ISSN 1810-4134

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 6

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2010

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5
И88

И88 **Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам:** Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – Вып. 6. – 108 с.: ил.

Сборник содержит работы, посвященные исследованию различных задач теории *L*-функций, диафантового анализа, а также работы, связанные с применением методов гомологической алгебры и функционального анализа в смежных вопросах.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области алгебры, теории чисел и функционального анализа.

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1810-4134

УДК 517.51

Н.Ю. АГАФОНОВА

Мультипликаторы рядов Фурье из пространств Орлича и Лоренца по мультипликативным системам

Введение

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leqslant p_n \leqslant \mathbf{N}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n,\ 0 \leqslant x_n < p_n,\ x_n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Разложение (1) будет определяться однозначно, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}, k < m_l$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_n. Если $y \in [0,1)$ имеет вид (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $z_n = x_n + y_n (mod\, p_n)$, $0 \leqslant z_n < p_n,\ z_n \in \mathbb{Z}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}\,, 0 \leqslant k_j < p_j,\ k_j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

то для $x \in [0,1)$ полагаем по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right).$$

Известно, что $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная, полная в $L[0,1)$ система [1,§1.5], и что $\chi_n(x\oplus y)=\chi_n(x)\chi_n(y)$ для п.в. $y\in[0,1)$ при фиксированном $x\in[0,1)$ и $n\in\mathbb{Z}_+$. Коэффициенты Фурье и частичная сумма ряда Фурье по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat{f}(n)=\int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt$, $n\in\mathbb{Z}_+$, и $S_n(f)(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n\in\mathbb{N}$.

Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_k(x)=:D_n(x)$ называется n-м ядром Дирихле. Известно, что $D_{m_n}(x)=m_nX_{[0,1/m_n)}(x)$, где X_E — характеристическая функция множества E. Если $f,g\in L[0,1)$, то по определению $f*g=$ $=\int\limits_0^1 f(x\ominus t)g(t)\,dt$. Легко видеть, что $S_n(f)(x)=f*D_n(x)$ и что $(f*g)\hat{}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$, $n\in\mathbb{Z}_+$. В частности, если f является полиномом по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, то $f*g$ является таким же полиномом.

Определим пространства Орлича и Лоренца. Пусть $\Phi(u)$ — возрастающая, непрерывная на $[0,\infty)$ выпуклая функция, такая что $\Phi(0)=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\Phi(u)}{u}=+\infty$ и $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}=0$ (такая функция называется N–функцией). В этом случае справедливо равенство $\Phi(u)=\int\limits_0^u p(t)\,dt$, где $p(t)$—правосторонняя производная $\Phi(u)$, непрерывная справа. Если $q(s)=\sup\{t:p(t)\leqslant s\}$, $s\in\mathbb{R}_+$, и $\Psi(v)=\int\limits_0^v q(s)\,ds$, $v\in\mathbb{R}_+$, то Ψ называется сопряженной по Юнгу функцией к Φ. При этом Ψ выпукла и обладает теми же свойствами, что и Φ. Пространство Орлича $L_\Phi[0,1)$ состоит из измеримых на $[0,1)$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_\Phi=\left\{\sup\left|\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| : \int\limits_0^1 \Psi(|g(x)|)\,dx)\leqslant 1\right\}.$$

Относительно этой нормы $L_\Phi[0,1)$ является банаховым пространством. При этом, если $f\in L_\Phi[0,1)$ и $g\in L_\Psi[0,1)$, то имеет место неравенство Гёльдера

$$\left|\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_\Phi \cdot \|g\|_\Psi. \qquad (3)$$

Все эти факты можно найти в $[2, \S 1, 2, 8, 9]$. Частным случаем пространств $L_\Phi[0,1)$ при $\Phi(x) = x^p/p$, $p > 1$ являются пространства $L^p[0,1)$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$. При $p = 1$ рассматриваем пространство $L^1[0,1)$ также с нормой $\|\cdot\|_1$. При $p = \infty$ далее используются пространство ограниченных измеримых функций $B[0,1)$ с конечной нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ и пространство $\mathbf{P}$—непрерывных функций $C^*[0,1) = \{f \in B[0,1) : \lim\limits_{h\to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0\}$ также с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Для измеримой на $[0,1)$ функции f можно рассмотреть функцию распределения $\lambda_f(y) = |x \in [0,1) : |f(x)| > y|$ и невозрастающую перестановку $f^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_f(y) \le t\}$, $t > 0$. Из определения ясно, что $f^*(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Пространство Лоренца $L^{pq}[0,1)$ состоит из измеримых функций f на $[0,1)$, для которых $\|f\|^*_{pq} < \infty$, где

$$\|f\|^*_{pq} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^1 [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & 1 \leqslant p < \infty, \quad 1 \leqslant q < \infty; \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & 1 \leqslant p \leqslant \infty, \qquad q = \infty. \end{cases}$$

Пространства $L^{\infty q}[0,1)$, $1 < q < \infty$ не рассматриваются из-за их тривиальности. Известно, что $L^{pp}[0,1) \equiv L^p[0,1)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^{pq}[0,1)$ являются банаховыми при $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и $p = q = 1$, и что $\|f\|^*_{pq_2} \le \|f\|^*_{pq_1}$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$. Соотношения между L^{pq} при различных p см. в лемме 6. Сопряженным пространством к $L^{pq}[0,1)$, где $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, или $1 \leqslant p < \infty$, $q = 1$, является пространство $L^{p'q'}[0,1)$, где p'— сопряженный показатель Гёльдера для $p \in [1,\infty]$ (то есть $p' = \infty$ при $p = 1$, $p' = 1$ при $p = \infty$, $p' = p/(p-1)$ при $p \in (1,\infty)$). При $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ имеет место неравенство Гёльдера

$$\|f\cdot g\|_1 \leqslant C\|f\|_{pq}\cdot\|g\|_{p'q'},\ f\in L^{pq}[0,1),\ g\in L^{p'q'}[0,1). \qquad (4)$$

Эти факты можно найти в [3] или [4, глава 5,§3].

Пусть

$$\mathcal{P}_n=\{f\in L^1[0,1):\hat f(k)=0,\ k\geqslant n\}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

$$E_n(f)_\Phi=\inf\{\|f-t_n\|_\Phi : t_n\in\mathcal{P}_n\}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

$$\omega_n(f)_\Phi=\sup_{0<h<1/m_n}\|f(x\oplus h)-f(x)\|_\Phi, \qquad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Аналогично определяются $E_n(f)_p$, $\omega_n(f)_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и $E_n(f)_{p,q}$, $\omega_n(f)_{p,q}$, $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Имеют место неравенства А.В. Ефимова [1, глава 10, §10.5]

$$E_{m_n}(f)_p\leqslant\|f-S_{m_n}(f)\|_p\leqslant\omega_n(f)_p\leqslant 2E_{m_n}(f)_p, \qquad (5)$$

где $f\in L^p[0,1)$ при $1\leqslant p<\infty$ или $f\in C^*[0,1)$ при $p=\infty$. Для того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}E_n(f)_\Phi=0$, достаточно потребовать сепарабельность пространства $L_\Phi[0,1)$, которая равносильна выполнению Δ_2—условия на функцию $\Phi:\Phi(2u)\leqslant C\Phi(u)$, $u\in\mathbb{R}_+$(см. [2, §10.2]). В этом же случае сопряженным к $L_\Phi[0,1)$ является $L_\Psi[0,1)$ (см. [2, §14.2]). Из леммы 6 легко следует сепарабельность $L^{p,q}[0,1)$ при $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. В указанных случаях доказательство (3) из [1, §10.5] переносится на случай $L_\Phi[0,1)$ и $L^{p,q}[0,1)$ (см. лемму 7). Если $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность, то по определению

$$H^\omega_\Phi=\{f\in L_\Phi[0,1):\omega_n(f)_\Phi\leqslant C\omega_n, n\in\mathbb{Z}_+\},$$

где C зависит от f, но не от n. Аналогично вводятся H^ω_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и $H^\omega_{p,q}$, $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Естественной нормой в H^ω_Φ, относительно которой данное пространство является банаховым, будет $\|f\|_{\Phi,\omega}=\|f\|_\Phi+\sup\limits_{n\geqslant1}\omega_n(f)_\Phi/\omega_n$. То же можно отметить для H^ω_p и $H^\omega_{p,q}$.

Пусть X и Y— некоторые функциональные пространства на $[0,1)$, вложенные в $L^1[0,1)$. Если последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ такова, что для любой $f \in X$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{f}(n)\chi_n(x)$ является рядом Фурье (по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$) функции $g \in Y$, то по определению $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in (X, Y)$ или $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ является мультипликатором класса (X, Y).

В данной работе изучаются необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ классу (X, Y), где в качестве X берутся пространства L_Φ, $L^{p,q}$, B, L^1, а в качестве Y— пространства H_∞^ω, B, C^*, а также пространства V и AC функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций на $[0, 1)$. Результаты, связанные с L_Φ являются аналогами утверждений для тригонометрического случая из работы М.Г. Скворцовой [5].

Необходимо сделать несколько замечаний по поводу пространств $V[0, 1)$ и $AC[0, 1)$. Как известно, $f \in V[0, 1)$, если $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \infty$, где sup берется по всем разбиениям $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка $[0, 1]$. Пространство $V[0, 1)$ вводится как множество сужений $f \in V[0, 1]$ на $[0, 1)$. Условие $f \in V[0, 1)$ равносильно следующему: существует $C > 0$, такая что для любой системы попарно непересекающихся полуинтервалов $\{(\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{n} \subset [0, 1)$ имеем $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} (f(\beta_i) - f(\alpha_i))\right| \leqslant C$.

В самом деле, пусть выполнено последнее условие. Тогда для любого разбиения $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ отрезка $[0, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i) - f(x_{i-1}))_+ + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i) - f(x_{i-1}))_- \leqslant 2C,$$

где $z_+ = \max(z, 0)$, $z_- = \max(-z, 0)$.

В частности, для всех $x \in [0, 1)$ имеем $f(x) \leqslant 2C + |f(0)|$. Доопределяя $f(x)$ произвольным образом при $x = 1$ получаем для разбиения $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка $[0, 1]$:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant 2C + |f(1) + f(x_{n-1})| \leqslant 4C + |f(0)| + |f(1)|$$

и $f \in V[0, 1]$. Обратное утверждение очевидно.

Рассмотрим класс $V(1,\Phi)$ функций $\varphi \in L_\Phi[0,1)$, таких что для некоторой константы $C > 0$ и любого набора попарно непересекающихся полуинтервалов $\{(\alpha_i,\beta_i]\}_{i=1}^n \subset [0,1)$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n (f(\beta_i \ominus t) - f(\alpha_i \ominus t)) \right\|_\Phi \leqslant C.$$

Аналогично вводятся классы $V(1,p)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $V(1,p,q)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. В периодическом случае аналоги классов $V(1,p)$ рассматривали С. Верблюнский [6] (при $p = 1$) и С. Качмаж (при $p > 1$), которые получили критерии принадлежности классу (L^p, V) в периодическом случае. Как показано в [8, глава 9, §1], функция $f \in AC[0,1]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для любой системы попарно непересекающихся полуинтервалов $\{(\alpha_i,\beta_i]\}_{i=1}^n \subset$ $\subset [0,1]$ со свойством $\sum\limits_{i=1}^n(\beta_i - \alpha_i) < \delta$ имеем $\left|\sum\limits_{i=1}^n (f(\beta_i) - f(\alpha_i))\right| \leqslant \varepsilon$. Снова пусть $AC[0,1)$ — множество сужений пространства $AC[0,1]$ на $[0,1)$. Тогда условие $f \in AC[0,1)$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для любой системы попарно непересекающихся полуинтервалов $\{(\alpha_i,\beta_i]\}_{i=1}^n \subset [0,1)$ со свойством $\sum\limits_{i=1}^n(\beta_i - \alpha_i) < \delta$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) \right| \leqslant \varepsilon.$$

В самом деле, если это так, то стандартным методом (см. [8, глава 9]) показывается, что $f \in V[0,1)$ и поэтому существует $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = a$. Полагая $f(1) = a$ и рассматривая систему непересекающихся полуинтервалов $\{(\alpha_i,\beta_i]\}_{i=1}^n \subset [0,1]$, таких что $\sum\limits_{i=1}^n(\beta_i - \alpha_i) < \delta$ и $\beta_n = 1$, находим, что

$$\left| \sum_{i=1}^n (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) \right| = \left| \lim_{\gamma \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (f(\beta_i) - f(\alpha_i)) + f(1-\gamma) - f(\alpha_n) \right) \right| \leqslant \varepsilon,$$

откуда следует, что $f \in AC[0,1]$.

Поэтому по определению $\varphi \in AC(\Phi)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любой системы попарно непересекающихся полуинтервалов $\{(\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^n \subset [0,1)$ со свойством $\sum\limits_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n (\varphi(\beta_i \ominus t) - \varphi(\alpha_i \ominus t)) \right\|_\Phi \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично вводятся классы $AC(p,q)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Везде далее Φ и Ψ — пара сопряженных по Юнгу N-функций, а $p'(q')$— сопряженный по Гёльдеру показатель к $p(q)$.

1. Вспомогательные утверждения

Пространство $L_\Psi[0,1)$ является сопряженным к $L_\Phi[0,1)$ только в случае, когда функция Φ удовлетворяет Δ_2—условию, тем не менее справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. [9, глава 4, теорема (10.7)] Если для любой $f \in L_\Phi[0,1)$ последовательность $d_n = \int\limits_0^1 f(x) g_n(x)\,dx$ ограничена, то $g_n \in L_\Psi$ для всех n и $\|g_n\|_\Psi = O(1)$.

При $\Phi(u) = u^p/p,\ p > 1$, имеем $\Psi(u) = u^{q'}/q'$, поэтому заключение леммы выглядит так: $\|g_n\|_{q'} = O(1)$.

Напомним, что множество функций G на $[0,1]$ называется равностепенно абсолютно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любой системы неперекрывающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ со свойством $\sum\limits_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ и любой функции $g \in G$ имеем $\left| \sum\limits_{i=1}^n (g(\beta_i) - g(\alpha_i)) \right| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 2. [9, глава 4, §5)]. Если множество G измеримых на $[0,1)$ функций таково, что $\int\limits_0^1 \Phi(|g(x)|)\,dx \leqslant C$ для всех $g \in G$ (C не зависит от g), то множество $\{F(g)(x) := \int\limits_0^x g(t)\,dt,\ g \in G\}$ равностепенно абсолютно непрерывно.

Лемма 3. Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\chi_k(x)$ и $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\chi_k(x)$. Если множество $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где $F_n(x) = \int\limits_0^x S_{m_n}(t)\,dt$, равностепенно абсолютно непрерывно, то существует $f \in L[0,1)$ такая, что $\hat{f}(k) = c_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство

Из равностепенной абсолютной непрерывности $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что все $F_n \in V[0,1]$ и их вариации на $[0,1]$ ограничены. В самом деле, подбирая δ по $\varepsilon = 1$, находим разбиение $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ отрезка $[0,1]$ диаметра меньше δ и получаем, что вариация каждой функции $F_n(x)$ на любом из отрезков $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, ..., n$ не превосходит 1. Поэтому вариация каждой функции $F_n(x)$ на отрезке $[0,1]$ не превосходит N. По теореме Хелли [8, глава 8, §4] существует подпоследовательность $\{F_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся всюду на $[0,1]$ к некоторой функции $F(x) \in V[0,1]$. При этом, если $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}(F_{n_k}(\beta_i) - F_{n_k}(\alpha_i))\right| < \varepsilon$ для всех k, то в пределе получаем $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}(F(\beta_i) - F(\alpha_i))\right| < \varepsilon$. Таким образом, из равностепенной абсолютной непрерывности $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ следует абсолютная непрерывность F. Пусть $k \in [m_i, m_{i+1}),\ i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при $n_l \geqslant i+1$ имеем

$$\int\limits_0^1 F'_{n_l}(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt = \int\limits_0^1 S_{m_{n_l}}(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt = c_k. \tag{6}$$

С другой стороны, поскольку $\chi_k(x)$ постоянна на $I_j^{(i+1)} :=$ $:= [j/m_{i+1}, (j+1)/m_{i+1})\,,\ 0 \leqslant j \leqslant m_{i+1}-1$, имеем

$$\int\limits_0^1 F'_{n_l}(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt = \sum_{j=0}^{m_{i+1}-1} \chi_k(j/m_{i+1})\left(F_{n_l}((j+1)/m_{i+1}) - F_{n_l}(j/m_{i+1})\right).$$

Последняя сумма при $l \to \infty$ сходится к

$$\sum_{j=0}^{m_{i+1}-1} \chi_k(j/m_{i+1})\left(F((j+1)/m_{i+1}) - F(j/m_{i+1})\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m_{i+1}} \int\limits_{j/m_{i+1}}^{(j+1)/m_{i+1}} F'_{n_l}(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt = \int\limits_0^1 F'(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt.$$

Таким образом для $f = F' \in L[0,1)$ имеем $c_k = \hat{f}(k),\ k \in \mathbb{N}$. Равенство $c_0 = \hat{f}(0)$ легко получить, прибавляя к f константу. Лемма доказана.

Замечание 1. Аналогичный результат имеет место для $F_n(x) = \int\limits_0^x \sigma_n(t)dt$, где $\sigma_n(t) = (S_1(t) + ... + S_n(t))/n$. Вместо равенства (6) будем иметь $\int\limits_0^1 F'_{n_l}(t)\chi_k(t)\,dt = (1 - k/n_l)C_k$. В остальном доказательство остается прежним.

Пусть X — банахово пространство функций на $[0,1)$, такое, что $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty \subset X \subset L^1[0,1)$. Оно называется однородным, если 1) $\|f\|_1 \leqslant \leqslant C\|f\|_X$ для всех $f \in X$; 2) для всех $h \in [0,1)$ имеем $\|f(x \oplus h)\|_X = = \|f(x)\|_X$; 3) линейная оболочка $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ плотна в X. Следующая лемма доказана в [10, с.155] для случая $p_n \equiv 2$. В общем случае доказательство аналогично.

Лемма 4. Пусть X— однородное банахово пространство на $[0,1)$, $f \in X$, $g \in L[0,1)$. Тогда $f * g \in X$ и $\|f * g\|_X \leqslant \|f\|_X \cdot \|g\|_1$.

Очевидно, это неравенство верно и при $X = B[0,1)$. Во введении было отмечено, что $(L^{p,q}[0,1))^* = L^{p',q'}[0,1)$ при $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$. Из теоремы Банаха—Штейнгауза вытекает

Лемма 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, и для любой $f \in L^{p,q}[0,1)$ последовательность $d_n = \int\limits_0^1 f(x)g_n(x)\,dx$ ограничена. Тогда $g_n \in L^{p',q'}[0,1)$ для всех n и $\|g_n\|_{p',q'} = O(1)$.

Лемма 6. Пусть $1 < p < \infty$ и $1 \leqslant p_1 < p < p_2 < \infty$, $1 < q < \infty$. Тогда

$$L^{p_2}[0,1) \subset L^{p,1}[0,1) \subset L^{p,q}[0,1) \subset L^{p,\infty} \subset L^{p_1}[0,1),$$

причем все вложения непрерывны.

Доказательство

Оценим норму $\|f\|_{p,1}$ через $\|f\|_{p_2}$. С помощью неравенства Гёльдера

$$\|f\|_{p,1} = \frac{1}{p}\int\limits_0^1 t^{1/p} f^*(t)/t\,dt \leqslant$$

$$\leqslant p^{-1}\left(\int\limits_0^1 (f^*(t))^{p_2}\,dt\right)^{1/p_2} \cdot \left(\int\limits_0^1 t^{p_2'(1/p-1)}\,dt\right)^{1/p_2'} \leqslant C_1\|f\|_{p_2}, \qquad (7)$$

поскольку $x/(x-1)$ убывает при $x>1$ и $p'2 = p_2/(p_2-1) < p/(p-1)$, то есть показатель при t в правой части (7) больше -1. Пусть теперь $\|f\|_{p\infty} = \sup\limits_{t\in(0,1)} t^{1/p} f^*(t) < \infty$. Тогда $\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int\limits_0^1 (f^*(t))^{p_1}\,dt \leqslant \int\limits_0^1 \|f\|_{p\infty}^{p_1} \cdot t^{-p_1/p}\,dt \leqslant C_2\|f\|_{p\infty}^{p_1}$, так как $-p_1/p > -1$. Средние вложения отмечены во введении. Лемма доказана.

Следствие 1. Если множество G измеримых на $[0,1)$ функций таково, что $\|g\|_{p,q} \leqslant C$ для всех $g \in G$ и некоторых $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, то множество $\{F(g)(x) : g \in G\}$ равностепенно абсолютно непрерывно.

Вытекает из лемм 2 и 6, если взять $\Phi(u) = u^{p_1}$, где $1 < p_1 < p$.

Лемма 7. 1) Пусть Φ удовлетворяет Δ_2–условию. Тогда линейная оболочка $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ плотна в $L_\Phi[0,1)$ и

$$E_{m_n}(f)_\Phi \leqslant \|f - S_{m_n}(f)\|_\Phi \leqslant \omega_n(f)_\Phi \leqslant 2E_{m_n}(f)_\Phi. \qquad (5')$$

2) Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Тогда линейная оболочка $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ плотна в $L^{p,q}[0,1)$ и

$$E_{m_n}(f)_{pq} \leqslant \|f - S_{m_n}(f)\|_{pq} \leqslant \omega_n(f)_{pq} \leqslant 2E_{m_n}(f)_{pq}. \qquad (5'')$$

Доказательство

Из абсолютной непрерывности $\|\cdot\|_\Phi$ при Δ_2–условии на Φ (см. [2, §10, теорема 10.3]) и теоремы Лузина следует плотность пространства непрерывных функций $C[0,1]$ в $L_\Phi[0,1)$. Плотность же линейной оболочки $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ в $C[0,1]$ хорошо известна(см., например, неравенство (5) при $p=\infty$). Также из неравенства (5) следует плотность линейной оболочки $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ в любом $L^p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, а в силу леммы 6 и в любом $L^{p,q}[0,1)$, где $1 < p < \infty$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Кроме того, ясно, что нормы $\|\cdot\|_\Phi$ и $\|\cdot\|_{p,q}$ инвариантны относительно сдвига, и что $L_\Phi[0,1)$ и $L^{p,q}[0,1)$ при условиях 1) или 2) вложены непрерывно в $L[0,1)$. Значит, пространства $L_\Phi[0,1)$ и $L^{p,q}[0,1)$ являются однородными и левые неравенства $(5')$ и $(5'')$ доказываются аналогично (5) с применением леммы 4. В доказательстве же правых неравенств $(5')$ и $(5'')$ используется только инвари- антность нормы относительно сдвига и постоянство $t_n(x \oplus h)$ при условиях $t_n \in \mathcal{P}_{m_n}$ и $h \in [0, 1/m_n)$ (см. [1, §10.5]). Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. *1) Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $g \in L_\Phi[0,1)$ *тогда и только тогда, когда для* $S_{m_n}(t) := \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} c_k\chi_k(x)$ *справедливо неравенство* $\|S_{m_n}\|_\Phi \leqslant C$, *где* C *не зависит от* n.

2) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $g \in L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *тогда и только тогда, когда* $\|S_{m_n}\|_{p,q} \leqslant C$, *где* C *не зависит от* n.

