ISSN 1810-4134

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5
И88

И88 **Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам:** Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – Вып. 5. – 136 с.: ил.

Сборник содержит работы, посвященные исследованию различных задач теории *L*-функций, диафантового анализа, а также работы, связанные с применением методов гомологической алгебры и функционального анализа в смежных вопросах.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области алгебры, теории чисел и функционального анализа.

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1810-4134

УДК 512.7

А. М. ВОДОЛАЗОВ

Алгебры целозначных функций для квазиразложимых торов

В теории алгебраических торов изучаются различные виды целых моделей алгебраических торов см [1–3]. При рассмотрении некоторых целых моделей появляются алгебры целозначных функций на алгебраическом торе. В работе [1] поставлены некоторые вопросы, связанные с изучением этих алгебр.

Пусть k поле p-адических чисел, O — кольцо целых p-адических чисел, $E = O^*$ — группа p-адических единиц, $f = O/O^*$ — поле нормирования. T — алгебраический k-тор. Рассмотрим следующую алгебру

$$A = \{f \in k[T] \mid f(U_k) \subset O\},$$

где U_k — максимальная компактная подгруппа группы $T(k)$.

Одной из задач, связанной с изучением целых алгебраических моделей торов является задача определения образующих алгебры A. Будет ли она иметь их бесконечное число? В работе [4] найдены образующие для разложимых торов $T = G_m^n$, в работе [5] найдены образующие одномерных и некоторых двухмерных торов.

В нашей работе мы будем изучать образующие квазиразложимых торов $T = R_{L/k}(G_m^n)$. Здесь L — нормальное расширение поля k, а R —

функтор ограничения основного поля. Сначала рассмотрим случай, когда L является неразветвленным расширением поля k степени n. Неразветвленное расширение L получается в результате расширения $\tilde{f}$ поля нормирования f степени n.

Если $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ — образующие расширения $\tilde{f}$ над f, то можно считать, что поле L состоит из элементов

$$\alpha = p^{\nu} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i p^i,$$

где $\nu \in Z$, $\beta_i \in \tilde{f}$, $\beta_i \neq 0$ и

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^{(j)} \alpha_i, \quad \beta_i^{(j)} \in f.$$

Причем α — целое в L, если $\nu \geqslant 0$ и принадлежит максимальной компактной подгруппе мультипликативной группы, если $\nu = 0$. Для элементов из максимальной компактной подгруппы верно следующие представление:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i p^i = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_i,$$

где все $x_i \in O$ и существует хотя бы одно i такое, что $x_i \in O^*$. Поэтому, образующие алгебры A в этом случае сводятся к образующим алгебры

$$B = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(U) \subseteq O\},$$

$$\text{где } \ U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i, \quad U_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in O^n \mid x_i \in O^*\}.$$

Упорядочим произвольным образом элементы поля нормирования f так, чтобы O был минимальным элементом. Продолжим на кольцо целых O этот порядок. Элемент $\alpha = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma_i p^i \in O$ больше элемента $\alpha' = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma_i' p^i \in O$, если $\gamma_0 = \gamma_0', \ldots, \gamma_l = \gamma_l',\ \gamma_{l+1} > \gamma_{l+1}'$. Упорядоченное таким образом кольцо O является линейным порядком. Обозначим через π биекцию упорядоченного множества O и множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычным порядком.

Рассмотрим множества $U^{(m)}$, которые получаются факторизацией множества U по модулю p^m. Элементы множества $U^{(m)}$ упорядочим следующим образом.

$$u(x_1,\ldots,x_n) > u'(x'_1,\ldots,x'_n) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\pi(x_i) > \sum_{i=1}^{n}\pi(x'_i),$$

$$\text{и если } \sum_{i=1}^{\infty}\pi(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\pi(x'_i), \text{ то } x_1 = x'_1,\ldots,x_i = x'_i,\ x_{i+1} > x'_{i+1}.$$

Теорема 1. *Пусть* $(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n$ *и многочлен*

$$F_{(i_1,\ldots,i_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{i_j}(x_j - \pi^{-1}(i))$$

делится на точную степень p, *равную* $S^j_{i_1,\ldots,i_n}$ *на множестве* U_j, *и на точную степень* p, *равную* $S^*_{i_1,\ldots,i_n}$ *на множестве* $(O^*)^n$. *Тогда многочлены*

$$H_{(i_1,\ldots,i_n)}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{p^{S_{i_1,\ldots,i_n}}}F_{(i_1,\ldots,i_n)}(x_1,\ldots,x_n)$$

являются образующими алгебры B *над* O, *где*

$$S_{i_1,\ldots,i_n} = \min\{S^1_{i_1,\ldots,i_n},\ldots,S^n_{i_1,\ldots,i_n},S^*_{i_1,\ldots,i_n}\}.$$

Замечание. Можно выписать точные формулы для нахождения чисел $S^j_{i_1,\ldots,i_n}$ и $S^*_{i_1,\ldots,i_n}$, используя формулы, полученные в работе [4] в теоремах 1 и 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ произвольный многочлен из $k[x_1,\ldots,x_n]$. Имеет место разложение

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n}H_{i_1,\ldots,i_n}(x_1,\ldots,x_n), \quad a_{i_1,\ldots,i_n} \in k,$$

так, что все степени многочленов H пробегают всевозможные наборы из $\mathbb{N}^n$.

Надо доказать, что $f \in B$ тогда и только тогда, когда все $a_{i_1,\dots,i_n} \in O$. Элементы множества U упорядочены таким образом, что при $u = \pi^{-1}(i_1,\dots,i_n)$, $H_{(i_1,\dots,i_n)}(u) \in O^*$, а все многочлены, соответствующие $u' > u$, $H_{(\pi^{-1}(u'))}(u)$ равны нулю.

Последовательно подставляя элементы $u \in U$ в представление функции f, мы получим

$$f(u) = a_{i_1,\dots,i_n} H_{(i_1,\dots,i_n)}(u) + b,$$

где $b \in O$ и $f(u) \in O$ и так как $H_{(i_1,\dots,i_n)} \in O^*$, то $a_{i_1,\dots,i_n} \in O$. Что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь случай разветвленного расширения с индексом ветвления взаимно простым с p. В этом случае L получается в результате расширения поля нормирования f степени $\frac{n}{l}$, и присоединением корня уравнения $\pi^l = p$.

Проводя рассуждения, аналогичные для случая неразветвленного расширения, мы получаем, что множество U имеет следующую структуру:

$$U = \bigcup_{i=1}^{\frac{n}{l}} U_i,$$

где $U_i = \{(x_1,\dots,x_n) \in O^n |\ x_i \in O^*\}$.

В этом случае верна теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Пусть* $(i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n$ *и многочлен*

$$F_{(i_1,\dots,i_n)}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{i_j}(x_j - \pi^{-1}(i))$$

делится на точную степень p*, равную* $S^j_{i_1,\dots,i_n}$ *на множестве* U_j*, и на точную степень* p*, равную* $S^*_{i_1,\dots,i_n}$ *на множестве* $(O^*)^n$*. Тогда многочлены*

$$H_{(i_1,\dots,i_n)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{p^{S_{i_1,\dots,i_n}}} F_{(i_1,\dots,i_n)}(x_1,\dots,x_n)$$

являются образующими алгебры B над O, где

$$S_{i_1,\ldots,i_n} = \min\{S^1_{i_1,\ldots,i_n}, \ldots, S^n_{i_1,\ldots,i_n}, S^*_{i_1,\ldots,i_n}\}.$$

Библиографический список

1. *B. E. Kunyvskii, B. Z. Moroz, V. E. Voskresenskii* On integral models of an algebraic torus // Max - Planck - Institut fur Mathematic. Preprint Series, 2001(12).

2. *В. Е. Воскресенский, Т. В. Фомина* Целые структуры в алгебраических торах // Изв. РАН: Сер. матем. 1995. Т. 59:5.

3. *Popov S . Yu ., Voskresenskii V .E .* Galois lattices and reduction of algebraic tori //Communications of Algebra. 2001. N 9.

4. *А. М. Водолазов* Целые модели разложимых алгебраических торов бесконечного типа // Современные проблемы алгебры, теории чисел и функционального анализа: Межвуз. сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2003. Вып.1.

5. *А. М. Водолазов* Алгебры целозначных функций для алгебраических торов малой размерности //Математика. Механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып.10.

УДК 511.23

Г.И. ГУСЕВ

Корневое тождество для рациональных тригонометрических сумм

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ — рациональная функция, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, взаимно простые между собой, $F'(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

— несократимое представление $F'(x)$, где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, взаимно простые между собой.

Пусть $f_1(x) = a_0\varphi_1^{n_1}\dots\varphi_s^{n_s}$ — каноническое разложение $f_1(x)$, где $\varphi_i(x)$ — примитивные неприводимые над $\mathbb{Q}$ многочлены, $\psi(x) = \varphi_1\dots\varphi_s$.

Определение. Простое нечетное число p будем называть F–регулярным, если выполнены следующие условия:

1. $ord_p\ Res(\psi,\psi') = 0$ и $ord_p a_0 = 0$.

2. Существует целое a такое, что $ord_p g(a) = 0$.

Обозначим через $X_p(F)$ для F–регулярного простого числа, множество всех целых p–адических чисел, для которых выполнено свойство 2.

Теорема 1. *Пусть p — F–регулярное простое число и θ_i — целый p–адический корень $\varphi_i(x)$, принадлежащий $X_p(F)$. Тогда $ord_p\varphi_i(\theta_i) = 0$.*

Доказательство

По свойству результанта $Res(\varphi_i,\varphi_i')$:

$$Res(\varphi_i,\varphi_i') = \varphi_i(x)A_i(x) + \varphi_i'(x)B_i(x),$$

где $A_i(x)$ и $B_i(x)$ — целочисленные многочлены. Отсюда следует, что $Res(\varphi_i,\varphi_i') = \varphi_i'(\theta_i)B_i(\theta_i)$.

Учитывая F–регулярность числа p и известную формулу

$$Res(\psi,\psi') = \pm\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s} Res^2(\varphi_i,\varphi_j)\cdot\prod_{i=1}^{s} Res(\varphi_i,\varphi_i'),$$

получаем $ord_p\varphi_i'(\theta_i) = 0$.

Теорема 2. *Пусть θ_i и θ_j — различные целые p–адические корни $F'(x)$, принадлежащие множеству $X_p(F)$. Тогда $\theta_i \not\equiv \theta_j (mod\ p)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим два случая: когда θ_i и θ_j являются корнями одного и того же многочлена $\varphi_i(x)$, и когда θ_i и θ_j — корни различных многочленов $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$.

В первом случае, из формулы Тейлора для $\varphi_i(x)$:

$$\varphi_i(x) = \varphi_i'(\theta_i)(x-\theta_i) + \frac{\varphi_i''(\theta_i)}{2!}(x-\theta_i)^2 + \ldots + \frac{\varphi_i^{(N_i)}(\theta_i)}{N_i!}(x-\theta_i)^{N_i},$$

где $N_i = \deg \varphi_i(x)$, следует

$$\varphi_i'(\theta_j) = -\sum_{s=2}^{N_i} \frac{\varphi^{(s)}(\theta_i)}{s!}(\theta_j-\theta_i)^{s-1}.$$

Поэтому $ord_p(\theta_j-\theta_i) = 0$.

Во втором случае, имеем $\varphi_i(\theta_i) = 0, \quad \varphi_j(\theta_j) = 0$ и

$$Res(\varphi_i, \varphi_j) = \varphi_i(x)A_{ij}(x) + \varphi_j(x)B_{ij}(x),$$

где $A_{ij}(x),\ B_{ij}(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Отсюда получим $Res(\varphi_i, \varphi_j) = \varphi_j(\theta_i)B_{ij}(\theta_i)$. Поэтому ввиду F–регулярности простого p $ord_p\varphi_j(\theta_i) = 0$. Следовательно, $ord_p(\theta_i-\theta_j) = 0$.

Теорема 3. *Пусть θ_i — корень $f_1(x)$ кратности n_i и $\theta_i \in X_p(F)$. Тогда $\frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!}$ и n_i+1 являются p–адическими единицами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Будем считать, что $\varphi_i(\theta_i) = 0$. Тогда из тождества

$$F^{(n_i+1)}(\theta_i) = n_i![\varphi_i'(\theta_i)]^{n_i} q_i(\theta_i),$$

где $q_i(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)\varphi_i^{n_i}(x)} \in \mathbb{Z}[x]$, следует

$$\frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!} = \frac{1}{n_i+1}[\varphi_i'(\theta_i)]^{n_i} \frac{a_0\prod_{j\neq i}\varphi_j^{n_j}(\theta_i)}{g_1(\theta_i)}.$$

Так как число p F–регулярно, тогда из теорем 1 и 2 $ord_p\varphi_i'(\theta_i) = 0$, $ord_p\varphi_j(\theta_i) = 0$ и $ord_p g_i(\theta_i) = 0$. Поэтому

$$ord_p\frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!} = \left(\frac{a_0}{n_i+1}\right) = -ord_p(n_i+1).$$

С другой стороны, $ord_p\frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!} \geqslant 0$, поэтому $\frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!}$ и n_i+1 являются p–адическими единицами.

Теорема 4. *В обозначениях теремы 3 в компакте $K_{\theta_i} = \theta_i + pO_p$ имеет место изометрическая эквивалентность:*

$$F(x) \simeq F(\theta_i) + \frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!}(x-\theta_i)^{n_i+1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Разложим $F(x)$ в ряд Тейлора с центром в точке θ_i :

$$F(x) = F(\theta_i) + \frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!}(x-\theta_i)^{n_i+1} + \sum_{s=N-i+2}^{\infty}\frac{F^s(\theta_i)}{s!}(x-\theta_i)^s.$$

Обозначим $\varepsilon_i = \frac{F^{(n_i+1)}(\theta_i)}{(n_i+1)!}$ и положим $x - \theta_i = pu$, $u \in O$. Тогда

$$F(\theta_i + pu) = F(\theta_i) + \varepsilon_i(pu)^{n_i+1}\left[1 + \sum_{s=n_i+2}^{\infty}\varepsilon_i^{-1}\frac{f^{(s)}(\theta_i)}{s!}(pu)^{s-n_i-1}\right].$$

Положим $S(u) = \sum\limits_{s=n_i+2}^{\infty}\varepsilon_i^{-1}\frac{f^{(s)}(\theta_i)}{s!}(pu)^{s-n_i-1}$. Тогда

$$F(\theta_i + pu) = F(\theta_i) + \varepsilon_i(pu)^{n_i+1}[1 + pS(u)].$$

По свойству p–адического аналога ряда Ньютона, существует такой степенной ряд $T(u)$ с целыми p–адическими коэффициентами, сходящийся в кольце O_p, что

$$1 + pS(u) \equiv (1 + pT(u))^{n_i+1},$$

тогда

$$F(\theta_i + pu) = F(\theta_i) + \varepsilon_i[p(u(1 + pT(u)))]^{n_i+1}.$$

В этом случае $\sigma(u) = u + puT(u)$ является изометрией кольца O_p. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть p — F–регулярное число и $\theta_1, \ldots, \theta_t$ — все корни многочлена $f_1(x)$, принадлежащие $X_p(F)$, $t < p$. Тогда для любого целого p–адического числа $a \in X_p(F)$, удовлетворяющего условию $a \not\equiv \theta_i (mod\ p)$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, p–адический показатель $ord_p F'(a) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Предположим, что $f_1(a) \equiv 0 (mod\ p)$. Тогда существует $i \in [1, t]$ такой, что $\varphi_i(a) \equiv 0 (mod\ p)$. Поэтому $Res(\varphi_i, \varphi_i') \equiv \varphi_i'(a) B_i(a) (mod\ p)$. В силу F–регулярности числа p $ord_p Res(\varphi_i, \varphi_i') = 0$. Следовательно, $\varphi_i'(a) \not\equiv 0 (mod\ p)$. Тогда по лемме Гензеля существует корень $\varphi_i(x)$, принадлежащий компакту $K_a = a + pO_p$, что противоречит свойству a.

Теорема 6. *В обозначениях теоремы 5 в компакте K_a имеет место изометрическая эквивалентность:*

$$F(x) \simeq F(a) + F'(a)(x - a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из разложения $F(x)$ в ряд Тейлора с центром в точке a следует

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x - a) \left[1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{F^s(a)}{s! F'(a)} (x - a)^{s-1} \right],$$

где $F'(a)$ — p–адическая единица.

Положим $x = a + pu,\ u \in O_p$ и

$$\sigma(u) = u \left[1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{F^s(a)}{s! F'(a)} (pu)^{s-1} \right].$$

$\sigma(u)$ явялется изометрией компакта O_p. Теорема доказана.

Теорема 7. *Предположим, что $\theta_1, \ldots, \theta_t$ — все корни $f_1(x)$ соответствующих кратностей $m_1, \ldots, m_t$, принадлежащие $X_p(F)$, где p — F-регулярное число. Тогда для любого $\alpha \geqslant 2$ имеет место корневое тож-*

дество

$$\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\in X_p(F)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}F(x)\right) =$$

$$=\sum_{s=1}^{t}\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv\theta_s(p)}} \exp\left[\frac{2\pi i}{p^\alpha}\left(F(\theta_s)+\frac{F^{(m_s+1)}(\theta_s)}{(m_s+1)!}(x-\theta_s)^{m_s+1}\right)\right]. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Ранее было установлено, что различные корни многочлена $f_1(x)$, принадлежащие $X_p(F)$, не сравнимы между собой по модулю p. Дополним множество $\{\theta_s\}_{s=1}^t$ всех корней $f_1(x)$, принадлежащих $X_p(F)$ до максимальной системы вычетов $X_p(F)$ по модулю p целыми числами a_j, $1\leqslant j\leqslant m$. Тогда

$$\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\in X_p(F)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}F(x)\right) =$$

$$=\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv\theta_s(p)}} \exp\left[\frac{2\pi i}{p^\alpha}\left(F(\theta_j)+\frac{F^{(m_s+1)}(\theta_s)}{(m_s+1)!}(x-\theta_s)^{m_s+1}\right)\right].$$

По теореме 4 для корня θ_s кратности m_s многочлена $f_1(x)$

$$\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv\theta_s(p)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}F(x)\right) =$$

$$=\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv\theta_s(p)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}\left(F(\theta_s)+\frac{F^{(m_s+1)}(\theta_s)}{(m_s+1)!}(x-\theta_s)^{m_s+1}\right)\right).$$

По теореме 6 для a_j имеем

$$\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv a_j(p)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}F(x)\right) = \sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv a_j(p)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}(F(a_j)+F'(a_j)(x-a_j))\right).$$

Следовательно, справедлива формула (1).

