цепную дробь оценка, даваемая теоремой Гекке, может быть улучшена для всех собственных интервалов с правым концом в точке 1.

В работе получены следующие результаты:

1) Получена новая оценка остаточного члена $r(\alpha, a, n, I)$ для произвольного собственного интервала. Доказано, что полученная оценка лучше оценки, даваемой теоремой Гекке при условии

$$\sum_{k=1}^{n} q_k < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \varepsilon\right)^n,$$

где $\{q_k\}$ — последовательность неполных частных разложения α в цепную дробь.

2) Доказано, что интервал является интервалом ограниченного остатка тогда и только тогда, когда его можно представить в виде конечного объединения собственных интервалов.

3) Для иррациональностей с ограниченными неполными частными разложения в цепную дробь получена новая оценка остаточного члена $r(\alpha, a, n, I)$ для произвольного интервала ограниченного остатка.

В общем случае задача оценки $r(\alpha, a, n, I)$ на интервалах ограниченного остатка разбивается на две подзадачи:

1) разложение интервала I в объединение собственных интервалов;

2) вычисление $r(\alpha, a, n, I)$ для собственных интервалов I.

Автор благодарит В.Г. Журавлева за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

1. РАЗБИЕНИЕ ФИБОНАЧЧИ И ПРОИЗВОДНЫЕ ОРБИТ

Для формулировки результатов нам потребуется понятие обобщенного разбиения Фибоначчи, а также некоторые результаты о производных орбит иррационального поворота окружности на интервалах обобщенных разбиений Фибоначчи. Доказательства приводимых результатов можно найти в работах [3], [8], [6], [7].

Рассмотрим множество $\mathbb{T}$ всех разбиений единичной окружности $\mathbb{S}^1 = [0;1)$ на конечное число полуинтервалов. Рассмотрим оператор $B : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, действующий следующим образом. Пусть $Til \in \mathbb{T}$ — разбиение $\mathbb{S}^1$ на конечное число полуинтервалов, $|X|$ — наименьшая из длин полуинтервалов разбиения. Тогда в разбиении $B(Til)$ интервалы из Til длины $|X|$ сохраняются, а интервалы длины $|Y| > |X|$ распадаются на 2 интервала длины $|X|$ и $|Y| - |X|$ соответственно. Другими словами, действие B-оператора заключается в откладывании интервала наименьшей длины от левых концов всех интервалов разбиения Til.

Пусть $Til_0(\alpha)$ состоит из 2 полуинтервалов $[0;\alpha) \oplus [\alpha;1)$, где $\oplus$ означает некоммутативную операцию прикладывания полуинтервалов.

Обобщенное разбиение Фибоначчи порядка m определяется соотношением

$$Til_m(\alpha) = B^m(Til_0(\alpha)).$$

Очевидно, что если α иррационально, то $Til_m(\alpha) \neq Til_n(\alpha)$ при $m \neq n$.

Легко показать, что разбиение $Til_m(\alpha)$ состоит из интервалов 2 разных длин и не может заканчиваться двумя интервалами одной длины. Введем отображение $Col_{m,\alpha}$, ставящее в соответствие каждому интервалу из $Til_m(\alpha)$ одну из двух цветовых меток E и G, с соблюдением двух условий:

1) интервалы $Til_m(\alpha)$, имеющие одинаковую длину, получают одну и ту же метку, интервалы разной длины — разные метки;

2) крайнему правому интервалу из $Til_m(\alpha)$ ставится в соответствие метка E.

В результате получаются цветные разбиения Фибоначчи $CTil_m(\alpha) = Col_{m,\alpha}(Til_m(\alpha))$.

Мы будем использовать следующие обозначения: L^m, S^m — длинные и короткие интервалы разбиения $Til_m(\alpha)$, $l_m(\alpha)$ и $s_m(\alpha)$ — их длины, $L_m(\alpha)$ и $S_m(\alpha)$ — их количества; E^m и G^m, E и G — интервалы разбиения $CTil_m(\alpha)$, $e_m(\alpha)$ и $g_m(\alpha)$ — их длины, $E_m(\alpha)$ и $G_m(\alpha)$ — их количества, $i_m(\alpha) = e_m(\alpha) + g_m(\alpha)$, $I^m = (1 - i_m(\alpha); 1)$. Всюду, где это не будет вызывать двусмысленностей, индекс α будет опускаться.