Доказательство

1) Для $\Phi(x)$, удовлетворяющей Δ_2–условию, необходимость условия $\|S_{m_n}\|_\Phi \leqslant C$ легко следует из лемм 4 и 7. В общем случае доказательство менее тривиально. Пусть $g \in L_\Phi[0,1)$ и $\|g\|_\Phi \neq 0$. Как известно (см. [2, §9, неравенство(9.21)])

$$\int\limits_0^1 \Phi(|g(x)|/\|g\|_\Phi)\,dx \leqslant 1.$$

Отсюда с помощью неравенства Йенсена (см. [8, глава 10, §5], где оно приведено в более общей форме), имеем

$$\Phi\left(|S_{m_n}(g)(x)|/\|g\|_\Phi\right) \leqslant \Phi\left(\int_0^1 D_{m_n}(x\ominus t)\cdot|g(t)|\cdot\|g\|_\Phi^{-1}\,dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 D_{m_n}(x\ominus t)\Phi(|g(t)|/\|g\|_\Phi)\,dt/\int_0^1 D_{m_n}(x\ominus t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 D_{m_n}(x\ominus t)\Phi\left(|g(t)|/\|g\|_\Phi\right)\,dt.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \Phi\left(|S_{m_n}(g)(x)|/\|g\|_\Phi\right)\,dx \leqslant \int_0^1\int_0^1 D_{m_n}(x\ominus t)\,dx\,\Phi\left(\frac{|g(t)|}{\|g\|_\Phi}\right)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \Phi\left(\frac{|g(t)|}{\|g\|_\Phi}\right)\,dt \leqslant 1.$$

Из неравенства Юнга [2, §2] следует, что

$$\|S_{m_n}(g)(x)|/\|g\|_\Phi\|_\Phi = \sup\left\{\int_0^1 |S_{m_n}(g)(x)|/\|g\|_\Phi|f(x)|\,dx : \int_0^1 \Psi(|f|)(x)\,dx \le 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \Phi\left(|S_{m_n}(g)(x)|/\|g\|_\Phi\right)\,dx + 1 \leqslant 2.$$

Значит, $\|S_{m_n}(g)\|_\Phi \leqslant 2\|g\|_\Phi$ при $n\in\mathbb{Z}_+$.

Пусть теперь $\|S_{m_n}\|_\Phi \leqslant C$. Тогда, как отмечено выше, $\int_0^1 \Phi\left(|S_{m_n}(x)|/C\right)\,dx \leqslant 1$ и по лемме 2 функции $F_n(x) = \int_0^x S_{m_n}(t)/C\,dt$ равностепенно абсолютно непрерывны. В свою очередь, по лемме 3 существует $g \in L[0,1)$, такая, что $\hat g(k) = c_k$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$.

Известно, что $S_{m_n}(g)(x)$ сходятся п.в. к $g(x)$ для $g \in L[0,1)$(см. [1, §2.8]). Пусть f — такова, что $\int\limits_0^1 \Psi(|f|)(x)\,dx \leqslant 1$. Тогда из неравенства $\int\limits_0^1 |S_{m_n}(g)(x)||f(x)|\,dx \leqslant C$ в пределе по теореме Фату получаем

$$\int\limits_0^1 |g(x)| \cdot |f(x)|\,dx \leqslant C,$$

откуда $\|g\|_\Phi \leqslant C$.

2) Необходимость условия $\|S_{m_n}\|_{p,q} \leqslant C$ вытекает их леммы 4 (при помощи леммы 7): $\|S_{m_n}(g)\|_{p,q} \leqslant \|g\|_{p,q} \cdot \|D_{m_n}\|_1 = \|g\|_{p,q}$. Пусть теперь $\|S_{m_n}\|_{p,q} \leqslant C$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Тогда в силу леммы 6 выполнены условия леммы 2 для $\Phi(u) = u^{p_1}$, где $1 < p_1 < p$. Снова по леммам 2 и 3 (или следствию 1 и лемме 3) существует $g \in L[0,1)$ такая, что $\hat{g}(k) = c_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Известно, что из сходимости $g_n(t)$ к $g(t)$ п.в. на $[0,1)$ следует сходимость $g_n^*(t)$ к $g^*(t)$ во всех точках непрерывности $g^*(t)$, т.е. почти всюду (см. [11, глава 2, §2, свойство 11°]). Снова применяя теорему Фату, получаем, что $\|g\|_{p,q} \leqslant C$.

Следствие 2. 1) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $g \in H_\Phi^\omega$, где Φ удовлетворяет Δ_2—условию, в том и только том случае, когда существуют констнанты $C_1, C_2 > 0$, такие, что при всех $k, n \in \mathbb{N},\ h \in [0, 1/m_k)$ справедливы неравенства

$$\|S_{m_n}(x \oplus h) - S_{m_n}(x)\|_\Phi \leqslant C_1 \omega_k, \tag{8}$$

$$\|S_{m_n}(x)\|_\Phi \leqslant C_2; \tag{9}$$

2) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $g \in H_{p,q}^\omega$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, в том и только том случае, когда существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что при всех $k, n \in \mathbb{N},\ h \in [0, 1/m_k)$ справедливы неравенства

$$\|S_{m_n}(x \oplus h) - S_{m_n}(x)\|_{p,q} \leq C_1 \omega_k, \tag{8'}$$

$$\|S_{m_n}(x)\|_{p,q} \leqslant C_2. \tag{9'}$$

Доказательство

1) Пусть $g \in H^\omega_\Phi \subset L_\Phi[0,1)$ и $h \in [0, 1/m_k)$. Тогда (9) имеет место по теореме 1, а в силу лемм 4 и 7

$$\|S_{m_n}(x \oplus h) - S_{m_n}(x)\|_\Phi \leqslant \|D_{m_n}\|_1 \|g(x \oplus h) - g(x)\|_\Phi \leqslant \omega_k(g)_\Phi \leqslant C_3\omega_k,$$

то есть (8) также выполнено. Если выполнены (8) и (9), то по теореме 1 существует $g \in L_\Phi[0,1)$, такая, что $\hat{g}(k) = c_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $S_{m_n}(x) = S_{m_n}(g)(x)$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Используя сходимость п.в. $S_{m_n}(g)(x)$ к $g(x)$, снова по теореме Фату получаем

$$\|g(x \oplus h) - g(x)\|_\Phi \leqslant C_1\omega_k,$$

откуда $g \in H^\omega_\Phi$.

2) Доказательство аналогично доказательству 1) и также использует леммы 4, 7 и теорему 1.

Замечание 2. Аналогичный следствию 2 результат можно доказать для классов H^ω_∞ и H^ω_1. Условие (8) заменяется естественным образом на $\|S_{m_n}(x \oplus h) - S_{m_n}(x)\|_p \leqslant C_1\omega_k,$, где $p = 1$ или $p = \infty$. Условие же (9) следует заменить на фундаментальность $\{S_{m_n}(x)\}_{n=0}^\infty$ в $L^1[0,1)$ или $C^*[0,1)$ (ср. с теоремами (4.2) и (5.5) в [9, глава 4], а также с теоремами 15 и 17 в [12]).

Теорема 2. *1) Включение $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L_\Phi, E)$, где $E = B[0,1)$ или $E = C^*[0,1)$ равно- сильно существованию $g \in L_\Psi[0,1)$, такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$.*

2) Включение $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L^{p,q}, E)$, где $E = B[0,1)$ или $E = C^*[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, равносильно существованию $g \in L^{p,q}[0,1)$, такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) Необходимость условия $g \in L_\Psi[0,1)$ мы докажем для $E = B[0,1)$, а достаточность — для $E = C^*[0,1)$. Пусть $f \in L_\Phi[0,1)$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L_\Phi, B)$, то есть существует $p \in B[0,1)$, такая что $\hat{h}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку $(h * D_{m_n})^(k)$ равны $\lambda_k \hat{f}(k)$ при $0 \leqslant k < m_n$ и равны нулю при $k \leqslant m_n$, а для $l_n = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} \lambda_k \chi_k$ коэффициенты $(f * l_n)^(k)$ имеют те же значения, то по теореме единственности $h * D_{m_n} = f * l_n$. В частности, значения

$$|h * D_{m_n}(0)| = |f * l_n(0)| = |\int\limits_0^1 f(t) l_n(0 \ominus t)\, dt|$$

ограничены для любой $f \in L_\Phi[0,1)$. По лемме 1 получаем $\|l_n\|_\Psi \leqslant C_1$, и по теореме 1 найдется $g \in L_\Psi[0,1)$, такая, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Обратно, пусть $f \in L_\Phi[0,1)$, $g \in L_\Psi[0,1)$. Тогда благодаря неравенству Гёльдера (3) имеем

$$|f * g(x \oplus h) - f * g(x)| \leq \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_\Phi \|g\|_\Psi,$$

откуда $f * g \in C^*[0,1)$ и $\{\hat{g}(k)\}_{k=0}^\infty = \{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L_\Phi, C^*)$.

2) В обозначениях пункта 1) при $f \in L^{p,q}[0,1)$ снова имеем ограниченность $f * l_n(0)$, откуда по лемме 5 $\|l_n\|_{p',q'} \leqslant C_1$. Так как $1 < p' < \infty$, по теореме 1 находим $g \in L^{p',q'}[0,1)$ такую, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Обратное утверждение следует из неравенства Гёльдера (4). Теорема доказана.

Сформулируем аналоги теоремы 2 для случаев $L^1[0,1)$ и $B[0,1)$.

Теорема 3. *1) Включение $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (B, C^*)$ равносильно существованию $g \in L^1[0,1)$, такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.*

2) Включение $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L^1, B)$ (или (L^1, C^*)) равносильно существованию $g \in B[0,1)$, такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) Пусть $f \in B[0,1)$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (B, C^*)$. Тогда существует $h \in$

$C^*[0,1)$, такая, что $\hat{h}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $|h * D_{m_n}(0)| = = |\int\limits_0^1 f(t) l_n(\ominus t)\, dt|$ сходятся к $h(0)$ (снова $l_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k \chi_k$). Согласно следствию из теоремы Банаха—Штейнгауза [9, глава 4, теорема(9.11)] нормы $\|l_n\|_1$ ограничены, а согласно теореме (9.13) из [9, глава 4] функции $L_n(x) = \int\limits_0^x l_n(u)\, du$ равностепенно абсолютно непрерывны. В силу леммы 3 существует $g \in L^1[0,1)$, такая, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Обратно, если $f \in B[0,1)$, $g \in L[0,1)$, $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то для $h = f * g$ имеем $\hat{h}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$ и

$$\|h(\cdot \oplus t) - h(\cdot)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g(\cdot \oplus t) - g(t)\|_1 \to 0$$

при $t \to 0$, т.е. $h \in C^*[0,1)$.

2) Пусть $f \in L^1[0,1)$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L^1, B)$, тогда существует $h \in B[0,1)$, такая что $\hat{h}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Снова $h * D_{m_n} = f * l_n$ и последовательность $|h * D_{m_n}(0)| = |\int\limits_0^1 f(t) l_n(\ominus t)\, dt|$ ограничена. Снова по теореме (9.11) из [9, глава 4] функции $l_n(x)$ равномерно ограничены. Отсюда согласно лемме 2 из [13] следует существование $g \in B[0,1)$, такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Обратно, если $f \in B[0,1)$, $g \in B[0,1)$, $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то аналогично доказательству пункта 1) имеем $f * g \in C^*[0,1) \subset B[0,1)$. Теорема доказана.

Замечание 3. При $p_n \equiv 2$ достаточность в пункте 1) теоремы 3 была доказана Моргента- лером [12, теорема 19].

Теорема 4. *Последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ *принадлежит классу* (E, H_∞^ω) *тогда и только тогда, когда*

1) при $E = L[0,1)$ *существует* $g(f) \in H_\infty^\omega$, *такая, что* $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

2) при $E = B[0,1)$ *существует* $g \in H_1^\omega$, *такая, что* $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

3) при $E = L_\Phi[0,1)$ *существует* $g \in H_\Psi^\omega$, *такая, что* $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;

4) при $E = L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, *существует* $g \in H_{p',q'}^\omega$, *такая, что* $\hat{g}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) Пусть $E = L[0,1)$, $f \in L[0,1)$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (L, H_{\infty}^{\omega})$. Тогда существует $g(f) \in C^*[0,1)$, для которой $\hat{g}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. По теореме 3 найдется $\varphi \in B[0,1)$, такая, что $\hat{\varphi}(k) = \lambda_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, причем $g = \varphi * f$. По лемме [6.5.2] из [14] оператор $g(f)$ ограничен из L в H_{∞}^{ω}. Поэтому при $\|f\|_1 \leqslant 1$ величины

$$|(g(x \oplus h) - g(x))/\omega_n| = \left| \int\limits_0^1 f(t)(\varphi(x \oplus h \ominus t) - \varphi(x \ominus t))/\omega_n \, dt \right|$$

ограничены постоянной C_1, выбор которой не зависит от $x \in [0,1)$ и $h \in [0, 1/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in [0, 1/m_n)$ по теореме 9.11 из [9,глава 4]

$$\|\varphi(\cdot \oplus h) - \varphi(\cdot)/\omega_n\|_{\infty} \leqslant C_1.$$

В общем случае здесь стоит норма в $L^{\infty}[0,1)$, но так как $\varphi \in B[0,1)$, здесь можно рассматривать равномерную норму.

Обратно, если $f \in L[0,1)$, $\varphi \in H_{\infty}^{\omega}$, $\hat{\varphi}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то $(f * g)\hat{}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и при этом по лемме 4 $\|(f*\varphi)(x \oplus h) - (f*\varphi)(x)\|_{\infty} \leqslant \|f\|_1 \|\varphi(u \oplus h) - \varphi(u)\|_{\infty} \leqslant C_2 \omega_n$ при всех $h \in [0, 1/m_n)$, то есть $f * \varphi \in H_{\infty}^{\omega}$.

2) Пусть $f \in B[0,1)$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (B, H_{\infty}^{\omega}) \subset (B, C^*)$. По теореме 3 найдем $\varphi \in L[0,1)$, такую, что $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Снова используя теорему (9.11) из [9, глава 4], получаем (аналогично 1)), что $\|\varphi(x \oplus h) - \varphi(x)\|_1/\omega_n \leqslant C_3$ равномерно по $n \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in [0, 1/m_n)$. Обратное утверждение, как и в 1), следует из леммы 4.

3) Пусть $f \in L_{\Phi}[0,1)$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (L_{\Phi}, H_{\infty}^{\omega})$. Пусть $g \in H_{\infty}^{\omega} \subset C^*[0,1)$ такова, что $\hat{g}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. По теореме 2 найдем $\varphi \in L_{\Psi}[0,1)$ та-

кую, что $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. По лемме 1 из равномерной ограниченности

$$\left|\frac{g(x \oplus h) - g(x)}{\omega_n}\right| = \left|\int\limits_0^1 f(t) \frac{\varphi(x \oplus h \ominus t) - \varphi(x \ominus t)}{\omega_n}\, dt\right|$$

по $x \in [0,1)$ и $h \in [0, 1/m_n)$ выводим ограниченность $\|\varphi(u \oplus h) - \varphi(u)\| \cdot \omega_n^{-1}$, $\varphi \in H_\Psi^\omega$. Если же $f \in L_\Phi[0,1)$, $\varphi \in H_\infty^\omega$, то, согласно неравенству Гёльдера (3), имеем

$$|f * \varphi(x \oplus h) - f * \varphi(x)| \leqslant \|f\|_\Phi \cdot \|\varphi(u \oplus h) - \varphi(u)\|_\Psi \leqslant C_2 \omega_n,$$

откуда $f * \varphi \in H_\infty^\omega$.

4) Доказательство аналогично доказательству 3), только вместо леммы 1 используется лемма 5, а вместо леммы 3 — лемма 4.

Теорема 5. *1) Последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ *принадлежит классу* (L_Φ, V) *тогда и только тогда, когда существует* $\varphi \in V(1, \Phi)$, *такая что* $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$.

2) Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ *принадлежит классу* $(L_{p,q}, V)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ *тогда и только тогда, когда существует* $\varphi \in V(1, p\prime, q\prime)$, *такая что* $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство

1) Пусть $f \in L_\Phi[0,1)$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in (L_\Phi, V) \subset (L_\Phi, B)$. По теореме 2 существует $\varphi \in L_\Psi[0,1)$, такая что $\hat{\varphi}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $g = f * \varphi$ и $\{(\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^\infty$ — совокупность непересекающихся полуинтервалов из $[0,1)$, то

$$\left|\sum_{i=1}^\infty (g(\beta_i) - g(\alpha_i))\right| = \left|\int\limits_0^1 f(t) \sum_{i=1}^\infty (\varphi(\beta_i \ominus t) - \varphi(\alpha_i \ominus t))\, dt\right|. \qquad (10)$$

По лемме 1 из ограниченности левой части (10) следует ограниченность норм

$$\left\|\sum_{i=1}^\infty (\varphi(\beta_i \ominus t) - \varphi(\alpha_i \ominus t))\right\|_\Psi.$$

Другими словами, $\varphi \in V(1,\Psi)$.

Обратно, если $f \in L_\Phi[0,1)$, $\varphi \in V(1,\Psi)$, $g = f * \varphi$, то по неравенству Гёльдера из (10) мы выводим, что

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}(g(\beta_i) - g(\alpha_i))\right| \leqslant \|f(t)\|_\Phi \cdot \left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi(\beta_i \ominus t) - \varphi(\alpha_i \ominus t))\right\|_\Psi \leqslant C_1,$$

где $\{(\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{\infty}$ — совокупность непересекающихся полуинтервалов из $[0,1)$, а C_1 зависит от f и φ.

2) Доказывается аналогично 1) с использованием леммы 5 и неравенства Гёльдера (4). Теорема доказана.

Теорема 6. *1) Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу (L_Ψ, AC) тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in AC(\Phi)$, такая что $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$;*

2) Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу $(L_{p,q}, AC)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in AC(p\prime, q\prime)$, такая что $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство

2) Достаточность условия $\varphi \in AC(p\prime, q\prime)$, как и в теореме 5, следует из неравенства Гёльдера (4). Пусть $f \in L^{p,q}[0,1)$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, а функция $g \in AC[0,1)$ такова, что $\hat{g}(k) = \lambda_k \hat{f}(k)$, $P_n = \{(\alpha_i^{(n)}, \beta_i^{(n)}]\}_{i=1}^{N(n)}$ — последовательность совокупностей непересекающихся полуинтервалов, такая что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N(n)} \left(\beta_i^{(n)} - \alpha_i^{(n)}\right) = 0. \tag{11}$$

Так как $g \in AC[0,1)$, то существует $\{\gamma_n\}$, такая что $\gamma_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ и

$$\left|\sum_{i=1}^{N(n)} \left(g(\beta_i^{(n)}) - g(\alpha_i^{(n)})\right)\right| \leqslant 1,$$

откуда аналогично доказательству теоремы 5 по лемме 5 выводится ограниченность

$$\left\|\sum_{i=1}^{N(n)}\Big(\varphi(\beta_i^{(n)}\ominus t)-\varphi(\alpha_i^{(n)}\ominus t)\Big)\right\|_{p',q'}\cdot\gamma_n^{-1}.$$

Здесь $\varphi\in V(1,p',q')$ — функция, существование которой доказано в теореме 5. Значит, для любой последовательности P_n с указанными выше свойствами

$$\left\|\sum_{i=1}^{N(n)}\Big(\varphi(\beta_i^{(n)}\ominus t)-\varphi(\alpha_i^{(n)}\ominus t)\Big)\right\|_{p',q'}\to 0$$

при $n\to\infty$. Если, несмотря на это, $\varphi\notin AC(p',q')$, то найдутся ε_0 и последовательность P_n со свойством (11), такая что

$$\left\|\sum_{i=1}^{N(n)}\Big(\varphi(\beta_i^{(n)}\ominus t)-\varphi(\alpha_i^{(n)}\ominus t)\Big)\right\|_{p',q'}\geqslant\varepsilon_0$$

что противоречит доказанному выше. 1) Доказывается аналогично 2). Теорема доказана.

Последняя теорема при выполнении Δ_2— условия для Φ совпадает с одним из утверждений теоремы 6 из 15.

Теорема 7. *1) Условие* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}\in(L^1,L_\Phi)$, *где* Φ *удовлетворяет* Δ_2— *условию, равносильно существованию* $\varphi\in L_\Phi[0,1)$, *такой что* $\hat\varphi(k)=\lambda_k$ *при всех* $k\in\mathbb{Z}_+$;

2) Условие $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}\in(L^1,L^{p,q})$, $1<p<\infty$, $1<q<\infty$, *равносильно существованию* $\varphi\in L^{p',q'}[0,1)$, *такой что* $\hat\varphi(k)=\lambda_k$ *при всех* $k\in\mathbb{Z}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

2) Пусть $f\in L^1[0,1)$, $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}\in(L^1,L^{p,q})$, а $h\in L^{p',q'}[0,1)$. По теореме 2 имеем $\{\hat h_k\}_{k=0}^{\infty}\in(L^{p,q},B)$, поэтому $\{\lambda_k\hat h_k\}_{k=0}^{\infty}\in(L,B)$ для любой $h\in L^{p',q'}[0,1)$. По теореме 3 существует $g\in B[0,1)$, такая что $\lambda_k\hat h_k=\hat g(k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Таким образом, $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}\in(L^{p,q},B)$. Снова по

теореме 2 существует $\varphi \in L^{p,q}[0,1)$, такая что $\hat{\varphi}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Обратное утверждение следует из леммы 4 для $X = L^{p,q}[0,1)$. Утверждение 1) доказывается аналогично 2). Ввиду применения леммы 4 приходится вводить Δ_2 — условие на Φ.

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.

2. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

3. *Hunt R.A.* On $L(p,q)$ spases. L'Enseignement Math., 1966. V.12. № 4.

4. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространств. М.:Мир, 1974.

5. *Скворцова М.Г.* Свойства мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье// Матем. записки Уральского ун—та, 1972. Т. 8. Вып. 2.

6. *Verblunsky S.* On some classes of Fourier series// Proc. London Math. Soc., 1932. V. 33.

7. *Kaczmarz S.* On some classes of Fourier series// J. London Math. Soc., 1933. V. 8.

8. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной// М.: Наука, 1974.

9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.

10. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadyc analysis. Budapest: Akademiai Kiado. 1990.

11. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1974.

12. *Morgenthaler G. W.* On Walsh—Fourier series// Trans. Amer. Math. Soc., 1957. V. 87. № 2.

13. *Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах рядов борелевских мер// Ис-

следования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 4.

14. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

15. *Волосивец С.С., Агафонова Н.Ю.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам// Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3

УДК 511.3

А.Е. КОРОТКОВ, Е.В. СЕЦИНСКАЯ

Об одном классе степенных рядов, принимающих трансцендентные значения в алгебраических точках

В 1881 году Линдеман доказал, что функция e^z в алгебраических точках $\alpha \neq 0$ принимает трансцендентные значения [1]. Позднее, в 1885 году К. Вейерштрасс доказал более общее утверждение о том, что, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, n \geqslant 2$, различные алгебраические, а $c_1, \ldots, c_n$ — алгебраические, не все равные нулю, то

$$c_1 e^{\alpha_1} + \cdots + c_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

В данной работе доказывается одно утверждение, позволяющее расширить класс функций, для которых имеет место аналог теоремы Линдемана.

Имеет место

Теорема. *Пусть степенной ряд*

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится при $|z| < 1$ *и функция* $f_1(z)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $f_1(0)$ *– алгебраическое, не равное нулю;*

2) для любых различных алребраических

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, n \geqslant 2, \quad |\alpha_i| < 1,$$

и алгебраических $c_1, \ldots, c_n$*, не всех равных нулю*

$$c_1 f_1(\alpha_1) + \cdots + c_n f_n(\alpha_n) \neq 0.$$

Пусть далее, b_n *— периодическая последовательность алгебраических чисел с периодом* $d \geqslant 3$*. Тогда функция, определенная степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

принимает трансцендентные значения в алгебраических точках $\alpha \neq 0$*,* $|\alpha| < 1$*.*

Доказательство

Легко видно, что степенной ряд

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{1}$$

определяет рациональную функцию $R(z)$, полюсы которой лежат в корнях степени d из единицы.

Рассмотрим интегральное представление композита рядов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ [2]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_C f_1(u) f_2\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}, \tag{2}$$

где $|z| < 1$ лежит внутри окружности C.

Разложим рациональную функцию $R(z)$, определенную рядом (1) в сумму простейших:

$$R(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{z - \alpha_j},$$

где A_j и α_j – алгебраические.

Тогда, интеграл (2) будет равен

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\sum_{j=1}^{k} A_j \int_C \frac{f_1(u)}{u - \frac{z}{\alpha_j}} du.$$

Отсюда получаем при $|z| < 1$, $z = 0$ и z алгебраических, в силу условий на значения функции $f_1(z)$ в алгебраических точках, утверждение теоремы.

Библиографический список

1. *Шидловский А.Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: Изд-во МГУ, 1982.

2. *Тичмарш Е.К.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

УДК 513.6

Е.В. КОРОБЧЕНКО

Гомологические свойства конструкции окаймления толерантных сингулярных кубов

В статье описана конструкция окаймления толерантных сингулярных (ТС) кубов и доаказана ее гомологическая инвариантность.