Выразим формулу (1) через суммы Гаусса:

$$SG_m(\varepsilon, p^\alpha) = \sum_{x|p^\alpha} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}\varepsilon x^m\right).$$

Теорема 8. *Пусть p — простое нечетное число, не делящее m и ε — p-адическая единица. Тогда*

$$SG_m(\varepsilon, p^\alpha) = \sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv 0(p)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}\varepsilon x^m\right). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть x_0 — p–адическая единица. Тогда по условию $ord_p m x_0^{m-1} = 0$. Следовательно, в компакте $K_{x_0} = x_0 + pO_p$ имеет место изометрическая эквивалентность

$$\varepsilon x^m \simeq \varepsilon x_0^m + \varepsilon m x_0^{m-1}(x - x_0).$$

Поэтому при $\alpha \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\equiv x_0(p)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}\varepsilon x^m\right) = 0.$$

А отсюда следует формула (2).

Теорема 9. *Пусть p — простое F–регулярное число. Тогда для любого $\alpha \geqslant 2$ справедливо корневое тождество*

$$\sum_{\substack{x|p^\alpha \\ x\in X_p(F)}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}F(x)\right) = \sum_{s=1}^{t} \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}F(\theta_s)\right) SG_{m_s+1}(\varepsilon_s, p^\alpha),$$

где $\varepsilon_s = \frac{F^{(m_s+1)}(\theta_s)}{(m_s+1)!}$.

Доказательство следует из теорем 4 и 9.

УДК 519.984

О.Ю. ДМИТРИЕВ

Разложение по собственным функциям одной краевой задачи пятого порядка

На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим краевую задачу

$$y^{(5)} - \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + b_i y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,5}, \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр и
$a_1 = a_2 = a_4 = b_1 = b_3 = b_4 = 1$, $a_3 = b_2 = 0$, $a_5 = -3 + 4e^{\frac{3\pi}{5}i} + 3e^{\frac{\pi}{5}i}$, $b_5 = 5 - 5e^{\frac{3\pi}{5}i} - 5e^{\frac{\pi}{5}i}$.

Ранее в литературе изучались случаи распадающихся нерегулярных краевых условий [1] или нерегулярных краевых условий, у которых $b_i \neq 0$ для всех i [2,3]. Данные краевые условия содержат нулевые коэффициенты в обоих концах интервала и являются нерегулярными по Биркгофу [4]. Похожая ситуация для четного n $(n = 4)$ рассматривалась в [5].

В данной статье развиваются методы, примененные в [5]. В результате удалось получить новый вид функционального уравнения, позволяющего справиться с экспоненциальным ростом функции Грина $G(x, t, \lambda)$ краевой задачи (1)–(2).

Положим $\lambda = -\rho^5$, $\arg\rho \in \left[-\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{5}\right]$. Тогда функции $y_j(x) = y_j(x, \rho) = \exp\rho\omega_j x$, где $\omega_j = \exp\frac{2j-1}{5}\pi i$, $j = \overline{1,5}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Для собственных чисел λ_k справедливы асимптотические формулы $\lambda_k = -\rho_k^5$, $\rho_k = \rho_{k+h}^0 + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $\rho_k^0 = \frac{\pi(1+2k)}{2Im\ \omega_2}$, где h — некоторое целое число, не зависящее от k.

Обозначим

$$\varphi(x,\rho) = \begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & \ldots & y_5(x,\rho) \\ U_2(y_1) & \ldots & U_2(y_5) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ U_5(y_1) & \ldots & U_5(y_5) \end{vmatrix}.$$

Если $\rho = \rho_k$, то $\varphi(x,\rho)$ — собственная функция краевой задачи (1)–(2).

Обозначим через $T_{1-2\alpha}$ многоугольник, описываемый системой неравенств:

$$Re(\omega_j z) < \alpha Re\omega_2 + Re\omega_j, \quad j = 1, 5,$$

$$Re(\omega_j z) < \alpha Re\omega_2 \quad j = 2, 3, 4.$$

Рассмотрим ряд по собственным функциям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k). \tag{3}$$

Теорема 1. *Если ряд (3) сходится в точках* $x = \alpha$, *где* $0 \leqslant \alpha < d$, $d = \frac{Re\ \omega_1}{Re\ \omega_1 - Re\ \omega_2}$, *то он сходится абсолютно и равномерно внутри* $T_{1-2\alpha}$ *к аналитической функции. Сумма ряда (3)* f *удовлетворяет уравнению:*

$$\Phi(f, x) = 0, \tag{4}$$

где $\Phi(f,x) = a_2^* f(\bar\omega_1 x) + a_3^* f(\bar\omega_5 x) + b_1^* f(\bar\omega_2 x + 1) + b_4^* f(\bar\omega_4 x + 1) + b_5^* f(\bar\omega_3 x + 1)$, $a_2^* = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i a_i (\varepsilon^3)^{i-1}$, $a_3^* = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i a_i (\varepsilon^2)^{i-1}$, $b_1^* = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i b_i (\varepsilon^4)^{i-1}$, $b_4^* = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i b_i \varepsilon^{i-1}$, $b_5^* = \sum\limits_{i=1}^{5} \xi_i b_i$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{5} i}$. *Для всех* x, *для которых* $\bar\omega_1 x,\ \bar\omega_5 x,\ \bar\omega_2 x + 1\ \bar\omega_4 x + 1$, $\bar\omega_5 x + 1$ *принадлежат* $T_{1-2\alpha}$. ξ_i *определяется из системы уравнений:*

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i a_i (\varepsilon^4)^{i-1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{5} \xi_i a_i \varepsilon^{i-1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{5} \xi_i b_i (\varepsilon^3)^{i-1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i b_i (\varepsilon^2)^{i-1} = 0.$$

Теорема 2. *Если ряд (3) сходится равномерно на* $[0,1]$, f — *его сумма и* μ *не является собственным значением, то функция* $g(x) = R_\mu f = \int\limits_0^1 G(x,t,\mu)f(t)dt$ *аналитически продолжима в* T_0, *ограничена в угле* $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{5}$, $|z| \leqslant |z_0|$ *и удовлетворяет уравнению (4).*

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in L[0,1]$ *и при некотором натуральном* k *функция* $g(x) = R_\mu^k f$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) она аналитически продолжима в шестиугольник T_0 *с вершинами* $(0; k_1\bar{\omega}_1; 1 + k_1\bar{\omega}_2; 1; 1 + k_1\bar{\omega}_4; k_1\bar{\omega}_5)$, $k_1 = Re\ \omega_4$;

б) она непрерывна на интервалах $(0; k_1\bar{\omega}_5)$, $(0; k_1\bar{\omega}_1)$, $(1; 1 + k_1\bar{\omega}_2)$, $(1; 1 + k_1\bar{\omega}_4)$;

в) ограничена в угле $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{5}$;

г) при $x \in (0; k_1)$ *удовлетворяет уравнению (4).*

Тогда функция $f(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся на* $(0,1)$ *ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)–(2).*

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1969. Т.70(112).

2. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Мат. и ее приложения. Саратов, 1991. №2.

3. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Мат. и ее приложения. Саратов, 1991. №2.

4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

5. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи четвертого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып.4.

УДК 517.51

Р.Н. ФАДЕЕВ

Условия выполнимости равенства Парсеваля для рядов Фурье-Уолша

Пусть $x \in [0,1)$ и

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}, \quad x_i \in \{0,1\}, \tag{1}$$

— двоичное разложение x. Если $n \in \mathbb{Z}_+$ и $n = \sum_{i=0}^{k(n)} n_i 2^{i-1}$, $n_i \in \{0,1\}$, то по определению $w_n(x) = (-1)^{\sum_{i=1}^{k(n)} n_i x_i}$. Пусть $x, y \in [0,1)$ записаны в виде (1). Тогда положим $x \oplus y = z \in [0,1)$, где $z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i 2^{-i}$, $z_i \in \{0,1\}$ и $z_i = x_i + y_i \pmod 2$. Известно, что система $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, называемая системой Уолша-Пэли, ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$. Кроме того, функции $w_n(x)$ при $n < 2^k$ постоянны на всех промежутках $I_i^k = [i/2^k, (i+1)/2^k)$, $i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$. Наконец, при фиксированном x и почти всех $y \in [0,1)$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство $w_n(x \oplus y) = w_n(x) w_n(y)$. В силу ортонормированности $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ для $f \in L^1[0,1)$ введем коэффициенты Фурье и частные суммы Фурье формулами

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t) w_n(t)\, dt,\ n \in \mathbb{Z}_+; \quad S_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{f}(i) w_i(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что $S_n(f)(x) = \int\limits_0^1 f(x \oplus t) D_n(t)\, dt$, где $D_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} w_i(t)$ — ядро Дирихле по системе $\{w_i\}_{i=0}^{\infty}$. Особую роль играют ядра $D_{2^k}(t) = 2^k X_{[0,2^{-k})}$, где X_E — индикатор множества E. Все эти факты можно найти в [1,§§1.1, 1.4, 2.1, 2.6]. Через $B[0,1)$ обозначим пространство ограниченных измеримых функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1)} |f(t)|$, а пространство $C^*[0,1) \subset B[0,1)$ состоит из функций f со свойством $\lim\limits_{h\to 0+} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_\infty = 0$. Пространство $L^1[0,1)$ интегрируемых по Лебегу функций на $[0,1)$ снабжено нормой $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(t)|\, dt$.

В данной работе изучаются условия, при которых равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)\, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{f}(i)\widehat{g}(i) \tag{2}$$

справедливо для пары функций $f \in B[0,1)$, $g \in L^1[0,1)$. В общем случае равенство (2) для такой пары не имеет место, но, поскольку $\|g - S_{2^k}(g)\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$, находим, что

$$\left|\int\limits_0^1 f(x)g(x)\, dx - \sum_{i=0}^{2^k} \widehat{f}(i)\widehat{g}(i)\right| = \left|\int\limits_0^1 f(x)g(x) - \int\limits_0^1 f(x)S_{2^k}(g)(x)\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_\infty \|g - S_{2^k}(g)\|_1 \to 0, \quad k \to \infty,$$

т.е. верен аналог (2):

$$\int\limits_0^1 f(x)g(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{2^k-1} \widehat{f}(i)\widehat{g}(i). \tag{2$'$}$$

Кроме того, приведен аналог признака Салема равномерной сходимости ряда Фурье-Уолша, идеи из доказательства которого используются при доказательстве теорем 2 и 3.

Лемма 1. Пусть задана $f \in B[0,1)$. Для того, чтобы для любой $g \in L^1[0,1)$ и f выполнялось равенство Парсеваля, необходимо и достаточно, чтобы $S_n(f)(x)$ были равномерно ограничены.

Доказательство

Если равенство Парсеваля верно для любой $g \in L^1[0,1)$, то для любой $g \in L^1[0,1)$ последовательность функционалов $\varphi_n(g) = \int\limits_0^1 S_n(f)(x)g(x)\,dx$ ограничена. По следствию из теоремы Банаха-Штейнауза нормы $S_n(f)(x)$ в $B[0,1)$ ограничены.

Обратно, пусть $S_n(f)(x)$ равномерно ограничены. Из ортонормированности $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что для любого полинома g по системе Уолша справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(g) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{f}(i)\widehat{g}(i)$$

Значит последовательность функционалов $\varphi_n(g)$ сходится на плотном множестве полиномов по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ к функционалу $\varphi(g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$ и нормы этих функционалов ограничены. Значит $\varphi_n(g)$ сходится к $\varphi(g)$ для всех $g \in L^1[0,1)$. Лемма доказана.

Первая теорема является аналогом признака равномерной сходимости Р.Салема (см. [2, глава 4, §8]).

Теорема 1. *Пусть $f \in C^*[0,1)$ обладает свойством*

$$h^{-1}\int\limits_0^h (f(x\oplus t) - f(x))dt = o(1/\log 1/h), h \to 0, \tag{3}$$

равномерно по x. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)w_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$.

Доказательство

Известно, что для $n = 2^k + m, 1 \leqslant m \leqslant 2^k$, справедливо равенство $D_n(t) = D_{2^k}(t) + r_k(t)D_m(t)$, где $r_k(t) = W_{2^k}(t)$ — функция Радемахера. Из определения легко следует, что $r_k(t) = 1$ на всех $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k})$ и

$r_k(t) = -1$ на всех $[(2j+1)2^{-k}, (j+1)2^{-k})$, $0 \leqslant j < 2^k$. Поэтому

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x \oplus t) - f(x)) D_n(t) dt =$$

$$= \int_0^1 (f(x \oplus t) - f(x)) D_{2^k}(t) dt + + \int_0^1 (f(x \oplus t) - f(x)) r_k(t) D_m(t) dt = J_1 + J_2. \tag{4}$$

При этом $|J_1| = |2^k \int\limits_0^{\frac{1}{2^k}} (f(x \oplus t) - f(x)) dt| \leqslant \omega_k(f)_\infty \to 0$ равномерно по x и

$$J_2 = \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{\frac{j}{2^k}}^{\frac{j+1}{2^k}} D_m(t) r_k(t) (f(x \oplus t) - f(x)) dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^k-1} D_{m,j} \left(\int_{\frac{j}{2^k}}^{\frac{2j+1}{2^{k+1}}} r_k(t)(f(x \oplus t) - f(x)) dt + \int_{\frac{2j+1}{2^{k+1}}}^{\frac{j+1}{2^k}} r_k(t)(f(x \oplus t) - f(x)) dt \right),$$

где $D_{m,j}$ — постоянное значение D_m на I_j^k. Известно, что $|D_{m.j}| \leqslant \frac{2^k}{j}$ при $j = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ (см. [1, §1.4]). В случае $j = 0$ имеем

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2^k}} D_m(t) r_k(t) (f(x \oplus t) - f(x))\, dt \right| \leqslant m 2^{-k} \omega_k(f)_\infty \to 0, \ (0 < m \leqslant 2^k).$$

Из определения r_k следует, что $\int\limits_{\frac{j}{2^k}}^{\frac{j+1}{2^k}} r_k(t) f(x) dt = 0$. Делая замены $t = \frac{j}{2^k} \oplus u$ и $t = \frac{2j+1}{2^{k+1}} \oplus u$ соответственно, получаем:

$$J_2 = \sum_{j=1}^{2^k-1} D_{m,j} \int_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus u) - f(x \oplus \frac{2j+1}{2^{k+1}} \oplus u)) du + o(1).$$

Преобразуем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus u) - f(x \oplus \frac{2j+1}{2^{k+1}} \oplus u))\, du =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus u) - f(x \oplus \frac{j}{2^k}))\, du +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k}) - f(x \oplus \frac{2j+1}{2^{k+1}} \oplus u))\, du = A_{k,j} + B_{k,j} \qquad (5)$$

В силу условия $A_{k,j} = \int\limits_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus u) - f(x \oplus \frac{j}{2^k}))du = o(2^{-k-1}(k+1)^{-1})$. С другой строны,

$$|B_{k,j}| = \left| \int\limits_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{\frac{1}{2^k}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k}) - f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus v))dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2^k}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k}) - f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus v))dv \right| + \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2^{k+1}}} (f(x \oplus \frac{j}{2^k}) - f(x \oplus \frac{j}{2^k} \oplus v))dv \right|.$$

Согласно условию (3) первое слагаемое есть $o(2^{-k}k^{-1})$, а второе — $o(2^{-k-1}(k+1)^{-1})$. Используя оценку для $|D_{m,j}|$, получаем:

$$J_2 \leqslant \sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{2^k}{j} |A_{k,j}| + \sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{2^k}{j} |B_{k,j}| + o(1) = J_{21} + J_{22} + o(1).$$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{2^k-1} \frac{1}{j} = O(\ln 2^k) = O(k)$, то $J_{22} = o(1)$. Аналогично, $J_{21} = = o(1)$ и, как следствие, $J_2 = o(1)$. Подставляя оценки для J_1 и J_2 в (4), завершаем доказательство. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f \in L^1[0,1)$ и условие (3) выполняется равномерно по x. Если в точке x_0 справедливо равенство

$$\lim_{h\to 0+} h^{-1}\int\limits_0^h |f(x_0\oplus t)-f(x_0)|dt = 0, \tag{6}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x_0) = f(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 1, при этом условие (3) обеспечивает сходимость J_2 к 0, а из условия (6) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_1 = 0$ при $x = x_0$.

Теоремы 2 и 3, дающие условия выполнения равенства (2), являются аналогами тригонометрических результатов С.Изуми и М.Сато [3]. Следует отметить, что в [3] аналог условия $(3')$ использовался с o вместо O.

Теорема 2. *Пусть $g \in L^1[0,1)$ и $f \in B[0,1)$ такова, что условие*

$$h^{-1}\int\limits_0^h (f(x\oplus t)-f(x))dt = O(\frac{1}{\ln\frac{1}{h}}) \tag{3'}$$

выполнено равномерно по $x \in [0,1)$. Тогда выполняется равенство (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Докажем равномерную ограниченность $S_n(f)(x)$, которая равносильна равномерной ограниченности $S_n(f)(x) - f(x)$. Снова имеем равенство (4) и

$$|J_1| = \left|2^k\int\limits_0^{\frac{1}{2^k}} (f(x\oplus t)-f(x))dt\right| \leqslant \|f\|_\infty \tag{7}$$

равномерно по x. С другой стороны, при выполнении условия $(3')$, аналогично доказательству теоремы 1 величины $A_{k,j}$ и $B_{k,j}$ есть $O(2^{-k}k^{-1})$.