В работе [8] была доказана следующая теорема о глобальных координатах разбиений Фибоначчи.

Теорема 1. *Интервалы цветных разбиений Фибоначчи имеют координаты*

$$E_i^m = (< (G_m - i)\alpha >; < -i\alpha >),$$

$$G_i^m = (< (G_m - E_m - i)\alpha >; < (G_m - i)\alpha >),$$

где $< x >$ *— дробная часть* x.

Рассмотрим поворот окружности

$$R_\alpha : x \to x + \alpha \pmod 1.$$

Для произвольного интервала I определим отображение первого возвращения

$$d_I R_\alpha = R_\alpha^{n_I(x)}(x), \text{ где } n_I(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : R_\alpha^n(x) \in I\}.$$

В [6], [7] была доказана

Теорема 2. *Отображение $d_I R_{R_\alpha}$ вновь является поворотом окружности тогда и только тогда, когда $|I| = i_m(\alpha)$ при некотором m.*

Введем обозначение $Orb(a, \alpha, I)$ для орбиты точки a под действием отображения $x \to x + \alpha \pmod{I}$.

Из теоремы 2 легко получается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $|I| = i_m(\alpha)$. Тогда существуют числа $d^m\alpha$, a_I и преобразование $h_I \in GL(1, \mathbb{R})$, такие что*

$$I \cap Orb(a, \alpha, I^0) = h_I Orb(a_I, d^m\alpha, I^0). \tag{1}$$

Здесь $d^m\alpha$ — зависит от m и α, но не от I, и $I^0 = (0; 1)$.

Отображение $\alpha \to d^m\alpha$ обладает следующими свойствами [6], [7], [5]:

$$d^{m+n}\alpha = d^m(d^n\alpha) = d^n(d^m\alpha), \tag{2}$$

$$i_{m+1}(\alpha) = i_m(\alpha) max(d^m\alpha, 1 - d^m\alpha). \tag{3}$$

2. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Введем следующие обозначения:

$$N(\alpha, a, n, I) = \sharp\{k : 0 \leqslant k < n, < k\alpha + a > \in I\},$$

$$r(\alpha, a, n, I) = N(\alpha, a, n, I) - n|I|,$$

$$D^k = max(d^k\alpha, 1 - d^k\alpha).$$

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, $|I| = i_m(\alpha)$. Тогда*

$$|r(\alpha, a, n, I)| < 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \prod_{k=j}^{m-1} D^k\alpha. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство будем проводить индукцией по m. Вначале рассмотрим случай $m = 1$.

Гекке в работе [1] доказал следующий результат.

Пусть $|I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. *Тогда*

$$|r(\alpha, 0, n, I)| < |h|, \tag{5}$$

где h *— единственное целое число, для которого* $|I| - h\alpha \in \mathbb{Z}$.

Так как

$$I^1 = \begin{cases} (\alpha; 1) & \text{, если } \alpha < \frac{1}{2}, \\ (1-\alpha; 1) & \text{, если } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

воспользовавшись теоремой Гекке, получаем, что при $|I| = i_1(\alpha)$

$$|r(\alpha, 0, n, I)| < 1.$$

Заметим, что $< n\alpha + a > \in I$ тогда и только тогда, когда $< n\alpha > \in I'$, где $I' \equiv I - a \pmod 1$. Поэтому

$$r(\alpha, a, n, I) = r(\alpha, 0, n, I')$$

для некоторого интервала I' той же длины, что и I. Следовательно,

$$|r(\alpha, a, n, I)| < 1, \tag{6}$$

при $|I| = i_1(\alpha)$ и неравенство (4) для $m = 1$ доказано.

Предположим, что неравенство (3) доказано для $k = m$ и докажем его для $k = m + 1$.

Из теоремы 2 и формулы (2) вытекает следующий результат, связывающий числа $N(\alpha, a, n, I)$ для различных интервалов I.

Пусть $I_2 \subset I_1, |I_1| = i_m(\alpha)$, $|I_2| = i_k(\alpha)$. *Тогда*

$$N(\alpha, a, n, I_2) = N(d^m\alpha, a_{I_1}, N(\alpha, a, n, I_1), h_{I_1}^{-1}(I_2)). \tag{7}$$

Далее достаточно применить к соотношению (7) с $k = m + 1$ оценку для $N(\alpha, a, n, I_1)$, справедливую по предположению индукции и использовать (6) и (3). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $|I| = i_m(\alpha)$. Тогда

$$|r(\alpha, a, n, I)| < m. \tag{8}$$

Доказательство

Для доказательства достаточно воспользоваться оценкой (4) и тривиальной оценкой $D^k\alpha < 1$ для всех k.