В гомологической и гомотопической теории толерантных пространств важную роль играет конструкция полного двойного замедления ТС кубов (см. [3]). Однако несмотря на плодотворность этой конструкции, ее приложения в некоторых случаях сложны и являются чрезмерно громоздкими. В этих случаях более уместным является применим конструкции окаймления ТС кубов.

Определение 1. Толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$, где $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, назовем n-мерным толерантным сингулярным кубом пространства (X, τ).

Для $n \geqslant 0$ обозначим через $Q_n(X)$ абелеву группу, свободно порожденную над $\mathbb{Z}$ всеми n-мерными ТС кубами пространства (X, τ), и положим $Q_n(X) = 0$ для $n < 0$. Элементы этой группы $Q_n(X)$ будем называть n-мерными толерантными кубическими сингулярными цепями (ТКС цепями) в (X, τ).

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим граничный гомоморфизм $\partial_n : Q_n(X) \to Q_{n-1}(X)$, задаваемый на свободных образующих $u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}\right) : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to X$ формулой

$$\partial_n u = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[d_j^0(u) - d_j^1(u)\right],$$

где

$$d_j^\varepsilon(u) = u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_{j-1}}{m_{j-1}}, \varepsilon, \frac{k_{j+1}}{m_{j+1}}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}\right), \quad \varepsilon = 0, 1.$$

Для $n \leqslant 0$ полагаем $\partial_n = 0$.

Обычным способом доказывается, что $(\forall\ n \in \mathbb{Z}) \quad \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, что позволяет говорить о цепном комплексе $\{Q_n(X), \partial_n\}$ ТКС цепей пространства (X, τ). Любое толерантное отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \vartheta)$ индуцирует цепное отображение $\{Q_n(f) : Q_n(X) \to Q_n(Y)\}$, которое на образующих задается формулой

$$Q_n(f)(u) = f \circ u.$$

В результате получается функтор, который вместе с гомологическим функтором на категории цепных комплексов позволяет определить гомологический функтор на категории толерантных пространств $\mathbb{T}_0$. Однако, как и в алгебраической топологии, эти гомологии подлежат нормировке, так как в противном случае одноточечное пространство будет иметь нетривиальные гомологии во всех размерностях.

Определение 2. ТС куб u размерности $n > 0$ назовем вырожденным по j-му аргументу ($j = \overline{1,n}$), если

$$(\forall\ i = \overline{1,n}) \quad (\forall\ k_i = \overline{0,m_i})$$

$$u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_j}{m_j},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right) = u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,0,\dots,\frac{k_n}{m_n}\right).$$

Обозначим через $D_n(X)$ подгруппу в $Q_n(X)$, свободно порожденную всеми вырожденными кубами. Так как $\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$, то имеем цепной фактор-комплекс $\{C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X), \partial_n\}$ нормализованных ТКС цепей. При этом толерантные отображения $f : (X,\tau) \to (Y,\vartheta)$ индуцируют цепные отображения $\{C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)\}$, действующие на свободные образующие $u + D_n(X)$, $u \notin D_n(X)$ по формуле

$$C_n(f)(u + D_n(X)) = Q_n(f)(u) + D_n(X) = f \circ u + D_n(X).$$

В результате получается функтор $C = \{C_n\}$, который в композиции с гомологическим функтором позволяет определить функтор толерантных кубических сингулярных гомологий (ТКС гомологий), сопоставляющий каждому пространству (X,τ) группу

$$H^Q(X) = \bigoplus_{n\geqslant 0} H_n^Q(X) \stackrel{df}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} H_n(C_n(X)).$$

Определение 3. Пусть $u : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i}\right) \to (X,\tau)$ - произвольный ТС куб, $l \in \mathbb{N}$. Тогда l - кратно окаймленным ТС кубом для u назовем

ТС куб, определяемый следующим образом:

$$u^{O(l)} : \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i+2l}, \mathop{\times}_{i=1}^{n} \iota_{m_i+2l} \right) \to (X, \tau)$$

$$\left(\forall i = \overline{1,n},\ k_i = \overline{0, m_i+2l}\right) \quad u^{O(l)} \left(\left(\tfrac{k_i}{m_i+2l} \right)_{i=\overline{1,n}} \right) \overset{df}{=} u \left(\left(\tfrac{1}{m_i} r\left(m_i, l, k_i\right) \right)_{i=\overline{1,n}} \right),$$

$$r(m_i, l, k_i) = \begin{cases} o,\ k_i - l \leqslant 0; \\ k_i - l,\ 0 \leqslant k_i - l \leqslant m_i; \\ m_i,\ k_i - l \leqslant m_i. \end{cases} \tag{1}$$

Определим гомомрфизм $\varphi = \{\varphi_n : Q_n(X) \longrightarrow Q_n(X)\}_{n \geqslant 0}$ на ТКС цепях, задав его на вободных образующих формулами:

$$(\forall n > 0) \quad \varphi_n(u) = u^{O(l)},\ \varphi_0(u) = u.$$

Из (3) и определения ∂ следует цепное свойство для φ:

$$\partial_n(\varphi_n(u)) = \partial_n \left(u^{O(l)} \right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[u^{O(l)}|_{k_j=0} - u^{O(l)}|_{k_j=m_j+2l} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[(u|_{k_j=0})^{O(l)} - (u|_{k_j=m_j})^{O(l)} \right] = \varphi_{n-1}(\partial_n u)$$

Из (3) также следует, что для вырожденных ТКС цепей имеем:

$$(\forall n > 0) \quad \varphi_n(D_n(X)) \subset D_n(X).$$

Следовательно получаем цепное отображение на приведенных ТКС цепях:

$$\varphi^X = \left\{ \varphi_n^X : C_n(X) \longrightarrow C_n(X) \right\}_{n \geqslant 0},\ \varphi_n^X\left(u + D_n(X)\right) \overset{df}{=} u^{O(l)} + D_n(X),$$

которое очевидно является естественным по (X, τ).

Теорема 1. *Имеется естественная по (X, τ) цепная гомотопия*

$$\varphi^X \simeq \mathbf{1}_{C(X)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Примем краткое обозначение для T кубов:

$$I_{\overline{m}} = I_{(m_1,\dots,m_n)} = \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i},\ \iota_{\overline{m}} = \iota_{(m_1,\dots,m_n)} = \mathop{\times}_{i=1}^{n} \iota_{m_i},\ m_i \in \mathbb{N},\ i = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тождественное отображение $\mathbf{1}_{I_{\overline{m}}}$ является невырожденным TC кубом в $(I_{\overline{m}}, \iota_m)$, и поэтому

$$\mathbf{1}_{I_{\overline{m}}} \in Q(I_{\overline{m}}),\ \mathbf{1}_{I_{\overline{m}}} \notin D_n(I_{\overline{m}}), \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}} \stackrel{df}{=} \mathbf{1}_{I_{\overline{m}}} + D_n(I_{\overline{m}}) \in C_n(I_{\overline{m}}).$$

Свободный базис группы $C_n(X)$ состоит из классов $\overline{u} = u + D_n(X)$, где u пробегает множество невырожденных TC кубов в (X, τ). Так как

$$\overline{u} = u \circ \mathbf{1}_{I_{\overline{m}}} + D_n(X) = C_n(u)\left(\mathbf{1}_{I_{\overline{m}}} + D_n(I_{\overline{m}})\right)$$

для $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \longrightarrow (X, \tau)$, то следовательно в $C_n(X)$ имеем свободный базис вида

$$\left\{ C_n(u)\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}\right) \Big|\, \overline{m} \in \mathop{\times}^{n} N,\ u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(I_{\overline{m}}, X),\ u \notin D_n(X) \right\}. \qquad (2)$$

Заметим, что функтор C не является свободным (см. [1]), т.к.

$$\left(\forall u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(I_{\overline{m}}, X),\ u \in D_n(X)\right), \quad C_n(u)\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}\right) = 0. \qquad (3)$$

Для доказательства теоремы мы должны для каждого пространства (X, τ) построить семейство гомоморфизмов $\mathcal{D}^X = \{\mathcal{D}_n^X : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)\}_{n \geqslant 0}$, удовлетворяющих свойству гомотопии:

$$(\forall n \geqslant 1) \quad \partial_{n+1} \circ \mathcal{D}_n^X = \varphi_n^X - \mathbf{1}_{C_n(X)} - \mathcal{D}_{n-1} \circ \partial_n, \qquad (4)$$

а также свойству естественности

$$(\forall f \in Hom_{\mathbb{T}_0}(X, Y),\ n \geqslant 0) \quad C_{n+1}(f) \circ \mathcal{D}_n^X = \mathcal{D}_n^Y \circ C_n(f). \qquad (5)$$

Гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^X$ надо задавать на элементах свободного базиса (2) так, чтобы выполнялось свойство (5):

$$\begin{gathered}(\forall n \geqslant 0)\ \left(\forall \overline{m} \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}\right)\ (\forall u \in Q_n(X)\mathcal{D}_n(X))\,, \\ \mathcal{D}_n^X(\overline{u}) = \mathcal{D}_n^X\left(C_n(u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) = C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right),\end{gathered} \tag{6}$$

и при этом свойство (3) подсказывает дополнительное условие

$$(\forall u \in D_n(X))\,,\quad C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) = 0. \tag{7}$$

Покажем, что свойства (6) и (7) обеспечивают свойство естественности (5). В самом деле, на образующих имеем:

$$\left(C_{n+1}(f)\circ\mathcal{D}_n^X\right)\left(C_n(u)\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}\right)\right) = C_{n+1}(f)\left(C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right)\right) =$$

$$= C_{n+1}(f\circ u)\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) = \begin{cases}\mathcal{D}_n^Y\left(C_n(f\circ u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right),\ f\circ u \notin D_n(Y); \\ \\ 0,\ f\circ u \in D_n(Y);\end{cases}$$

$$\left(\mathcal{D}_n^Y\circ C_n(f)\right)\left(C_n(u)\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}\right)\right) = \mathcal{D}_n^Y\left(C_n(f\circ u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) =$$

$$= \begin{cases}\mathcal{D}_n^Y\left(C_n(f\circ u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right),\ f\circ u \notin D_n(Y); \\ \\ \mathcal{D}_n^Y(0) = 0,\ f\circ u \in D_n(Y).\end{cases}$$

Чтобы удовлетворить условие (4), мы должны иметь в частности для $X = I_{\overline{m}}$; применительно к элементу $\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}} \in C_n(I_{\overline{m}})$, следующее

$$\left(\forall \overline{m} \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}, n > 0\right)\ \partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) = \varphi_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) - \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}} - \mathcal{D}_{n-1}^{I_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}). \tag{8}$$

Покажем, что из свойств (6), (7) и (8) следует (4):

$$\left(\partial_{n+1}\circ\mathcal{D}_n^X\right)\left(C_n(u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) = \partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^X\left(C_n(u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right)\right) =$$

$$= \partial_{n+1}\left(C_{n+1}(u)\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}\left((\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right)\right) = C_n(u)\left(\partial_{n+1}\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}\left((\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right)\right) =$$

$$= C_n(u)\left(\varphi_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) - \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}} - \mathcal{D}_{n-1}^{I_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) =$$

$$= \varphi_n^X \left(C_n(u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) - \mathbf{1}_{C_n(X)} \left(C_n(u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) - \mathcal{D}_{n-1}^X \left(C_{n-1}(u)(\partial_n \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) =$$

$$= \left(\varphi_n^X - \mathbf{1}_{C_n(X)} - \mathcal{D}_{n-1} \circ \partial_n\right) \left(C_n(u)(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right).$$

Таким образом, для доказательства теоремы нам надо построить цепи $\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) \in C_{n+1}(u)(I_{\overline{m}})$, удовлетворяющие условиям (7) и (8), а затем определить $\mathcal{D}_n^X$ по формуле (6). Определим для этого невырожденные ТС кубы

$$\mathcal{O}^{(\overline{m};s)} : \mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{m_i+2l} \times \mathop{\times}_{i=s}^{n} I_{m_i} \longrightarrow \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i} = I_{\overline{m}},\ s = \overline{1, n},$$

$$\mathcal{O}^{(\overline{m};s)} \left(\tfrac{k_1}{m_1+2l}, \ldots, \tfrac{k_s}{m_s+2l}, \tfrac{k_s'}{m_s}, \ldots, \tfrac{k_n}{m_n}\right) \overset{df}{=}$$

$$\left(\tfrac{1}{m_1} r(m_1, l, k_1), \ldots, \tfrac{1}{m_{s-1}} r(m_{s-1}, l, k_{s-1}), \tfrac{1}{m_s} \max\left\{r(m_s, l, k_s), k_s'\right\}, \ldots, \tfrac{k_n}{m_n}\right). \tag{9}$$

Теперь определим цепь $\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) \in C_{n+1}(u)(I_{\overline{m}})$:

$$\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) = \mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}} \left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}} + D_n(I_{\overline{m}})\right) \overset{df}{=} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} O^{(\overline{m};s)} + D_{n+1}(I_{\overline{m}}). \tag{10}$$

Из (10) и (6) следует, что для $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \longrightarrow (X, \tau)$ получаем формулы

$$\mathcal{D}_n^X \left(u + D_n(X)\right) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} u \circ O^{(\overline{m};s)} + D_{n+1}(X), \tag{11}$$

$$u \circ \mathcal{O}^{(\overline{m};s)} \left(\tfrac{k_1}{m_1+2l}, \ldots, \tfrac{k_s}{m_s+2l}, \tfrac{k_s'}{m_s}, \ldots, \tfrac{k_n}{m_n}\right) =$$

$$u\left(\tfrac{1}{m_1} r(m_1, l, k_1), \ldots, \tfrac{1}{m_{s-1}} r(m_{s-1}, l, k_{s-1}), \tfrac{1}{m_s} \max\left\{r(m_s, l, k_s), k_s'\right\}, \ldots, \tfrac{k_n}{m_n}\right). \tag{12}$$

Из формул (11) и (12) следует, что для вырожденного ТС куба $u \in D_n(X)$ все слагаемые в цепи (11) будут вырожденными ТС кубами, и следовательно, $D_n^X(\overline{u})$ в случае $\overline{u}=0$. Это значит (см. (6)), что выполнено свойство (7).

Перейдем к проверке свойства (8). Мы будем использовать вспомогательные невырожденные ТС кубы

$$O^{(\overline{m};s)}:\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{m_i+2l}\times\mathop{\times}_{i=s+1}^{n} I_{m_i}\longrightarrow\mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i}=I_{\overline{m}},\ \ s=\overline{0,n},$$

$$O^{(\overline{m};s)}\left(\tfrac{k_1}{m_1+2l},\dots,\tfrac{k_s}{m_s+2l},\tfrac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\dots,\tfrac{k_n}{m_n}\right)= \tag{13}$$

$$=\left(\tfrac{1}{m_1}r(m_1,l,k_1),\dots,\tfrac{1}{m_s}r(m_s,l,k_s),\tfrac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\dots,\tfrac{k_n}{m_n}\right).$$

Распишем левую часть формулы (8):

$$\partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right)=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left\{\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^j\left[O^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0}-\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j+2l}\right]+\right.$$

$$+(-1)^s\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_s=0}-\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_s=m_s+2l}\right]+(-1)^{s+1}\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k'_s=0}-\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k'_s=m_s}\right]+$$

$$\left.+\sum_{j=s+1}^{n}(-1)^{j+1}\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0}-\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j}\right]\right\}+D_n(I_{\overline{m}}). \tag{14}$$

Формулы (9) и (13) показывают, что

$$O^{(\overline{m};s)}|_{k_s=0}\left(\tfrac{k_1}{m_1+2l},\dots,\tfrac{k_{s-1}}{m_{s-1}+2l},\tfrac{k'_s}{m_s},\dots,\tfrac{k_n}{m_n}\right)=$$

$$=\left(\tfrac{1}{m_1}r(m_1,l,k_1),\dots,\tfrac{1}{m_{s-1}}r(m_{s-1},l,k_{s-1}),\tfrac{k'_s}{m_s},\dots,\tfrac{k_n}{m_n}\right).$$

$$\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k'_s=0}=O^{(\overline{m};s-1)}. \tag{15}$$

Из (3) и (9) следует вырожденность по аргументу $\frac{k'_s}{m_s}$:

$$\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_s=m_s+2l}\left(\tfrac{k_1}{m_1+2l},\ldots,\tfrac{k_{s-1}}{m_{s-1}+2l},1,\tfrac{k'_s}{m_s},\ldots,\tfrac{k_n}{m_n}\right)=$$

$$=\left(\tfrac{1}{m_1}r(m_1,l,k_1),\ldots,\tfrac{1}{m_{s-1}}r(m_{s-1},l,k_{s-1}),1,\tfrac{k'_s}{m_s},\ldots,\tfrac{k_n}{m_n}\right)\in D_n(I_{\overline{m}}). \tag{16}$$

Аналогично получаем

$$\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k'_s=0}=O^{(\overline{m};s)}. \tag{17}$$

$$\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k'_s=m_s}\in D_n(I_{\overline{m}}). \tag{18}$$

Выпишем слагаемые вида (15) и (17) в сумме (14) для двух последовательных значений s и $s+1$ с учетом их знаков:

$$(-1)^{s-1}(-1)^{s}O^{(\overline{m};s-1)}+(-1)^{s-1}(-1)^{s+1}O^{(\overline{m};s)}+$$
$$+(-1)^{s}(-1)^{s+1}O^{(\overline{m};s)}+(-1)^{s}(-1)^{s+2}O^{(\overline{m};s+2)}.$$

Поскольку средние слагаемые сокращаются, то в сумме (14) сократятся все промежуточные слагаемые вида (15) и (17) и останутся лишь крайние: вида(15) для $s=1$ и вида (17) для $s=n$, то есть (см.(13) и (3))

$$(-1)^{0}(-1)^{1}O^{(\overline{m};0)}+(-1)^{n-1}(-1)^{n+1}O^{(\overline{m};n)}=\varphi_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})-\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}.$$

В результате формулу (14) можно переписать в следующем виде

$$\begin{gathered}\partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right)=\varphi_n^{I_{\overline{m}}}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})-\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}+\\ +\left\{\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}(-1)^{s+j-1}\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0}-\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j+2l}\right]+\right.\\ \left.+\sum_{1\leqslant s<j\leqslant n}(-1)^{s+j}\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0}-\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j}\right]+D_n(I_{\overline{m}})\right\}.\end{gathered} \tag{19}$$

Теперь вычислим цепь $\mathcal{D}_{n-1}^{I_{\overline{m}}}(\partial_n\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})$, используя (11) и (12).

$$\mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}(\partial_n \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}|_{k_j=0} + D_{n-1}(I_{\overline{m}})\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}|_{k_j=m_j} + D_{n-1}(I_{\overline{m}})\right);$$

$$\mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}|_{k_j=0} + D_{n-1}(I_{\overline{m}})\right) = \sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{s-1}\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}|_{k_j=0}\right)\circ \mathcal{O}^{(m_1,\dots,\widehat{m}_j,\dots,m_n;s)} +$$

$$+\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s-2}\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}|_{k_j=0}\right)\circ \mathcal{O}^{(m_1,\dots,\widehat{m}_j,\dots,m_n;s-1)} + D_n(I_{\overline{m}}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{s-1}\left(\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0}\right) + \sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s}\left(\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0}\right) + D_n(I_{\overline{m}});$$

и аналогично

$$\mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}\left(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}|_{k_j=m_j} + D_{n-1}(I_{\overline{m}})\right) = \sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{s-1}\left(\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j}\right) +$$

$$+\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s}\left(\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j+2l}\right) + D_n(I_{\overline{m}}).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}(\partial_n \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) &= \sum_{1\leqslant s<j\leqslant n}(-1)^{s+j-1}\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0} - \mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j}\right] + \\ &+\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}(-1)^{s+j}\left[\mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=0} - \mathcal{O}^{(\overline{m};s)}|_{k_j=m_j+2l}\right] + D_n(I_{\overline{m}}).\end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая (19) и (20), получаем

$$\partial_{n+1}\left(\mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n}(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}})\right) = \varphi^{I_{\overline{m}}}_n(\overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}) - \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}} - \mathcal{D}^{I_{\overline{m}}}_{n-1}(\partial_n \overline{\mathbf{1}}_{I_{\overline{m}}}),$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствие. Индуцированное отображение $\varphi_*^X : H(X) \longrightarrow H(X)$ групп ТКС гомологий пространства (X, τ) является тождественным.

Это можно сформулировать в следующем виде:

Пусть $z = \sum \alpha_i u_i + D_n \in Z_n(X) \subset C_n(X)$ цикл в цепном комплексе $(C(X), \partial)$ для любого $l \in \mathbb{N}$ цикл $z^{O(l)} = \sum \alpha_i u_i^{O(l)} + D_n$ гомологичен в $C(X)$ исходному, то есть

$$z - z^{O(l)} \in \mathrm{B}_n(X) = \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}.$$

Библиографический список

1. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.:Мир, 1971.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун–та, 2006.

3. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий// Вестник Самарского гос. ун–та. Самара: Изд-во „Самарский университет“, 2007.

УДК 539.3+517.4

В.Н. КУЗНЕЦОВ, Т.А. КУЗНЕЦОВА, С.В. ЧУМАКОВА

О численной реализации метода последовательных нагружений при расчете геометрически нелинейных оболочек

Введение

Рассмотрим геометрически нелинейную модель оболочки — модель Кармана, которая в статическом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} D\Delta^2\mathrm{w} - \mathrm{L}\left(\mathrm{w},\mathrm{F}\right) - \Delta_\mathrm{k}\mathrm{F} = \mathrm{q} \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L\left(\mathrm{w},\mathrm{w}\right) - \Delta_k\mathrm{w}, \end{cases} \tag{1}$$

где выражение $L\left(\mathrm{w},\mathrm{F}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial y^2} - L\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x\partial y}$ отражает Гауссову кривизну деформируемой серединной поверхности оболочки Ω; Δ — оператор Лапласа; Δ_k — оператор вида $k_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, где k_x, k_y — кривизны поверхности Ω, q — нормальная нагрузка.

Будем считать, что Ω — прямоугольная в плане поверхность и граничные условия отвечают либо жесткому, либо шарнирному закреплению краев оболочки.

Решение рассматривается в пространстве Соболева $H^2\left(\Omega\right)$.

В данной работе на примере нелинейной модели (3) предлагается один из вариантов численной реализации метода последовательных нагружений, разработанный в начале семидесятых годов профессором В.В. Петровым [1], дальнейшее развитие которого нашло широкое применение при численном расчете напряженно-деформированного состояния, прочности, устойчивости и долговечности конструкций, эксплуатирующихся в условиях не только воздействия нагрузок, но и воздействия агрессивных сред [2].

В нашем случае в основе применения этого метода лежит простой факт: малым нагружениям соответствуют малые прогибы. Действительно, разобьем нормальную нагрузку q на малые слагаемые: $q = \sum\limits_0^N \Delta q_i$.

Допустим мы нашли решение $(\mathrm{w_{n-1}}, \mathrm{F_{n-1}})$ на $n-1$ шаге, то есть решение, соответствующее нагрузке $\sum\limits_0^{n-1} \Delta q_i$. Тогда на n–ом шаге запишем решение $(\mathrm{w_n}, \mathrm{F_n})$ в виде

$$\mathrm{w_n} = \mathrm{w_{n-1}} + \Delta \mathrm{w_n}, \quad \mathrm{F_n} = \mathrm{F_{n-1}} + \Delta \mathrm{F_n}.$$

В отличие от предыдущего шага нагрузка изменилась на малую величину Δq_n. В результате такого воздействия прогиб оболочки $\Delta \mathrm{w_n}$ будет незначительным и, следовательно, для его нахождения можно рассматривать линейную систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} D\Delta^2 \mathrm{w} + \mathrm{L}\left(\mathrm{w}, \mathrm{F_{n-1}}\right) + \mathrm{L}\left(\mathrm{w_{n-1}}, \mathrm{F}\right) - \Delta_\mathrm{k} \mathrm{F} = \Delta \mathrm{q_n} \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2} L\left(\mathrm{w}, \mathrm{w_{n-1}}\right) - \Delta_k \mathrm{w} \end{array} \right. \tag{2}$$

с нулевыми граничными условиями.