Снова используя соотношение $\sum\limits_{j=1}^{2^k-1} j^{-1} = O(k)$, получаем, что:

$$J_2 = O(\sum_{j=1}^{2^k-1} \frac{2^k}{j}(|A_{k,j}| + |B_{k,j}|)) = O(k^{-1} \sum_{j=1}^{2^k-1} j^{-1}) = O(1).$$

Из равенства (4) и оценок (7) и (8) вытекает равномерная ограниченность $S_n(f)(x)$. По лемме получаем, что равенство Парсеваля (2) имеет место. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $g \in B[0,1)$ *и* $f \in L^1[0,1)$ *такова, что*

$$\int_0^1 \left| h^{-1} \int_0^h (f(x \oplus t) - f(x))\, dt \right| dx = o(\frac{1}{\ln \frac{1}{h}}). \tag{9}$$

Тогда имеет место равенство Парсеваля (2).

Доказательство

Пусть $\alpha(t) = f * g(t) := \int\limits_0^1 f(t \oplus x) g(x)\, dx$. Ясно, что:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \widehat{f}(i)\widehat{g}(i) = \int_0^1 S_n(f)(x) g(x)\, dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x \oplus t) D_n(t)\, dt \right) g(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x \oplus t) g(x)\, dx \right) D_n(t)\, dt = \int_0^1 \alpha(t) D_n(t)\, dt.$$

Последнее выражение есть $S_n(\alpha)(0)$. Докажем, что $\alpha(t)$ удовлетворяет в точке $t_0 = 0$ условию (6), и, что условие (3) для нее выполнено равномерно по $t \in [0,1)$. Так как

$$\|f * g(\cdot \oplus h) - f * g(\cdot)\|_\infty \leqslant \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_1 \|g\|_\infty = o(1),\ h \to 0,$$

то и условие (6) для α выполнено во всех точках, в том числе в нуле.

Поскольку $h^{-1} \int\limits_0^h |f(t \oplus u) - f(u)| dt$ ограничен то, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, правая часть (10) стремится к 0 при $h \to 0$

и условие (6) для $\alpha(t)$ в точке $t_0 = 0$ выполнено.

С другой стороны

$$\left| h^{-1} \int_0^h (\alpha(x \oplus u) - \alpha(x))\, du \right| = \left| h^{-1} \int_0^h \int_0^1 (f(x \oplus u \oplus t) - f(x \oplus t)) g(t)\, dt\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| h^{-1} \int_0^h (f(x \oplus u \oplus t) - f(x \oplus t))\, du \right| \|g\|_\infty dt.$$

Применяя условие (9), и, учитывая инвариантность интеграла относительно сдвига, мы получаем, что $\alpha(x)$ удовлетворяет (3) равномерно по $x \in [0,1)$. Значит, выполнены условия следствия и $S_n(\alpha)(0)$ сходятся, откуда следует равенство Парсеваля. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

3. *Izumi S., Sato M.* Some trigonometrical series. XVIII. // Proc. Japan Acad. 1956. V.32. N 1.

УДК 517.51

Т. В. ИОФИНА

Оценки приближений линейными средними через локальный модуль непрерывности

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leqslant p_n \leqslant N$ при $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \ldots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n / m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant x_n < p_n. \tag{1}$$

Представление (1) единственно, если для $x = k/m_j$, $0 < k < m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x, y \in [0,1)$ вида (1) положим $x \oplus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, $z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant k_i < p_i, \tag{2}$$

и $x \in [0,1)$ имеет разложение (1), то по определению $\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая системой Виленкина, ортонормирована и полна в $L[0,1)$. Кроме того, при фиксированном $x \in [0,1)$ для почти всех $y \in [0,1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $\chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$. Эти свойства можно найти в [1, §§ 1.5,2.8]. Пусть $f \in L^1[0,1)$. Коэффициенты Фурье, частная сумма Фурье и ядро Дирихле по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$; $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. В работе будут также рассматриваться средние Фейера и ядро Фейера по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$: $\sigma_n(f)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k(f)(x)/n$, $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим $\mathrm{w}(f; x, \delta) = \sup\limits_{0<h\leqslant\delta} h^{-1} \int_o^h |f(x \ominus u) - f(x)|\,du$. Эта величина конечна при почти всех x (более точно, во всех точках Лебега функции f) и $\delta > 0$. Пусть $A = \{a_{n,k}\}_{k,n=1}^{\infty}$ — нижнетреугольная матрица, такая что $a_{n,k} \geqslant 0$ для всех n, k и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k} = 1$. Будем рассматривать $T_n(f)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k} S_k(f)(x)$. Впервые величина, аналогичная $\mathrm{w}(f; x, \delta)$ в 2π–периодическом случае рассматривалась в [2], где она была использована в оценке уклонения непрерывной функции от ее средних Фейера. Мазхар [3] распространил эту оценку на общие линейные средние $T_n(f)$ с возрастающей по $k \in [0, n]$ последовательностью $a_{n,k}$. Здесь будет доказан подобный результат для мультипликативных систем ограниченного типа и матриц, удовлетворяющих более общим условиям, чем в [3]. Эти классы матриц были введены Л.Лейндлером [4].

Для дальнейшего необходима

Лемма 1. (см. [1, §1.4] и [5]). Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, 1)$ верны неравенства

1) $|D_n(x)| \leqslant N x^{-1}$, где $p_n \leqslant N$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
2) $|nF_n(x)| \leqslant C_2 x^{-2}$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^1[0, 1)$ *и при данном* $x \in [0, 1)$ *величина* $\mathrm{w}(f; x, \delta)$ *конечна для всех* $\delta \in [0, 1)$ *и* $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{m-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leqslant C_1 a_{n,m}, \quad 1 < m \leqslant n. \tag{3}$$

Тогда

$$|T_n(f)(x) - f(x)| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{w}(f; x, k^{-1}) \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу определения $T_n(f)(x)$ имеем

$$T_n(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x \ominus t) - f(x)) \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} D_k(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{1/n} (f(x \ominus t) - f(x)) \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} D_k(t)\, dt +$$

$$+ \int_{1/n}^{1} (f(x \ominus t) - f(x)) \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} D_k(t)\, dt =: I_1 + I_2.$$

Поскольку $|D_k(x)| \leqslant k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k} = 1$, получаем

$$|I_1| \leqslant \int_0^{1/n} |f(x \ominus t) - f(x)| \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} k \, dt \leqslant$$

$$\leqslant n \int_0^{1/n} |f(x \ominus t) - f(x)| \, dt \leqslant \mathrm{w}(f; x, 1/n). \tag{4}$$

Из условия (3) вытекает, что $\sum\limits_{i=k}^{m} (a_{n,i} - a_{n,i+1}) = a_{n,k} - a_{n,m} \leqslant C_1 a_{n,m}$, откуда $a_{n,k} \leqslant (C_1 + 1) a_{n,m}$, $k < m$. С учетом этого неравенства получаем

$$\sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} \geqslant k \min_{n-k+1 \leqslant i \leqslant n} a_{n,i} \geqslant \frac{k}{C_1 + 1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n-k} a_{n,i} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k}{(C_1+1)(n-k)} \sum_{i=1}^{n-k} a_{n,i} \geqslant C_2 \frac{k}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_{n,i}.$$

Значит,

$$1 = \sum_{i=1}^{n-k} a_{n,i} + \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} \leqslant C_2^{-1} \frac{n-k}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} +$$

$$+ \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} = C_3^{-1} \frac{n}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i},$$

то есть $\sum\limits_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} \geqslant C_3 k/n$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{w}(f; x, k^{-1}) \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} \geqslant C_3 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{w}(f; x, n^{-1}) k^{-1} \frac{k}{n} =$$

$$= C_3 \mathrm{w}(f; x, n^{-1}). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$|I_1| = O\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} \mathrm{w}(f; x, k^{-1}) \sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n,i} \right). \tag{6}$$

С другой стороны,

$$|I_2| = \left|\sum_{i=1}^{n-1}\int_{1/i+1}^{1/i}(f(x\ominus t)-f(x))\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}D_k(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\int_{1/i+1}^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\left|\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}D_k(t)\,dt\right| =: \sum_{i=1}^{n-1}A_i.$$

Имеем при $t\in[(i+1)^{-1},i^{-1})$ в силу преобразования Абеля и леммы

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}D_k(t)\right| \leqslant \sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}|D_k(t)| + \left|\sum_{k=1}^{n-i}a_{n,k}D_k(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4t^{-1}\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k} + \left|\sum_{k=1}^{n-i-1}(a_{n,k}-a_{n,k+1})kF_k(t)\right| + a_{n,n-i}(n-i)|F_{n-i}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_5\left(i\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k} + i^2\left(\sum_{k=1}^{n-i-1}|a_{n,k}-a_{n,k+1}| + a_{n,n-i}\right)\right).$$

В силу отмеченного выше свойства $a_{n,i}\leqslant(C_1+1)a_{n,j}$ при $i\leqslant j$, значит, $ia_{n,n-i}\leqslant(C_1+1)(\sum\limits_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k})$, поэтому окончательно с учетом (3) имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}D_k(t)\right| \leqslant C_6 i\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n-1}A_i \leqslant C_6\sum_{i=1}^{n-1}i\int_{1/i+1}^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k} =$$

$$= C_6\sum_{i=1}^{n-1}i\left(\int_0^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{1/(i+1)}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\right)\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k} =$$

$$= C_6\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\left(i\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}-(i-1)\sum_{k=n-i+2}^{n}a_{n,k}\right)-$$

$$-C_6(n-1)\int_0^{1/n}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\sum_{k=2}^{n}a_{n,k}\leqslant$$

$$\leqslant C_6\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\left(ia_{n,n-i+1}+\sum_{k=n-i+2}^{n}a_{n,k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_6\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\left((C_1+1)\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}+\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_7\sum_{i=1}^{n-1}i\int_0^{1/i}|f(x\ominus t)-f(x)|\,dt\,i^{-1}\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}\leqslant$$

$$\leqslant C_7\sum_{i=1}^{n-1}i^{-1}\mathrm{w}(f,x,1/i)\sum_{k=n-i+1}^{n}a_{n,k}.$$

Суммируя оценки для I_1 и I_2 получаем утверждение теоремы.

При $a_{n,k}=1/n$, $k\leqslant n$ получаем

Следствие 1. Пусть $f\in L^1[0,1)$ и при данном $x\in[0,1)$ величина $\mathrm{w}(f;x,\delta)$ конечна для всех $\delta\in[0,1)$. Тогда $|\sigma_n(f)(x)-f(x)|\leqslant$ $\leqslant C_2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{w}(f,x,1/i)n^{-1}$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы, только вместо неравенства (3) выполнено

$$\sum_{k=i}^{n}|a_{n,k}-a_{n,k+1}|\leqslant C_1a_{n,i}. \qquad (3')$$

Тогда

$$|T_n(f)(x)-f(x)|\leqslant C_2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{w}(f;x,k^{-1})a_{n,k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Запишем по определению (учитывая, что $a_{n,n+1} = 0$)

$$|T_n(f)(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(S_k(f)(x) - f(x))\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n,k} - a_{n,k+1})k(\sigma_k(f)(x) - f(x)) + a_{n,n}n(\sigma_n(f)(x) - f(x))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{n,k} - a_{n,k+1}|k|\sigma_k(f)(x) - f(x)|.$$

Пользуясь свойствами матрицы $\{a_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ и утверждением (8), получаем

$$|T_n(f)(x) - f(x)| \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{n} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \sum_{i=1}^{k} \mathrm{w}(f; x, i^{-1}) =$$

$$= C_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \mathrm{w}(f; x, i^{-1}) \leqslant C_2 \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}(f; x, i^{-1}) a_{n,i}.$$

Следствие доказано.

Библиографический список

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Aljancic S., Bojanic R., Tomic M.* On the degree of convergence of Fejer-Lebesgue sums // Enseign. Math. 1969. V.15.

3. *Mazhar S.M.* On the degree of approximation of a class of functions by means of Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.88. N 2.

4. *Leindler L.* On the degree of approximation of continuous functions // Acta Math. Hung. 2004. V.104, №1–2.

5. *Волосивец С.С.* О сходимости в $L_p[0,1)$, $0 < p \leqslant 1$ рядов Фурье–Виленкина // Известия Сарат. ун-та. Матем. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Вып. 3.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, Т.А. КУЗНЕЦОВА, В.В. КРИВОБОК

Об аналитической непродолжимости за границу сходимости степенных рядов, отвечающих L–функциям Дирихле числовых полей

Пусть k — числовое поле, отличное от $\mathbb{Q}$. χ — характер Дирихле поля k. Рассмотрим L–функцию Дирихле поля k для характера χ

$$L(s,\chi,k)=\prod_{\wp}\left(1-\frac{\chi(\wp)}{N(\wp)^s}\right)^{-1}=\sum_{\mathfrak{A}}\frac{\chi(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad s=\sigma+it. \tag{1}$$

Пусть $g(z)$ — степенной ряд, отвечающий L–функции (1), то есть ряд с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле (1):

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n. \tag{2}$$

Целью данной работы является показать что степенной ряд (2) непродолжим за границу сходимости.

Отметим, что в работе [1] подобный факт был доказан для степенных рядов, отвечающих Z–функциям Дедекинда числового поля k ($k\neq\mathbb{Q}$). При доказательстве этого факта существенно использовались граничные свойства степенных рядов с целыми коэффициентами. В нашем случае коэффициенты a_n являются некоторыми комплексными числами. В связи с этим доказательство основного результата в случае L–функций требует иного подхода.

Приведем формулировки отдельных результатов, доказанных ранее, которые будут использованы при доказательстве основной теоремы.

В работе [2] был доказан следующий факт.

Теорема 1. *Пусть степенной ряд $g(z)$ отвечает ряду Дирихле $f(s)$. Тогда условие регулярности $g(z)$ в точке $z = 1$ эквивалентно тому, что $f(s)$ определяет целую функцию с условием роста модуля*

$$|f(-n)| \leqslant Ce^{n\ln n+An}, \qquad \text{где } A > 0.$$

В работе [3] была доказана следующая

Теорема 2. *Пусть степенной ряд $g(z)$ отвечает ряду Дирихле $f(s)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1.

$$|\alpha_n| = O(e^{kn\ln n+An}), \quad \alpha_n = \lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x), \quad k \geqslant 1;$$

2.

$$|f(-n)| = O(e^{kn\ln n+An}), \quad k \geqslant 1.$$

Причем, если существует подпоследовательность $\{n_m\}$ такая, что

1'.

$$|\alpha_{n_m}| \sim e^{kn_m\ln n_m+An_m}, \quad \alpha_{n_m} = \lim_{x\to 1-0} g^{(n_m)}(x), \quad k \geqslant 1;$$

то для этой подпоследовательности выполняется условие

2'.

$$|(-n_m)| \sim e^{kn_m\ln n_m+An_m}, \quad k \geqslant 1,$$

и наоборот.

В работе [4] доказано следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть L–функции $L(s,\chi,k)$, где $k \neq \mathbb{Q}$ соответствует степенной ряд $g(z)$. Тогда для почти всех рациональных φ функция*

$$g_\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\varphi n} a_n z^n$$

имеет в точке $z = 1$ радиальные производные α_n.

Для доказательства основного результата нам потребуется следующее утверждение

Теорема 4. *Для L–функции $L(s,\chi,k)$ поля $k \neq \mathbb{Q}$ выполняется условие*

$$|L(-n,\chi,k)| = O(e^{kn\ln n + An}), \quad k = [k:\mathbb{Q}],$$

и для подпоследовательности $\{n_m\}$, где $n_m = 2m+1$, $m = 1,2,\ldots$

$$|L(-n_m,\chi,k)| \sim e^{kn_m \ln n_m + An_m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Известно [5], что L–функция числового поля удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\Phi(s,\chi) = a\Phi(1-s,\bar{\chi}), \tag{3}$$

где

$$\Phi(s,\chi) = b\prod_{q=0}^{r_1}\Gamma\left(\frac{s+a_q}{2}\right)\Gamma(s)^{r_2}L(s,\chi), \tag{4}$$

где a и b — константы, отличные от нуля, r_1, r_2 — соответственно число вещественных и комплексных нормирований поля k, a_q равно либо 0, либо 1.

Известно также [6], что для Γ–функции имеет место асимптотика

$$\Gamma(s) \sim e^{s\ln\sqrt{\sigma^2+t^2}}, \quad s = \sigma + it. \tag{5}$$

Учитывая (3), (4), (6) и тот факт, что $r_1 + 2r_2 = [k:\mathbb{Q}]$, получаем утверждение теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть степенной ряд*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

отвечает L–функции $L(s,\chi,k)$ числового поля k. Тогда почти для всех рациональных φ функция

$$g_\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\varphi n}a_nz^n \tag{6}$$

имеет в точке $z=1$ радиальные производные $\alpha_{n,\varphi}$, удовлетворяющие условию

$$|\alpha_{n,\varphi}|=O(e^{kn\ln n+An}),$$

где $k=[k:\mathbb{Q}]$.

Более того, существует подпоследовательность $\{n_m\}$ такая, что

$$|\alpha_{n_m,\varphi}|\sim e^{kn_m\ln n_m+An_m}.$$

Доказательство

Отметим, что в процессе доказательства теоремы 3 в работе [4] центральным местом было доказательство следующего факта: для рационального $\varphi=\frac{q_1}{p_1^{\alpha_1}}+\frac{q_2}{p_2^{\alpha_2}}+\ldots+\frac{q_s}{p_s^{\alpha_s}}$ для функции (6) было получено представление

$$g_{\varphi,i}(z)=\sum_{j=1}^{n_1}\beta_{ij}g_j(z),\quad i=\overline{1,n_1}, \tag{7}$$

где $g_{\varphi,i}(z)$ — степенные ряды, отвечающие рядам Дирихле

$$f_{\varphi,i}(s)=\sum_{\substack{\mathfrak{A}\in C_j\\ N(\mathfrak{A})\equiv l_{1,i}(\mod p_1^{\alpha_1})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ N(\mathfrak{A})\equiv l_{s,i}(\mod p_s^{\alpha_s})}}\frac{1}{N(\mathfrak{A})^s}, \tag{8}$$

и где матрица $B=(\beta_{ij})$ является неособой.

Там же было показано, что для рядов Дирихле $f_{ij}(s)$ вида (8) имеет место разложение

$$f_{\varphi,i}=\sum_{l=1}^{n_2}\alpha_{i,l}L_k(s,\chi_l,k),\quad i=1,\bar{n}_1, \tag{9}$$

где L_k — L–функция поля k, и матрица $A=(\alpha_{i,k})$ является неособой.