Следствие 2. Пусть $|I| = i_m(\alpha)$ и все неполные частные разложения α в цепную дробь меньше N. Тогда

$$|r(\alpha, a, n, I)| < N + 1. \tag{9}$$

Доказательство

Для доказательства достаточно воспользоваться доказанной в [5] оценкой для правой части неравенства (4).

Замечание 1. Н.Н. Мануйлов в работе [4] показал, что для чисел τ_g, имеющих разложение в цепную дробь вида $\tau_g = [g; (g)]$, существует бесконечная последовательность длин i_{m_k}, для которой оценка (9) может быть улучшена.

3. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТОМ ГЕККЕ

Теорема 5. *Пусть разложение α в цепную дробь имеет вид $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots]$. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех n*

$$\sum_{k=1}^{n} q_k < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \varepsilon\right)^n.$$

Тогда для всех m, больших некоторого m_0, оценка (8) лучше оценки (5), даваемой теоремой Гекке.

Доказательство

Из теоремы 1 следует, что

$$i_m(\alpha) = < S_{m-1}\alpha > .$$

Поэтому в случае $|I| = i_m(\alpha)$ оценка (5) превращается в оценку

$$|r(\alpha, a, n, I)| < S_{m-1},$$

и требуется доказать, что для $m > m_0$

$$S_m > m.$$

Так как $S_m(\alpha) = S_m(1-\alpha)$, ограничимся рассмотрением случая $\alpha < \frac{1}{2}$.

Число m назовем α-регулярным, если $s_{m-1}(\alpha) > s_m(\alpha)$. Пусть $\{m_i\}$ — последовательность α-регулярных чисел, $n_i = m_i - m_{i-1}$. Тогда при переходе $Til_{m_{i-1}}(\alpha) \to Til_{m_i}(\alpha)$ длинные и короткие интервалы разбиения преобразуются по следующим правилам:

$$S^{m_{i-1}} \to L^{m_i},$$

$$L^{m_{i-1}} \to n_i L^{m_i} \oplus S^{m_i}.$$

Следовательно,

$$S_{m_i} = L_{m_{i-1}},$$

$$L_{m_i} = n_i L_{m_{i-1}} + S_{m_{i-1}}.$$

Отсюда получаем, что

$$S_{m_i} = n_{i-1} S_{m_{i-1}} + S_{m_{i-2}}.$$

Поскольку $S_0 \geqslant 1$, $S_1 \geqslant 1$ и $n_i \geqslant 1$, получаем оценку

$$S_{m_i} \geqslant F_{i+1}, \tag{10}$$

где F_i — i-е число Фибоначчи.

Пусть теперь разложение α в цепную дробь имеет вид $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots]$ и

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \leqslant g(n),$$

где $g(x)$ — некоторая монотонно возрастающая функция.

Пусть $m = m_i + t$ и $0 \leqslant t < n_{i+1}$. В [6] было доказано, что $n_1 = q_1 - 1$ и $n_k = q_k$ при $k \geqslant 2$. Отсюда получаем, что $m \leqslant g(i+1)$ и $i \geqslant [g^{-1}(m)] - 1([x]$ — целая часть $x)$. Так как последовательность $\{S_m\}$ возрастает,

$$S_m \geqslant F_{g^{-1}(m)}. \tag{11}$$

Выберем в качестве $g(x)$ функцию $g(x) = c^x$ и воспользуемся явной формулой для чисел Фибоначчи

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^m + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^m\right).$$

В результате получим неравенство

$$S_m \geqslant \frac{1}{\tau\sqrt{5}}\tau^{\frac{\log_\tau m}{\log_\tau c}},$$

где $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, при условии $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k < c^k$. Выбирая $c = \tau - \varepsilon$, получаем требуемый результат.

<u>Гипотеза</u> 1. *Для любого иррационального α существует бесконечно много чисел m, для которых оценка (8) улучшает оценку (5).*

4. ИНТЕРВАЛЫ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

Интервал I назовем интервалом ограниченного остатка, если

$$|r(\alpha, a, n, I)| < C,$$

где C не зависит от n.