При $n = 0$ функции w_0 и F_0 являются решением линейной системы уравнений, полученной в результате линеаризации системы (3) при $q = \Delta q_0$. Линейные системы вида (2) решаются методом Бубнова; в качестве ортогональной системы функций берутся функции вида

$$\sin\frac{2\pi m}{a}\sin\frac{2\pi l}{b}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Как показано в [3] последовательность $\{(\mathrm{w_n}, \mathrm{F_n})\}$ сходится в пространстве $H^2(\Omega)$ к решению (w, F) системы (3).

Достоинством этого метода является очень простая вычислительная схема его реализации.

К недостаткам нужно отнести его медленную сходимость и тот факт, что этот метод не позволяет отличать критические нагрузки, при которых в результате применения этого метода можно получить решение, не отвечающее истинному прогибу оболочки.

Цель данной работы предложить такую модификацию этого метода, которая бы устраняла указанные недостатки.

1. К вопросу улучшения сходимости метода последовательных нагружений

В работе [4] рассматривалась модификация метода последовательного нагружения, которая дает хорошую сходимость при малых временных затратах, и суть которой на примере нелинейной модели Кармана (3) заключается в следующем.

Пусть $(\mathrm{w}^*_{\mathrm{n-1}}, \mathrm{F}^*_{\mathrm{n-1}})$ — приближенное решение, полученное модифицированным методом на $n-1$ шаге. Далее, пусть $(\Delta \mathrm{w}_{\mathrm{n}}, \Delta \mathrm{F}_{\mathrm{n}})$ — решение линеаризованной в точке $(\mathrm{w}^*_{\mathrm{n-1}}, \mathrm{F}^*_{\mathrm{n-1}})$ системы уравнений с нулевыми граничными условиями. Тогда на n-ом шаге получаем приближенное решение с «недостатком»

$$\mathrm{w}_{\mathrm{n}} = \mathrm{w}^*_{\mathrm{n-1}} + \Delta \mathrm{w}_{\mathrm{n}}.$$

Ищем теперь решение $\hat{\mathrm{w}}_n$ с «избытком»

$$\hat{\mathrm{w}}_n = \mathrm{w}^*_{\mathrm{n-1}} + \lambda \Delta \mathrm{w}_{\mathrm{n}},$$

где $\lambda > 1$ — корень следующего квадратного уравнения

$$\iint_\Omega \Phi\left(F^*_{n-1} + \Delta F_n, \mathrm{w}^*_{\mathrm{n-1}} + \lambda \Delta \mathrm{w}_{\mathrm{n}}, \mathrm{q}_{\mathrm{n}}\right)\left(\mathrm{w}^*_{\mathrm{n-1}} + \lambda \Delta \mathrm{w}_{\mathrm{n}}\right) dxdy = 0,$$

где $\Phi\left(F, \mathrm{w}, \mathrm{q})\right) = 0$ — первое уравнение Кармана, $q_n = \sum\limits_0^n \Delta q_i$.

Тогда приближенное решение $\mathrm{w}^*_{\mathrm{n}}$, полученное модифицированным методом на n-ом шаге, находим по формуле

$$\mathrm{w}^*_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{w}_{\mathrm{n}} + \hat{\mathrm{w}}_{\mathrm{n}}}{2}.$$

Функцию F^*_n получаем в результате решения второго уравнения Кармана.

Как показано в [4], описанный выше модифицированный метод дает значительную экономию во времени по сравнению с методом последовательного нагружения и его известными модификациями, например, по сравнению с модификацией, предложенной В.И. Шалашилиным [5].

2. Алгоритм определения критической нагрузки при расчете траектории «нагрузка-прогиб» для отдельных точек оболочки

Пусть $(\mathrm{w_n}, \mathrm{F_n})$ — последовательность приближенных решений системы (3), полученных модифицированным методом последовательного нагружения.

В каждой точке с координатами (x, y) рассмотрим последовательность линейных операторов

$$A_n(\mathrm{w}) = D\Delta^2\mathrm{w} - \mathrm{T_{1,n}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial\mathrm{x}^2} - \mathrm{T_{2,n}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial\mathrm{y}^2} + 2\mathrm{T_{3,n}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial\mathrm{x}\partial\mathrm{y}}, \quad (3)$$

где $T_{1,n}(x,y) = \frac{\partial^2 F_n(x,y)}{\partial y^2}$, $T_{2,n}(x,y) = \frac{\partial^2 F_n(x,y)}{\partial x^2}$, $T_{3,n}(x,y) = \frac{\partial^2 F_n(x,y)}{\partial x\partial y}$.

Последовательность линейных операторов (3) является последовательностью самосопряженных операторов, действующих в пространстве функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям. В этом пространстве система функций

$$f_{n,m} = \sin\frac{2\pi}{a}nx\sin\frac{2\pi}{b}my \quad (4)$$

является ортогональной системой.

Известно [6], что для самосопряженного оператора матрица этого оператора в ортогональном базисе будет положительно определенной матрицей, если только оператор является положительно определнным оператором.

В работе [7] показано, что, если оператор (3) в данной точке перестает быть положительно определенным, то в точке происходит локальная потеря устойчивости.

Таким образом, проверка потери локальной устойчивости в точке сводится к проверке положительности матрицы, составленной из скалярных произведений

$$(A_n, g_k, g_s)\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где g_k, g_k — базисные элементы вида (4).

При каждом n проверка положительности матрицы, состоящей из чисел вида (5), в свою очередь сводится к вычислению угловых миноров $M_{n,k}$:

$$M_{n,k}^{i,j} = \begin{vmatrix} (A_n, g_1, g_1) & \cdots & (A_n, g_1, g_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_n, g_k, g_1) & \cdots & (A_n, g_k, g_k) \end{vmatrix} \tag{6}$$

Если при некоторых n, k один из определителей вида (6) будет меньше или равен нулю, то в данной точке произошла локальная потеря устойчивости.

При численной реализации этого алгоритма, как показывают просчитанные примеры, достаточно брать $n, k \leqslant 48$.

3. Численная схема применения метода последовательных нагружений при расчете оболочечных конструкций

Во-первых, с целью улучшения сходимости метода последовательных нагружений, необходимо применять его модификацию, описанную в первом параграфе настоящей статьи.

С целью контроля за областью устойчивости изменения нагрузки нужно выбрать такую точку оболочки, в которой локальная потеря устойчивости совпадает с глобальной потерей устойчивости оболочки, и на каждом шаге итерации вычислять в этой точке определители вида (6). Часто в качестве такой точки можно выбрать центральную точку. Если выбор такой точки затруднителен, то нужно разбить область Ω на N прямоугольников и в каждом из них выбрать свою точку и вычислять определители вида (6). С ростом значения нагрузки число точек локальной потери устойчивости из выбранных N точек будет увеличиваться, а геометрическая картина увеличения таких точек укажет точку, которую можно выбрать в качестве контрольной. Это центр накопления «слабых» точек.

В малой окрестности критической нагрузки необходимо применять иной метод расчета; например, один из вариационных методов решения соответствующей нелинейной задачи.

Нужно отметить, что предложенная схема работает не только в случае модели Кармана (3), но и для других нелинейных моделей, описанных в [3] как в статическом так и в динамическом случаях.

Библиографический список

1. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

2. *Петров В.В., Овчинников И.Г., Иноземцев В.К.* Деформирование элементов конструкций из нелинейного равномодульного неоднородного материала. Саратов: Из-во Сарат. ун-та, 1988.

3. *Кузнецов В.Н.* Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций: Дис.... доктора техн. наук. Саратов, 2000.

4. *Чумакова С.В., Пшенов Д.А. Шабанов Л.Е.* К вопросу улучшения сходимости метода В.В. Петрова — метода последовательного возмущения параметров // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002.

5. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши для механических систем с конечным числом степеней свободы как задача продолжения по наилучшему параметру // ПММ, 1994. Т.58. Вып.6.

6. *Канторович Л.В., Акимов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1997.

7. *Кузнецова Т.А., Пшенов Д.А. Шабанов Л.Е., Чумакова С.В.* Спектральный критерий потери статической устойчивости прямоугольных в плане оболочечных конструкций // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2003.

УДК 511.3

Д.С. СТЕПАНЕНКО

Об одном варианте формулы суммирования Пуассона

Известно [1], что существуют разные варианты формулы суммирования Пуассона. В [2] приведен один из таких вариантов и его приложение к выводу функционального уравнения для тета–функции.

В данной работе также приводится один из вариантов формулы суммирования Пуассона и и отличается возможность применения этой формулы при выводе функциональных уравнений для обобщенных тета-функций. Основным результатом работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть M — некоторое множество целых чисел и пусть функция $f(x)$ непрерывна на каждом интервале $J_n = [n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}], n \in M$ и равна нулю вне этих интервалов. Пусть также выполняются следующие условия:

1) ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ сходится равномерно на интервале $[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$;

2) для любого действительного α существует интеграл

$$\varphi(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \alpha x} dx;$$

3) сходится ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j)$.

Тогда имеет место равенство

$$\sum_{n \in M} f(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j).$$

Доказательство

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(x+k).$$

В силу условий теоремы 1 функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и периодична с периодом, равным единице. Обозначим через c_j ее коэффициенты Фурье

$$c_j = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) e^{2\pi ijx} dx. \tag{1}$$

Тогда

$$g(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{2\pi ijx}$$

и, следовательно,

$$g(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$g(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(x), \tag{3}$$

где суммирование в сумме ведется по целым $k \in M$.

В силу (1) имеем:

$$c_j = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) e^{2\pi ijx} dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(x+k)) e^{2\pi ijx} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+k) e^{2\pi ijx} dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x) e^{2\pi ijx} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x) e^{2\pi ijx} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ijx} dx = \varphi(j).$$

Отсюда в силу (2) и (3), получаем

$$\sum_{n\in M} f(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j),$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Остановимся на одном возможном подходе при выводе функциональных уравнений для обобщенных тета–функций. Под обобщенной тета–функцией здесь понимается функция вида

$$Q(x, M) = \sum_{n\in M} e^{-\pi n^2 x}, \quad x > 0.$$

Ясно, что

$$Q(x, M) = \lambda(x) Q(x),$$

где $Q(x)$ — обычная тета–функция

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad x > 0.$$

В отдельных случаях удается явно определить функцию $\lambda(x)$, и тогда, не вычисляя значений функции $\varphi(x)$, определенной в теореме 1, в целых точках можно сразу получить функциональные уравнения для обобщенной тета–функции.

Например, рассмотрим в качестве множества M — множество периодических целых чисел с периодом d, то есть

$$M = M_l = \{kd + l \mid 0 \leqslant l \leqslant d-1,\ k \in Z\}.$$

В этом случае

$$Q(x,M)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\pi(kd+l)^2x}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(k+\frac{l}{d}\right)^2d^2x}. \tag{4}$$

Положим $y=d^2x$, тогда $Q(y,M_l)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\pi(k+\frac{l}{d})^2y}$.

Воспользуемся равенством, доказанном в [3]:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\pi(k+\alpha)^2y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi x^2}{y}+2\pi ik\alpha}. \tag{5}$$

В силу (4) и (5), получим

$$Q(y,M_l)=\frac{1}{\sqrt{y}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi n^2}{y}}e^{2\pi i\frac{l}{d}n}.$$

В частности, при $l=0$ получаем

$$Q(y,M_0)=\frac{1}{\sqrt{y}}Q\left(\frac{1}{\sqrt{y}},M_0\right).$$

Библиографический список

1. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматизд, 1962г.
2. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975г.
3. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975г.

УДК 511.3

В.В. КРИВОБОК, О.А. ПОЛЯКОВА

К оценке значений L–функций Дирихле числовых полей на критической прямой

Введение

Известно [1], что ζ–функция Римана

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \;\; s=\sigma+it,\; \sigma>1$$

и L–функция с неглавным числовым характером Дирихле

$$L(s,\chi) \;=\; \prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}, \;\; \sigma>1$$

аналитически продолжимы на комплексную плоскость: ζ–функция как мероморфная функция с единственным простым полюсом в точке $s=1$, L–функция — как целая функция. При этом и ζ–функция и L–функция неограниченны на критической прямой: $\sigma=\frac{1}{2}$.

Известная гипотеза Линделёфа [1,2] предполагает, что имеют место следующие оценки:

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \;=\; O(|t|^{\varepsilon})\,, \quad \left|L\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| \;=\; O(|t|^{\varepsilon})\,, \tag{1}$$

где ε — произвольное положительное число.

Известные оценки поведения ζ–функции и L–функции на критической прямой пока далеки от предполагаемых оценок вида (1).

Более сложные вопросы встают при получении оценок поведения L–функций Дирихле числовых полей на критической прямой.

В данной работе получены оценки значений L–функций для достаточно широкого класса характеров Дирихле числовых полей, а именно для так называемых норменных характеров. Нужно отметить, что эти оценки также далеки от оценок вида (1), которые можно предполагать и в случае L–функций Дирихле числовых полей, но и они представляют определенный научный интерес.

Основная часть

Определение. Характер Дирихле числового поля k называется норменным, если существует числовой характер χ такой, что для любого простого идеала $\wp$ поля k:

$$\chi(\wp) \;=\; \chi_1(N(\wp)).$$

Свойства норменных характеров Дирихле и свойства соответствующих L–функций рассматривались в работах [3,4]. Так, в работе [3] было показано, что для достаточно широкого класса числовых полей характеры Дирихле являются норменными характерами, а L–функции Дирихле с норменными характерами раскладываются в произведение L–функций с числовыми характерами Дирихле, то есть

$$L(s,\chi,k) \;=\; \prod_i L(s,\chi_i).$$

В работе [4] было показано, что для неглавного норменного характера Дирихле числового поля k его сумматорная функция является ограниченной, то есть

$$S(x) \;=\; \sum_{\mathfrak{a}/N(\mathfrak{a})\leqslant x} \chi(\mathfrak{a}) \;=\; \sum_{n\leqslant x} a_n \;=\; O(1)\,, \qquad (2)$$

где

$$a_n \;=\; \sum_{\mathfrak{a}/N(\mathfrak{a})=x} \chi(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a}).$$

Основным результатом этой работы является доказательство следующего утверждения

Теорема. *Пусть χ — неглавный норменный характер Дирихле числового поля k. Тогда для L–функции имеет место оценка вида*

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,k\right)\right| \;=\; O(|t|^{\frac{1}{2}}),\; |t|\to\infty. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

По формуле суммирования Абеля получаем:

$$L(s,\chi,k) \;=\; \sum_{1}^{M}\frac{a_n}{n^s} \;-\; \frac{S(M)}{(M+1)^s} \;+\; \sum_{M+1}^{\infty}S(n)\frac{1}{n^s} \;-\; \frac{1}{(n+1)^s}. \tag{4}$$

Так как

$$\left|\frac{1}{n^s} \;-\; \frac{1}{(n+1)^s}\right| \;=\; |s|\left|\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{1+s}}\right| \;\leqslant\; \frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{n^\sigma} \;-\; \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right),$$

то отсюда в силу (3) и (4) имеем:

$$|L(s,\chi,k)| \;\leqslant\; c_M\sum_{1}^{M}\frac{1}{n^\sigma} \;+\; c\frac{|s|}{\sigma}\left(\frac{1}{n^\sigma} \;-\; \frac{1}{(n+1)^\sigma}\right) \;+\; \frac{c}{(n+1)^\sigma}, \tag{5}$$

где $c_M \;=\max\limits_{n\leqslant M}\;\; |a_n|$.

Так как $\sum\limits_{1}^{M}\frac{1}{n^\sigma} \;<\; M^{1-\sigma}$,

$$|a_n| \;=\; |S(x)-S(x+1)| \;\leqslant\; |S(x)|+|S(x+1)| \;=\; O(1),$$

то в силу (5) получаем:

$$|L(s,\chi,k)| \;\leqslant\; c_1\,M^{1-\sigma} \;+\; c_2\frac{|t|}{\sigma}(M+1)^{-\sigma} \;+\; c_3(M+1)^{-\sigma}. \tag{6}$$

При $M=[|t|]$ и $s=\frac{1}{2}+it$ из оценки (6) следует утверждение теоремы 1.

Замечание. Можно указать такое поле k и такой норменный характер χ, что L–функция $L(s,\chi,k)$ раскладывается в произведение наперед заданного числа L—функций с числовыми характерами Дирихле. Это в силу утверждения теоремы 1 позволяет сделать следующий вывод: для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует L–функция Дирихле с числовым характером χ_i, для которой имеет место оценка вида:

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_i\right) \right| = O(|t|^{\varepsilon}),$$

что говорит в пользу гипотезы Линделёфа.

Библиографический список

1. *Титчмарш Е.К.* Дзета-функция Римана. М.: И.Л., 1947.
2. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматиз, 1994.
3. *Сецинская Е.В.* Граничное поведение степенных рядов, отвечающих L–функциям числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.
4. *Кривобок В.В.* Об аналитических свойствах L–функций числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2008.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, В.В. КРИВОБОК, О.А. ПОЛЯКОВА

К оценке сумматорных функций для характеров Дирихле числовых полей

Введение

Пусть χ — неглавный характер Дирихле числового поля k. В данной работе рассматривается задача оценки сумматорной функции вида

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n, \tag{1}$$

где

$$a_n = \sum_{\mathfrak{a}|N(\mathfrak{a})=n} \chi(\mathfrak{a}).$$

Хорошо известно, что для числового характера Дирихле его сумматорная функция ограничена [1].

В работе [2] было показано, что для достаточно широкого класса характеров Дирихле числовых полей, а именно для, так называемых норменных характеров, сумматорная функция (1) является ограниченной.

В общем случае оценками сумматорных функций вида (1) занимались многие авторы. Например, в [3] доказана оценка вида

$$S(x) = O(x^{1-\frac{1}{\nu}}),$$

где ν – некоторое (неизвестное) натуральное число.

В настоящей статье получена оценка сумматорной функции (1), которая зависит от поведения соответствующей L–функции Дирихле на критической прямой.

Основная часть

Обозначим через $L(s,\chi,k)$, $s=\sigma+it$, L–функцию Дирихле числового поля с неглавным характером Дирихле χ, которая при $\sigma>1$ определяется следующим образом

$$L(s,\chi,k) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Известно [3], что L–функция $L(s,\chi,k)$ продолжается на комплексную плоскость как целая функция первого порядка. Эту целую функцию будем обозначать также $L(s,\chi,k)$. При данных обозначениях имеет место

Теорема. *Пусть L–функция Дирихле $L(s,\chi,k)$ на критической прямой ведет себя следующим образом*

$$\left| L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,k\right)\right| = O(|t|^{\alpha}), \tag{2}$$

где $\alpha > 0$. *Тогда для сумматорной функции* $S(x)$ *вида (1) имеет место оценка*

$$S(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}), \tag{3}$$

где ε *— произвольное положительное число.*

Доказательству теоремы предпошлем доказательство следующего утверждения.

Лемма. Пусть для L–функций Дирихле поля k на критической прямой имеет место оценка вида (2)

$$\left|L(\frac{1}{2}+it,\chi,k)\right| = O(|t|^{\alpha}).$$

Тогда для $x \leqslant t$ имеет место оценка вида

$$\left|\sum_{n\leqslant x} a_n n^{it}\right| << \sqrt{x}t^{\alpha}\log t, \tag{4}$$

где

$$a_n = \sum_{\mathfrak{a}|N(\mathfrak{a})=n} \chi(\mathfrak{a}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Для L–функции Дирихле применим формулу обращения [4], полагая в ней $b = 1+\log^{-1} t$, $T = 0,5t$, $x = N + 0,5t$. В результате получим

$$\sum_{n\leqslant x} a_n n^{it} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+it} L(s+it,\chi,k)\frac{x^s}{s}ds + O(xT^{-1}\log t). \tag{5}$$

Пусть Γ — контур прямоугольника с вершинами $b \pm iT$, $\frac{1}{2} \pm T$. Тогда по теореме Коши о вычетах получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} L(s+it,\chi,k)\frac{x^s}{s}ds = 0. \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+it} L(s+it,\chi,k)\frac{x^s}{s}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} L(s+it,\chi,k)\frac{x^s}{s}ds + O\left(t^{-1}\int_{\frac{1}{2}}^{b}|L(\sigma+i(t\pm T))|\,x^\sigma d\sigma\right). \quad (7)$$

В силу условия леммы первый интеграл правой части равенства (6) оценивается величиной $O(\sqrt{x}t^\alpha\log t)$.

В силу теоремы Фрагмена—Линделефа относительно поведения модуля функции, голоморфной в полуполосе $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, $t \geqslant t \geqslant 0$ [5], имеет место оценка вида

$$|L(\sigma+it,\chi,k)| = O(|t|^\alpha), \quad \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant b. \quad (8)$$

Действительно, по условию леммы оценка (8) имеет место на одном из краев полосы $\sigma = \frac{1}{2}$. На другом крае полосы:$\sigma = b$ выполняется оценка

$$|L(b+it,\chi,k)| = O(1).$$

Внутри полосы имеет место очевидная оценка

$$|L(s,\chi,k)| = O(e^{c|t|}),$$

где $c > 0$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Фрагмена—Линделефа, и, следовательно, имеет место оценка (8).

В силу оценки (8) второй интеграл правой части равенства (7) имеет оценку порядка $O(|t|^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{x})$, что в силу (6) и (5) доказывает утверждение леммы.

Доказательство теоремы

Представим сумматорную функцию (1) в виде

$$S(x) = \sum_{n\leqslant x} b_n n^{-it},$$

где $b_n = a_n n^{it}$. По формуле суммирования Абеля получаем

$$S(x) = A(x)x^{-it} - \int_1^x A(u)\phi'(u)du, \quad (9)$$

где

$$A(x) \ = \ \sum_{n\leqslant x} b_n \,, \quad \phi(u) = u^{-it}.$$

В силу леммы при $x = t$ имеем:

$$|A(x)| \ = \ O(\sqrt{x} t^{\alpha} \log t) \ = \ O(x^{\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}), \tag{10}$$

где ε — произвольное положительное число.

Так как

$$\int_1^x \frac{1}{u^{\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}} du \ = \ O(x^{\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}), \tag{11}$$

то для $S(x)$ в силу (9),(10) и (11) получаем оценку вида

$$S(x) \ = \ O(x^{\frac{1}{2}+\alpha+\varepsilon}),$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Библиографический список

1. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.

2. *Кривобок В.В.* Об аналитических свойствах L–функций числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2008.

3. *Хейльбронн Х.* ζ-функции и L-функции // В кн.: Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.

4. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматиз, 1994.

5. *Ленг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1966.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, Т.А. КУЗНЕЦОВА, О.А. ПОЛЯКОВА

О некоторых условиях периодичности конечнозначных мультипликативных функций

Введение

В данной работе приведены некоторые условия периодичности конечнозначных, мультипликативных функций натурального аргумента $h(n)$, выраженные в терминах аналитических свойств функций, определяемых соответствующими рядами Дирихле, в терминах граничных свойств соответствующих степенных рядов и в терминах скорости полиномиального приближения функций, определяемых соответствующими степенными рядами, на отрезке $[0,1]$. В заключении статьи обсуждается вопрос применения указанных результатов к известным проблемам теории чисел.

1. Об одном условии периодичности $h(n)$, выраженном в терминах аналитических свойств функций,определяемых соответствующими рядами Дирихле

Рассмотрим ряд Дирихле:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \tag{1}$$

Имеет место следующее утверждение, доказанное в [1].

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. функция $h(n)$ — периодическая функция;

2. функция $f(s)$, определенная рядом (1), является мероморфной функцией с единственным возможным полюсом в точке $s = 1$, удовле-

творяющая следующему условию роста модуля в левой полуплоскости:

$$|f(s)| = O(e^{|s|ln|s|+A|s|}), \quad A > 0, \quad \sigma < 0. \tag{2}$$

Следующий результат, доказанный в [2], определяет способ аналитического продолжения функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими, конечнозначными, мультипликативными коэффициентами.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. функция $h(n)$ — периодическая функция с периодом k;

2. функция $f(s)$, определенная рядом (1), *является мероморфной функцией с единственным возможным полюсом в точке $s = 1$, удовлетворяющая функциональному уравнению типа Римана* [3]*:*

$$\alpha \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) f(s,h) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta_1}{2}\right) f(s,\overline{h}),$$

где α — некоторая константа; δ и δ_1 — величины,равные либо 0, либо 1; $\overline{h}(n)$ — сопряженная с $h(n)$ функция.

2. О некоторых условиях периодичности $h(n)$, выраженных в терминах граничных свойств соответствующего степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд вида:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) z^n. \tag{3}$$

Приведем ряд утверждений, отражающих связь свойства периодичности $h(n)$ и граничных свойств ряда (3).