В силу теоремы 4 из представления (9) следует, что утверждение теоремы 4 имеет место и для функций $f_{\varphi,i}(s)$.

Тогда в силу (7) на основании теоремы 2, получаем утверждение теоремы 5.

Основным результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть степенной ряд $g(z)$ отвечает L–функции $L(s,\chi,k)$ числового поля k $k \neq \mathbb{Q}$. Тогда ряд $g(z)$ аналитически непродолжим за границу круга сходимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу теоремы 5 и теоремы 1 ни одна точка на единичной окружности не может быть регулярной для функции $g(z)$, что и доказывает утверждение теоремы 6.

Библиографический список

1. *Сецинская Е.В.* Граничное поведение степенных рядов, отвечающих L–функциям числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.

2. *Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3.

3. *Кузнецов В.Н., Кузнецова Т.А., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции с определенным порядком роста модуля // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 4.

4. *Кривобок В.В.* Об аналитических свойствах L–функций числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2008.

5. *Хейльброн Х.* ζ–функции и L–функции // Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.
6. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

УДК 511.3

В.Н.КУЗНЕЦОВ, Т.А. КУЗНЕЦОВА, В.В. КРИВОБОК

Об аналитических свойствах функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Рассмотри ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^s, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где a_n — периодические и $\sum\limits_{n \leqslant x} a_n = O(1)$.

Данная работа посвящена доказательству следующего утверждения.

Теорема. *Ряд Дирихле (1) определяет целую функцию первого порядка со следующим условием роста модуля в левой полуплоскости:*

$$|f(s)| < ce^{|s| \ln |s| + A|s|}, \quad \sigma < 0. \tag{2}$$

Замечание. Хорошо известно [1], что теорема 1 имеет место в случае, когда $a_n = \chi(n)$, где χ — неглавный характер Дирихле, то есть когда $f(s)$ — L–функция Дирихле. При доказательстве этого факта существенным моментом является то, что L–функция Дирихле удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана. Доказательство теоремы 1, приведенное в данной работе, получено без использования функционального уравнения (ряд вида (1) может не удовлетворять уравнению типа Римана), в его основе лежит метод редукции к степенным рядам, разработанный в работах [2–3], который сводит задачу аналитического продолжения ряда Дирихле к граничному поведению соответствующего степенного ряда.

Доказательство теоремы 1

Рассмотрим степенной ряд, соответствующий ряду Дирихле (1):

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n, \tag{3}$$

то есть степенной ряд с теми же самыми коэффициентами, что и ряд Дирихле (1).

Пусть k — период коэффициентов a_n, тогда для любого n имеем $n = mk+l$, $0\leqslant l\leqslant k-1$, $a_n=a_l$. Тогда

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=\sum_{l=0}^{k-1}a_lz^l\sum_{m=1}^{\infty}z^{mk}=\frac{P_k(z)}{1-z^k},$$

где $P_k(z)$ — полином степени k. В силу ограниченности сумматорной функции коэффициентов a_n, $P_k(1)=0$ и $1-z^k=0$ в точке $z=1$. Отсюда получаем

$$g(z)=\frac{Q_{k-1}(z)}{1+z+z^2+\ldots+z^{k-1}},$$

следовательно, функция $g(z)$ является регулярной в точке $z=1$.

Докажем, что функция $f(s)$ продолжима целым образом на всю комплексную плоскость с условием роста модуля (2).

Используем интегральное представление для Γ–функции:

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt,\ \sigma>0.$$

Сделаем замену переменных: $t=nx$, получим

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-nx}n^sx^{s-1}dx,$$

тогда $n^{-s}\Gamma = \int\limits_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$.

Умножим обе части равенства на a_n и просуммируем по n от 1 до ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty a_n e^{-nx}x^{s-1}dx = \int\limits_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}\right) x^{s-1}dx,\ \sigma > 1.$$

Таким образом, при $\sigma > 1$ получаем следующее интегральное представление:

$$f(s)\cdot\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx = \int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int\limits_0^\rho g(e^{-x})x^{s-1}dx. \quad (4)$$

Легко видеть, что

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-nx}\right| \leqslant M_1\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\left|\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx\right| = \left|\int\limits_\rho^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}\right) x^{s-1}dx\right| \leqslant M_1\int\limits_\rho^\infty \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx,$$

и так как при $x \geqslant \rho$

$$\frac{1}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-\rho}},$$

то окончательно получаем:

$$\left|\int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx\right| \leqslant M_1\frac{1}{1-e^{-\rho}}\int\limits_\rho^\infty e^{-x}x^{\sigma-1}dx =$$

$$= M_2\int\limits_\rho^\infty e^{-x}x^{\sigma-1}dx < M_3\int_\rho^\infty x^{\sigma-1}dx = -\frac{M_3\rho^\sigma}{\sigma}. \quad (5)$$

Таким образом, интеграл

$$\Phi_\rho(s) = \int\limits_\rho^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx$$

в любой полуполосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ абсолютно сходится и, следовательно, определяет целую функцию, удовлетворяющую оценке (6) при $\sigma < 0$.

Рассмотрим теперь второй интеграл из равенства (16):

$$I = \int\limits_0^\rho g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

Как показано в [3], для данного интеграла имеет место разложение:

$$I = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s},$$

при $s \neq 1, 0, -1, -2, \ldots,$ где $\alpha_k = Res_{s=-k}(f(s) \cdot \Gamma(s))$. Так как $Res_{s=-k}\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}$ (см., например, [4]), то

$$\alpha_k = Res_{s=-k}\frac{(-1)^k f(-k)}{k!}. \tag{6}$$

В работе [5] показано, что

$$\alpha_k = \lim_{x \to 1-0} g^{(k)}(x). \tag{7}$$

Так как a_n являются периодическими и ряд $g(z)$ определяет регулярную в точке $z = 1$ функцию, разложим $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - 1:$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n.$$

Из формулы для нахождения радиуса R сходимости ряда

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{g^{(n)}(1)}{n!}}.$$

Из условия (6) следует, что степенной ряд $g(z)$ регулярен в точке $z = 1$ в том случае, когда

$$\alpha_k = O(\rho_0^k). \tag{8}$$

Отсюда в силу условия (6) получаем:

$$|f(-k)| < ce^{k \ln k + Ak}. \tag{9}$$

Выберем ρ таким образом, чтобы $\rho\rho_0 < 1$, тогда в силу (8) получим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k \rho^k}{k+s}$ сходится при $s \neq -k$ и его сумма ограничена в области, не содержащей некоторые окрестности точек $s = -k$.

Так как Γ–функция в левой полуплоскости имеет следующую асимптотику [6]:

$$|\Gamma(s)| = e^{-|s|\ln|s|+B|s|}, \quad B > 0,$$

то в силу условия (8) получаем, что функция

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\rho} g(e^{-x}) x^{s-1} dx$$

является целой функцией, модуль которой при $\sigma < 0$ удовлетворяет условию роста (2), что, в силу (4) и (5), завершает доказательство теоремы 1.

Библиографический список

1. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.

2. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984. Вып. 6.

3. *Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3.

4. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

5. *Кузнецов В.Н., Кузнецова Т.А., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции с определенным порядком роста модуля // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 4.

6. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, Е.В. СЕЦИНСКАЯ

Обобщенные суммы Гаусса и гипотеза Н.Г. Чудакова

Пусть χ — неглавный характер Дирихле. Под обобщенного суммой Гаусса в данной работе понимается сумма вида

$$S(x,\chi,\varphi)=\sum_{n\leqslant x} e^{i\varphi n}\chi(n). \tag{1}$$

Для таких сумм имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого неглавного характера χ существует такая положительная величина δ, что для всех φ : $|\varphi|<\delta$ имеет место оценка*

$$S(x,\chi,\varphi)=O(1),$$

где константа справа зависит только от φ и δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим два степенных ряда

$$\begin{gathered} g_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi(n)z^n=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sum_{m=0}^{\infty}z^{mk+l}=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)z^l\sum_{m=0}^{\infty}z^{mk}= \\ =\frac{P_k(z)}{1-z^k}=\frac{Q_{k-1}(z)}{1+z+\ldots+z^{k-1}}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$g_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\varphi n}(n)z^n=\frac{1}{1-e^{i\varphi}z}=-\frac{1}{e^{i\varphi}(z-e^{-i\varphi})}. \tag{3}$$

Рассмотрим интегральное представление композита рядов (2) и (3), то есть ряда

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\varphi n}\chi(n)z^n$$

(см. по этому поводу [1]).

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C g_1(u) g_2\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}. \tag{4}$$

В силу (2) $g_1(z)$ определяет рациональную функцию. Разложим ее на сумму простейших.

$$g_1(z) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i}{z - \alpha_i}, \tag{5}$$

где α_i — корни степени k из единицы, отличные от самой единицы (здесь k — период характера χ).

Подставив выражения (3) и (5) в интеграл (4), получим

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{k-1} A_i \frac{1}{e^{i\varphi}} \int\limits_C \frac{1}{u - \alpha_i} \cdot \frac{du}{u - \frac{z}{e^{-i\varphi}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i}{e^{i\varphi}} \cdot \frac{1}{\frac{z}{e^{-i\varphi}} - \alpha_i} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i}{e^{i\varphi}\alpha_i} \cdot \frac{1}{1 - \bar{\alpha}_i e^{i\varphi} z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{k-1} B_i \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\varphi_i m} z^m.$$

Таким образом мы разбили степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\varphi n} \chi(n) z^n$$

на конечную сумму рядов вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{i\varphi_i m} z^m. \tag{6}$$

Но, легко видеть, что частичные суммы каждого из рядов (6) равномерно ограничены на отрезке $[0;1)$, если только $|\varphi| < \delta$, и эта константа зависит только от k и δ. Действительно, при $x \in [0;1)$

$$S_k(x) = \sum_{m=0}^{k} e^{i\varphi_i m} x^m = \frac{1 - e^{i\varphi_i n} x^n}{1 - e^{i\varphi_i} x} < C,$$

где константа C зависит от k и δ, что и доказывает утверждение теоремы 1.

Рассмотрим известную гипотезу Н.Г. Чудакова, высказанную им в 1950 году [2] относительно обобщенных характеров $h(n)$, то есть конечнозначных числовых характеров с полной базой и ограниченной сумматорной функцией. Н.Г. Чудаков высказал предположение, что обобщенный характер является характером Дирихле, то есть что $h(n)$ будет периодической функцией.

По аналогии с характерами Дирихле, для обобщенного характера $h(n)$ сумму вида

$$\sum_{n\leqslant x} e^{i\varphi n}h(n) \tag{7}$$

будем называть обобщенной суммой Гаусса для характера $h(n)$.

Следующий результат устанавливает связь между гипотезой Н.Г. Чудакова и поведением сумм вида (7).

Теорема 2. *Для неглавного обобщенного характера $h(n)$ следующие условия эквивалентны:*

1. *$h(n)$ — характер Дирихле;*

2. *существует такая положительная константа δ, что для всех φ : $|\varphi| < \delta$ обобщенные суммы Гаусса вида (7) ограничены константой, зависящей только от $h(n)$ и δ.*

Доказательство

В одну сторону утверждение теоремы 2 следует из теоремы 1.

Обратно, если имеет место условие 2, то степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n$$

определяет функцию, ограниченную в некотором секторе единичной окружности (симметрично относительно действительной оси). Отсюда, из теоремы Даффина и Шеффера [3], которая утверждает, что из ограниченности функции

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где a_n — конечнозначные коэффициенты, в некотором секторе единичной окружности, следует периодичность a_n начиная с некоторого номера, следует утверждение 1 теоремы 2.

Замечание. Отметим, что гипотеза Н.Г. Чудакова до сих пор остается открытой.

Библиографический список

1. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

2. *Чудаков Н.Г., Родосский К.А.* Об обобщенном характере // ДАН СССР, 1987. Т. 73.

3. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, А.Е. КОРОТКОВ, Д.С. СТЕПАНЕНКО

К вопросу о трансцендентности значений рядов Дирихле с периодическими алгебраическими коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана, в точках $s = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Рассмотрим ряд Дирихле:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + \imath t, \tag{1}$$

с периодическими алгебраическими коэффициентами, который определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению вида:

$$a\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)f(s)=\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\hat{f}(1-s), \qquad (2)$$

где a — некоторая алгебраическая константа; δ и δ_1 — величины, равные либо 0, либо 1; k — период последовательности коэффициентов; $\hat{f}(s)$ — функция, определенная рядом Дирихле с коэффициентами, сопряженными к коэффициентам ряда (1).

Известно [1], что функциональному уравнению вида (2) удовлетворяет достаточно широкий класс рядов Дирихле с периодическими коэффициентами, включающий класс L–функций Дирихле.

Известно также [2], что L–функции Дирихле принимают трансцендентные значения при четном натуральном значении аргумента. Последнее следует из явных формул, которые можно получить для значений $L(2k)$. Например, для дзета–функции Римана эти формулы имеют вид [2]:

$$\zeta(2k)=(-1)^k\pi^{2k}\frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right), \qquad k=1,2,3,\ldots, \qquad (3)$$

где B_{2k} — числа Бернулли, которые являются рациональными числами. Нужно отметить, что вывод формулы (3) является непростой задачей.

В данной работе аналогичный факт доказывается для рядов Дирихле с периодическими алгебраическими коэффициентами. В отличие от случая L–функций Дирихле, в основе доказательства этого факта лежат результаты, полученные в процессе развития метода редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле — метода, который задачу аналитического продолжения рядов Дирихле сводит к задаче о граничном поведении степенных рядов с теми же коэффициентами что и ряды Дирихле. Основные положения этого метода были получены в работах [3,4]. В работах [5,6] этот метод получил свое дальнейшее развитие.

Основным результатом работы является следующее утверждение

Теорема 1. *Ряд Дирихле с периодическими алгебраическими коэффициентами, удовлетворяющий функциональному уравнению римановского типа (2), в точках $s = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, принимает трансцендентные значения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим степенной ряд, соответствующий ряду Дирихле (1):

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Он определяет рациональную функцию. Действительно:

$$g(z) = \sum_{l=1}^{k-1} a_l \sum_{m=0}^{\infty} z^{mk+l} = \sum_{l=1}^{k-1} a_l z^l \sum_{m=0}^{\infty} z^{mk} = \frac{P_{k-1}(z)}{1 - z^k}. \tag{5}$$

Следовательно, степенной ряд (2) определяет функцию, которая либо регулярна в точке $z = 1$, либо имеет в этой точке полюс первого порядка, как показано в [3]. Отсюда следует, что ряд Дирихле (1) аналитически продолжим на всю комплексную плоскость как мероморфная функция с единственно возможным полюсом первого порядка в точке $s = 1$.

В работе [3] показано, что:

$$\alpha_n = Res_{s=-n}\left[f(s)\Gamma(s)\right] = \frac{f(-n)}{n!}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_n = \lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x), \qquad n = 2k - 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{7}$$

В силу (5) из условий (6), (7) получаем, что $f(-n)$, $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, являются алгебраическими числами.

Отсюда, в силу того факта, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению (2), получаем утверждение теоремы 1.

Библиографический список

1. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

2. *Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Бибфизмат, 1981.

3. *Кузнецов В.В.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36. Вып. 6.

4. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-ей Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Т.2.

5. *Кузнецов В.Н., Водолазов А.М.* К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1.

6. *Кузнецов В.Н., Сорокина Е.В.* К вопросу о целостности композита L–функций числовых полей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, Т.А. КУЗНЕЦОВА, А.Е. КОРОТКОВ, А.А. ЕРМОЛЕНКО

Аппроксимационный подход в задаче о трансцендентности значений L–функций Дирихле в алгебраических точках на положительной полуоси

В данной работе излагаются основные положения, так называемого, аппроксимационного подхода в задаче о трансцендентности значений L–функций в алгебраических точках на положительной полуоси, суть которого заключается в построении полиномов Дирихле с алгебраическими коэффициентами, приближающими L–функцию на числовой оси с показательной скоростью. Это сводит задачу о трансцендентности значений L–функции в алгебраических точках к оценке скорости роста высот значений таких многочленов в алгебраических точках в зависимости от их степени.

В основе построения аппроксимирующих многочленов лежат отдельные моменты конструктивной теории метода редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле, разработанных в работах [1–4], который сводит задачу аналитического продолжения рядов Дирихле:

$$f\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad s=\sigma+\imath t, \tag{1}$$

к задаче о граничном поведении степенных рядов с теми же коэффициентами, что и у ряда (1).

Так, в работе [4], на основании идей метода редукции к степенным рядам показано, что L–функцию Дирихле в полосе: $\sigma>0$, $|t|<T$ можно приблизить полиномами Дирихле с показательной скоростью. Более того, такие полиномы допускают явную конструкцию. Действительно, степенной ряд, отвечающий L–функции Дирихле:

$$g\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)z^n \tag{2}$$

определяет функцию, регулярную в точке $z=1$. Тогда, в силу известных результатов теории приближений [5], существуют алгебраические полиномы $P_n(z)$, приближающие функцию $g(z)$ на отрезке $[0;\ 1]$ с показательной скоростью. Как показано в [5], в качестве таких полиномов можно взять полиномы Бернштейна:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x), \tag{3}$$

где $T_k(x)$ — полиномы Чебышева на отрезке $[-1;1]$, а

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}g(t)T_k(t)dt. \tag{4}$$

Запишем полиномы (3) в обычном виде:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Тогда, как показано в [4], полиномы Дирихле вида:

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^s}, \tag{5}$$

будут аппроксимировать L–функцию Дирихле с показательной скоростью.

Относительно коэффициентов a_n полиномов Дирихле (5) имеет место следующее утверждение

Теорема 1. *Коэффициенты a_n полиномов Дирихле (5) принадлежат полю $K = Q(\sqrt[d]{1})$, где d — период характера χ L–функции Дирихле.*

Доказательство

В формуле (4), для вычисления коэффициентов c_k, сделаем замену: $t = \arccos\varphi$. Тогда получим:

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\cos\varphi)\; cosk\varphi\; d\varphi.$$

В последнем интеграле положим $z = e^{\imath\varphi}$. Тогда имеем:

$$c_k = \frac{1}{\pi\imath}\int_G g\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{2}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)\frac{dz}{z}, \tag{6}$$

где G — окружность с центром в точке $z=0$ и радиусом равным 1. Но:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)t^n = \frac{P_{d-1}(t)}{1+t+\cdots+t^{d-1}} = \sum_{j=1}^{d-1}\frac{A_j}{t-\alpha_j},$$

где $\alpha_j \in K$.