Теорема 6. *Интервал I является интервалом ограниченного остатка тогда и только тогда, когда*

$$|I| = \sum_{k=1}^{t} i_{j_k}(\alpha). \tag{12}$$

Индексы j_k не обязательно все различные.

Доказательство

Необходимость. Пусть I — интервал ограниченного остатка. Известно [2], что в этом случае $|I| \in \alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, то есть $|I| = a\alpha + b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что существует интервал I' длины $|I|$ вида $I' = (0; < N\alpha >)$ или $I' = (< N\alpha >; 1)$. Действительно, если $a > 0$, из условия $0 < \alpha < 1$ вытекает, что $b = -[a\alpha]$ и $|I| = a\alpha$. Следовательно, в качестве интервала I' можно выбрать интервал $I' = (0; < a\alpha >)$. Если же $a < 0$, то $b = 1 + [-a\alpha]$, и в качестве I' можно выбрать интервал $I' = (< -a\alpha >; 1)$.

Далее покажем, что для любого интервала $I' = (< N_1\alpha >; < N_2\alpha >)$ его длина представляется в виде

$$|I'| = \sum_{k=1}^{t_1} e_{j'_k}(\alpha) + \sum_{k=1}^{t_2} g_{j''_k}(\alpha). \tag{13}$$

Заметим, что по теореме 1 в $CTil_m(\alpha)$ точки $< i\alpha >$ с $i \in \mathbb{Z}$ и $-E_m(\alpha) \leqslant i \leqslant G_m(\alpha)$ являются концами интервалов разбиения. Поскольку последовательности $\{E_m(\alpha)\}$,$\{G_m(\alpha)\}$ не убывающие и

$$\lim_{m\to\infty} E_m(\alpha) = \lim_{m\to\infty} G_m(\alpha) = \infty,$$

существует целое m такое, что $\min(N_1, N_2) \geqslant -E_m(\alpha)$ и $\max(N_1, N_2) \leqslant G_m(\alpha)$. При этом I' представляется в виде объединения интервалов из $CTil_m(\alpha)$ и, следовательно, его длина представима в виде (13), причем все j'_k и j''_k равны m.

Далее покажем, что каждое из чисел $e_m(\alpha)$, $g_m(\alpha)$ равно $i_{m'}$ для некоторого m'. Действительно, всегда существуют числа m_1 и m_2, такие что

$$E^m = E^{m_1} = G^{m_1+1} \oplus E^{m_1+1},$$

$$G^m = G^{m_2} = E^{m_2+1} \oplus G^{m_2+1}.$$

При этом одно из чисел m_1, m_2 должно быть равно m. Отсюда следует, что

$$e_m(\alpha) = i_{m_1}(\alpha),$$

$$g_m(\alpha) = i_{m_2}(\alpha).$$

Собирая вместе полученные результаты, получаем, что для длины $|I|$ интервала ограниченного остатка справедливо разложение (12).

Достаточность. Из (12) следует, что интервал I можно представить в виде $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_t$, где $|I_k| = i_{j_k}(\alpha)$, и по теореме 4 I_k есть множество ограниченного остатка. Поэтому существуют постоянные $C_1, \ldots, C_k$, такие что

$$ni_{j_k}(\alpha) - C_k < N(\alpha, a, n, I_k) < ni_{j_k}(\alpha) + C_k. \tag{14}$$

Пусть I' есть множество правых концов интервалов I_k, $1 \leqslant k \leqslant t-1$. Тогда $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_t \cup I'$ и, следовательно,

$$N(\alpha, a, n, I) = \sum_{k=1}^{t} N(\alpha, a, n, I_k) + N(\alpha, a, n, I'). \tag{15}$$

Множество I' состоит из $t-1$ точек. Поэтому для всех a,n справедливо неравенство

$$0 \leqslant N(\alpha, a, n, I') \leqslant t - 1. \tag{16}$$

Подставляя в (15) оценки (14),(16), получаем

$$n|I| - \sum_{k=1}^{t} C_k < N(\alpha, a, n, I) < n|I| + \sum_{k=1}^{t} C_k + t - 1. \tag{17}$$

Обозначая $C = \sum_{k=1}^{t} C_k + t - 1$, имеем

$$|r(\alpha, a, n, I)| < C.$$

Теорема доказана.