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1. функция $h(n)$ — периодическая функция, для которой

$$\sum_{n \leqslant x} h(n) = O(1);$$

2. для степенного ряда $g(z)$ вида (3) в точке $z = 1$ существуют радиальные производные вида

$$\lim_{x\to 1-0} g^n(x) = \alpha_n, \quad n = 0, 1, ..., \tag{4}$$

где

$$\alpha_n = O(e^{n \ln n}). \tag{5}$$

Доказательство

Пусть $h(n)$ — периодическая функция периода d, $d > 1$. Тогда, как легко видеть, функция $g(z)$ является рациональной функцией вида

$$g(z) = \frac{P_{d-2}(z)}{1 + z + ... + z^{d-1}}. \tag{6}$$

Ясно, что функция вида (6) имеет в точке $z = 1$ радиальные производные вида (3), для которых выполняется условие (5).

Обратно, пусть функция $g(z)$ имеет в точке $z = 1$ радиальные производные вида (4) с условием (5). Тогда, как показано в [4], ряд Дирихле вида (1) определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости удовлетворяет условию (2), что в силу теоремы 1 равносильно периодичности функции $h(n)$, для которой

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) = O(1).$$

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1. функция $h(n)$ — периодическая функция, для которой

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) = O(1);$$

2. существует такая величина $\delta > 0$, что для всех φ: $|\varphi| < \delta$ выполняется равномерная по φ оценка

$$\sum_{n\leqslant x} h(n)e^{i\varphi n} = O(1).$$

Доказательство теоремы 4 приведено в [5].

Теорема 5. *Следующие условия равносильны:*

1. функция $h(n)$ — периодическая функция;

2. существует многочлен $P_n(z)$, такой, что

$$|g(z)P_n(z)| < C, \ |z| < 1. \tag{7}$$

Доказательство

Пусть $h(n)$ — периодическая функция. Тогда $g(z)$ — рациональная функция, полюсы которой расположены на единичной окружности. Пусть $P_n(z)$ — многочлен, нули которого совпадают с полюсами функции $g(z)$. Ясно, что для такого полинома выполняется условие (7).

Обратно, пусть выполняется условие 2 теоремы 5. Тогда функция $g(z)$ будет ограниченной в некотором секторе единичного круга. В силу теоремы Даффина-Шеффера [6] коэффициенты $h(n)$ степенного ряда $g(z)$ будут периодическими, начиная с некоторого номера. В силу мультипликативности $h(n)$ будут просто периодическими, что и завершает доказательство теоремы 5.

3. Приближение функции, определенной степенным рядом, многочленами на отрезке $[0, 1]$ и периодичность коэффициентов такого ряда

Пусть степенной ряд (3) определяет функцию, у которой существует конечный предел вида $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)$. Тогда функция $g(x)$ доопределяется до непрерывной функции на отрезке $[0, 1]$.

Обозначим через $E_n(g(x))$ величину наилучшего приближения функции $g(x)$ на отрезке $[0, 1]$ полиномами степени не превосходящей n.

При данных обозначениях имеет место

Теорема 6. *Следующие условия эквивалентны:*

1. функция $h(n)$ является периодической функцией с условием

$$\sum_{n \leqslant x} h(n) = O(1);$$

2. для величин $E_n(g(x))$ имеет место оценка вида

$$E_n(g(x)) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{8}$$

где ρ — некоторая величина большая 1.

Доказательство

Как показано в [7] оценка (8) равносильна тому, что точка $z = 1$ является регулярной точкой для функции $g(z)$, определяемой рядом (3), что в силу теоремы Сеге [6] равносильно периодичности коэффициентов степенного ряда $h(n)$, начиная с некоторого номера, а в силу мультипликативности $h(n)$ равносильно просто периодичности $h(n)$, что и доказывает утверждение теоремы 6.

Замечание. Можно показать, что условие

$$E_n(g(x)) = O(\frac{1}{n^k})$$

для любого натурального k, равносильно существованию у функции $g(z)$ в точке $z = 1$ радиальных производных вида (4), а это, в свою очередь, равносильно тому, что ряд Дирихле вида (1) определяет целую функцию.

4. Условия периодичности функции $h(n)$ и некоторые проблемы теории чисел

Остановимся на возможных приложениях указанных выше результатов в направлении решения таких известных проблем теории чисел, как проблема расположения нулей L–функции Дирихле и проблема обобщенных характеров.

Определение. Обобщенным характером $h(n)$ называется конечнозначная мультипликативная функция натурального аргумента, для которой выполнены условия:

1. $h(p) \neq 0$ за исключением конечного множества простых;
2. сумматорная функция $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} h(n)$ является ограниченной.

В 1950 году профессор Н.Г.Чудаков высказал гипотезу, что обобщенный характер является характером Дирихле [8].

Нужно отметить, что теоремы 1, 3, 4, 6 имеют место для любой конечнозначной функции натурального аргумента $h(n)$.

Далее, в работе [9] было получено отличие поведения величин $E_n(g(x))$ в случае степенных рядов с мультипликативными коэффициентами от случая степенных рядов с произвольными коэффициентами. Есть основания надеяться, что дальнейшее развитие методов этой работы приведет к решению гипотезы Н.Г.Чудакова.

Известно [3], что функциональному уравнению типа Римана, приведенному в теореме 2, удовлетворяют не только L–функции Дирихле, но и функции определенные рядами Дирихле с периодическими немультипликативными коэффициентами. Примером тому является известная [3] функция Дэвенпорта—Хейльбронна.

Известно также [3], что тот факт, что функция Дэвенпорта—Хейльбронна удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана, накладывает определенные условия на расположение ее нулей; достаточно плотно нули этой функции располагаются на критической прямой. В связи с этим встает задача изучения влияния функционального уравнения на расположение нулей в мультипликативном случае.

Библиографический список

1. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Математические заметки, 1984. Т. 36. Вып. 6.

2. *Кривобок В.В.* Об аналитических свойствах L–функций числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2008.

3. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматиз, 1994.

4. *Кузнецов В.Н., Кузнецова Т.А., Кривобок В.В.* Об аналитических свойствах функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5.

5. *Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В.* Обобщенные суммы Гаусса и гипотеза Н.Г.Чудакова // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 5.

6. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.

7. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.

8. *Чудаков Н.Г., Родосский К.А.* Об обобщенном характере // ДАН СССР. 1950. Т.73.

9. *Кузнецов В.Н., Водолазов А.М.* К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1.

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ, М.Н. СУСИН

Точная гомотопическая последовательность толерантного квазирасслоения пространства толерантных путей

Определение 1. Толерантным пространством называется пара (X, τ), состоящая из базисного множества X и рефлексивного и симметричного бинарного отношения $\tau \in X \times X$, которое называется отношением толерантности.

Определение 2. Толерантным отрезком длины $n \in \mathbb{N}$ называется толерантное пространство (I_n, ι_n), где

$$I_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid k = \overline{0, n} \right\}, \ (\forall k, l = \overline{0, n}) \ \frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow \ |k - l| \leqslant 1.$$

Определение 3. Отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \theta)$ называется сильным толерантным отображением толерантных пространств, если выполняются следующие условия:

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad x_1 \tau x_2 \Rightarrow f(x_1) \theta f(x_2),$$

$$(\forall x_1, x_2 \in X) \quad x_1 \varepsilon_\tau x_2 \Rightarrow f(x_1) \varepsilon_\theta f(x_2).$$

Если отображение f удовлетворяет только первому условию, то отображение f называется толерантным отображением.

Определение 4. Толерантные отображения $f_0, f_1 : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \theta)$ называются толерантно гомотопными относительно подмножества $A \subset \subset X$ и обозначаются $f_0 \sim f_1 (rel\ A)$, если существуют натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и толерантное отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \longrightarrow (Y, \theta)$ такое, что

1. $(\forall x \in X) \ \ F(x, 0) = f_0(x)$,

2. $(\forall x \in X) \;\; F(x,1) = f_1(x)$,

3. $(\forall x \in A) \;\; (\forall k = \overline{0,n}) \;\; F(x, \frac{k}{n}) = f_0(x)$.

Если в этом определении $n = 1$, то такую толерантную гомотопность называют простой или одношаговой и записывают $f_0 \approx f_1(rel\ A)$. А если $A = \varnothing$, то условие 3 выполняется автоматически, и в этом случае используются обозначения $f_0 \sim f_1$ и $f_0 \approx f_1$. Отметим, что простая толерантная гомотопность $f_0 \approx f_1$, означает, что

$$(\forall x_1,\ x_2 \in X)\ x_1 \tau x_2 \Longrightarrow f_0(x_1) \theta f_1(x_2).$$

Определение 5. n – мерным толерантным сфероидом (T сфероидом) толерантного пространства (X, τ) в точке $x_0 \in X$ называется толерантное отображение $\alpha_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \to (X, \tau)$ такое, что $\alpha_m(\partial I_m^{(n)}) = x_0$, $m \in \mathbb{N}$.

Если $\alpha_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \to (X, \tau)$ – T сфероид и $M \in \mathbb{N},\ M \geqslant n$, тогда определим T сфероид $\alpha_{M,m} : (I_M^{(n)}, \iota_M^{(n)}) \to (X, \tau)$ следующим образом

$$(\forall k_i = \overline{0, M},\ i = \overline{1,n})\ \alpha_{M,m}((\frac{k_i}{M})_{i=\overline{1,n}}) = \begin{cases} \alpha_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}),\ (\forall i = \overline{1,n})\ k_i \leqslant m; \\ x_0,\ (\exists i = \overline{1,n})\ k_i \geqslant m. \end{cases}$$

Сфероид $\alpha_{M,m}$ называется продлением сфероида α_m.

Определение 6. Два n – мерных сфероида $\alpha_{m_1}, \alpha'_{m_2}$ пространства (X, τ) в точке x_0 называются толерантно гомотопными и обозначаются $\alpha_{m_1} \simeq \alpha'_{m_2}$, если существуют натуральное $M \geqslant max\{m_1, m_2\}$ и толерантная гомотопия $\alpha_{M,m_1} \sim \alpha'_{M,m_2}(rel\ \partial I_M^{(n)})$.

Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности, символом $[\alpha_m]$ обозначается класс этого отношения с представителем α_m.

В теории толерантных гомотопических групп очень полезной является конструкция двойного замедления T сфероида.

Пусть $\alpha_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \to (X, \tau)$ – произвольный Т сфероид, его двойным замедлением называется новый Т сфероид

$$\widetilde{\alpha}_m : (I_{2m}^{(n)}, \iota_{2m}^{(n)}) \to (X, \tau)$$

$$(\forall i = \overline{1,n},\ k_i = \overline{0,2m})\ \widetilde{\alpha}_m((\frac{k_i}{2m})_{i=\overline{1,m}}) \stackrel{df}{=} \alpha_m((\frac{1}{m}\left[\frac{k_i}{2}\right])_{i=\overline{1,n}}),$$

где скобки $[\dots]$ обозначают целую часть числа.

Двойное замедление имеет ряд важных свойств:

W1. $\widetilde{\alpha}_m : (I_{2m}^{(n)}, \iota_{2m}^{(n)} \circ \iota_{2m}^{(n)}) \to (X, \tau)$ – толерантное отображение, т.е. $\widetilde{\alpha}_m$ сохраняет двойную толерантность $\iota_{2m}^{(n)} \circ \iota_{2m}^{(n)}$;

W2. свойство гомоморфности относительно операции $*$, т.е.

$$\widetilde{\alpha_{m_1} * \beta_{m_2}} = \widetilde{\alpha_{m_1}} * \widetilde{\beta_{m_2}};$$

W3. $\widetilde{\alpha_m} \simeq \alpha_m$.

С помощью этих свойств доказывается корректность операции на классах толерантно гомотопных сфероидов, которая определяется формулой

$$[\alpha_{m_1}] * [\beta_{m_2}] = [\alpha_{m_1} * \beta_{m_2}]\,,$$

или с помощью формулы

$$[\alpha_m] * [\beta_m] = \left[\gamma_{2m}^{(1)}\right],$$

где

$$\gamma_{2m}^{(1)}((\frac{k_i}{2m})_{i=\overline{1,n}}) = \begin{cases} \alpha_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}),\ \forall k_i = \overline{1,m}; \\ \beta_m(\frac{k_1-m}{m}, (\frac{k_i}{m})_{i=\overline{2,m}}),\ k_1 = \overline{m,2m},\ (\forall i = \overline{2,n})\ k_i = \overline{0,m}; \\ x_0,\ \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для определения относительных толерантных гомотопических групп в Т кубе $(I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}),\ n \geqslant 2$, выделим начальную $(n-1)$ – мерную грань

$$I_m^{(n-1)} \stackrel{df}{=} \left\{(\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}} \in I_m^{(n)} \mid k_m = 0\right\}.$$

Все оставшиеся грани обозначим $J^{(n-1)}$. Зафиксируем в толерантном пунктированном пространстве $((X,\tau),x_0)$ подпространство $((A,\tau_A),x_0)$, где $A\subset X,\ x_0\in A,\ \tau_A=\tau\cap(A\times A)$.

Определение 7. Относительным n – мерным ($n\geqslant 2$) толерантным сфероидом пространства (X,τ) относительно подпространства (A,τ_A) называется толерантное отображение $\alpha_m : (I_m^{(n)},\iota_m^{(n)}) \to (X,\tau),\ m\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$, такое, что $\alpha_m(I_m^{(n-1)})\subset A,\ \alpha_m(J_m^{(n-1)})=x_0$.

Очевидно, что относительный Т сфероид становится Т сфероидом (в смысле определения 5), если $A=\{x_0\}$.

Для относительных Т сфероидов определяется отношение толерантной гомотопности $\overset{A}{\simeq}$, повторяющее определение 6 с той лишь разницей, что толерантное отображение

$$F:(I_M^{(n)}\times I_N,\iota_M^{(n)}\times\iota_N)\to(X,\tau),$$

осуществляющее толерантную гомотопию $F:\alpha_{M,m_1}\sim\alpha'_{M,m_2}$, должно быть таково, что при любом фиксированном значении параметра $\frac{l}{N}\in I_N$ отображение $F|(I_M^{(n)}\times\{\frac{l}{N}\})$ является относительным Т сфероидом.

На множестве Т путей $P(X,x_0)$ в пространстве (X,τ) определим структуру толерантного пространства.

Определение 8. Пусть $\omega_{m_1},\omega'_{m_2}\in P(X.x_0)$ – произвольные Т пути пространства (X,τ) с началом в точке $x_0\in X$ и пусть для определенности $m_2\geqslant m_1$. Тогда Т пути ω_{m_1} и ω'_{m_2} назовем $\varkappa_X$ – толерантными, если выполняются следующие свойства:

1) $\omega'_{m_2}=\varepsilon_{m_2-m_1}*\gamma'_{m_1}$, где $\varepsilon_{m_2-m_1}$ – постоянный путь длины m_2-m_1 :

$$(\forall k=\overline{0,m_2-m_1})\ \varepsilon_{m_2-m_1}(\frac{k}{m_2-m_1})\equiv x_0,$$

а $\gamma'_{m_1}\in P(X,x_0)$ представляет собой отрезок пути ω'_{m_2} :

$$(\forall k=\overline{0,m_1})\ \gamma'_{m_1}(\frac{k}{m_1})=\omega'_{m_2}(\frac{k+m_2-m_1}{m_2});$$

2) $\omega_{m_1} \approx \gamma'_{m_1}$.

Замечание 1. При $m_1 = m_2 = m$, $\varepsilon_{m_2 - m_1} = \varepsilon_0$ – постоянный путь длины 0 является формальным объектом, его траектория состоит из одной единственной точки x_0, и относительно операции $*$ он ведет себя как нейтральный элемент, т.е. $\varepsilon_0 * \gamma'_m = \gamma'_m = \omega'_m$. Это означает, что согласно определению 8 имеет место правило:

$$\omega_m \varkappa \omega'_m \Leftrightarrow \omega_m \approx \omega'_m,$$

$$\text{т.е. } \omega_m \varkappa \omega'_m \Leftrightarrow \left[(\forall k, l = \overline{0, m}) \ |k - l| \leqslant 1 \Rightarrow \omega_m(\frac{k}{m}) \tau \omega'_m(\frac{l}{m}) \right].$$

Замечание 2. Из определения 8 следует, что все постоянные пути с началом в точке x_0 являются $\varkappa$ – толерантными друг другу:

$$(\forall \varepsilon_{m_1}, \varepsilon_{m_2} \in CP(X, x_0)) \ \varepsilon_{m_1} \varkappa \varepsilon_{m_2}.$$

Договоримся в дальнейшем, если будет требоваться подчеркнуть, что рассматриваются Т пути в пространстве (X, τ), то для обозначения $\varkappa$ – толерантности таких путей будем использовать символ $\varkappa_X$.

Итак, определено толерантное пространство $(P(X, x_0), \varkappa)$ Т путей пространства (X, τ) с началом в точке x_0. В следующей теореме доказывается наиболее существенное свойство этого пространства.

Определение 9. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ называется толерантным расслоением (в смысле Гуревича), если для любого толерантного пространства (Y, θ) и любых толерантных отображений

$$F : (Y \times I_n, \ \theta \times \iota_n) \to (B, \tau), \ \overline{f} : (Y, \theta) \to (E, \overline{\tau})$$

таких, что $F|(Y \times \{0\}) = p \circ \overline{f}$, существует толерантное отображение $\overline{F} : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (E, \overline{\tau})$ такое, что $\overline{F}|(Y, \{0\}) = \overline{f}$, $p \circ \overline{F} = F$.

Однако, не все важные и интересные случаи удовлетворяют свойству толерантного расслоения в полном объеме, так, например, имеет место следующее расслоение.

Теорема 1. *Толерантное отображение* $p : (P(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$, *задаваемое формулой* $p(\omega_m) = \omega_m(1)$, *является толерантным квазирасслоением, в том смысле, что для любого пространства* (Y, θ) *и для любых отображений*

$$F : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \to (X, \tau),\ \overline{f} : (Y, \theta) \to (P(X, x_0), \varkappa_X)$$

таких, что $(\forall y \in Y)\ F(y, 0) = p \circ \overline{f}(y)$, *существует толерантное отображение*

$$\overline{F} : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \to (P(X, x_0), \varkappa_X)$$

такое, что

$$p \circ \overline{F} = F,\ (\forall y \in Y)\ \overline{F}(y, 0) = \overline{f}(y) * (\varepsilon_{p \circ \overline{f}(y)})_M = \overline{f}(y) * (\varepsilon_{F(y,0)})_M,$$

где $(\varepsilon_{F(y,0)})_M$ – *толерантный путь длины* M *в пространстве* (X, τ), *принимающий тождественное значение* $(\varepsilon_{F(y,0)})_M(\frac{k}{M}) \equiv F(y, 0) \in X$. *При этом квазирасслоение* p *имеет слой* $p^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \varkappa_X)$.

Для любого толерантного расслоения имеет место теорема о точной толерантной гомотопической последовательности (см. [3'], теорема 9). Следующая теорема является ее аналогом для толерантного квазирасслоения $p : (P(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$ из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $p : (P(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$ – *толерантное квазирасслоение* T *путей пространства* (X, τ), *тогда имеет место следующая точная толерантная гомотопическая последовательность*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \pi_n(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(P(X, x_0), \varepsilon_1) \xrightarrow{p_*}$$

$$\xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1) \to \cdots,$$

где $p_* = p_\pi \circ j_*$; $\partial_* = \partial \circ p_\pi^{-1}$; ι_*, j_*, ∂ – *гомоморфизмы точной толерантной гомотопической последовательности пары* $(\Omega(X, x_0), \varkappa_X) \subset$ $\subset (P(X, x_0), \varkappa_X)$ *(см. [3], теорема 4);*

$$p_{\pi_n} : \pi_n(P(X, x_0), \Omega(X, x_0), \varepsilon_1) \cong \pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0) \qquad (1)$$

— *изоморфизмы, индуцированные толерантным отображением троек*

$$p:((P(X,x_0),\varkappa),(\Omega(X,x_0),\varkappa),\varepsilon_1)\to((X,\tau),(\{x_0\},\tau),x_0). \qquad (2)$$

Доказательство

Докажем сначала, что гомоморфизм p_{π_n} относительных гомотопических групп (1), индуцированный отображением (2) троек, является изоморфизмом для всех $n\geqslant 2$. Покажем сначала сюрьективность. Возьмем произвольный элемент

$$[\alpha_m]\in\pi_n(X,x_0),\ \alpha_m:(I_m^{(n)},\partial I_m^{(n)})\to(X,x_0),$$

где α_m – абсолютный T сфероид пространства $((X,\tau),x_0)$ размерности n. Обозначим для краткости

$$\alpha_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})=x^{(k_i)_{i=\overline{1,n}}}=x^{(k_1,\cdots,k_n)}\in X.$$

Так как α_m – T сфероид, то

$$(\exists i=\overline{1,n})\ k_i\in\{0,m\}\Rightarrow x^{(k_1,\cdots,k_n)}=x_0, \qquad (3)$$

если же $P=(\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}\iota_m^{(n)}Q=(\frac{k_i^{'}}{m})_{i=\overline{1,n}}$, то есть $(\forall i=\overline{1,n})\ |k_i-k_i^{'}|\leqslant 1$, тогда

$$x^{(k_1,\cdots,k_n)}\tau x^{(k_1^{'},\cdots,k_n^{'})}. \qquad (4)$$

Определим отображение $\overline{\alpha}_m:I_m^{(n)}\to P(X,x_0)$ такое, что

$$(\forall(\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}\in I_m^{(n)})\ \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}):(I_m,\iota_m)\to(X,\tau),$$

$$\overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l}{m})=\begin{cases}x^{(k_1,\cdots,k_{n-1},m-l)},\ l=\overline{0,m-k_n};\\ x^{(k_1,\cdots,k_{n-1},k_n)},\ l=\overline{m-k_n,m}.\end{cases} \qquad (5)$$

Из (4) и (3) следует, что в самом деле

$$(\forall(\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}\in I_m^{(n)})\ \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})\in P(X,x_0).$$

Покажем, что отображение $\overline{\alpha}_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \to (P(X, x_0), \varkappa_X)$ является толерантным, то есть

$$(\forall i = \overline{1, n})\ (\forall k_i, k_i^{'} = \overline{0, m})\ |k_i - k_i^{'}| \leqslant 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}) \approx \overline{\alpha}_m((\frac{k_i^{'}}{m})_{i=\overline{1,n}}). \tag{6}$$

Это означает, что с дополнительными условиями должно выполняться

$$(\forall l, l^{'} = \overline{0, m})\ |l - l^{'}| \leqslant 1 \Rightarrow \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l}{m}) \tau \overline{\alpha}_m((\frac{k_i^{'}}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l^{'}}{m}). \tag{7}$$

Рассмотрим все возможные случаи. Начнем с $k_n = k_n^{'}$. Тогда из условия в (7) следует возможность лишь двух вариантов:

$$0 \leqslant l, l^{'} \leqslant m - k_n, \tag{8}$$

$$m - k_n \leqslant l, l^{'} \leqslant m., \tag{9}$$

Для (8), согласно (5), имеем

$$\begin{array}{l} \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l}{m}) = x^{(k_1, \cdots, k_{n-1}, m-l)}, \\ \overline{\alpha}_m((\frac{k_i^{'}}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l^{'}}{m}) = x^{(k_1^{'}, \cdots, k_{n-1}^{'}, m-l^{'})}. \end{array} \tag{10}$$

Для (9) с помощью (5) получаем

$$\begin{array}{l} \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l}{m}) = x^{(k_1, \cdots, k_{n-1}, k_n)}, \\ \overline{\alpha}_m((\frac{k_i^{'}}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l^{'}}{m}) = x^{(k_1^{'}, \cdots, k_{n-1}^{'}, k_n^{'})}. \end{array} \tag{11}$$

В обоих случаях из (4) следует, что (7) имеет место.

Пусть теперь $k^{'} = k + 1$. Тогда возможны лишь следующие случаи:

1) $0 \leqslant l, l^{'} \leqslant m - k^{'} < m - k$;

2) $m - k^{'} < m - k \leqslant l, l^{'} \leqslant m$;

3) $l^{'} = m - k^{'},\ l = m - k$;

4) $l = m - k^{'} = m - k - 1,\ l^{'} = m - k = m - k^{'} + 1$.