Следовательно,

$$g\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)=\sum_{j=1}^{d-1}\frac{2A_jz}{z^2-\alpha_jz+1}.$$

Отсюда, в силу (6) и интегральной формулы Коши для k-той производной, окончательно получаем:

$$c_k=\sum_{j=1}^{d-1}\frac{A_j}{\pi\imath}\int_G\frac{1}{z^2-\alpha_jz+1}\frac{1}{z^k}dz=$$

$$=\sum_{j=1}^{d-1}\frac{2A_j}{(k-1)!}\left[\frac{1}{z^2-\alpha_jz+1}\right]\Bigg|_0^{k-1}=\sum_{j=1}^{d-1}2A_jl_{jk}\left(\alpha_j\right).$$

Последнее значение принадлежит полю K, что и завершает доказательство теоремы 1.

Далее, пусть α — алгебраическое, положительное число. Тогда имеем:

$$|L(\alpha,\chi)-Q_n(\alpha)|=O\left(\frac{1}{\rho^n}\right),\qquad \rho>1, \tag{7}$$

где $Q_n(s)$ — полином Дирихле вида (5).

В силу теоремы 1, $\theta_n=Q_n(\alpha)$ — алгебраические числа, принадлежащие полю $K_1=Q(\sqrt[n]{\alpha})=K(\alpha)$.

Обозначим через H_{θ_n} высоты этих чисел. При данных обозначениях имеет место

Теорема 2. *Пусть α — такое алгебраическое, положительное, для которого последовательность высот H_{θ_n} удовлетворяет условию:*

$$H_{\theta_n}<<\rho^n,\qquad \text{для любого } \rho>1 \text{ (при } n\to\infty). \tag{8}$$

Тогда значение L–функции: $L(\alpha,\chi)$ является трансцендентным числом.

Доказательство

В силу теоремы Левека [5], которая утверждает, что если β — алгебраическое число, то неравенство:

$$|\beta-\theta|\geqslant H_\theta^{-k},\qquad k>2,$$

имеет конечное число решений из фиксированного алгебраического поля K. Отсюда, в силу (7) и (8), сразу следует утверждение теоремы 2.

Замечание. Теорема 2 сводит задачу о трансцендентности значений L–функций Дирихле в алгебраических, положительных точках к задаче оценки высот H_{θ_n} алгебраических чисел, определяемых коэффициентами многочленов Бернштейна. В связи с этим, представляет интерес построение других многочленов с алгебраическими коэффициентами, аппроксимирующих рациональную функцию $g(x)$ на отрезке $[0;\ 1]$ с показательной скоростью.

Библиографический список

1. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36. Вып. 6.

2. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-ей Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Т.2.

3. *Кузнецов В.Н., Водолазов А.М.* К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1.

4. *Кузнецов В.Н., Водолазов А.М.* Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2.

5. *Шидловский А.Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: Изд-во МГУ, 1982.

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ, И.А. КЛЯЕВА

Свойство линейной связности пространства расслоения и слоя пунктированного толерантного расслоения в смысле Серра

В статье приведено доказательство свойства линейной связности пространства расслоения $(E, \overline{\tau})$ и произвольного слоя $\big(F_b = p^{-1}(b), \overline{\tau}\big)$ пунктированного толерантного расслоения.

Определение 1. Толерантное пространство (I_m, ι_m), в котором

$$I_m = \left\{ \frac{k}{m} \,\middle|\, k = \overline{0, m} \right\}, \ \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \Leftrightarrow |k - l| \leqslant 1,$$

назовем толерантным отрезком длины m. Пространство $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = (\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i})$ назовем толерантным кубом, а толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ будем называть толерантным сингулярным(ТС) кубом.

Определение 2. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ удовлетворяет условию накрывающей толерантной гомотопии относительно пространства (Y, θ), если для любых толерантных отображений

$$f' : (Y, \theta) \longrightarrow (E, \overline{\tau}) \text{ и } F : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \longrightarrow (B, \tau),$$

для которых $F(y, 0) = (p \circ f')(y)$ при $y \in Y$, существует толерантное отображение $F' : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \longrightarrow (E, \overline{\tau})$ такое, что $F'(y, 0) = f'(y)$ и $p \circ F' = F$.

Определение 3. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ называется толерантным расслоением (в смысле Серра), если оно удовлетворяет свойству накрывающей гомотопии относительно любого толерантного куба $(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i})$.

Рассмотрим пунктрированное толерантное расслоение в смысле Серра:

$$p : ((E, \overline{\tau}), x_0) \to ((B, \tau), b_0), \quad x_0 \in E, \ b_0 \in B, \quad x_0 \in p^{-1}(b_0) = F, \qquad (1)$$

в котором база (B, τ) и слой $(F, \overline{\tau})$ являются линейно связными толерантными простанствами.
Следующее предложение показывает, что и пространство расслоения $(E, \overline{\tau})$ и все слои $\left(F_b = p^{-1}(b), \overline{\tau}\right)$ также являются линейно связными.

Предложение 1. *Пусть в пунктированном толерантном расслоении*

$$p : ((E, \overline{\tau}), x_0) \to ((B, \tau), b_0), \quad b_0 \in B, \quad x_0 \in p^{-1}(b_0) = F \subset E$$

база (B, τ) и слой $(F, \overline{\tau})$ являются линейно связными толерантными пространствами, тогда и пространство расслоения $(E, \overline{\tau})$ и слой $\left(F_b = p^{-1}(b), \overline{\tau}\right)$ в любой точке $b \in B$ являются линейно связными.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Чтобы доказать линейную связность пространства $(E, \overline{\tau})$, покажем, что всякая точка $x \in E$ может быть соединена толерантным путем с отмеченной точкой x_0. В самом деле, рассмотрим точки $b_0 = p(x_0)$, $b = p(x)$ в пространстве (B, τ). Так как пространство (B, τ) линейно связное, то имеется толерантный путь, соединяющий точки b и b_0:

$$\omega : I_N \to B, \quad \omega(0) = b, \ \omega(1) = b_0. \qquad (2)$$

Рассмотрим толерантный путь ω как толерантную гомотопию 0-мерных ТС кубов b и b_0 и поднимем ТС куб b в $(E, \overline{\tau})$ до ТС куба x, что можно сделать ввиду того, что $p(x) = b$. По свойству накрывающей гомотопии для толерантного расслоения p существует толерантный путь в $(E, \overline{\tau})$, накрывающий путь ω:

$$\overline{\omega} : I_N \to E, \quad \overline{\omega}(0) = x, \quad p \circ \overline{\omega} = \omega. \qquad (3)$$

Из (3) и (2) в частности следует, что $x' = \overline{\omega}(1) \in p^{-1}(b_0) = F$. А так как слой $(F, \overline{\tau})$ является линейно связным, то найдется толерантный путь в $(F, \overline{\tau})$, соединяющий точки $x', x_0 \in F$:

$$\overline{\overline{\omega}} : I_{N'} \to F \subset E, \;\; \overline{\overline{\omega}}(0) = x', \; \overline{\overline{\omega}}(1) = x_0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что толерантный путь $\overline{\omega} * \overline{\overline{\omega}}$ в E (см. определение 1.3.2 в [2]) соединяет точку x с точкой x_0, что доказывает линейную связность пространтва $(E, \overline{\tau})$.

Возьмем теперь произвольную точку $b \in B$ и покажем, что слой $F_b =$ $= p^{-1}(b)$ является линейно связным подпространством в $(E, \overline{\tau})$. Так как (B, τ) — линейно–связное пространство, то существует толерантный путь $\omega : I_N \to B$, соединяющий точку $b_0 = \omega(0)$ с точкой $b = \omega(1)$. Точки $b_k = \omega\left(\frac{k}{N}\right), \; k = \overline{0, N}$, составляющие траекторию этого пути, таковы, что $b_k \tau b_{k+1}, \; k = \overline{0, N-1}$. Поэтому, если мы покажем, что из линейной связности слоя $F = F_{b_0} = p^{-1}(b_0)$ следует линейная связность слоя $F_{b_1} =$ $= p^{-1}(b_1)$, то индуктивно это утверждение распространяется на все точки траектории пути ω и влечет линейную связность слоя $F_{b_N} = F_b$.

Итак, нам надо показать, что толерантность $b_1 \tau b_0$ влечет линейную связность пространства $\left(F_{b_1} = p^{-1}(b), \overline{\tau}\right)$. Возьмем произвольно точки $y, y' \in F_{b_1}$. Толерантный путь $\beta : I_1 \to B$ единичной длины, определяемый условиями $\beta(0) = b_1, \; \beta(1) = b_0$, по свойству накрывающей гомотопии имеет два накрывающих пути

$$\overline{\beta}, \; \overline{\beta}\,' : I_1 \to E, \;\; \overline{\beta}(0) = y, \; \overline{\beta}\,'(0) = y', p \circ \overline{\beta} = p \circ \overline{\beta}\,' = \beta. \tag{5}$$

Обозначим $x = \overline{\beta}(1), \; x' = \overline{\beta}\,'(1)$. Тогда из (5) следует:

$$\begin{gathered} p(x) = p(x') = b_0, \text{ т. е. } x, x' \in F = F_{b_0} = p^{-1}(b_0); \\ x \overline{\tau} y, \; x' \overline{\tau} y' \end{gathered} \tag{6}$$

Линейная связность $(F, \overline{\tau})$ влечет существование толерантного пути

$$\gamma : I_M \to F, \;\; \gamma(0) = x, \; \gamma(1) = x',$$

с траекторией $\left\{x^{(k)} = \gamma\left(\frac{k}{M}\right) | k = \overline{0, M}\right\}$, в которой $x^{(k)}\overline{\tau}x^{(k+1)}$, и при этом мы не будем исключать случай $x^{(k)} = x^{(k+1)}$. Поднимая путь β^{-1} из B в E с началами в точках x^k, получим конечные точки поднятых путей $\overline{\beta^{-1}}^{(k)}$, удовлетворяющие следующим свойствам:

$$\left(\forall k = \overline{0, M}\right)\ y^{(k)} = \overline{\beta^{-1}}^{(k)}(1),\ y^{(k)} \in F_{b_1},\ y^{(k)}\overline{\tau}x^{(k)}.$$

Отметим, что точки y и y' также можно рассматривать как конечные точки дополнительных поднятий пути β^{-1} с началами в $x = x^{(0)}$ и в $x' = x^{(M)}$. Итак, в слое F_{b_1} имеем набор точек

$$y^{(-1)} = y,\ y^{(0)}, \ldots, y^{(M)},\ y^{(M+1)} = y' \in F_{b_1},$$

таких, что

$$\left(\forall k = \overline{-1, M+1}\right)\quad y^{(k)}\overline{\tau}x^{(k)},$$

где $x^{(-1)} = x = x^{(0)},\ x^{(M+1)} = x' = x^{(M)},\ \left(\forall k = \overline{-1, M+1}\right)\ x^{(k)}\overline{\tau}x^{(k+1)}$. Если мы покажем, что для всех $k = \overline{-1, M}$ точки $y^{(k)}$ и $y^{(k+1)}$ можно соединить толерантным путем в F_{b_1}, то линейная связность слоя $(F_{b_1}, \overline{\tau})$ будет доказана. Для этого нам достаточно доказать следующие два свойства:

$$(\forall x \in F_{b_0} = F)\quad \overline{\tau}\langle x\rangle \cap F_{b_1} \text{ - линейно связно;} \tag{7}$$

$$(\forall x, x' \in F_{b_0} = F)\quad x\overline{\tau}x' \Rightarrow (\exists y \in \overline{\tau}\langle x\rangle \cap F_{b_1})\,(\exists y' \in \overline{\tau}\langle x'\rangle \cap F_{b_1})\quad y\overline{\tau}y' \tag{8}$$

Начнем с проверки (7). Возьмем произвольные точки

$$y, y' \in \overline{\tau}\langle x\rangle \cap F_{b_1}.$$

Это значит, что $y\ \overline{\tau}\ x\ \overline{\tau}\ y'$ и $p(y) = p(y') = b_1$. Рассмотрим толерантный куб $(I_2 \times I_1, \iota_2 \times \iota_1)$, изображенный на рисунке,

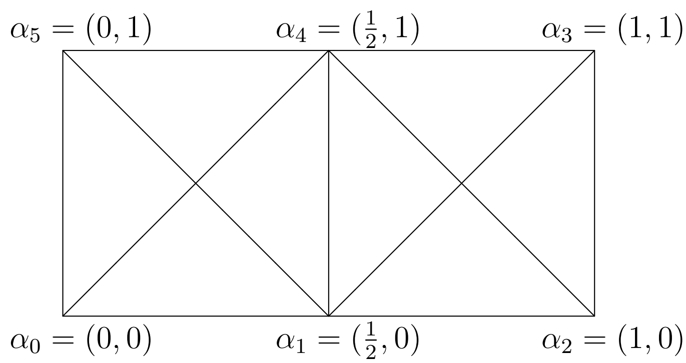


Рис. 1

на котором $\iota_2 \times \iota_1$ — толерантность обозначена линиями. Заметим, что точка α_1 толерантна всем точкам из $I_2 \times I_1$. Определим отображение $G : I_2 \times I_1 \to B$, задав его таблицей:

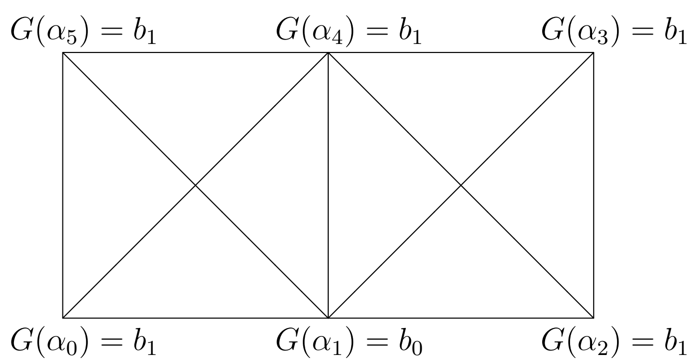


Рис. 2

Так как $b_1 \tau b_0$, то отображение G очевидно является толерантным и его можно рассматривать как толерантную гомотопию двух одномерных ТС кубов

$$G : G|\,(I_2 \times \{0\}) \sim G|\,(I_2 \times \{1\})\,.$$

Поднимем первый из этих ТС кубов в $(E, \overline{\tau})$, обозначив это поднятие через $\overline{w} : I_2 \to E$, и определив его таблицей:

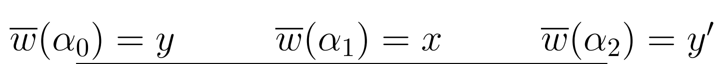


Рис. 3

Согласно выбору точек y и y' имеем толерантность $\overline{w}$ и условие

$$p \circ \overline{w} = G|\,(I_2 \times \{0\})\,.$$

Свойство накрывающей гомотопии для толерантного расслоения p дает существование толерантного отображения $G' : I_2 \times I_1 \to E$ такого, что

$$G'|\,(I_2 \times \{0\}) = \overline{w}, \quad p \circ G' = G. \tag{9}$$

Изобразим на рисунке таблицу значений отображения G':

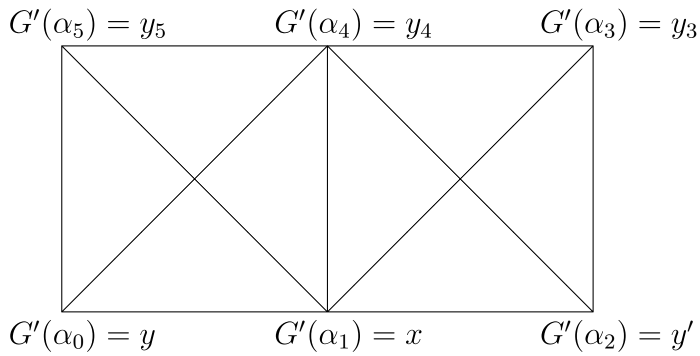


Рис. 4

Из Рис. 4, свойства (9) и Рис.2 следует, что точки

$$y,\ y_4,\ y' \in \overline{\tau}\,\langle x \rangle \cap F_{b_1}$$

образуют траекторию толерантного пути в $\overline{\tau}\,\langle x \rangle \cap F_{b_1}$, соединяющего точки y и y'. Это доказывает (7). Для доказательства (8) рассмотрим толерантный куб $(I_1 \times I_1, \iota_1 \times \iota_1)$

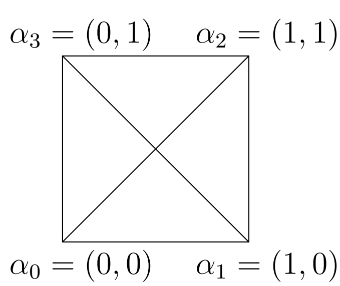


Рис. 5

и толерантное отображение $G : I_1 \times I_1 \to B$:

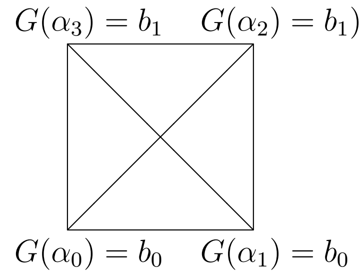


Рис. 6

у которого $G|(I_1 \times \{0\})$ поднимается до $\overline{w} : I_1 \to E$:

$$\overline{w}(\alpha_0) = x\overline{\tau}x' = \overline{w}(\alpha_1), \;\; p \circ \overline{w} = G|(I_1 \times \{0\}).$$

По свойству накрывающей гомотопии имеется толерантное отображение

$$G' : I_1 \times I_1 \to E, \;\; G'|\,(I_1 \times \{0\}) = \overline{w}, \;\; p \circ G' = G \qquad (10)$$

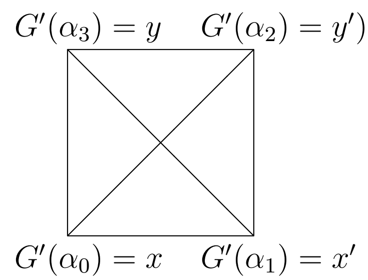


Рис. 7

Из Рис. 7, Рис. 6 и (10) следует, что

$$y, \; y' \in (\overline{\tau}\,\langle x \rangle \cap F_{b_1}) \cap (\overline{\tau}\,\langle x' \rangle \cap F_{b_1}) \quad y\overline{\tau}y'.$$

Это значительно более того, что требуется в свойстве (8).