Неравенство (17) дает возможность получать оценки для $|r(\alpha, a, n, I)|$ в случае, когда длина интервала I отлична от $i_m(\alpha)$.

Предложение 1. *Пусть все неполные частные разложения α в цепную дробь меньше N и*

$$|I| = \sum_{k=1}^{t} i_{j_k}(\alpha).$$

Тогда

$$|r(\alpha, a, n, I)| < (N + 2)t - 1.$$

Доказательство

Для доказательства достаточно подставить в (17) оценку (9).

Замечание 2. Оценка (17) может быть улучшена, если известен явный вид разложения (12). Ситуация, однако, осложняется тем, что разложение (12) не единственно. Более того, таких разложений бесконечно много и нахождение разложения, дающего наилучшую оценку, представляет собой достаточно трудную задачу.

Библиографический список

1. *Hecke E.* Analitishe Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod eins // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1922. P. 54–76.

2. *Kesten H.* On a conjecture of Erdös and Süsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arith. 1973. Vol. 14. P. 26–38.

3. *Журавлев В.Г.* Одномерные разбиения Фибоначчи // Известия РАН. Сер. мат. 2004 (в печати).

4. *Мануйлов Н.Н.* Число попаданий точек последовательности $\{i\alpha\}$ в полуинтервал // Чебышевский сборник: Тр. VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5, вып. 3. С. 72–81.

5. *Шутов А.В.* О распределении дробных долей // Чебышевский сборник: Тр. VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5, вып. 3. С. 112–121.

6. *Zhuravlev V.G., Shutov A.V.* Derivatives of circle rotations and similarity of orbits // Preprint of Max-Plank institut für mathematik. 2004. № 62.

7. *Шутов А.В.* Производные поворотов окружности и подобие орбит // Записки научных семинаров ПОМИ. 2004 (в печати).

8. *Мануйлов Н.Н., Шутов А.В.* Глобальный порядок разбиения окружностию // Молодежь.Образование.Экономика: Сб. науч. ст. участников 5-й Всерос. науч.-практ. конф. молодых ученых, аспирантов и студентов, 4 мая 2004 г. Ярославль; Ремдер, 2004. С. 314–320.

УДК 510

А.Н. ГАМОВА

Канторовская теория множеств в свете альтернативной теории множеств[1]

Канторовская теория множеств претендовала на то, чтобы служить основанием всей математики в целом. Альтернативная теория множеств, занявшая ее место, должна показать, что она может заменить Канторовскую теорию множеств по отношению к математике, гарантировав ей непротиворечивое основание. Теория множеств имеет два главных назначения: давать язык представления математического мышления и служить основанием математики, поскольку имеет целью структуризацию мира в универсуме множеств.

Первая функция теории множеств не вызывает сомнения. Никого не надо убеждать в том, что в современной математике господствуют теоретико-множественные представления (исключение составляют лишь конструктивное и интуиционистское направления в математике).

Вторая функция теории множеств казалось бы пошатнулась после обнаружения в ней противоречий, от которых Канторовская теория множеств так или иначе избавилась, но не избавила себя от появления новых

[1]Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-06-87028).

противоречий. Последнее стало возможным лишь в рамках Альтернативной теории множеств (AST), автором которой является П. Вопенка [1]. Начнем с противоречия, затрагивающего самое основание теории множеств — парадокса Рассела. Причина его, как и многих ему подобных, в том мировоззрении, которое сформировалось в теологическом осмыслении Канторовской теории множеств, на которое опираются рассуждения о бесконечных множествах, в частности и представление об универсуме множеств. Мы «видим» бесконечные множества так, как их видит бог, в их актуальной завершенности. Однако опыт учит нас другому, а именно восприятию бесконечного, как естественной бесконечности. Бесконечность проявляется там, где мир становится нечетким, «убегает» горизонту очень большого (возможно, даже и конечного, в канторовском понимании конечного) или, наоборот, очень малого. Через феномен «нечеткости» в Альтернативную теорию множеств вводится представление бесконечного. Отказавшись от актуализуемости универсума всех множеств, а также и от актуализуемости некоторых других бесконечных множеств, Канторовская теория множеств избавилась бы сразу от всех своих парадоксов как старых, так и новых. А вместо этого — универсум Канторовской теории множеств был недопустимо сужен.