В случаях 1) и 3) имеет место формулы (10). В случае 2) имеем (11). В случае 4) из (5) следует

$$\overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l}{m}) = x^{(k_1, \cdots, k_{n-1}, m-l)} = x^{(k_1, \cdots, k_{n-1}, k_n^{'})},$$

$$\overline{\alpha}_m((\frac{k_i^{'}}{m})_{i=\overline{1,n}})(\frac{l^{'}}{m}) = x^{(k_1^{'},\cdots,k_{n-1}^{'},k_n^{'})},$$

что вместе с (4) показывает выполнение (7).

Рассмотрим теперь значение полученного нами толерантного отображения $\overline{\alpha}_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \to (P(X,x_0), \varkappa_X)$ на нижней грани $I_m^{(n-1)} = \left\{(\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}} \in I_m^{(n)} \,|k_n = 0\right\}$

$$\overline{\alpha}_m(I_m^{(n-1)}) = \overline{\alpha}_m\,|_{k_n=0} : (I_m^{(n-1)}, \iota_m^{(n-1)}) \to (P(X,x_0), \varkappa_X).$$

Из (5) и (3) следует ,что для любых $(\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n-1}} \in I_m^{(n-1)}$

$$\overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n-1}}, 0)(0) = x^{(k_1,\cdots,k_{n-1},m)} = x_0,$$

$$\overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n-1}}, 0)(m) = x^{(k_1,\cdots,k_{n-1},0)} = x_0.$$

Это показывает, что

$$\overline{\alpha}_m(I_m^{(n-1)}) \subset \Omega(X,x_0). \tag{12}$$

Чтобы толерантное отображение $\overline{\alpha}_m$ являлось бы относительным Т – сфероидом в пространстве $(P(X,x_0), \varkappa_X)$ относительно подпространства $(\Omega(X,x_0), \varkappa_X)$, определяющим элемент в $\pi_n(P(X,x_0), \Omega(X,x_0), \varepsilon_1)$, не хватает только свойства $\overline{\alpha}_m(J_m^{(n-1)}) \equiv \varepsilon_1$. Вместо него, как это следует из (5) и (3), имеет место свойство

$$\overline{\alpha}_m(J_m^{(n-1)}) = \varepsilon_m. \tag{13}$$

Преобразуем толерантное отображение $\overline{\alpha}_m$, сохраняя свойство (12), в относительный Т сфероид

$$\overline{\beta}_{m+2} : (I_{m+2}^{(n)}, I_{m+2}^{(n-1)}, J_{m+2}^{(n-1)}) \to (P(X,x_0), \Omega(X,x_0), \varepsilon_1),$$

который определим следующим образом

$$\overline{\beta}_{m+2}((\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}) \overset{df}{=} \begin{cases} \varepsilon_1, \ (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in J_{m+2}^{(n-1)}; \\ \overline{\alpha}_m((\frac{k_i-1}{m})_{i=\overline{1,n}}), \ (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \notin \partial I_{m+2}^{(n)}; \\ \overline{\alpha}_m((\frac{k_i-1}{m})_{i=\overline{1,n-1}}, 0), \ (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in I_{m+2}^{(n-1)} \backslash \partial I_{m+2}^{(n-1)}. \end{cases}$$

Графически определение $\overline{\beta}_{m+2}$ проиллюстрировано на следующем рисунке (для $n = 2$)

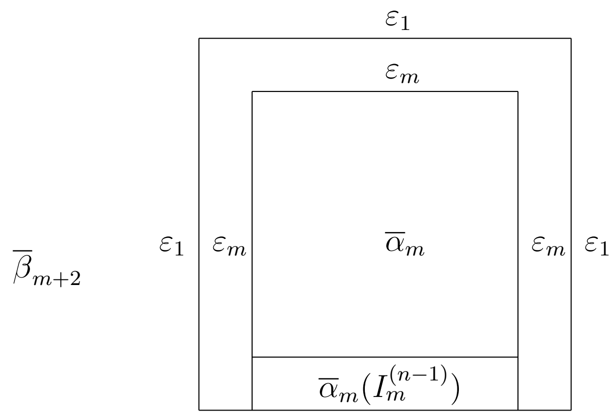


Рис. 1

Из определения $\overline{\beta}_{m+2}$, свойства (9) и замечания 2 следует, что $\overline{\beta}_{m+2}$ – толерантный T сфероид, определяющий элемент

$$[\overline{\beta}_{m+2}] \in \pi_n(P(X, x_0), \Omega(X, x_0), \varepsilon_1).$$

Проекцией на (X, τ) T сфероида $\overline{\beta}_{m+2}$ будет T сфероид

$$\beta_{m+2} = p \circ \overline{\beta}_{m+2}, \tag{14}$$

который графически представлен на следующем рисунке

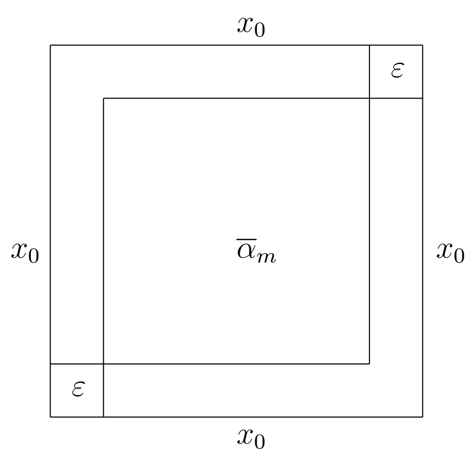


Рис. 2

Отсюда следует, что

$$\beta_{m+2} = \varepsilon_1^{(n)} * \alpha_m * \varepsilon_1^{(n)}, \tag{15}$$

где $\varepsilon_1^{(n)}$ — n–мерные Т сфероиды размера $\overline{1} = (1, \cdots, 1)$, тождественно равные x_0. Используя (14), (15) и свойства классов толерантной гомотопности Т сфероидов, получим

$$p_{\pi_n}([\overline{\beta}_{m+2}]) = [p \circ \overline{\beta}_{m+2}] = [\beta_{m+2}] = [\varepsilon_1^{(n)}] * [\alpha_m] * [\varepsilon_1^{(n)}] = [\alpha_m],$$

что и доказывает сюрьективность гомоморфизма p_{π_n}.

Перейдем к доказательству инъективности гомоморфизма p_{π_n}. Предположим, что для относительного Т сфероида

$$\overline{\alpha}_m : (I_m^{(n)}, I_m^{(n-1)}, J_m^{(n-1)}) \to (P(X, x_0), \Omega(X, x_0), \varepsilon_1)$$

имеем $p_{\pi_n}([\overline{\alpha}_m]) = [p \circ \overline{\alpha}_m] = [\varepsilon_m^{(n)}]$. Поскольку $\overline{\alpha}_m$ – произвольный представитель класса $[\overline{\alpha}_m]$, то, без ущерба для общности, согласно определению 6, можно считать, что имеется толерантная гомотопия абсолютных Т сфероидов в пространстве (X, τ) :

$$F : (I_m^{(n)} \times I_p, \iota_m^{(n)} \times \iota_p) \to (X, \tau),\ F : \alpha_m = p \circ \overline{\alpha}_m \sim \varepsilon_m^{(n)}(rel\ \partial I_m^{(n)}),$$

$$F \mid (I_m^{(n)} \times \{0\}) = \alpha_m,\ F \mid (I_m^{(n)} \times \{1\}) = \varepsilon_m^{(n)},\ F \mid (\partial I_m^{(n)} \times I_p) \equiv x_0. \quad (16)$$

Толерантное отображение $\overline{F} : (I_m^{(n)} \times I_p, \iota_m^{(n)} \times \iota_p) \to (P(X, x_0), \varkappa_X)$, накрывающее F, в нашем случае имеет вид

$$\overline{F}((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}, \frac{l}{p}) \overset{df}{=} \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}) * \omega_p^{(k_1, \cdots, k_n; l)}, \quad (17)$$

где $\omega_p^{(k_1, \cdots, k_n; l)} = \omega_p^{(\overline{k}; l)} : (I_p, \iota_p) \to (X, \tau)$ – Т путь в (X, τ) такой, что

$$\omega_p^{(k_1, \cdots, k_n; l)}(\frac{r}{p}) \overset{df}{=} \begin{cases} F((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}, \frac{r}{p}),\ r = \overline{0, l}; \\ F((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}, \frac{l}{p}),\ r = \overline{l, p}. \end{cases} \quad (18)$$

Для $\overline{F}$ выполняется накрывающее свойство $p \circ \overline{F} = F$, но его начальный относительный Т сфероид $\overline{\beta}_m$ не совпадает с $\overline{\alpha}_m$:

$$\overline{\beta}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}) \overset{df}{=} F((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}, 0) = \overline{\alpha}_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}}) * (\varepsilon_{\alpha_m((\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}})})_p \quad (19)$$

Из (17), (18) и (16) следует, что для всех $Q = (\frac{k_i}{m})_{i=\overline{1,n}} \in I_m^{(n)}$ имеем

$$\overline{F}(Q,1)(1) = \omega^{(\overline{k},p)}(1) = F(Q,1) = x_0,$$

$$\text{т.е. } \overline{F} \mid (I_m^{(n)} \times \{1\}) \subset \Omega(X, x_0). \tag{20}$$

Свойство относительного Т сфероида $\overline{\alpha}_m(I_m^{(n-1)}) \subset \Omega(X, x_0)$, согласно формулам (17), (18), (16), имеет место и для $\overline{F}$:

$$\overline{F} \mid (I_m^{(n-1)} \times I_p) \subset \Omega(X, x_0). \tag{21}$$

А вот свойство $\overline{\alpha}_m(J_m^{(n-1)}) \equiv \varepsilon_1$ и те же формулы дадут:

$$\overline{F} \mid ({}_{m}^{(n-1)} \times I_p) \equiv \varepsilon_{p+1}. \tag{22}$$

Т.о., чтобы $\overline{F}$ стало бы толерантной гомотопией относительный Т сфероидов, в правой части формулы (22) должно стоять ε_1. Этого можно добиться применив конструкцию, изображенную на рис. 1, т.е. определив

$$\overline{F}' : (I_{m+2}^{(n)} \times I_p, \iota_{m+2}^{(n)} \times \iota_p) \to (P(X, x_0), \varkappa_X),$$

$$\overline{F}'((\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}, \frac{l}{p}) \overset{df}{=} \begin{cases} \varepsilon_1, \ (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in J_{m+2}^{(n-1)}; \\ \overline{F}((\frac{k_i-1}{m})_{i=\overline{1,n}}, \frac{l}{p}) \ (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in \partial I_{m+2}^{(n)}; \\ \overline{F}((\frac{k_i-1}{m})_{i=\overline{1,n}}, 0), \ (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in I_{m+2}^{(n-1)} \backslash \partial I_{m+2}^{(n)}. \end{cases}$$

Тогда, по построению, $\overline{F}'$ осуществляет толерантную гомотопию относительных Т сфероидов:

$$\overline{\beta}'_{m+2} = \overline{F}' \mid (I'_{m+2} \times \{0\}) \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \overline{F}' \mid (I'_{m+2} \times \{1\}) = \overline{\gamma}_{m+2}. \tag{23}$$

Так как при построении $\overline{F}'$ для него сохраняется свойство (20), то, используя теорему 5 работы [3'], получаем, что $[\overline{\gamma}_{m+2}]$ – элемент тривиальной группы $\pi_n(\Omega(X, x_0), \Omega(X, x_0), \varepsilon_1)$, т.е.

$$\overline{\gamma}_{m+2} \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \varepsilon_1^{(n)}. \tag{24}$$

Обозначим через $\overline{\alpha}'_{m+2}$ относительный Т сфероид, который получается из $\overline{\alpha}_m$ так же, как и $\overline{\beta}'_{m+2}$ из $\overline{\beta}_m$, т.е. с использованием конструкции, изображенной на рис. 1. Пусть Т пути $\overline{\alpha}'_{m+2}((\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}})$ имеют траектории

$$\overline{\alpha}'_{m+2}((\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}) = x_0^{(\overline{k})} x_1^{(\overline{k})} \cdots x_{s(\overline{k})}^{(\overline{k})},\ \overline{k} = (k_1, \cdots, k_n),$$

где $s(\overline{k}) = s(k_1, \cdots, k_n)$ – длина этого пути. Пусть $S = max\left\{s(\overline{k})\right\}$ – максимальная длина всех таких путей. Из (19) и построения $\overline{\alpha}'_{m+2}, \overline{\beta}'_{m+2}$ следует, что

$$\begin{aligned}
&(\forall (\tfrac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in I_{m+2}^{(n)} \backslash J_{m+2}^{(n-1)})\ \overline{\beta}'_{m+2}((\tfrac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}) = \\
&= \overline{\alpha}'_{m+2}((\tfrac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}) * (\varepsilon_{X^{(\overline{k})}_{s(\overline{k})}})_p = x_0^{(\overline{k})} x_1^{(\overline{k})} \cdots x_{s(\overline{k})}^{(\overline{k})} \underbrace{x_{s(\overline{k})}^{(\overline{k})} \cdots x_{s(\overline{k})}^{(\overline{k})}}_{p} = \\
&= \mu(s(\overline{k}))(\overline{\alpha}'_{m+2}((\tfrac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}})) * (\varepsilon_{X^{(\overline{k})}_{s(\overline{k})}})_{p-1}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Определим теперь относительные Т сфероиды $\overline{\beta}'^{(l)}_{m+2},\ l = \overline{0, S}$,

$$(\forall Q = (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in I_{m+2}^{(n)})$$

$$\overline{\beta}'^{(l)}_{m+2}(Q) \overset{df}{=} \begin{cases} \overline{\beta}'_{m+2}(Q) = \varepsilon_1,\ Q \in J_{m+2}^{(n-1)}; \\ (\mu(s(\overline{k}) - l)(\overline{\alpha}'_{m+2}(Q))) * (\varepsilon_{X^{(\overline{k})}_{s(\overline{k})}})_{p-1},\ Q \notin J_{m+2}^{(n-1)},\ l = \overline{0, s(\overline{k})}; \\ (\mu(0)(\overline{\alpha}'_{m+2}(Q))) * (\varepsilon_{X^{(\overline{k})}_{s(\overline{k})}})_{p-1},\ Q \notin J_{m+2}^{(n-1)},\ l = \overline{s(\overline{k}), S}. \end{cases} \tag{26}$$

В качестве примера покажем, что $\overline{\beta}'_{m+2} = \overline{\beta}'^{(0)}_{m+2} \approx \overline{\beta}'^{(1)}_{m+2}$, то есть

$$\forall \underbrace{(\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}}_{Q} \iota_{m+2}^{(n)} \underbrace{(\frac{k'_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}}_{Q'} \Rightarrow \overline{\beta}'_{m+2}(Q) \varkappa_X \overline{\beta}'^{(1)}_{m+2}(Q'). \tag{27}$$

Для определенности положим $s(k') \geqslant s(k)$ и для краткости обозначим

$$s(\overline{k}) = s,\ (\forall i = \overline{0, s})\ x_i^{(\overline{k})} = x_i;\ s(\overline{k}') = s',\ (\forall i = \overline{0, s'})\ x_i^{(\overline{k}')} = x'_i.$$

Тогда (27) следует из рис. 3, где представлены соответствующие траектории.

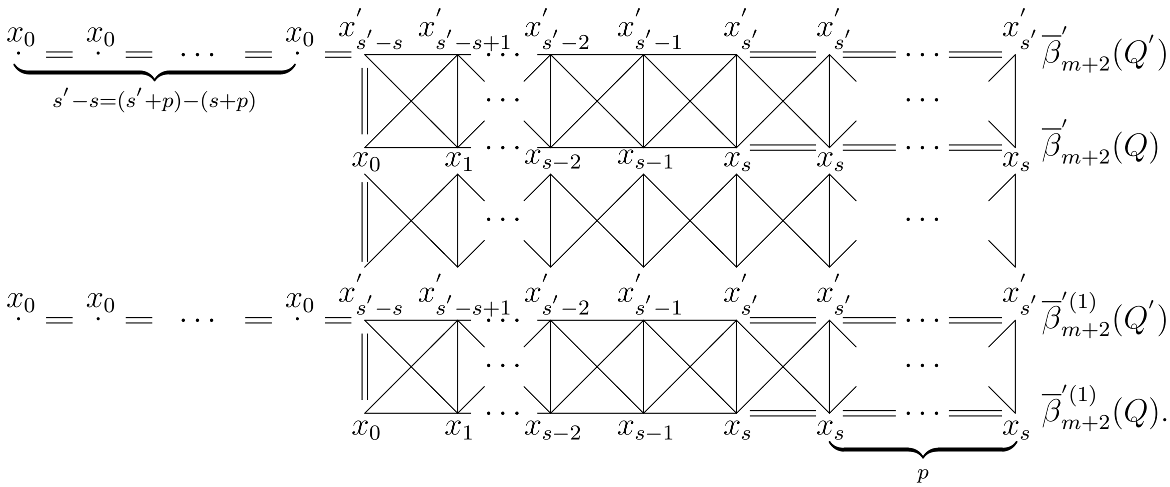


Рис. 3

На рис. 3 вид первых двух траекторий и толерантности их точек, изображенные равенствами и сплошными линиями, является следствием того, что при $Q\iota^{(n)}_{m+2}Q'$ имеем толерантность $\overline{\beta}'_{m+2}(Q')\varkappa_X\overline{\beta}'_{m+2}(Q)$, которая описывается в определении 8. Вид этих первых двух траекторий определяет вид остальных. Вторая и третья траектория на рис. 3 и определение 8 доказывают (27) для точек $Q, Q' \in I^{(n)}_{m+2}\backslash J^{(n-1)}_{m+2}$. Для всех остальных случаев справедливость (27) легко проверяется с помощью замечания 2. Те же самые рассуждения переносятся на общий случай и доказывают, что

$$(\forall l = \overline{0, S-1})\ \overline{\beta}'^{(l)}_{m+2} \approx \overline{\beta}'^{(l+1)}_{m+2},\ \text{т.е.}\ \overline{\beta}'_{m+2} \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \overline{\beta}'^{(S)}_{m+2}.$$

Те же построения теперь можно применить к $\overline{\beta}'^{(S)}_{m+2}$ и т.д., в результате чего, через конечное число шагов, получим

$$\overline{\beta}'_{m+2} \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \overline{\beta}''_{m+2}, \tag{28}$$

где

$$(\forall Q = (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in I^{(n)}_{m+2})$$

$$\overline{\beta}''_{m+2}(Q) \overset{df}{=} \begin{cases} \overline{\beta}'_{m+2}(Q) = \overline{\alpha}'_{m+2}(Q) = \varepsilon_1, \ Q \in J^{(n-1)}_{m+2}; \\ \varepsilon_m * \overline{\alpha}'_{m+2}(Q), \ Q \notin J^{(n-1)}_{m+2}. \end{cases} \tag{29}$$

Используя (29) покажем, что

$$\overline{\beta}''_{m+2} \simeq \overline{\alpha}'_{m+2}. \tag{30}$$

Для этого надо проверить следующее:

$$(\forall Q = (\frac{k_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}}, \ Q' = (\frac{k'_i}{m+2})_{i=\overline{1,n}} \in I^{(n)}_{m+2} \backslash J^{(n-1)}_{m+2})$$

$$Q \iota^{(n)}_{m+2} Q' \Rightarrow \overline{\beta}''_{m+2}(Q) \varkappa_X \overline{\alpha}'_{m+2}(Q'). \tag{31}$$

Это следует из сравнения соответствующих траекторий. Пусть

$$\overline{\alpha}'_{m+2}(Q) = x_0 x_1 \cdots x_s, \ \overline{\alpha}'_{m+2}(Q') = x'_0 x'_1 \cdots x'_{s'}, \ s' \geqslant s.$$

Тогда толерантность $\overline{\alpha}_{m+2}$, определение 8 и формула (29) показывают, что имеет место ситуация, изображенная на следующем рисунке.

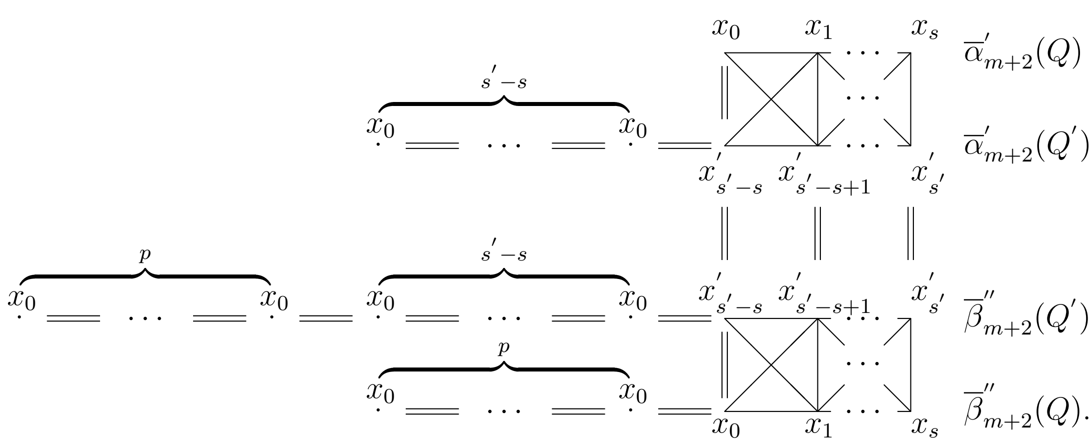


Рис. 4

Из рис. 4 и определения 8 следует, что для $s' \geqslant s$ свойство (31) имеет место. Из рис. 4 и определения 8 также получается толерантность $\overline{\alpha}'_{m+2}(Q) \varkappa_X \overline{\beta}''_{m+2}(Q')$, которая доказывает (31) для $s' \leqslant s$ (в виду равноправия Q и Q').

Нам осталось доказать, что

$$\overline{\alpha}'_{m+2} \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \overline{\alpha}_m. \tag{32}$$

В самом деле, из свойств двойного замедления (W1, W2, W3) следует, что без ущерба для общности можно считать $\overline{\alpha}_m$ двойным замедлением некоторого T сфероида. Тогда свойство W1 двойного замедления позволяет выполнить следующие простые толерантные гомотопии, которые для наглядности представлены графически (для $n = 2$),

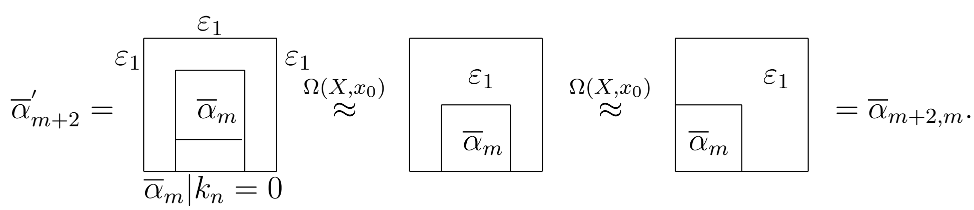


Рис. 5

Так как по определению $\overline{\alpha}_{m+2,m} \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \overline{\alpha}_m$, то (32) имеет место. Теперь собираем вместе толерантные гомотопии (23), (24), (28), (30), (32) в результате чего получим $\overline{\alpha}_m \overset{\Omega(X,x_0)}{\simeq} \varepsilon_1^{(n)}$, что и доказывает инъективность гомоморфизма p_{π_n} (см. (1)), а, тем самым, завершается доказательство изоморфности p_{π_n}.

Теперь выпишем точную толерантную гомотопическую последовательность (см. [3'], теорема 7) для пары толерантных пространств $(\Omega(X, x_0), \varkappa_X) \subset (P(X, x_0), \varkappa_X)$:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(\Omega(X,x_0),\varepsilon_1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(P(X,x_0),\varepsilon_1) \xrightarrow{j_*} \pi_n(P(X,x_0),\Omega(X,x_0),\varepsilon_1) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(\Omega(X,x_0),\varepsilon_1) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{j_*} \pi_2(P(X,x_0),\Omega(X,x_0),\varepsilon_1) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} \pi_1(\Omega(X,x_0),\varepsilon_1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(P(X,x_0),\varepsilon_1).$$

В этой последовательности с помощью изоморфизма (1) заменим относительные гомотопические группы на изоморфные им, и получим точную гомотопическую последовательность толерантного квазирасслоения

$p : (P(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$:

$$\begin{gathered}\xrightarrow{\partial_*} \pi_n(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1) \xrightarrow{i_*} \pi_n(P(X, x_0), \varepsilon_1) \xrightarrow{p_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\partial_*}\\ \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1) \xrightarrow{i_*} \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_2(X, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1) \xrightarrow{i_*}\\ \xrightarrow{i_*} \pi_1(P(X, x_0), \varepsilon_1),\ p_* = p_\pi \circ j_*,\ \partial_* = \partial \circ p_\pi^{-1}. \square\end{gathered} \qquad (33)$$

Доказанная теорема имеет важное следствие, представляющее толерантный аналог классического алгебро-топологического результата.