Предложение 1 доказано.

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). 1962.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3.
4. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестник Самарского Государственного Университета. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2007. Вып.7(57).
5. *Ху Сы-цзян* Теория гомотопий. М.: Мир. 1964.

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ, И.А. КЛЯЕВА

Свойства сингулярных кубов в толерантных расслоениях

В статье приведен ряд специальных свойств сингулярных кубов в толерантных расслоениях, описано действие фундаментальной группы базы на группе гомологий слоя толерантного расслоения, доказана теорема, позволяющая по ТС кубам в базе и слое, чьи $\mathcal{B}_s$ и $\mathcal{F}_s$ проекции с точностью до подходящего замедления совпадают с исходными кубами, восстановить ТС куб в пространстве расслоения.

В гомотопической теории толерантных пространств роль единичного отрезка параметров гомотопии играет бесконечная серия толерантных отрезков (I_m, ι_m) длины m $(m \in \mathbb{N})$, где

$I_m = \left\{\frac{k}{m} \,\middle|\, k = \overline{0,m}\right\}$, $(\forall k, l = \overline{0,m})\ \frac{k}{m}\ \iota_m\ \frac{l}{m} \Leftrightarrow |k-l| \leqslant 1.$

Два толерантных отображения $f_0, f_1 : (Y,\theta) \to (X,\tau)$ называют толерантно гомотопными и записывают $f_0 \sim f_1$, если существует $m \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$ и толерантное отображение $F : Y \times I_m \to X$ такое, что

$$F|(Y \times 0) = f_0,\ F|(Y \times 1) = f_1.$$

Отображение F называется толерантной гомотопией. Если $m = 1$, то F называется простой толерантной гомотопией и записывается $f_0 \approx f_1$.

Определение 1. Толерантным кубом размера $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}$ называется толерантное пространство $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i},\ \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i} \right)$, а любое толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ называется n -мерным толерантным сингулярным кубом (ТС кубом) пространства (X, τ). ТС куб называется пунктированным, если $u|(\mathop{\times}\limits^{n} \{0, 1\}) = x_0$, где x_0 — отмеченная точка в X. ТС куб u называется вырожденным, если u вырожден по последнему аргументу, т.е. не зависит от этого аргумента.

Определение 2. Полным двойным замедлением ТС куба $u : I_{\overline{m}} \to X$ назовем ТС куб $\check{u} : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{M_i} \to X$ такой, что $M_i = 2(m_i + 1) - 1$, $i = \overline{1, n}$, и

$$(\forall\ k_i = \overline{0, M_i},\ i = \overline{1, n}) \quad \check{u}\left(\left(\frac{k_i}{M_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) = u\left(\left(\frac{1}{m_i}\left[\frac{k_i}{2}\right]\right)_{i=\overline{1,n}}\right).$$

h-кратное полное двойное замедление будем обозначать $u^{\vee h}$. Можно выполнять полное двойное замедление разной кратности по разным аргументам

$$d(h_1, \ldots, h_n)(u) : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{M_i} \to X, \quad M_i = 2^{h_i}(m_i + 1) - 1,\ i = \overline{1, n},$$

$$d(h_1, \ldots, h_n)(u)\left(\left(\frac{k_i}{M_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\right) \stackrel{df}{=} u\left(\left(\frac{1}{m_i}\left[\frac{k_i}{2^{h_i}}\right]\right)_{i=\overline{1,n}}\right).$$

Определение 3. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ называется толерантным расслоением, если для всякой толерантной гомотопии $F : Y \times I_m \to B$ имеется накрывающая гомотопия $\overline{F} : Y \times I_m \to E$, такая, что $p \circ \overline{F} = F$, при условии, что начальное отображение $f_0 = F|(Y \times 0)$ имеет накрывающее отображение $\overline{f_0} = \overline{F}|(Y \times 0)$ такое, что $p \circ \overline{f_0} = f_0$.

Пространства $(E,\overline{\tau})$ и (B,τ) называются соответственно пространством и базой толерантного расслоения.

Предложение 1. *Для любого пунктированного ТС куба* $u : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(s)})} \to B$ *существует число* $l(u) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и пунктированный ТС куб* $w(l(u)) : I_{(M^{(1)},\dots,M^{(s)})} \to E$, $M^{(i)} = 2^{(l(u))}(m^{(i)}+1)$, $i = \overline{1,s}$ *такие, что* $p \circ w(l(u)) = u^{\vee l(u)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим множество вершин $\left\{\alpha |\ \alpha \in \overset{s}{\times} \{0,1\}\right\} \subset I_{(m^{(1)},\dots,m^{(s)})}$ толерантного куба $I_{\overline{m}} = I_{(m^{(1)},\dots,m^{(s)})}$ и отметим вершину $\alpha_0 = (0,\dots,0)$. Заметим, что у любого s-мерного толерантного куба множество вершин имеет вид $\overset{s}{\times} \{0,1\}$. Согласно предложениям 1.2.3. и 1.2.4. из [2] имеется толерантная гомотопия

$$G : I_{\overline{m}} \times I_N \to I_{\overline{m}},\ \ G : const_{\alpha_0} \sim \mathbf{1}_{I_{\overline{m}}}(rel\{\alpha_0\})\,.$$

Она индуцирует другую гомотопию

$$u \circ G : u \circ const_{\alpha_0} \sim u \circ 1_{I_{\overline{m}}},\ u \circ G : const_{b_0} \sim u.$$

Так как $p \circ const_{x_0} = const_{b_0}$, то по свойству накрывающей гомотопии толерантного расслоения p, имеется накрывающая гомотопия

$$G' : I_{\overline{m}} \times I_N \to E,\ G'|(I_{\overline{m}} \times 0) = const_{x_0},\ p \circ G' = u \circ G. \tag{1}$$

Из (1) в частности следует, что ТС куб $w' = G'|(I_{\overline{m}} \times 1) : I_{\overline{m}} \to E$ удовлетворяет свойству

$$p \circ w' = u \tag{2}$$

А так как ТС куб является пунктированным, то из (2) следует, что

$$\left(\forall \alpha \in \overset{s}{\times} \{0,1\}\right)\ \ p \circ w'(\alpha) = p(w'(\alpha)) = u(\alpha) = b_0 \tag{3}$$

Это значит, что все вершины $x_\alpha = w'(\alpha)$ лежат в линейно связном слое $(F,\overline{\tau})$. Воспользуемся этим, чтобы преобразовать w' в пунктированный

ТС куб с сохранением (2) с точностью до кратного полного двойного замедления.

Ввиду линейной связности $(F, \overline{\tau})$, для каждой вершины x_α существует толерантный путь такой, что

$$\omega_\alpha(0) = x_\alpha, \quad \omega_\alpha(1) = x_0 \tag{4}$$

Можно считать, что длины $m_1(\alpha)$ этих путей одинаковы. В противном случае следует взять продления $(\omega_\alpha)_{1,m_1}$, где $m_1 = \max\left\{m_1(\alpha) | \alpha \in \overset{s}{\times} \{0,1\}\right\}$, что не нарушит свойства (4). Получим теперь искомый ТС куб $w(l(u))$ с помощью индуктивного построения. Начнем с $w^{(0)} = w'$ и построим ТС куб:

$$w^{(k+1)} : I_{(M_{k+1}^{(1)},\dots,M_{k+1}^{(s)})} \to E,$$
$$M_{k+1}^{(i)} = 2(M_k^{(i)} + 1) - 1 = 2M_k^{(i)} + 1 = 2^{k+1}\left(m^{(i)} + 1\right) - 1, \ i = \overline{1,s},$$
$$\left(\forall k^{(i)} = \overline{0, M_{k+1}^{(i)}}, \ i = \overline{1,s}\right)$$
$$w^{(k+1)}\left(\left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\right) = \begin{cases} w^{(k)\vee}\left(\left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\right), \left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}} \notin \overset{s}{\times} \{0,1\}; \\ \omega_\alpha\left(\frac{k+1}{m_1}\right), \left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}} = \alpha \in \overset{s}{\times} \{0,1\}. \end{cases}$$

Легко доказывается, что отображение $w^{(k+1)}$ является толерантным и для него имеют место свойства:

$$\begin{gathered} w^{(k+1)}(\alpha) = \omega_\alpha\left(\frac{k+1}{m_1}\right); \\ p \circ w^{(k+1)} = u^{\vee k+1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Следовательно, при $k + 1 = m_1$ имеем ТС куб

$$w^{(m_1)} : I_{(M^{(1)},\dots,M^{(s)})} \to E, \quad M^{(i)} = 2^{m_1}\left(m^{(i)} + 1\right) - 1, \quad i = \overline{1,s};$$

$$w^{(m_1)}(\alpha) = \omega_\alpha(1) = x_0;$$

$$p \circ w^{(m_1)} = u^{\vee m_1}.$$

Это значит, что можно взять $l(u) = m_1, \ \ w\left(l(u)\right) = w^{(m_1)}$.

Предложение 1 доказано. □

Определение 4. Будем говорить, что ТС куб $u : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n)})} \to X$ имеет вырожденность равную t, если

$$\left(\forall k_i^{(j)} = \overline{0, m_i^{(j)}},\ j = \overline{0,n}\right) \quad u = u|_{k^{(n-t+1)}=\dots=k^{(n)}=0},$$

ТС куб $v : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n-t)})} \to X, \quad v = u|_{k^{(n-t+1)}=\dots=k^{(n)}=0}$ является невырожденным.

Будем говорить, что ТС куб $u : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n)})} \to E$ имеет вес $\nu(u) = s$, если ТС куб $p \circ u : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n)})} \to B$ имеет вырожденность $t = n - s$.

Вес ТС куба u в пространстве $(E, \overline{\tau})$ имеет очевидные свойства:

$$0 \leqslant \nu(u) \leqslant n = dim\ u, \tag{6}$$

$$\left(\forall\ j = \overline{1, \nu(u)}\right) \left(\forall\ \varepsilon = \overline{0,1}\right) \quad \nu(d_j^{\varepsilon}) < \nu(u), \tag{7}$$

$$\left(\forall\ j = \overline{\nu(u)+1, n}\right) \left(\forall\ \varepsilon = \overline{0,1}\right) \quad \nu(d_j^{\varepsilon}) = \nu(u), \tag{8}$$

Рассмотрим произвольный пунктированный ТС куб $u : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n)})} \to E$. Зафиксируем число s такое, что $\nu(u) \leqslant s \leqslant n$, и обозначим $t = n - s$. Определим два новых ТС куба:

$$\mathcal{B}_s u : I_{(m^{(1)},\dots,m^{(s)})} \to B, \quad \mathcal{F}_s u : I_{(m^{(s+1)},\dots,m^{(s+t)})} \to F,$$

$$\mathcal{B}_s u = p \circ u|_{k^{(s+1)}=\dots=k^{(s+t)}=0},$$

$$\mathcal{F}_s u = u|_{k^{(1)}=\dots=k^{(s)}=0}.$$

Отметим, что ввиду неравенства $\nu(u) \leqslant s$ и пунктрированности u, имеем

$$p \circ u|_{k^{(1)}=\dots=k^{(s)}=0} = p \circ u(0, \dots, 0) = p(x_0) = b_0,$$

откуда следует, что $\mathcal{F}_s u$ – ТС куб в F. Определенные выше ТС кубы $\mathcal{B}_s u$ и $\mathcal{F}_s u$ обладают рядом очевидных свойств:

$$\nu(u) < s \Rightarrow \mathcal{B}_s u\ -\ \text{вырожден}; \tag{9}$$

$$u \ - \ \text{вырожден}, \ t = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_s u \ - \ \text{вырожден}; \tag{10}$$

$$u \ - \ \text{вырожден}, \ t > 0 \Rightarrow \mathcal{F}_s u \ - \ \text{вырожден}; \tag{11}$$

$$(\forall j > s)(\forall \varepsilon = \overline{0,1}) \ \ \mathcal{B}_s d_j^\varepsilon u = \mathcal{B}_s u, \ \mathcal{F}_s d_j^\varepsilon u = d_{j-s}^\varepsilon \mathcal{F}_s u. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть имеются два произвольных пунктированных ТС куба*

$$u : I_{(m^{(1)}(u),\dots,m^{(s)}(u))} \to B, \quad v : I_{(m^{(1)}(v),\dots,m^{(t)}(v))} \to F,$$

где линейно связные толерантные пространства (B,τ) и $(F,\overline{\tau})$ являются базой и отмеченным слоем пунктированного толерантного расслоения

$$p : ((E,\overline{\tau}), x_0) \to ((B,\tau), b_0), \quad b_0 \in B, \quad x_0 \in p^{-1}(b_0) = F \subset E$$

и пусть $l_1(u)$ и $l_2(u)$ — два неотрицательных целых числа, определяемые следующими формулами

$$l_1(u) = l(u) = m_1, \tag{13}$$

$$l_2(u) = \sum_{i=\overline{1,s}} 2\left[2^{(l_1(u))}(m^{(i)}(u)+1) - 1\right] + 1. \tag{14}$$

Тогда существует пунктированный ТС куб

$$w = W(u,v) : I_{(M^{(1)}(u),\dots,M^{(s)}(u),M^{(1)}(v),\dots,M^{(t)}(v))} \to (E,\overline{\tau}),$$

в котором

$$M^{(i)}(u) = 2^{(l_1(u))}(m^{(i)}(u)+1) - 1, \ i = \overline{1,s}; \tag{15}$$

$$M^{(j)}(v) = 2^{(t\cdot l_2(u))}(m^{(j)}(v)+1) - 1, \ j = \overline{1,t}, \tag{16}$$

и который удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\nu(w) \leqslant s$,

2. $\mathcal{B}_s(w) = u^{\vee l_1(u)}$,

3. $\mathcal{F}_s(w) = v^{\vee t\cdot l_2(u)}$,

4. $(\forall j = \overline{1,t})$ $(\forall \varepsilon = \overline{0,1})$ $d^{\varepsilon}_{s+j}(w) = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})$ $\left(W(u,d^{\varepsilon}_{j}(v))\right)$,

5. v – *вырожденный* $\Rightarrow w$ – *вырожденный.*

Доказательство

Воспользуемся индукцией по $t = dim\ v$.

При $t = 0$ утверждение теоремы 1 эквивалентно утверждению предложения 1, которое уже доказано.

Пусть утверждение теоремы 1 имеет место для всех ТС кубов v, чья размерность $dim\ v < t$.

Рассмотрим ТС куб такой, что $dim\ v = t$. Но сначала предположим, что ТС куб v - вырожден, т. е. $v = d^0_t(v) = d^1_t(v)$. Тогда определим ТС куб $w = W(u,v)$ как вырожденный ТС куб, задаваемый формулой

$$W(u,v) = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t})\left(W(u,d^0_t(v))\right) \tag{17}$$

Условие 5) имеет место по построению. Условие 1) следует из (17) и предположения индукции, т. к. $dim\ d^0_t(v) = t-1$. При проверке условия 2) также воспользуемся предположением индукции:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_s(w) = p\circ w|_{k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t)}=0} = \\ = p\circ W(u,d^0_t(v))|_{k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t-1)}=0} = u^{\vee l_1(u)}.\end{aligned}$$

И еще раз применим предположение индукции для проверки условия 3):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s(w) = w|_{k^{(1)}=\ldots=k^{(s)}=0} = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t})\left(W(u,d^0_t(v))\right)|_{k^{(1)}=\ldots=k^{(s)}=0} = \\ = \left(\mathcal{F}_s(W(u,d^0_t(v)))\right)^{\vee l_2(u)} = \left(((d^0_t(v))^{\vee(t-1)l_2(u)}\right)^{\vee l_2(u)} = v^{\vee t\cdot l_2(u)}.\end{aligned}$$

Проверим теперь условие 4). Если $j = t$, то (17) дает нам

$$d^{\varepsilon}_{s+t}(w) = w|_{k^{(s+t)}=\varepsilon} = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(W(u,d^{\varepsilon}_t(v))\right).$$

Если $j < t$, то $d_j^{\varepsilon}(v)$ - вырожденный ТС куб. Тогда по предположению индукции $W(u, d_j^{\varepsilon}(v))$ — тоже вырожденный ТС куб. Поэтому имеем:

$$d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(W(u,d_j^{\varepsilon}(v))\right)=$$
$$=d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(d_{s+t-1}^{\varepsilon}\left(W(u,d_j^{\varepsilon}(v))\right)\right)=$$
$$=d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-2})\left(W(u,d_{t-1}^{\varepsilon}\circ d_j^{\varepsilon}(v))\right)\right)=$$
$$=d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-2})\left(W(u,d_j^{\varepsilon}\circ d_t^{\varepsilon}(v))\right)\right)=$$
$$=d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(d_{s+j}^{\varepsilon}\left(W(u,d_t^{\varepsilon}(v))\right)\right)=$$
$$=d_{s+j}^{\varepsilon}\left(d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t})\left(W(u,d_t^{\varepsilon}(v))\right)\right)=$$
$$=d_{s+j}^{\varepsilon}\left(W(u,v)\right)$$

Рассмотрим теперь случай, когда v — невырожденный ТС куб размерности t. Согласно предположению индукции имеем следующий набор ТС кубов пространства $((E,\overline{\tau}),x_0)$

$$\left\{W(u,d_j^{\varepsilon}(v))\mid j=\overline{1,t},\ \varepsilon=\overline{0,1}\right\},\tag{18}$$

каждый из которых является пунктированным и удовлетворяет свойствам 1)–5). Каждый ТС куб $W(u,d_j^{\varepsilon}(v))$ семейства (18) является толерантным отображением, определенном на толерантном кубе вида

$$\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{M^{(i)}(u)}\times\mathop{\times}_{i=1}^{j-1} I_{M^{(i)}(d_j^{\varepsilon}(v))}\times\{\varepsilon\}\times\mathop{\times}_{i=j+1}^{t} I_{M^{(i)}(d_j^{\varepsilon}(v))},\tag{19}$$

где $M^{(i)}(d_j^{\varepsilon}(v))=2^{((t-1)l_2(u))}(m^{(i)}(v)+1)-1,\ i=\overline{1,t}$. Каждый из Т кубов вида (19) является толерантным подпространством Т куба

$$\left(\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{M^{(i)}(u)}\times\mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{M^{(i)}(\partial v)},\ \mathop{\times}_{i=1}^{s}\iota_{M^{(i)}(u)}\times\mathop{\times}_{i=1}^{t}\iota_{M^{(i)}(\partial v)}\right),\tag{20}$$

где $M^{(i)}(\partial v) = 2^{((t-1)l_2(u))}(m^{(i)}(v)+1)-1,\ i=\overline{1,t}$. Легко показать,что ТС кубы набора (18) согласованы на ребрах Т куба (20), т. е. на пересечениях Т кубов (19) ТС кубы набора (18), одновременно определенные на этих пересечениях, принимают одинаковые значения, т.е.

$$W(u, d_{j_1}^{\varepsilon_1}(v))(P) = W(u, d_{j_2}^{\varepsilon_2}(v))(P). \tag{21}$$

Однако, этой согласованности, вообще говоря, недостаточно для того, чтобы с помощью набора ТС кубов (18) определить толерантное отображение на толерантном пространстве

$$\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{M^{(i)}(u)} \times\ \partial\ \left(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{M^{(j)}(\partial v)}\right)$$

Ввиду этого, вместо набора (18) рассмотрим набор ТС кубов вида:

$$\left\{ d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{1,\ldots,1}_{t-1})\left(W(u,d_j^{\varepsilon}(v))\right)|j=\overline{1,t},\ \varepsilon=\overline{0,1}\right\}, \tag{22}$$

который определяет толерантное отображение на

$$\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{M^{(i)}(u)} \times\ \partial\ \left(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}\right). \tag{23}$$

Это отображение, совпадающее с ТС кубами набора (22) на множествах их определения, обозначим $W(u, \partial v)$.