Второй кризис Канторовской теории множеств разразился в связи с открытием в формализованной теории множеств неразрешимых предложений. В это время задача заниматься основанием теории множеств была возложена на ее формалистическое понимание, что, конечно, не было в его силах, что и показали теоремы Геделя. Формализм не мог обосновать непротиворечивость аксиом теории множеств, поэтому пытался это сделать через относительную непротиворечивость.

Еще Г. Кантор высказал гипотезу, что не существует промежуточной мощности между ω и 2^ω. Неразрешимость этой гипотезы континуума, как и аксиомы выбора, доказал П. Коэн. Еще раньше К. Гедель установил непротиворечивость некоторой аксиоматической системы теории множеств $\sum$ с присоединенной аксиомой выбора и обобщенной гипотезой континуума. При всей важности этих результатов нельзя забывать, что они относятся к определенным формальным системам (типа $\sum$ и ZF). Канторовская же «наивная» теория множеств не накладывала ограничений на природу своих объектов (которые могли быть и индивидами). С другой стороны, континуум — гипотеза по самой своей сути относится к области фундированных множеств. А аксиома фундированности предполагает лишь такие множества, которые строятся из уже имеющихся, начиная с $\emptyset$ или с $\emptyset$ и множества индивидов. И все-таки проблема отождествления аксиоматических систем с «наивной» теорией множеств отнюдь не тривиальна. Эта проблема не возникает в рамках AST, потому что она также содержательная теория, хотя из соображений удобства будем ее себе мыслить как аксиоматическую.

Посмотрим, как в рамках AST может быть решена проблема континуум — гипотезы. В Канторовской теории множеств несчетность множества всех вещественных чисел доказывается посредством канторовского диагонального метода. Существование же множества всех вещественных чисел основано на представлении их в виде двоичных дробей, откуда возникает взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и подмножествами натурального ряда. А вера в существование множества всех подмножеств натурального ряда нам представляется «очевидным фактом», постулируемым в Канторовской теории множеств в виде аксиомы множества степени. А если этот факт признать не очевидным, что и принимает Альтернативная теория множеств, исходя из своего представления о бесконечности, проблема континуума будет снята.

Канторовская теория множеств также вынуждена отказаться признать множествами необозримо большие совокупности, тем самым навязав обозримость, то есть малость и четкость, всем множествам. Однако число всех молекул в капле воды или число 256^{256} мы вряд ли склонны признать за малые и обозримые. А класс понятия «количество волос в шевелюре стареющего денди» мал, но тем не менее нечеткий. Нечеткие совокупности Канторовская теория множеств не рассматривает, так как для них не выполняется принцип математической индукции. Однако если мы хотим моделировать реальный мир, мы не можем проигнорировать такой обширный класс, как нечеткие совокупности, которых необозримо больше, чем четких. Как следствие этого — отказ от представлений, что приближения являются приближениями к чему-то точному и навязывания «нечетким объектам» свойств, им не присущих. Примером могут служить «парадоксальные» следствия из аксиомы выбора о разбиении шара. Парадокса на самом деле нет, так как части, на которые разбивается шар, неизмеримые, и к ним неприменимо свойство аддитивности меры. Той же природы вопрос о том, насколько правомерно приписывать меру всякому случайному событию. В свое время пренебрежение феноменом нечеткости привело к существенным трудностям в теоретической физике в связи с осмыслением статуса необратимых процессов. Альтернативная теория множеств дает очень естественный подход к этой проблематике, позволяющий отказаться от неоправданной аргументации, будто некоторые процессы возможны, но имеют очень малую вероятность. Эта теория позволяет совместить обратимость фундаментальных уравнений с существованием необратимости, как спонтанности, по причинам, что в природе не существует абсолютно горизонтальных направлений и т.д. Сами по себе эти идеи приходят в голову, но их математическая обработка становится возможной лишь в рамках обсуждаемой теории.

Для осмысления феномена «нечеткости» в AST вводится понятие «горизонт». Все, что лежит перед горизонтом, мы видим четко. Совокупности объектов, расположенных перед горизонтом, трактуются как конечные множества. К горизонту устремляются нечеткие совокупности, которые объявляются собственными классами. Нечеткость, присущая небольшим собраниям, реализуется посредством полумножеств, то есть подклассов множеств. Поэтому существуют бесконечные множества, которые содержат собственные подмножества. Поскольку собственные классы — это бесконечные совокупности, достигающие горизонта, множества, их содержащие, продолжаются за горизонт.