Следствие. Пусть (X, τ) – произвольное толерантное пространство с отмеченной точкой $x_0 \in X$, пусть $(\Omega(X, x_0), \varkappa_X)$ – пространство толерантных петель пространства (X, τ) с отмеченной петлей $\varepsilon_1 \in \Omega(X, x_0)$. Тогда для каждого натурального $n \geqslant 2$ имеется гомоморфизм

$$\partial_* : \pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), \varepsilon_1). \qquad (34)$$

Доказательство

(34) следует из точности последовательности (33) и теоремы 1 работы [2'], и как следствие, имеет тривиальные группы гомологий. $\square$

Библиографический список

1. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
2. *Небалуев С.И., Сусин М.Н.* Толерантное расслоение путей и теорема Гуревича для толерантных пространств// Изв. Сарат. ун–та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 1.
3. *Небалуев С.И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств// Чебышевский сб. Тула, 2004. T.V. Вып. 3(11).

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ, Е.В. КОРОБЧЕНКО, М.Н. СУСИН

Пунктированные толерантные кубические сингулярные гомологии

В статье излагается обобщение результатов работы [1]. Пусть (X,τ) — линейно связное толерантное пространство, (A,τ) — линейно связное подпространство в (X,τ).

Определение 1. Толерантный сингулярный (ТС) куб $u : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i}\right) \to (X,\tau)$ будем называть A-пунктрированным, если все его вершины лежат в подпространстве (A,τ), то есть

$$\left(\forall \varepsilon = \overline{0,n},\ i = \overline{1,n}\right) \quad u(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in A.$$

Заметим, что X-пунктированные ТС кубы — это произвольные ТС кубы, а пунктированные ТС кубы в пунктированном пространстве $((X,\tau),x_0)$ — это $\{x_0\}$–пунктированные ТС кубы.

Обозначим через $C^A(X) = \left\{C_N^A(X), \partial_n\right\}_{n\geqslant 0}$ — цепной комплекс A–пунктрированных нормированных толерантных кубических сингулярных (ТКС) цепей, который строится способом, описанным в [1] для случая $A = \{x_0\}$. Его гомологии обозначим $H^A(X) = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} H_n^A(X)$. В работе [1] гомологии $H^X(X)$ обозначаются $H^Q(X)$, а гомологии $H^{\{x_0\}}(X)$ обозначены $H^\bullet(X)$. В этой же работе доказана естественная изоморфность функторов H^Q и $H^\bullet$ категории линейно связных толерантных подпространств. Наша цель — показать, что H^Q и $H^A(X)$ естественно изоморфны на категории линейно связных пар $(X,\tau),(A,\tau)$.

Из теоремы 1 в статье [4] легко получить следствие:

$$\left(\forall z \in Z_n^A(X)\right)(\forall l \in \mathbb{N}) \quad z^{O(l)} \overset{A}{\sim} z; \tag{1}$$

$$(\forall f:(X,\tau)\longrightarrow (Y,\theta))\ \ f(A)\subset f(B)\Longrightarrow (C_n(f)(z))\overset{B}{\sim} C_n(f)(z), \quad (2)$$

где $\overset{A}{\sim}$ означает гомологичность в комплексе, а $O(l)$ обозначается процедура окаймления, которая на свободных образующих определяется с помощью формулы

$$u^{O(l)}:\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i+2l},\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}\iota_{m_i+2l}\right)\to (X,\tau)$$
$$\left(\forall i=\overline{1,n},k_i=\overline{0,m_i+2l}\right)u^{O(l)}\left(\left(\tfrac{k_i}{m_i+2l}\right)_{i=\overline{1,n}}\right)\overset{df}{=}u\left(\left(\tfrac{1}{m_i}r\left(m_i,l,k_i\right)\right)_{i=\overline{1,n}}\right),$$

$$r(m_i,l,k_i)=\begin{cases}0,\ k_i-l\leqslant 0;\\ k_i-l,\ 0\leqslant k_i-l\leqslant m_i;\\ m_i,\ k_i-l\leqslant m_i.\end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим теперь произвольный ТС куб $u:\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i},\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}\iota_{m_i}\right)\to$ $\to(X,\tau)$. Вершины ТС куба u имеют вид $u(\overline{\varepsilon})\in X$, где $\overline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in$ $\in\overset{n}{\times}\{0,1\}$, т.е. $\overline{\varepsilon}$ — некоторая вершина T куба $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}$. Для каждой вершины $u(\overline{\varepsilon})$, в виду линейной связности пространства (X,τ), имеется T путь

$$\omega^{(\overline{\varepsilon},u)}:\left(I_{m(\overline{\varepsilon},u)},\iota_{m(\overline{\varepsilon},u)}\right)\longrightarrow (X,\tau),\ \omega^{(\overline{\varepsilon},u)}(0)=u(\overline{\varepsilon}),\ \omega^{(\overline{\varepsilon},u)}(1)\in A, \quad (4)$$

соединяющий вершину $u(\overline{\varepsilon})$ с подмножеством $A\subset X$. Среди всех T путей, удовлетворяющих свойствам (4), выберем и зафиксируем один из них для каждой вершины $u(\overline{\varepsilon})$. Рассмотрим максимальную длину таких путей:

$$M(u)\overset{df}{=}\max_{\overline{\varepsilon}\in\overset{n}{\times}\{0,1\}}\{m(\overline{\varepsilon},u)\}.$$

Имеют место очевидные свойства:

$$\left(\forall i=\overline{1,n}\right)\left(\forall\delta=\overline{0,1}\right)M(d_i^{\delta}(u))\leqslant M(u); \quad (5)$$

$$\text{если } u \text{ — } A\text{-пунктированный} \implies M(u) = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $(A,\tau) \subset (X,\tau)$ — пара линейно связных пространств, тогда для каждого ТС куба $u : \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i}\right) \to (X,\tau)$ и каждого числа $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такого, что $m \geqslant M(u)$, существует ТС куб*

$$V(u,m) : \left(I_m \times \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \iota_m \times \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i}\right) \to (X,\tau),$$

удовлетворяющий следующим свойствам:

(A.1) $d_1^0(V(u,m)) = u^{O(m)}$*;*

(A.2) $d_1^1(V(u,m))$ *— A-пунктированный ТС куб;*

(A.3) если u — A-пунктированный ТС куб, то $V(u,m)$ вырожден по первому аргументу и $V(u,m) = u^{O(m)}$;

(A.4) $(\forall i = \overline{2, n+1})(\forall \delta = \overline{0,1})\ \ d_i^\delta(V(u,m)) = V\left(d_{i-1}^\delta(u), m\right)$*;*

(A.5) если u — вырожденный ТС куб, то $V(u,m)$ — вырожденный ТС куб.

Доказательство

Каждый T путь $\omega^{(\overline{\varepsilon},u)}$ заменим его продлением до длины $m \geqslant M(u)$, добавив постоянный участок пути подходящей длины. Договоримся сохранить (для краткости обозначений) для этих продленных путей те же обозначения $\omega^{(\overline{\varepsilon},u)}$.

Каждая грань Γ размерности $n-s$ ($s = \overline{0,n}$) T куба $I_{\overline{m}} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}$ ($\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$) задается следующим образом:

$$\Gamma = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in I_{\overline{m}} | (\forall j = \overline{1,s})\ x_{i_j} = \varepsilon_{i_j}\right\},$$

и однозначно определяется фиксированным набором различных индексов $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, n\}$ и фиксированным набором $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_s} \in \{0,1\}$. При этом индексы $i_1, \ldots, i_s$ и числа $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_s}$, однозначно определяющие грань Γ, не зависят от размера $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ T куба $I_{\overline{m}}$. Так же не зависят от размера $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и вершины $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \Gamma \cap \overset{n}{\times}\{0,1\}$

этой грани Г. Поэтому грани Г в $I_{\overline{m}}$ при различных $\overline{m}$, определяемые одними и теми же наборами $i_1, \ldots, i_s; \varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_s}$, будем обозначать одинаково. Обозначим через $\Gamma(u)$ множество граней Г в $I_{\overline{m}}$, которые обладают свойствами:

1) $u|_\Gamma \equiv const = u(\overline{\varepsilon})$, где $\overline{\varepsilon}$ — любая вершина грани Г;

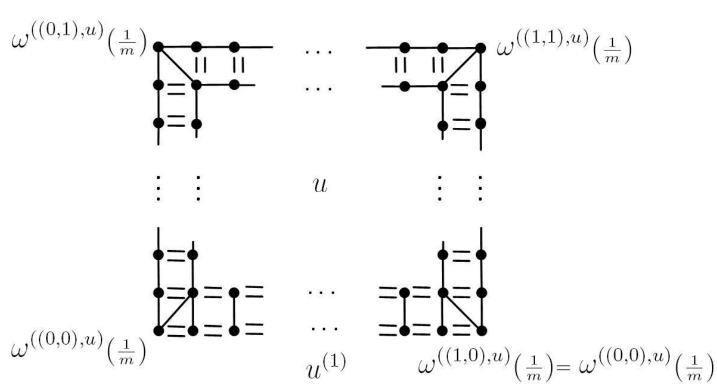
2) грань Г максимальна по включению.

Положим теперь $u^{(0)} \stackrel{df}{=} u$ и определим ТС куб

$$u^{(1)} : \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i+2}, \mathop{\times}_{i=1}^{n} \iota_{m_i+2} \right) \to (X, \tau), \quad \left(\forall P = \left(\frac{k_i}{m_i+2} \right)_{i=\overline{1,n}} \in \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i+2} \right);$$

$$u^{(1)}(P) \stackrel{df}{=} \begin{cases} (u^{(0)})^{O(1)}(P), & \left(\forall \Gamma \in \Gamma((u^{(0)})^{O(1)})\right) \ P \notin \Gamma; \\ \omega^{(\overline{\varepsilon},u)}(\frac{1}{m}), & \left(\exists \Gamma \in \Gamma((u^{(0)})^{O(1)})\right) \ P \in \Gamma, \ \overline{\varepsilon} \in \Gamma \cap \mathop{\times}^{n} \{0,1\}. \end{cases} \tag{7}$$

Формула (7), определяющая $u^{(1)}$ проиллюстрирована на рисунке для случая $n = 2$, $\Gamma(u)$ состоит из двух 0-мерных граней (вершин) (0,1) и (1,1) и одной 1-мерной грани с параметрами $i_1, \varepsilon_{i_1} = \varepsilon_2 = 0$.



Далее проведем индукционное построение по $l = \overline{0, m-1}$ с общим шагом следующего вида:

$$u^{(l+1)} : \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i+2(l+1)}, \mathop{\times}_{i=1}^{n} \iota_{m_i+2(l+1)} \right) \to (X, \tau),$$

$$\left(\forall P=\left(\frac{k_i}{m_i+2(l+1)}\right)_{i=\overline{1,n}}\in\mathop{\times}_{i=1}^{n}I_{m_i+2(l+1)}\right)$$

$$u^{(l+1)}(P)\overset{df}{=}\begin{cases}(u^{(l)})^{O(1)}(P), & \left(\forall\Gamma\in\Gamma((u^{(l)})^{O(1)})\right)\ P\notin\Gamma;\\ \omega^{(\overline{\varepsilon},u)}(\frac{l+1}{m}), & \left(\exists\Gamma\in\Gamma((u^{(l)})^{O(1)})\right)\ P\in\Gamma,\ \overline{\varepsilon}\in\Gamma\cap\overset{n}{\times}\{0,1\}.\end{cases}\tag{8}$$

Затем строим новые ТС кубы $v^{(l)}:\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}I_{m_i+2m},\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}\iota_{m_i+2m}\right)\to(X,\tau):$

$$v^{(l)}\overset{df}{=}\left(u^{(l)}\right)^{O(m-l)},\ l=\overline{0,m}.$$

Наконец, искомый ТС куб $V(u,m)$ определяем формулой:

$$\left(\forall l=\overline{0,m}\right)\left(\forall P=\left(\frac{k_i}{m_i+2}\right)_{i=\overline{1,n}}\in\mathop{\times}_{i=1}^{n}I_{m_i+2}\right)V(u,m)\left(\frac{l}{m},P\right)\overset{df}{=}v^{(l)}(P)\tag{9}$$

Из толерантности $\omega^{(\overline{\varepsilon},u)}$ и построений приведенных выше, следует толерантность отображения $V(u,m)$, определенного формулой (9). Свойство (A.1) очевидно. Свойство (A.2) следует из (8) и (4). Свойство (A.3) следует из (8) и того, факта, что для A-пунктированного ТС куба u все T пути $\omega^{(\overline{\varepsilon},u)}=const_{u(\overline{\varepsilon})}$ постоянны. Свойство (A.4) следует из построения с учетом того, что всякая грань из $\Gamma(d_i^{\delta}(u))$ включается в некоторую грань из $\Gamma(u)$. Наконец, свойство (A.5) также следует из способа построения ТС куба $V(u,m)$.

Замечание 1. Для A-пунктированных ТС кубов u теорема 1 формално выполняется и для $m=M(u)=0$ (см.(6)), и в этом случае $V(u,0)=u$.

Замечание 2. Из способа построения $V(u,m)$ в доказательстве теоремы 1 следует, что $V(u,m)$ получается $V(u,M(u))$ окаймлением кратности $m-M(u)$ в направлении всех граней кроме нижней, то есть

$$V(u,m)\left(\frac{k}{m},\left(\frac{k_i}{m_i+2}\right)_{i=\overline{1,n}}\right)=$$

$$= \begin{cases} V(u, M(u)) \left(\frac{k}{M(u)}, \left(\frac{1}{m_i + 2M(u)} r(m_i + 2M(u), m - M(u), k_i) \right)_{i=\overline{1,n}} \right), \ k = \overline{0, M(u)}; \\ V(u, M(u)) \left(1, \left(\frac{1}{m_i + 2M(u)} r(m_i + 2M(u), m - M(u), k_i) \right)_{i=\overline{1,n}} \right), \ k = \overline{M(u), m}. \end{cases} \tag{10}$$

Из (10) в частности следует, что

$$d_1^1(V(u, m)) = (d_1^1(V(u, M(u))))^{O(m-M(u))}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Для всякой пары $(A, \tau) \subset (X, \tau)$ линейно связных толерантных пространств группы $H(X) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} H_n(X)$ ТКС гомологий и группы $H^A(X) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 0} H_n^A(X)$ изоморфны:*

$$(\forall n \geqslant 0) \ \ H_n^A(X) \cong H_n(X),$$

и этот изоморфизм естественен на категории пар линейно связных толерантных пространств.

Доказательство

Рассмотрим гомоморфизм вложения нормализованных ТКС цепей

$$\varphi = \{\varphi_n : C_n^A(X) \to C_n(X)\}, \ \varphi_n(u + D_n^A(X) \overset{df}{=} u + D_n(X).$$

Очевидно, что гомоморфизм φ является цепным и естественным, и следовательно индуцирует естественный гомоморфизм $\varphi_* \ : \ H^A(X) \longrightarrow \longrightarrow H(X)$. Покажем, что φ_* является изоморфизмом. Для этого построим гомоморфизм, обратный к φ_*. Сначала определим отображение

$$\psi = \{\psi_n : C_n(X) \longrightarrow C_n^A(X)\}.$$

Пусть $c = \sum\limits_i \alpha_i u_i + D_n(X)$ — произвольная нормализованная ТКС цепь. Пользуясь обозначениями теоремы 2, определим (см. также (11))

$$M(c) \overset{df}{=} \{M(u_i) | \alpha_i \neq 0\}; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \psi_n(c) = \psi_n(\sum_i \alpha_i u_i + D_n(X)) \overset{df}{=} \sum_i \alpha_i d_1^1(V(u_i, M(c))) + D_n^A(X) = \\ = \sum_i \alpha_i d_1^1(V(u_i, M(u_i)))^{O(M(c)-M(u_i))} + D_n^A(X). \end{aligned} \tag{13}$$

Свойства (A.2) и (A.5) из теоремы 1 показывают, что отображение ψ определено корректно и его значения лежат в $C^A(X)$. Из (13), (12) и замечания 1 после теоремы 1 следует, что

$$\psi|_{C^A(X)} = \mathbf{1}_{C^A(X)}. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь границу

$$\partial_n(c) = \sum_i \alpha_i \partial u_i + D_{n-1}(X) = \sum_i \alpha_i \sum_{j=1}^{n} (-1)^j [d_j^0 u_i - d_1^1 u_i] + D_{n-1}(X) =$$

$$= \sum_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varepsilon=0}^{1} \alpha_i (-1)^{j+\varepsilon} d_j^\varepsilon u_i.$$

В последней сумме некоторые из слагаемых могут взаимно сокращаться или могут оказаться вырожденными. Пусть индексы всех таких слагаемых образуют множество $S_2 \subset \{i|\alpha_i \neq 0\} \times \{1, \ldots, n\} \times \{0, 1\}$. Оставшиеся индексы обозначим через $S_1 = \{i|\alpha_i \neq 0\} \times \{1, \ldots, n\} \times \{0, 1\} \backslash S_2$. Тогда имеем

$$\sum_{(i,j,\varepsilon)} (-1)^{j+\varepsilon} \alpha_i d_j^\varepsilon u_i + D_{n-1}(X) = 0. \tag{15}$$

Из (15) и свойства (A.5) следует, что

$$\sum_{(i,j,\varepsilon)} (-1)^{j+\varepsilon} \alpha_i d_1^1 (V(d_j^\varepsilon u_i, M(c))) + D_{n-1}^A(X) = 0. \tag{16}$$

Применяя теперь (5), (15), (13), (11), (16), (A.4), получаем

$$(\psi_{n-1}(\partial_n c))^{O(M(c)-M(\partial_n c))} = (\psi_{n-1}(\sum_{S_1} + \sum_{S_2}))^{O(M(c)-M(\partial_n c))} =$$

$$= (\psi_{n-1}(\sum_{S_1}))^{O(M(c)-M(\partial_n c))} =$$

$$= \sum_{(i,j,\varepsilon \in S_1)} \alpha_i (-1)^{j+\varepsilon} (d_1^1 (V(d_j^\varepsilon u_i, M(\partial_n c))))^{O(M(c)-M(\partial_n c))} + D_{n-1}^A(X) =$$

$$= \sum_{(i,j,\varepsilon \in S_1)} \alpha_i (-1)^{j+\varepsilon} (d_1^1 (V(d_j^\varepsilon u_i, M(c))))+$$

$$+\sum_{(i,j,\varepsilon\in S_2)}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon}(d_1^1(V(d_j^\varepsilon u_i,M(c))))+D_{n-1}^A(X)=$$

$$=\sum_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{\varepsilon=0}^{1}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon}d_1^1(d_{j+1}^\varepsilon(V(u_i,M(c))))+D_{n-1}^A(X)=$$

$$=\sum_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{\varepsilon=0}^{1}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon}d_j^\varepsilon(d_1^1(V(u_i,M(c))))+D_{n-1}^A(X)=\partial_n(\psi_n(c)),$$

где для краткости записано $\partial_n c=\sum\limits_{s_1}+\sum\limits_{s_2}$. Итак, имеем квазицепное свойство:

$$(\psi_{n-1}(\partial_n c))^{O(M(c)-M(\partial_n c))}=\partial_n(\psi_n(c)). \tag{17}$$

Если в (17)) взять цикл $c=z\in Z_n(X)$, то получим свойство:

$$(\forall n\geqslant 0)\quad \psi_n(Z_n(X))\subset Z_n^A(X). \tag{18}$$

Из (18) в частности получаем $\psi_{n-1}(\partial_n c)\in Z_{n-1}^A(X)$, что позволяет воспользоваться гомологичностью (2). Из (2) и (17) следует, что

$$\psi_{n-1}(\partial_n c)\overset{A}{\sim}\psi_{n-1}(\partial_n c)^{O(M(c)-M(\partial_n c))}=\partial_n(\psi_n(c))\in B_{n-1}^A(X).$$

Таким образом, получено свойство

$$(\forall n\geqslant 0)\quad \psi_n(B_n(X))\subset B_n^A(X). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что имеется корректно определенное отображение $\psi_*=\{\psi_{*n}:H_n(X)\longrightarrow H_n^A(X)\}$, определяемое формулой

$$\psi_{*n}(z+B_n(X))\overset{df}{=}\psi_n(z)+B_n^A(X), \tag{20}$$

или более подробно, если $z=\sum\limits_i\alpha_iu_i+D_n(X)$, то

$$\begin{gathered}\psi_{*n}\left(\left(\sum_i\alpha_iu_i+D_n(X)\right)+B_n(X)\right)\overset{df}{=}\\ =\left(\sum_i\alpha_id_1^1(V(u_i,\max\{M(u_i)|\alpha_i\neq 0\}))+D_n^A(X)\right)+B_n^A(X).\end{gathered} \tag{21}$$

Докажем, что φ_* — гомоморизм. Пусть $z_1 = \sum\limits_i \alpha_i u_i^{(1)} + D_n(X) \in Z_n(X)$ и $z_2 = \sum\limits_j \beta_j u_j^{(2)} + D_n(X) \in Z_n(X)$, и пусть

$$I \overset{df}{=} \{i | u_i^{(1)} \text{ присутсвует в } z_1 + z_2 \text{ с ненулевым коэффициентом}\},$$

$$J \overset{df}{=} \{j | u_j^{(2)} \text{ присутсвует в } z_1 + z_2 \text{ с ненулевым коэффициентом}\},$$

$$K_1 = \{i | \alpha_i \neq 0\} \backslash I, \; K_2 = \{j | \beta_j \neq 0\} \backslash J,$$

$$y_1 = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i^{(1)} + D_n(X), \; y_2 = \sum_{j \in J} \beta_j u_j^{(2)} + D_n(X),$$

$$x = \sum_{i \in K_1} \alpha_i u_i^{(1)} + D_n(X) = -\sum_{j \in K_2} \beta_j u_j^{(2)} + D_n(X).$$

Тогда $z_1 = y_1 + x, \; z_2 = y_2 - x, \; z_1 + z_2 = y_1 + y_2 \in Z_n(X)$,

$$M = \max\{M(z_1), M(z_2)\} \geqslant M(z_1 + z_2) = M(y_1 + y_2),$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i d_1^1(V(u_i^{(1)}, M)) = -\sum_{j \in K_2} \beta_j d_1^1(V(u_j^{(2)}, M)).$$

Отсюда, используя гомологичность (2), получаем (см. также (11), (20), (21))

$$\psi_{n*}(z_1 + B_n(X) + z_2 + B_n(X)) = \psi_{n*}(y_1 + y_2 + B_n(X)) =$$

$$= \psi_n(y_1 + y_2) + B_n^A(X) = (\psi_n(y_1 + y_2))^{O(M - M(y_1 + y_2))} + B_n^A(X) =$$

$$= \sum_{i \in I} \alpha_i d_1^1(V(u_i^{(1)}, M)) + \sum_{j \in J} \beta_j d_1^1(V(u_i^{(2)}, M)) + B_n^A(X) =$$

$$= \sum_{i \in I \cup K_1} \alpha_i d_1^1(V(u_i^{(1)}, M)) + \sum_{j \in J \cup K_2} \beta_j d_1^1(V(u_i^{(2)}, M)) + B_n^A(X) =$$

$$= (\psi_n(z_1))^{O(M - M(z_1))} + (\psi_n(z_2))^{O(M - M(z_2))} + B_n^A(X) =$$

$$= \psi_n(z_1) + \psi_n(z_2) + B_n^A(X) = \psi_{n*}(z_1 + B_n(X)) + \psi_{n*}(z_2 + B_n(X)).$$

Теперь осталось показать, что гомоморфизмы φ_* и ψ_* взаимно обратны. Из определения φ и формулы (14) легко получается, что

$$\psi_* \circ \varphi_* = \mathbf{1}_{H^A(X)}.$$

Чтобы доказать равенство $\varphi_* \circ \psi_* = \mathbf{1}_{H^A(X)}$ достаточно проверить, что

$$(\forall z \in Z_n(X))\ \ \psi_n(z) - z \in B_n(X),$$

$$\left(\forall z = \sum_i \alpha_i u_i + D_n(X) \in Z_n(X)\right)$$

$$\sum_i \alpha_i d_1^1(V(u_i, M(z)) - \sum_i \alpha_i u_i + D_n(X) \in B_n(X). \tag{22}$$

Используя следствие работы [4], условие (22) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\sum_i \alpha_i d_1^1(V(u_i, M(z)) - \sum_i \alpha_i u_i^{O(M(z))} + D_n(X) \in B_n(X). \tag{23}$$

Для проверки (23) воспользуемся свойствами (A.1), (A.4) и вычислим границу

$$\partial_{n+1}\left(\sum_i \alpha_i V(u_i, M(z)) + D_{n+1}(X)\right) =$$

$$= \left(\sum_i \alpha_i \partial_{n+1}(V(u_i, M(z))) + D_{n+1}(X)\right) =$$

$$= \sum_i \alpha_i (-1)^i [d_1^0(V(u_i, M(z))) - d_1^1(V(u_i, M(z)))] -$$

$$- \sum_i \alpha_i \sum_{j=1}^{n} (-1)^j [d_{j+1}^0(V(u_i, M(z))) - d_{j+1}^1(V(u_i, M(z)))] + D_n(X) =$$

$$= \sum_i \alpha_i d_1^1(V(u_i, M(z))) - \sum_i \alpha_i u_i^{O(M(z))} -$$

$$- \sum_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varepsilon=0}^{1} (-1)^{j+\varepsilon} \alpha_i V(d_j^\varepsilon u_i, M(z)) + D_n(X). \tag{24}$$

Так как $z = \sum\limits_i \alpha_i u_i + D_n(X) \in Z_n(X)$, то

$$\partial z = \sum_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varepsilon=0}^{1} (-1)^{j+\varepsilon} \alpha_i d_j^\varepsilon u_i + D_{n-1}(X) = 0.$$

Это значит, что в этой суме слагаемые либо сокращаются, либо является вырожденными. Следовательно, в силу свойства (A.5), то эе самое имеет место в последней сумме в (24), что делает ее равной нулю. Таким образом, (24) приобретает вид:

$$\partial_{n+1}\left(\sum_i \alpha_i V(u_i, M(z)) + D_{n+1}(X)\right) =$$
$$= \sum_i \alpha_i d_1^1(V(u_i, M(z))) - \sum_i \alpha_i u_i^{O(M(z))} + D_n(X),$$

что доказывает (23) и завершает доказательство теоремы 2.