Следующей целью является построение толерантного продолжения этого отображения на весь T куб (20). Это можно сделать после подходящего замедления по t последним аргументам.

Искомое отображение сначала построим в точках, чьи первые s координат имеют вид

$$\left(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0\right),\ k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}.$$

Начнем с $k^{(1)} = 0$. Согласно нашему построению толерантное отображение $W(u, \partial v)$ равно одному из ТС кубов $d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{1,\ldots,1}_{t-1})\left(W(u,d_j^{\varepsilon}(v)\right)$

на области определения последнего. Следовательно имеет место предположение индукции, позволяющее применить свойство 3), в результате чего получаем:

$$W(u,\partial v) \mid \{0\} \times \ \partial(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}) = v^{\vee((t-1)l_2(u)+1)} \mid \partial(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}) \tag{24}$$

Формула (24) подсказывает очевидный способ определения продолженного на $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}$ толерантного отображения:

$$\begin{aligned} &w_0 : \{0,\ldots,0\} \times \ \mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \longrightarrow F_{b_0} \subset E, \\ &w_0 \mid \{0\} \times \mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} = v^{\vee((t-1)l_2(u)+1)} \mid \mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \end{aligned} \tag{25}$$

Перейдем теперь к случаю $k^{(1)} = 1$. В силу толерантности отображения $W(u,\partial v)$ для любых толерантных точек Q и Q' в пространстве

$$\partial(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}) \subset \mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}$$

имеем

$$W(u,\partial v)(0,\ldots,0,Q) \,\overline{\tau}\, W(u,\partial v)(1/M^{(1)(u)}0,\ldots,0,Q'). \tag{26}$$

Имея ввиду свойства 1) и 2), которые следуют из предположения индукции, введем обозначение следующей точки из (B,τ)

$$\begin{aligned} b_1 = p \circ W(u,\partial v)|(\{\underbrace{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)}_{s}\} \times \partial(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}) = \\ = u^{\vee l_1(u)}(1/M^{(1)}(u),0\ldots,0). \end{aligned} \tag{27}$$

Так как $b_0 = u^{\vee l_1(u)}(0,\ldots,0)$, то очевидно, что $b_1 \tau b_0$. Как обычно обозначим слой $p^{-1}(b_1) = F_{b_1}$. Рассмотрим T куб $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times I_1$ и определим ТС куб в пространстве (B,τ):

$$f : \mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times \ I_1 \longrightarrow (B,\tau)$$

$$f|(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times \{0\}) = b_0, \ \ f|(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times \{1\}) = b_1.$$

Согласно формуле (25) отображение $f|(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times \{0\})$ поднимается в $(E, \overline{\tau})$ до отображения w_0. Свойство накрывающей толерантной гомотопии для толерантного расслоения $p : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$ обеспечивает существование толерантного отображения

$$\overline{f} : \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times I_1 \longrightarrow (E, \overline{\tau}),\ p \circ \overline{f} = f,\ \overline{f}\ |(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times \{0\}) = w_0$$

Ввиду свойства $p \circ \overline{f} = f$ и определения f имеем толерантное отображение

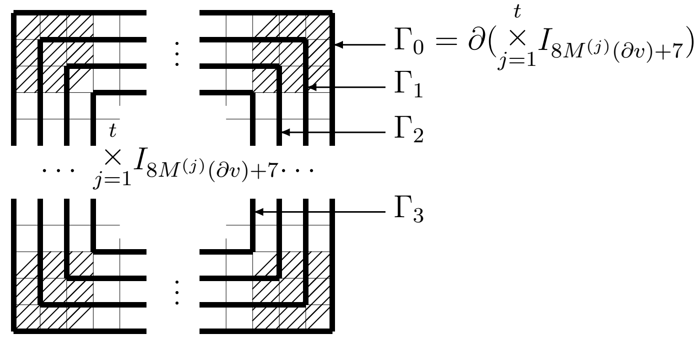
$$w_1' = \overline{f}\ |(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \times \{1\}) : \{(1/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1} \longrightarrow F_{b_0}.$$

Отображение w_1' в отличие от w_0, на граничном толерантном пространстве

$$\{(1/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times\ \partial(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}) \subset \{(1/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}$$

может не совпадать с предписанным отображением $W(u, \partial v)$. Чтобы получить такое совпадение, мы должны подправить w_1' на этой границе. Но сделать это мы должны так, чтобы сохранить толерантность подправленного отображения $\overline{f}$. Для решения этой задачи мы будем вынуждены взять 2-кратное полное двойное замедление ТС кубов w_0 и w_1', или эквивалентно, 2-кратное полное двойное замедление отображения $\overline{f}$ по t, аргументам из $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}$.

На следующем рисунке схематично изображен интересующий нас Т куб



На рисунке через $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ обозначены границы четырех концентрических Т кубов. Γ_0 представляет собой границу $\partial(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{8M^{(j)}(\partial v)+7})$ состоящую из граней,

$$d_j^{\varepsilon}\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}\right)=\left\{\left(\frac{k^{(s+i)}}{8M^{(i)}(\partial v)+7}\right)_{i=\overline{1,t}}\middle|\frac{k^{(s+j)}}{8M^{(j)}(\partial v)+7}=\varepsilon\right\}.$$

Соответствующие грани, из которых состоят $\Gamma_r, r=\overline{0,3}$, задаются в кубе $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{8M^{(j)}(\partial v)+7}$ следующими уравнениями

$$\frac{k^{(s+j)}}{8M^{(j)}(\partial v)+7}=\left|\varepsilon-\frac{r}{8M^{(j)}(\partial v)+7}\right|.$$

В виду 2-кратного полного двойного замедления отображения $w_0^{\vee 2}$ и $w_1'^{\vee 2}$ на подпространстве

$$\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\subset\mathop{\times}\limits_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}$$

будут принимать значения, которые принимали отображения w_0 и w_1' на границе $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{t} I_{2M^{(i)}(\partial v)+1}$. В частности, в заштрихованной области отображение $w_0^{\vee 2}$ тождественно равно x_0. Заметим, что в нашем распоряжении имеется еще одно толерантное отображение, определенное на Γ_0. Это отображение

$$(d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{3,\ldots,3}_{t-1})\,(W(u,\partial v)))|\left(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\times\Gamma_0\right).$$

Рассмотрим $X=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$, в котором толерантность наследуется из T куба $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}$, определим толерантное отображение $g: X\times I_1\longrightarrow B$ следующими равенствами:

$$g|(\Gamma_0\times I_1)=b_1,\ g|(\Gamma_1\times\{0\})=b_0,\ g|(\Gamma_1\times\{1\})=b_1,\ g|(\Gamma_2\times I_1)=b_1 \quad (28)$$

Толерантность отображения g очевидна, т. к. $b_0\tau b_1$. Поднимем отображение $g|(X\times\{0\})$ до отображения $\overline{g}|(X\times\{0\}): X\times\{0\}\to(E,\overline{\tau})$, которое определим формулами

$$\begin{aligned}
&\overline{g}|(\Gamma_0\times\{0\})=(d(0,\ldots,0,3,\ldots,3)\,(W(u,\partial v)))|\left(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\times\Gamma_0\right),\\
&\overline{g}|(\Gamma_1\times\{0\})=w_0^{\vee 2}|\left(\{(0,\ldots,0)\times\Gamma_1\right),\\
&\overline{g}|(\Gamma_2\times\{0\})=w_1'^{\vee 2}|\left(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\times\Gamma_2\right).
\end{aligned}\tag{29}$$

Толерантность отображения $\overline{g}|(X\times\{0\})$ следует из (25), (26) и из толерантности отображения $\overline{f}$. Накрывающее свойство $p\circ\overline{g}|(X\times\{0\})=$ $=g|(X\times\{0\})$ следует из (28), (29), а также из свойства 2) для $W(u,\partial v)$, что имеет место по индукции, и из накрывающего свойства для f и $\overline{f}$. Т.о., мы можем применить свойство накрывающей гомотопии для толерантного расслоения $p:(E,\overline{\tau})\longrightarrow(B,\tau)$, из которого следует, что отображение g поднимается до толерантного отображения $\overline{g}:X\times I_1\longrightarrow$ $\longrightarrow(E,\overline{\tau})$, продолжающего $\overline{g}|(X\times\{0\})$ и накрывающего g, т. е. $p\circ\overline{g}=g$.

Определим теперь отображение

$$w_1:\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times\mathop{\times}_{i=1}^{t}I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}\longrightarrow F_{b_1}\subset E,$$

которое нужным нам образом „подправляет“ отображение w_1' (или точнее $w_1'^{\vee 2}$) и определяется формулами

$$\begin{aligned}
&w_1|(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times(\mathop{\times}_{j=1}^{t}I_{8M^{(j)}(\partial v)+7}\backslash X))_{=}\\
&=w_1'^{\vee 2}|(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times(\mathop{\times}_{j=1}^{t}I_{8M^{(j)}(\partial v)+7}\backslash X)),\\
&w_1|(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times\Gamma_2=\overline{g}|(\Gamma_2\times\{0\})=\\
&=w_1'^{\vee 2}|\left(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\times\Gamma_2\right),\\
&w_1|(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times\Gamma_1=\overline{g}|(\Gamma_1\times\{1\}),\\
&w_1|(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times\Gamma_0=\overline{g}|(\Gamma_0\times\{0\})=\\
&=(d(0,\ldots,0,3,\ldots,3)\,(W(u,\partial v)))|\left(\{(1/M^{(1)}(u),0,\ldots,0)\}\times\Gamma_0\right).
\end{aligned}\tag{30}$$

Толерантность отображения w_1 следует из (27) и толерантности отображения $\overline{g}$. Более того, из толерантности отображений $\overline{g}$ и $\overline{f}$ и из

2-кратности полного двойного замедления $w_0^{\vee 2}$ следует толерантность отображения

$$w_{\overline{0,1}} : \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0,1}\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7} \longrightarrow E,$$

которое определяется следующим образом

$$w_{\overline{0,1}}|(\{(0, \ldots, 0)\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}) = w_0^{\vee 2}|(\{(0, \ldots, 0)\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7} \setminus X)),$$
$$w_{\overline{0,1}}|(\{(1/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times (\mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}) =$$
$$= w_1|(\{(1/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}). \tag{31}$$

Отображение $w_{\overline{0,1}}$ по построению удовлетворяет следующим свойствам:

$$\nu(w_{\overline{0,1}}) \leqslant 1, \tag{32}$$

$$\mathcal{B}_1(w_{\overline{0,1}}) = u^{\vee l_1(u)} \left| \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0,1}\} \right., \tag{33}$$

$$\mathcal{F}_1(w_{\overline{0,1}}) = v^{\vee (t-1) \cdot l_2(u)+3}, \tag{34}$$

$$(\forall j = \overline{1,t}) \;\; d^{\varepsilon}_{1+j}(w_{\overline{0,1}}) =$$

$$= (d(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{t-1}) \left(W(u, d^{\varepsilon}_j(v))\right)) \left| \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0,1}\} \times \right.$$
$$\times d^{\varepsilon}_j(\mathop{\times}_{i=1}^{t} \; I_{8M^{(i)}(\partial v)+7}). \tag{35}$$

Описанную выше процедуру, примененную в случае $k^{(1)} = 1$, мы должны выполнить еще $M^{(1)}(u) - 1$ раз для $k^{(1)} = \overline{2, M^{(1)}(u)}$.

После этого мы будем иметь толерантное отображение

$$w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}} : \left\{\left(\tfrac{k^{(1)}}{M^{(1)}(u)}, 0, \ldots, 0\right) | k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}\right\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \longrightarrow E,$$

которое удовлетворяет свойствам:

$$\nu(w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}) \leqslant 1, \tag{36}$$

$$\mathcal{B}_1(w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}) = u^{\vee l_1(u)} \Big| \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}\}, \quad (37)$$

$$\mathcal{F}_1(w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}) = v^{\vee(t-1)\cdot l_2(u)+1+2M^{(1)}(u)}, \qquad (38)$$

$$(\forall j = \overline{1,t}) \;\; d^{\varepsilon}_{1+j}(w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}) =$$

$$= (d(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \underbrace{1 + 2M^{(1)}(u), \ldots, 1 + 2M^{(1)}(u)}_{t-1}) \left(W(u, d^{\varepsilon}_j(v))\right)) \,|$$

$$|\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}\} \times d^{\varepsilon}_j(\mathop{\times}_{i=1}^{t} \; I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1}). \qquad (39)$$

Кроме того, важно отметить, что отображение $w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}$ является пунктированным ТС кубом. В самом деле, вершины этого ТС куба имеют вид

$$w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \alpha), \quad w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}(\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{s}, \alpha),$$

где α-вершины Т куба $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1}$ и поэтому, согласно построению ТС куба $w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}$, это будут некоторые из вершин ТС кубов вида

$$d(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \underbrace{1 + 2M^{(1)}(u), \ldots, 1 + 2M^{(1)}(u)}_{t-1}) \left(W(u, d^{\varepsilon}_j(v))\right),$$

которые являются пунктированными, согласно предположению индукции.

Введем теперь в рассмотрение еще одну переменную $k^{(2)} = \overline{0, M^{(2)}(u)}$, и снова проведем построения во многом аналогичные предыдущим. Отправным пунктом этих новых построений будет отображение $w_{\overline{0,M^{(1)}(u)}}$, которое из соображений краткости и удобства обозначим $w(1)_0$. Рассмотрим Т куб

$$K = I_{M^{(1)}(u)} \times I_1 \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} =$$

$$= \left\{ \left(\tfrac{k^{(1)}}{M^{(1)}(u)}, \tfrac{k^{(2)}}{M^{(2)}(u)}, 0, \ldots, 0 \right) | k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}, k^{(2)} = \overline{0,1} \right\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1}$$

Это толерантное пространство для краткости обозначим (K,ι) и определим толерантное отображение $F:(K,\iota)\longrightarrow(B,\tau)$. Если через Q обозначим произвольный набор значений t последних аргументов, то положим по определению

$$F\left(\frac{k^{(1)}}{M^{(1)}(u)},\frac{k^{(2)}}{M^{(2)}(u)},0,\ldots,0,Q\right)=u^{\vee l_1(u)}\left(\frac{k^{(1)}}{M^{(1)}(u)},\frac{k^{(2)}}{M^{(2)}(u)},0,\ldots,0\right) \tag{40}$$

Отображение $F|_{k^{(2)}=0}$ поднимается в $(E,\overline{\tau})$ до отображения $w(1)_0$, которое согласно свойству (37) накрывает $F|_{k^{(2)}=0}=p\circ w(1)_0$. Так как p — толерантное расслоение, то существует толерантное отображение $\overline{F}$:

$$\left(\exists\overline{F}:(K,\iota)\longrightarrow(E,\overline{\tau})\right)\quad F|_{k^{(2)}=0}=w(1)_0,\quad p\circ\overline{F}=F. \tag{41}$$

Рассмотрим отображение $w'(1)_1=F|_{k^{(2)}=1}$. Толерантное отображение $w'(1)_1$ согласно (41) и (40) имеет проекцию, не зависящую от t последних аргументов. Отображение $w'(1)_1$ так же как и w'_1 требует исправления на множестве

$$I_{M^{(1)}(u)}\times\partial(\mathop{\times}_{i=1}^{t}\ I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1})$$

чтобы принимать на этом множестве значения, предписанные предположением индукции. Как и раньше выполняем 2-кратное полное двойное замедление по t последним аргументам. Затем в T кубе

$$\mathop{\times}_{i=1}^{t}\ I_{2^{1+2M^{(1)}(u)}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1}$$

берем ту же самую систему концентрических границ, что и на рис. 8, сохранив при этом те же обозначения $\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$. Рассмотрим толерантное пространство

$$Y=\bigcup_{r=0}^{2}I_{M^{(1)}(u)}\times\Gamma_r,$$

которое является подпространством в соответствующем Т кубе со стандартной толерантностью, и определим толерантное отображение

$$G : Y \times I_1 = \bigcup_{r=0}^{2} I_{M^{(1)}(u)} \times I_1 \times \Gamma_r \longrightarrow B$$

следующими формулами:

$$G|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times I_1 \times \Gamma_0\right) = u^{\vee l_1(u)}|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(1/M^{(2)}(u), \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2})\}),$$

$$G|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{0\} \times \Gamma_1\right) = u^{\vee l_1(u)}|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1})\}),$$

$$G|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{1\} \times \Gamma_1\right) = u^{\vee l_1(u)}|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(1/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0)\}),$$

$$G|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times I_1 \times \Gamma_2\right) = u^{\vee l_1(u)}|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(1/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0)\}),$$