В отличие от Канторовской теории множеств, где границы мира непроницаемые, в AST горизонт не занимает строго определенного положения, а может отдаляться вследствие заострения нашего зрения (например, с помощью оптических приборов). Также и мир не заключен в жесткие границы горизонта, а может продолжаться за горизонтом. Человек умирает, но мир какое-то время продолжает существовать таким, каким он его оставил. Бесконечные сходящиеся последовательности рациональных чисел, пределы которых называют вещественными числами, располагаются на горизонте (за исключением конечного числа членов, расположенных перед горизонтом), а их пределы, вещественные числа, лежат за горизонтом. Здесь мы подошли к ситуации, когда четко описанная совокупность, множество имеет нечеткую часть — собственный подкласс, называемый полумножеством.

Собственные классы и полумножества являются носителями нечеткости, поэтому объявляются бесконечными совокупностями. Отсюда следует определение конечного класса:

$$Fin(X) :\equiv Cls(X) \ \& \ \forall\, Y \ (Y \subseteq X \to Set(Y)).$$

Полумножества — это небольшие классы, содержащиеся в множествах, поэтому естественно потребовать от них выполнения свойств, присущих множествам, и чего-то еще, что будет отличать их от множеств. Так что, во-первых, это замкнутость относительно геделевских операций:

$$\cup X, \ \wp(X), \ X \times Y, \ X \cap Y, \ D(X) \quad \text{и т.д.},$$

а, во-вторых, очевидно, что пересечение класса с множеством есть полумножество. Класс, пересечение которого с любым множеством есть множество, назовем реальным классом [1].

АКСИОМА РЕАЛЬНЫХ КЛАССОВ:

$$\forall\ X\ \forall\ x\ \exists\ y \qquad D(X) \cap x = D(X \cap y),$$

где X — класс, $x,\ y$ — множества.

Тогда для реального класса X, $D(X)$ есть реальный класс. Геделевы операции переводят реальные классы в реальные классы. Так как множества — это реальные классы, то геделевы операции сохраняют множества. Теория Геделя—Бернайса (GB) — это теория реальных классов.

В AST предполагается существование собственных полумножеств, там отсутствует аксиома GB: «Если F-функция — класс и $D(F)$ — множество,то F — множество». Ограничившись в теории GB лишь множественными формулами (не содержащими классовых переменных), получим систему Цермело—Френкеля (ZF). Таким образом, системы GB и ZF имеют естественную интерпретацию в AST.

Напомним, что канторовский универсум множеств актуализован. Универсум V множеств AST строится также согласно принципам 1–2:

1. $\emptyset \in V$;

2. $X,\ Y \in V \to X \cup \{Y\} \in V$.

Не будем спешить с актуализацией универсума V, однако актуализуем его часть FV, объекты которой (наследственно конечные множества) лежат перед горизонтом, то есть являются конечными множествами (так же, как их элементы, элементы их элементов и т.д.). После актуализации FV образует собственный класс, для которого верно все, что верно для канторовского универсума, с той лишь разницей, что четкость элементов FV и утверждений о них утрачивается по мере приближения к горизонту (достаточно вспомнить, что FV — собственный класс).

Конечные натуральные числа (их фон Неймановские модели) образуют в универсуме FV класс FN, играющий при построении математики на основе AST ту же роль, что класс натуральных чисел N в канторовской математике. В частности, имеет место принцип математической индукции на FN и связанные с ним утверждения классической математики (индуктивная теорема, построения по индукции и пр.).

Теперь, когда определен универсум множеств, под классами будем понимать совокупности элементов из V (о существовании других классов скажем позже). Классы будем обозначать $X,\ Y,\ Z,\ldots$, множества из универсума множеств — $x,\ y,\ z,\ldots$, конечные натуральные числа — $n,\ m,\ t,\ldots$ Формулы определяются обычным образом, различаются классовые и множественные формулы. Конечно- и бесконечно-перечислимые классы определим соответственно как $\exists\, n \in FN\ (X \approx n)$ и $X \approx FN$, где отображения заданы функцией-классом. Очевидно, что существуют и неперечислимые классы, чьи элементы нельзя уложить перед горизонтом.