Отметим, что теорема 2 является обобщением основных результатов работы [1], которые получаются из теоремы 2 при $A = \{x_0\}$. При этом доказательство теоремы 2 оказалось значительно прозрачнее и проще. Причина такого упрощения заключается в использовании процедуры окаймления ТС кубов вместо процедуры полного двойного замедления ТС кубов. В контексте теоремы 2 процедура окаймления позволила более выгодно использовать специфику толерантных пространств, особенно в формулировке и доказательстве теоремы 1.

Библиографический список

1. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестник Самарского государственного университета. Самара: Изд-во „Самарский университет“, 2007. Вып. 7(57).

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун–та, 2006.

3. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.:Мир, 1971.

4. *Коробченко Е.В.* Гомологические свойства конструкции окаймления толерантных сингулярных кубов // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 6. (В печати)

УДК 512.57

Д.А. БРЕДИХИН

Об алгебрах отношений с операцией идентификации неподвижной точки

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образуют алгебру, называемую алгеброй отношений. Теория алгебр отношений является важной составной частью современной алгебраической логики. Одной из основных проблем при изучении алгебр отношений является проблема нахождения базиса тождеств многообразий, порожденных различными их классами [1–8].

Для всякого множества Ω операций над отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ есть многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Мы сосредоточим свое внимание на операции произведения отношений $\circ$ и унарной операции ∇ определяемой следующим образом. Для всякого бинарного отношения ρ положим

$$\nabla(\rho) = \{(x, x) : (\exists z)(z, z) \in \rho\}.$$

Заметим, что $\nabla(\rho)$ совпадает с тождественным отношением, если ρ содержит неподвижную точку, и $\nabla(\rho)$ есть пустое отношение в противном случае. По этим соображениям, операция ∇ может быть рассмотрена как операция идентификации неподвижной точки.

Основной результат работы формулируется в следующей теореме.

Теорема. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*)$ *типа* $(2, 1)$ *принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:*

$$(xy)z = x(yz), \tag{1}$$

$$(x^*)^2 = x^*, \tag{2}$$

$$xy^* = y^*x, \tag{3}$$

$$(xy)^* = (yx)^*, \tag{4}$$

$$(xy^*)^* = x^*y^*, \tag{5}$$

$$x^*(x^k)^* = x^* \textit{ для любого простого числа } k. \tag{6}$$

Доказательство теоремы

Доказательство теоремы основывается на результатах работы [5]. Разобьем его на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работ [5].

Пусть $Rel(U)$ — множество всех бинарных отношений на U. Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \ldots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов $r_1, \ldots, r_m$ и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1, определяет m-арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \ldots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \ \varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \ldots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и $r_1, \ldots, r_m$ интерпретируются как отношения $R_1, \ldots, R_m$ из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется примитивно–позитивной [9] (в другой терминологии диофантовой [6]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Примитивно-позитивные операции могут быть описаны с помощью графов [9].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V,\ E)$, где $V = V(G)$ - конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u,k,v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцендентны ребру (u,k,v).

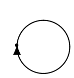
Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма.

Пусть $F = F_\varphi$ — примитивно–позитивная операция, задаваемая формулой φ. С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i,k,j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ, то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что двухполюсники, соответствующие операции умножения отношений $\circ$ и операции ∇, задаются следующим образом:

$$in = \cdot \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot = out$$

$in{=}out{=}\quad\cdot$ 

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник

$G(G_1, \ldots, G_m)$, определяемый следующим образом [9]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k, отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v.

Рассмотрим множество примитивно–позитивных операций над отношениями $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \ \ldots, F_{\varphi_n}\}$, и пусть $A = (A, f_1, \ldots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1)$, $\ldots$, $G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$:

1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in\cdot \xrightarrow{k} \cdot out$;

2) если $p = f_k(p_1, \ldots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \ldots, G(p_m))$.

Обозначим через $pr(E)$ множество всех вершин помеченного графа, которые инцендентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Отображение $f : pr(E_2) \to pr(E_1)$ называется гомоморфизмом G_2 в G_1, если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \to V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1, если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$. Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1, и $G_1 \cong G_2$, если $G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$.

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат из [5]:

Тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$.

Шаг 2. Обозначим через Σ эквациональную теорию алгебр типа

$(2, 1)$, удовлетворяющих тождествам (1)—(6), и пусть Ξ — множество термов алгебры $(A, \cdot, ^*)$ типа $(2, 1)$. Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$, когда тождество $p_1 = p_2$ принадлежит Σ.

Пусть Λ множество всех непустых слов над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\odot$ – пустое слово и $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$.

Лемма 1. Для любого терма $p \in \Xi$ существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqslant 0)$, что $p \cong \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$.

Доказательство

Доказательство проводится индукцией. Утверждение очевидно для $p = x_k$. Предположим,что $p \cong \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*$. Тогда используя тождество (4) получаем

$$(p)^* = (\alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*)^* \cong (\alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_{n-1})^*)^*(\alpha_n)^* \cong \ldots \cong$$

$$\cong (\alpha_0(\alpha_1)^*)^* \ldots (\alpha_n)^* \cong (\alpha_0)^*(\alpha_1)^*) \ldots (\alpha_n)^*.$$

Далее, предположим, что $p_1 \cong \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*$ и $p_2 \cong \beta_0(\beta_1)^* \ldots (\beta_m)^*$. Тогда, используя тождество (4), получаем

$$p_1p_2 = \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*\beta_0(\beta_1)^* \ldots (\beta_m)^* \cong \alpha_0\beta_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*(\beta_1)^* \ldots (\beta_m)^*.$$

Лемма доказана.

Шаг 3. Согласно определению, двухполюсник $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ для $p \in \Xi$ может быть построен следующим образом.

Пусть $p = \alpha = \odot$. Тогда $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$, $E_p = E_\alpha = \emptyset$, и $in(p) = = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$.

Пусть $p = \alpha = x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_n}$. Тогда $V_p = V_\alpha = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$, $E_p = E_\alpha = = \{(v_k, i_k, v_{k+1}) : \ k \in [1, n]\}$, и $in(p) = in(\alpha) = v_1$, $out(p) = out(\alpha) = = v_{n+1}$:

$$in(\alpha) = v_1 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \ldots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_{n+1} = out(\alpha).$$

Пусть $p = \alpha^*$, где $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$. Тогда $V_p = V_{\alpha^*} = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, $E_p = E_{\alpha^*} = \{(v_k, i_k, v_{k+1}) : \ k \in [1, n-1]\} \cup \{(v_n, i_n, v_1)\}$ и $in(p) = = out(p) = in(\alpha^*) = out(\alpha^*) = v_0$. Заметим, что E_{α^*} есть петля, которая получена из E_α посредством отождествления вершин v_1 и v_{n+1}.

Пусть $p = \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*$ и $n > 0$. Мы будем предполагать, что множества $V_{\alpha_0}, V_{\alpha_1^*} \ldots, V_{\alpha_n^*}$ попарно не пересекаются. Тогда $V_p = V_{\alpha_0} \cup \cup pr(E_{\alpha_1^*}) \cup \ldots \cup pr(E_{\alpha_n^*})$, $E_p = E_{\alpha_0} \cup E_{\alpha_1^*} \cup \ldots \cup E_{\alpha_n^*}$ и $in(p) = in(\alpha_0)$, $out(p) = out(\alpha_0)$. Заметим, что в этом случае $G(p)$ содержит $n+1$ связанных компонент.

Лемма 2. Если $G(\alpha) \prec G(\beta)$, то $\alpha = \beta$.

Доказательство

Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$ и $V_\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $V_\beta = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$. Тогда $f(v'_1) = f(in(\beta)) = in(\alpha) = v_1$, $f(v'_2) = v_2$, $\ldots$, $f(v'_m) = v_m = f(out(\beta)) = out(\alpha) = v_n$. Следовательно, $m = n$ и $x_{j_1} = x_{i_1}, \ldots, x_{j_n} = x_{i_n}$, то есть $\alpha = \beta$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mid V \mid$ число элементов конечного множества V.

Лемма 3. Пусть $E_{\alpha^*} \prec E_{\beta^*}$ и f — гомоморфизм из E_{β^*} в E_{α^*}. Тогда существуют такие $\lambda, \mu \in \tilde{\Lambda}$, что $\alpha = \lambda\mu$ и $\beta = (\mu\lambda)^k$ для некоторого натурального $k \geqslant 1$, и для каждой вершины $v \in pr(E_{\alpha^*})$ выполняется условие $\mid f^{-1}(v) \mid = k$.

Доказательство

Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$, $pr(V_{\alpha^*}) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $pr(V_{\beta^*}) = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ и f — гомоморфизм из E_{β^*} в E_{α^*}. Очевидно, что $n \leq m$. Предположим, что $f(v'_1) = v_l$. Тогда $f(v'_2) = v_{l+1}$ и $x_{j_1} = x_{i_l}$, $\ldots$, $f(v'_{n+1}) = v_l$ и $x_{j_n} = x_{i_{l-1}}$. Если $m = n$, то $\alpha = \lambda\mu$, $\beta = \mu\lambda$ и $\mid f^{-1}(v) \mid = 1$, где $\lambda = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{l-1}}$ и $\mu = x_{i_l}x_{i_{l+1}}\ldots x_{i_n}$. Если $m > n$, то $f(v'_{n+2}) = v_{l+1}$

и $x_{j_{n+1}} = x_{i_l}$, …, $f(v_m^{'}) = v_l$, и $x_{j_m} = x_{i_{l-1}}$. Отсюда следует, что $m = kn$ и $\mid f^{-1}(v) \mid = k$ для некоторого натурального k и $\alpha = \lambda\mu$, $\beta = (\mu\lambda)^k$, где $\lambda = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{l-1}}$ и $\mu = x_{i_l}x_{i_{l+1}}\dots x_{i_n}$. Лемма доказана.

Шаг 4. Легко проверить, что операции $\circ$ and ∇ удовлетворяют тождествам (1)—(6). Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla\}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $Eq\{\circ, \nabla\} \subset \Sigma$.

Рассмотрим произвольное тождество $p_1 = p_2$. Согласно лемме 1 мы можем предположить, что $p_1 = \alpha_0(\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^*$ и $p_2 = \beta_0(\beta_1)^* \dots (\beta_m)^*$.

Лемма 4. Пусть $G(p_1) \prec G(p_2)$. Тогда $\alpha_0 = \beta_0$ и существует такая функция g из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$, что $(\alpha_{g(l)})^* \cong (\alpha_{g(l)})^*(\beta_l)^*$ для $l = 1, \dots, m$.

Доказательство

Так как $G(p_1) \prec G(p_2)$, существует гомоморфизм f из $G(p_2)$ в $G(p_1)$. Так как $f(in(p_2)) = f(in(\beta_0)) = in(p_1) = in(\alpha_0)$ и $f(out(p_2)) = = f(out(\beta_0)) = out(p_1) = out(\alpha_0)$, имеем $f(V_{\beta_0}) = V_{\alpha_0}$. Следовательно, согласно лемме 2 $\alpha_0 = \beta_0$.

Легко видеть, что тождества (1)—(6) влекут тождество

$$x^*(x^k)^* = x^* \tag{6$'$}$$

для всякого натурального k.

Заметим, что гомоморфизм f отображает связанную компоненту графа $G(p_2)$ в связанную компоненту графа $G(p_1)$, следовательно, для всякого $l = 1, \dots m$ имеем $f(pr(E_{(\beta_l)^*})) = pr(E_{(\alpha_{g(l)})^*})$, где g — функция из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$. Согласно лемме 3 имеем $\alpha_{g(l)} = \lambda_l\mu_l$ и $\beta = (\mu_l\lambda_l)^k$ для некоторого натурального $k \geqslant 1$. Отсюда, используя тождества (2), (4) и (6$'$), получаем $(\alpha_{g(l)})^* \cong (\alpha_{g(l)})^*(\alpha_{g(l)})^* \cong (\alpha_{g(l)})^*(\lambda_l\mu_l)^* \cong$ $\cong (\alpha_{g(l)})^*(\mu_l\lambda_l)^* \cong (\alpha_{g(l)})^*((\mu_l\lambda_l)^k)^* = (\alpha_{g(l)})^*(\beta_l)^*$. Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично.

Лемма 5. Пусть $G(p_2) \prec G(p_1)$. Тогда $\alpha_0 = \beta_0$ и существует такая функция q из $\{1, \ldots, n\}$ в $\{1, \ldots, m\}$, что $(\beta_{q(l)})^* \cong (\beta_{g(l)})^*(\alpha_l)^*$ для $l = 1, \ldots, n$.

Предположим, что тождество $p_1 = p_2$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\circ, \nabla\}$. Тогда, согласно сформулированному выше результату из [5], имеем $G(p_1) \cong G(p_2)$. Следовательно, используя леммы 4 и 5 и тождества (2), (3), получаем

$$p_1 = \alpha_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_{g(1)})^* \ldots (\alpha_n)^* \cong \alpha_0(\alpha_{g(1)})^*(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_{g(1)})^* \ldots (\alpha_n)^* \cong$$

$$\cong \alpha_0(\alpha_{g(1)})^*(\beta_1)^*(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_{g(1)})^* \ldots (\alpha_n)^* \cong$$

$$\cong \alpha_0(\beta_1)^*(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_{g(1)})^* \ldots (\alpha_n)^* \cong \ldots \cong \alpha_0(\beta_1) \ldots (\beta_m)^*(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*.$$

Аналогично показываем, что

$$p_2 = \beta_0(\beta_1)^* \ldots (\beta_m)^* \cong \beta_0(\alpha_1)^* \ldots (\alpha_n)^*(\beta_1) \ldots (\beta_m)^*.$$

Следовательно, используя тождество (3), получаем $p_1 \cong p_2$, то есть тождество $p_1 = p_2$ принадлежит Σ. Таким образом, $Eq\{\circ, \nabla\} \subset \Sigma$. Теорема доказана.

В заключение сформулируем проблему, естественно вытекающую из полученного результата.

Проблема. Является ли многообразие $Var\{\circ, \nabla\}$ конечно базируемым, то есть, может ли оно быть охарактеризовано конечным числом тождеств?

Библиографический список

1. *Tarski A.* On the calculus of relations// J. Symbolic Logic. 1941. V. 6.

2. *Henkin L., Monk J.D., and Tarski A.* Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971.

3. *Schein B.M.* Relation algebras and function semigroups// Semigroup Forum. 1970. V. 1.

4. *Andreka H., Bredikhin D.A.* The equational theory of union-free algebras of relations// Alg. Univers. 1994. V. 33.

5. *Бредихин Д.А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями// Изв. вузов. Матем. 1993. № 3.

6. *Бредихин Д.А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. матем. журн. 1997. Т. 38.

7. *Бредихин Д.А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Доклады Российской Академии Наук. 1998. Т. 360.

8. *Bredikhin D.A.* On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. V. 16.

9. *Böner F, Pöschel F.R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7.

УДК 511.3

В.В. КРИВОБОК, О.А. ПОЛЯКОВА

Об одном обобщении основной теоремы алгебры

Целью данной работы является доказательство существования бесконечного множества нулей у достаточно широкого класса целых функций. Наиболее общий результат в этом направлении получен относительно целых функций конечного порядка. Известно [1], что целые функции конечного порядка, для которых для любого $c > 0$ найдется последовательность положительных чисел $\{r_n\}$, стремящаяся к бесконечности, такая, что

$$\max_{|z|=r_n} |f(z)| > e^{cr_n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где α — порядок целой функции $f(z)$, имеют бесконечное множество нулей.

В работе рассматривается класс целых функций, для которых для любого натурального k :

$$|z|^k \ll |f(z)|, \quad \text{при } |z| \to \infty.$$

Нужно отметить, что в основе доказательства основного утверждения лежат не глубокие факты теории функций комплексного переменного, а качественная картина решений системы двух дифференциальных уравнений в окрестности точек покоя. Такой подход, но для других целей, рассматривался в [2].

Следующая теорема является непосредственным обобщением основной теоремы алгебры о комплексных корнях многочлена.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$;
2. $f(0) = 1$.

Тогда уравнение $f(z) = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = zf(z). \tag{1}$$

Пусть $z = x + iy$, $zf(z) = u + iv$. Тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases}. \tag{2}$$

Так как $u(0,0) = v(0,0) = 0$, то точка $(0,0)$ — точка покоя системы (2). Покажем, что система (2) имеет еще хотя бы одну точку покоя.

В окрестности точки $(0,0)$ линеаризованная система (2) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)y \end{cases} . \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение системы (3).

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) - \lambda & \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)\right)\lambda + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)\right) = 0. \tag{4}$$

В силу условий Коши–Римана запишем уравнение (4) в виде:

$$\lambda^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)\lambda + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(0,0) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2(0,0)\right] = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) \pm i\frac{\partial v}{\partial y}(0,0).$$

Так как

$$\frac{d}{dz}(zf(z)) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

то

$$\lambda_1 = [zf(z)]'_{z=0} = \lambda > 0.$$

Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Следовательно, точка $(0,0)$ является узлом, асимптотически устойчивым по Ляпунову в отрицательном направлении.

Проинтегрируем уравнение $\frac{d}{dz} = zf(z)$. В результате получим

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi f(\xi)} = t - c$$

или

$$e^{\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi f(\xi)}} = \mu e^t. \tag{5}$$

Пусть точка $(x, y) = x(t) + iy(t)$ движется по интегральной кривой. Тогда в соотношении (5) меняется только модуль числа μe^t, то есть вдоль решения

$$\arg e^{\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi f(\xi)}} = const \tag{6}$$

или, другими словами, вдоль решения

$$Im \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi f(\xi)} = const.$$

Так как

$$\frac{1}{\xi f(\xi)} = \frac{\lambda}{\xi} + \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \ldots,$$

то

$$\int \frac{d\xi}{\xi f(\xi)} = \lambda \ln \xi + \alpha_1 \xi + \ldots.$$

Отсюда в окрестности нуля имеем

$$e^{\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\xi f(\xi)}} = [z^\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k] c_1,$$

где c_1 — константа. Таким образом, соотношение (5) в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \mu e^t. \tag{7}$$

Так как вдоль интегральной кривой $\arg \mu e^t = const$, то из соотношения (7) получаем, что в окрестности точки $z = 0$ $\arg z \approx \arg \mu e^t$, а при $z \to 0$ вдоль интегральной кривой $\arg z \to \arg \mu$. Но $\arg \mu$ совпадает с углом, под которым интегральная кривая входит в точку $z = 0$. Обозначим углы, под которыми две интегральные кривые входят в точку $(0, 0)$ через α и β.

Допустим, что уравнение $f(z) = 0$ не имеет решений. Тогда предельный цикл для системы (2) заведомо невозможен. Действительно, в противном случае (внутри предельного цикла должна находиться точка покоя) предельный цикл окружает точку $(0, 0)$. Но это приводит к противоречию. Действительно, предельный цикл C — интегральная кривая и, следовательно, в силу того, что $\frac{d\tau}{\tau f(\tau)} = dt$, где dt — вещественное, имеем

$$Im \int\limits_{C} \frac{d\tau}{\tau f(\tau)} = 0. \tag{8}$$

С другой стороны, по теореме о вычетах

$$\int\limits_{C} \frac{dt}{tf(t)} = 2\pi i. \tag{9}$$

В силу (8) и (9) получаем противоречивое равенство $0 = 2\pi i$.

Итак, кривые α и β выходят из точки $(0,0)$ в бесконечность. Вдоль этих кривых в силу (6)

$$\arg e^{\int_{z_0}^{z} \frac{dt}{tf(t)}} = \alpha, \quad \arg e^{\int_{z_0}^{z} \frac{dt}{tf(t)}} = \beta.$$

Рассмотрим точки P и Q на этих кривых. Дугу $\breve{PQ}$ можно считать дугой окружности с центром в точке $(0,0)$ и радиусом R.

Тогда с одной стороны при переходе из точки P в точку Q приращение аргумента Δ будет равно

$$\Delta = \alpha - \beta, \tag{10}$$

а с другой стороны имеем равенство

$$\Delta \arg e^{\int_{z_0}^{z} \frac{dt}{tf(t)}} = Im \int\limits_{\breve{PQ}} \frac{dt}{tf(t)}. \tag{11}$$

В силу (10) и (11) независимо от радиуса R получаем

$$\alpha - \beta = Im \int\limits_{\breve{PQ}} \frac{dt}{tf(t)}. \tag{12}$$

Но на дуге $\breve{PQ}$ в силу условия теоремы 1 имеет место оценка

$$\left| \frac{1}{tf(t)} \right| = O\left(\frac{M}{R} \right), \quad R \to \infty,$$

что дает следующую оценку

$$\left| \int\limits_{\breve{PQ}} \frac{dt}{tf(t)} \right| = O(1), \quad R \to \infty,$$

которая противоречит равенству (12).

Итак, предположение об отсутствии корней уравнения $f(z) = 0$ приводит к противоречию, что и доказывает утверждение теоремы 1.

Отметим, что, как видно из доказательства теоремы 1, условие $f(0) = 1$ не является принципиальным.

Таким образом, как следствие теоремы 1 получаем основной результат работы.

Теорема 2. Пусть целая функция $f(z)$ такова, что для любого натурального k

$$|z^k| \ll |f(z)|, \quad \text{при} \quad |z| \to \infty.$$

Тогда функция $f(z)$ имеет бесконечно много нулей.

Библиографический список

1. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.

2. *Гаврилов Н.И.* Проблема Римана о распределении корней дзета–функции. Львов: Изд-во Львовск. ун-та, 1970.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Научное издание

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ,
ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 6

Ответственный за выпуск *В.Н. Кузнецов*
Технический редактор *Л.В. Агальцова*
Подготовка оригинал-макета *Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок*

Подписано в печать 21.05.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,28 (6,75). Уч.-изд. л. 5,2. Тираж 100 экз. Заказ 47.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.