АКСИОМА ПУТИ К ГОРИЗОНТУ.

Пусть $\varphi(X,Y)$ — классовая формула и $\forall\, n\ \exists\, X\ \varphi(X,n)$. Тогда существует функция — класс G, такая что

$$D(G) = FN \qquad \text{и} \qquad \forall\, n\ \varphi(G(n),n).$$

Горизонт в Альтернативной теории множеств может перемещаться, расширяя обзор, а мир продолжается за горизонтом, правда, не очень далеко, что отражено в следующей аксиоме.

АКСИОМА ПРОДОЛЖЕНИЯ ЗА ГОРИЗОНТ.

Пусть $G :: FN \to V$ есть функция. Тогда существует функция g, такая что $G \subseteq g$. Так как $G,\ g$ — функции и $G \subseteq g$, то $g(n) = G(n)$ для каждого $n \in FN$.

Отдалением горизонта от универсумов FV и FN можно перейти соответственно к универсумам $F*V$, $F*N$, для которых FV, FN становятся собственными подклассами. Причем это не последнее такое отдаление горизонта. Один из таких классов $F*V$, для которого еще выполняются аксиомы ZF, отождествим с V (хотя, конечно, $V \neq F*V$). В этом смысле можно говорить об актуализуемости класса V.

Альтернативная теория множеств мало бы отличалась от Канторовской теории множеств, если бы она ограничилась рассмотрением универсума V, главный интерес AST состоит в изучении классовой надстройки над универсумом множеств V — расширенного универсума AST. Классовая надстройка V^* существенным образом зависит от горизонта, то есть класса FN, являющегося отражением удаленности горизонта.

АКСИОМА ЭЛЕМЕНТОВ И ПОДМНОЖЕСТВ.

$$X \in V \leftrightarrow Set(X) \& X \subseteq V.$$

Эта аксиома гарантирует, что все множества из расширенного универсума являются множествами из V. Актуализацией класса V мы не закрыли возможность изучения вновь возникающих (актуализуемых) классов, не попавших в расширенный универсум, если они могут быть закодированы классами из расширенного универсума. Эта вера не сильнее той убежденности, что в Канторовской теории множеств существуют модели всех явлений мира. Альтернативная теория множеств не закрыта также для пополнения ее новыми принципами, которые могут возникнуть в дальнейшем при условии соблюдения условий, что присоединяемые объекты не противоречат уже существующим, а области осуществимых объектов несовместимы (в том смысле, что если уж эволюцией избран один из путей развития, то этот путь несовместим с любым из других возможных путей). Появление Альтернативной теории множеств показало, что путь развития теории множеств, как и всей математики в целом, мог быть иным. Появившиеся в Канторовской теории множеств парадоксы получили в Альтернативной теории множеств естественное объяснение с указанием путей их преодоления. Большинство неразрешимых проблем классической теории множеств так или иначе связано с понятием континуума. Критический анализ понятия континуума занимает важное место в Альтернативной теории множеств. В какой-то мере развитые здесь идеи сопоставимы с идеями Нестандартного анализа, однако подход, предложенный П. Вопенкой, естественней и ближе к интуитивным представлениям об окружающим мире. Главное в нем — отказ от абсолютной завершенности и убежденности, что каноническими моделями Канторовской теории множеств мир может быть полностью описан. Отсюда принципы, на которых базируется Альтернативная теория множеств — отказ от актуализуемости некоторых больших, конечных, с точки зрения Канторовской теории множеств, совокупностей, представление бесконечности как недостижимой конечности, введение в рассмотрение как четких, так и нечетких совокупностей. Это привело к пересмотру некоторых принципов Канторовской теории множеств, в первую очередь, принципа математической индукции, который не действует на нечетких совокупностях, как и добавлению некоторых новых принципов. Однако как Канторовская теория множеств, так и вся канторовская (классическая) математика воспроизводима в рамках Альтернативной теории множеств и этот подход более простой и естественный.

Библиографический список

1.*Вопенка П.* Альтернптивная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность // Пер.со словац. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 3

Ответственный за выпуск *В.Н. Кузнецов*
Технический редактор *Л.В. Агальцова*
Корректор *Е.Б. Крылова*
Подготовка оригинал-макета *Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок*

Подписано в печать 21.12.2005. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл.печ.л. ( ). Уч.-изд.л. . Тираж 100 экз. Заказ

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.