что является аналогом (25). Поднимем отображение $G|(Y \times \{0\})$ до $\overline{G}|(Y \times \{0\}) \longrightarrow E$, определяемого следующим образом:

$$\overline{G}|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{0\} \times \Gamma_0\right) =$$

$$= (d(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, \underbrace{1 + 2M^{(1)}(u), \ldots, 1 + 2M^{(1)}(u)}_{t-1})\,(W(u, \partial v))\,|(I_{M^{(1)}(u)} \times$$

$$\times \{(1/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times \Gamma_0), \overline{G}|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{0\} \times \Gamma_1\right) =$$

$$= (d(0, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t})(w(1)_0))|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(0, \ldots, 0)\} \times \Gamma_1),$$

$$\overline{G}|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{0\} \times \Gamma_2\right) =$$

$$= (d(0, \underbrace{2, \ldots, 2}_{t})(w'(1)_1))|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(1/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times \Gamma_2)$$

что аналогично (28). Толерантность отображения $\overline{G}|(Y \times \{0\})$ обеспечивается конструкцией отображения $w(1)_0$, его 2-кратной замедленностью, толерантностью отображения $W(u, \partial v)$, а также толерантностью $\overline{F}$. Накрывающее свойство $p \circ \overline{G}|(Y \times \{0\}) = G|(Y \times \{0\})$ следует из свойства 2) для $W(u, \partial v)$ и из накрывающего свойства (41) для F

и $\overline{F}$. Отсюда по свойству накрывающей гомотопии для толерантного расслоения $p : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$ существует толерантное отображение $\overline{G} : Y \times I_1 \longrightarrow (E, \overline{\tau})$, продолжающее $\overline{G}|(Y \times \{0\})$ и накрывающее G, т. е. $p \circ \overline{G} = G$. Далее строим толерантное отображение

$$w(1)_1 : \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), 1/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}\} \times$$
$$\mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)+2}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \longrightarrow E,$$

которое исправляет отображение $w(1)_1'$ нужным образом, о чем говорилось выше. Отображение $w(1)_1$ определим по аналогии с (30):

$$w(1)_1|_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(1)}(u)}\}\times}$$
$$\times(\mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)+2}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \setminus \bigcup_{r=0}^{2} \Gamma_r)) =$$
$$= (d(0, 2, \ldots, 2)(w'(1)_1))|(_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(1)}(u)}\}\times}$$
$$\times\ (\mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2M^{(1)}(u)+2}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \setminus \bigcup_{r=0}^{2} \Gamma_r))_,$$

$$w(1)_1|(_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(1)}(u)}\}} \times \Gamma_2) =$$
$$= \overline{G}|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{0\} \times \Gamma_2\right) =$$
$$= (d(0, 2, \ldots, 2)(w'(1)_1))|(_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(1)}(u)}\}} \times \Gamma_2),$$

$$w(1)_1|(_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(1)}(u)}\}} \times \Gamma_1) =$$
$$= \overline{G}|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{1\} \times \Gamma_1\right),$$

$$w(1)_1|(_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(1)}(u)}\}} \times \Gamma_0) =$$
$$= \overline{G}|\left(I_{M^{(1)}(u)} \times \{0\} \times \Gamma_0\right) =$$
$$= (d(0, \ldots, 0, 1 + 2M^{(1)}(u) + 2, \ldots, 1 + 2M^{(1)}(u) + 2)\,(W(u, \partial v))\,|$$
$$|(I_{M^{(1)}(u)} \times \{(1/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0)\} \times \Gamma_0).$$

Толерантность отображения $w(1)_1$ следует из толерантности отображения $\overline{G}$. Толерантность отображений и 2-кратность полного двойного замедления в $(d(0, 2, \ldots, 2)(w(1)_0))$ позволяет определить толерантное отображение

$$w(1)_{\overline{0,1}} : \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), k^{(2)}/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(1)} = \overline{0, M^{(1)}(u)}, k^{(2)} = \overline{0,1}\} \times$$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{t} \ I_{2^{1+2M^{(1)}(u)+2}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \longrightarrow E,$$

такое, что $w(1)_{\overline{0,1}}|_{k^{(2)}=0} = (d(0,2,\ldots,2)(w(1)_0)),\ w(1)_{\overline{0,1}}|_{k^{(2)}=1} = w(1)_1$.

Далее мы проводим такие же построения еще $M^{(2)}(u) - 1$ раз для $k^{(2)} = \overline{2, M^{(2)}(u)}$, в результате чего получим толерантное отображение

$$w(1)_{\overline{0,M^{(2)}(u)}} : \{(k^{(1)}/M^{(1)}(u), k^{(2)}/M^{(2)}(u), 0, \ldots, 0) | k^{(i)} = \overline{0, M^{(i)}(u)}, i = \overline{1,2}\} \times$$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{t} \ I_{2^{1+2(M^{(1)}(u)+M^{(2)}(u))}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \longrightarrow E,$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

$$\nu(w(1)_{\overline{0,M^{(2)}(u)}}) \leqslant 2,$$

$$\mathcal{B}_2(w(1)_{\overline{0,M^{(2)}(u)}}) = u^{\vee l_1(u)} |_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(i)}(u)},i=\overline{1,2}\}} ,$$

$$\mathcal{F}_2(w_(1)\overline{0, M^{(2)}(u)}) = v^{\vee((t-1)\cdot l_2(u)+1+2(M^{(1)}(u)+M^{(2)}(u)))},$$

$$(\forall j = \overline{1,t}) \ \ d^{\varepsilon}_{2+j}(w_{\overline{0,M^{(2)}(u)}}) =$$

$$= (d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s}, \underbrace{1 + 2(M^{(1)}(u) + M^{(2)}(u)), \ldots, 1 + 2(M^{(1)}(u) + M^{(2)}(u))}_{t-1}$$

$$\big(W(u, d^{\varepsilon}_j(v))\big)\big) \,|\, |_{\{(k^{(1)}/M^{(1)}(u),1/M^{(2)}(u),0,\ldots,0)|k^{(1)}=\overline{0,M^{(i)}(u)},i=\overline{1,2}\}} \times$$

$$\times d^{\varepsilon}_j \ (\mathop{\times}_{i=1}^{t} I_{2^{1+2(M^{(1)}(u)+M^{(2)}(u))}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1})),$$

$$w(1)_{\overline{0,M^{(2)}(u)}} \text{ — пунктированный ТС куб.}$$

Затем мы вновь переобозначаем $w(1)_{\overline{0,M^{(2)}(u)}} = w(2)_0$ и переходим к следующей переменной $k^{(3)} = \overline{0, M^{(3)}(u)}$. Наши построения завершатся, когда будет получено толерантное отображение

$$w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}} : \mathop{\times}_{i=1}^{t} \ I_{M^{(i)}(u)} \mathop{\times}_{i=1}^{t} \ I_{2^{1+2(M^{(1)}(u)+\ldots+M^{(s)}(u))}(M^{(i)}(\partial v)+1)-1} \longrightarrow E.$$

Кроме того $l_2(u) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{s} M^{(i)}(u)$ и $2^{l_2(u)}(M^{(j)}(\partial v) + 1) - 1 = M^{(j)}(v)$, $j = \overline{1,t}$. Поэтому можно сказать, что в результате всех построений имеем толерантное отображение

$$w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}} : I_{(M^{(1)}(u),\ldots,M^{(s)}(u),M^{(1)}(v),\ldots,M^{(t)}(v))} \longrightarrow E,$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

$$\nu\left(w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}}\right) \leqslant s,$$

$$\mathcal{B}_s\left(w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}}\right) = u^{\vee l_1(u)},$$

$$\mathcal{F}_s\left(w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}}\right) = v^{\vee t\cdot l_2(u)},$$

$$(\forall j = \overline{1,t})(\forall \varepsilon = \overline{0,1})$$
$$d^{\varepsilon}_{s+j}\left(w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}}\right) = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(W(u,d^{\varepsilon}_{j}(v))\right),$$

$$w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}} \text{ - пунктированный ТС куб.}$$

Т.о., в случае невырожденного ТС куба v в качестве искомого ТС куба $w = W(u,v)$ можно взять построенный ТС куб $w(s-1)_{\overline{0,M^{(s)}(u)}} = W(u,v) = w$.

Теорема 1 доказана. $\square$

Отметим, что 1-мерными пунктированными ТС кубами являются замкнутые толерантные пути, другими словами – петли с вершинами в отмеченной точке. Пусть $\omega : \left(I_{m(\omega)}, \iota_{m(\omega)}\right) \longrightarrow (B,\tau)$ — толерантная петля с вершиной в точке $\omega(0) = \omega(1) = b_0$. Ее можно рассматривать как толерантную гомотопию точечных отображений, и поэтому, согласно определению толерантного расслоения, имеется $\overline{\omega} : I_{m(\omega)} \longrightarrow E$ – толерантный путь, накрывающий ω, то есть $p \circ \overline{\omega} = \omega$, и такой, что $\overline{\omega}(0) = x_0$.

Так как ω – петля, то $\overline{\omega}(1) \in p^{-1}(\omega(1)) = p^{-1}(b_0) = F$. В линейно связном пространстве $(F, \overline{\tau})$ возьмем толерантный путь $\overline{\overline{\omega}} : I_{m(\overline{\overline{\omega}})} \longrightarrow F$ из $\overline{\overline{\omega}}(0) = \overline{\omega}(1)$ в $\overline{\overline{\omega}}(1) = x_0$. Тогда толерантный путь $w_\omega \overset{df}{=} \overline{\omega} * \overline{\overline{\omega}}$ является петлей в $(E, \overline{\tau})$ с вершиной в x_0. При этом петля w_ω накрывает продленную петлю $\omega_{1,m(\omega)+m(\overline{\overline{\omega}})}$. Значит для каждой петли $\omega : I_{m(\omega)} \longrightarrow B$ с вершиной в b_0 имеется натуральное число $M \geqslant m(\omega)$ и толерантная петля $w_\omega : I_M \longrightarrow E$ с вершиной в точке x_0 такая, что $p \circ w_\omega = \omega_{1,M}$. Среди таких натуральных M возьмем минимальное

$$M(\omega) = \min\{M \in \mathbb{N}|\ (\exists \text{ петля }\ w_\omega : I_M \longrightarrow E)\ p \circ w_\omega = \omega_{1,M}\} \qquad (42)$$

Очевидны свойства

$$m(\omega) \leqslant N \leqslant M(\omega) \Longrightarrow M(\omega_{1,N}) = M(\omega); \qquad (43)$$

$$N \geqslant M(\omega) \Longrightarrow M(\omega_{1,N}) = N. \qquad (44)$$

Воспользуемся введенными понятиями и обозначениями в следующем предложении.

Предложение 2. *Пусть* $\omega : I_{m(\omega)} \longrightarrow (B, \tau)$ *— произвольная толерантная петля с вершиной в точке* $b_0 = \omega(0) = \omega(1)$. *Пусть*

$$v : I_{(m^{(1)}(v), \ldots, m^{(n)}(v))} \longrightarrow F$$

— произвольный n*-мерный пунктированный ТС куб. Тогда существует пунктированный ТС куб*

$$W_\omega(v) : I_{(M(\omega), M^{(1)}(v), \ldots, M^{(n)}(v))} \longrightarrow E,$$

в котором $M(\omega)$ *определено в (42),* $(\forall\, j = \overline{1,n})$ $M^{(j)}(v) = 2^{n \cdot l(\omega)}(m^{(j)}(v)+$ $+1) - 1$, $l(\omega) = 2M(\omega)$ *и который удовлетворяет следующим свойствам:*

1. $d_1^0(W_\omega(v)) = v^{\vee n \cdot l(\omega)}$,

2. $p \circ W_\omega(v) = \omega_{1,M(\omega)}$,

3. $(\forall j = \overline{1,t})(\forall \varepsilon = \overline{0,1})\ \ d^{\varepsilon}_{1+j}(W_\omega(v)) = d(0, \underbrace{l(\omega), \ldots, l(\omega)}_{n-1}) \left(W_\omega(d^{\varepsilon}_{j}(v))\right)$,

4. v *– вырожденный ТС куб* $\Rightarrow W_\omega(v)$ *– вырожденный ТС куб.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Утверждение предложения 2 является частным случаем теоремы 1, которая применяется к случаю, когда $u = \omega_{1,M(\omega)},\ l_1(u) = 0$. □

Замечание 1) к предложению 2. Из предложения 2 и свойства (43) следует:

$$m(\omega) \leqslant N \leqslant M(\omega) \Rightarrow W_\omega = W_{\omega_{1,N}} = W_{\omega_{1,M(\omega)}}. \tag{45}$$

Замечание 2) к предложению 2. Прямое доказательство предложения 2 должно повторять пошаговые построения $w_{\overline{0,n}}$ в доказательстве теоремы 1. При этих построениях, в случаях когда

$$\omega_{1,M(\omega)}\left(\frac{k+1}{M(\omega)}\right) = b_{k+1} = b_k = \omega_{1,M(\omega)}\left(\frac{k}{M(\omega)}\right),$$

можно не использовать свойство накрывающей толерантной гомотопии для расслоения p. В этих случаях для построения $k+1$ -го шага можно взять построения предыдущего шага с учетом 2-кратного замедления. В результате будем иметь дополнительное свойство:

$$\begin{gathered}\omega_{1,M(\omega)}\left(\tfrac{k+1}{M(\omega)}\right) = \omega_{1,M(\omega)}\left(\tfrac{k}{M(\omega)}\right) \Rightarrow W_\omega\left(\left\{\tfrac{k+1}{M(\omega)}\right\} \times \mathop{\times}_{j=1}^{n} I_{M^{(j)}(v)}\right) = \\ = W_\omega\left(\left\{\tfrac{k}{M(\omega)}\right\} \times \mathop{\times}_{j=1}^{n} I_{M^{(j)}(v)}\right).\end{gathered} \tag{46}$$

Отсюда в частности следует, что

$$\begin{gathered}(\forall k = \overline{m(\omega), M(\omega)})\ \ W_\omega\left(\left\{\tfrac{k}{M(\omega)}\right\} \times \mathop{\times}_{j=1}^{n} I_{M^{(j)}(v)}\right) \equiv \\ \equiv W_\omega\left(\left\{\tfrac{m(\omega)}{M(\omega)}\right\} \times \mathop{\times}_{j=1}^{n} I_{M^{(j)}(v)}\right),\end{gathered} \tag{47}$$

а при условии (44) , еще, что:

$$N \geqslant M(\omega) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_{\omega_{1,N}}(v) = d(0, \underbrace{\overline{n2(N - M(\omega))}}_{n}) \left((W_\omega(v))_{1,N}\right). \tag{48}$$

Замечание 3) к предложению 2. При прямых построениях отображения W_ω можно потребовать выполнения дополнительного свойства:

$$(\forall l \geqslant 0) \quad W_\omega(v^{\vee l}) = d(0, \underbrace{\bar{l}}_{n})(W_\omega(v)) \tag{49}$$

Свойство (49) обеспечивается , если при построении W_ω, после задания $W_\omega(v)$, удовлетворяющего свойствам 1)–4) предложения 2, ТС куб $W_\omega(v^{\vee l})$ определяется формулой (49).

Определение 5. ТС куб $W_\omega(v)$, существование которого было доказано в предложении 2 называется деформацией ТС куба v, накрывающей толерантную петлю ω.

Отображение W_ω можно распространить по линейности до гомоморфизма степени 1 групп пунктированных ТКС цепей

$$\{W_\omega : Q_n^\bullet(F) \longrightarrow Q_{n+1}^\bullet(E) | n \geq 0\}.$$

Наличие свойства 4) в предложении 2 показывает, что можно корректно определить гомоморфизм степени 1 групп пунктированных НТКС цепей

$$W_\omega : C^\bullet(F) \longrightarrow C^\bullet(E),$$

задав его на свободных образующих следующей формулой

$$W_\omega(v + D_n^\bullet(F)) = W_\omega(v) + D_{n+1}^\bullet(E)).$$

Этот гомоморфизм будем называть деформацией групп $C^\bullet(F)$ в $C^\bullet(E)$, накрывающей толерантную петлю ω. Свойство 2) в предложении 2 и тот факт, что

$$\omega(0) = \omega(1) = b_0$$

показывают наличие эндоморфизма степени 0

$$\Phi_\omega : C^\bullet(F) \longrightarrow C^\bullet(F),$$

который на свободных образующих задается формулой

$$\Phi_\omega(v + D_n^\bullet(F)) = d_1^1(W_\omega(v)) + D_n^\bullet(F). \tag{50}$$

Гомоморфизм Φ_ω обладает следующим квази-цепным свойством :

$$(\partial \circ \Phi_\omega)(v + D^\bullet(F)) = ((\Phi_\omega \circ \partial)(v + D^\bullet(F)))^{\vee l(\omega)}. \tag{51}$$

Для групп циклов $Z^\bullet(F)$ имеем

$$\Phi_\omega(Z^\bullet(F)) \subset Z^\bullet(F). \tag{52}$$

Аналогичное свойство для границ:

$$\Phi_\omega(B^\bullet(F)) \subset B^\bullet(F). \tag{53}$$

Из (52) и (53) получаем, что гомоморфизм Φ_ω индуцирует гомоморфизм групп гомологий $(\Phi_\omega)_* : H^\bullet(F) \longrightarrow H^\bullet(F)$.

Предложение 3. *В принятых выше обозначениях и при наличии свойства (48) имеет место равенство*

$$(\forall N \geqslant m(\omega)) \ \ (\Phi_{\omega_{1,N}})_* = (\Phi_\omega)_*. \tag{54}$$

Предложение 4. *Пусть две толерантные петли ω и γ в пространстве (B,τ) с вершиной в точке $b_0 = \omega(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)$ имеют одинаковую длину $m = m(\omega) = m(\gamma)$ и являются толерантно гомотопными:*

$$\omega \sim \gamma \, (rel\{0,1\}). \tag{55}$$

И пусть толерантную гомотопию (55) осуществляет толерантное отображение

$$u : I_{m^{(1)}(u)} \times I_{m^{(2)}(u)} \longrightarrow B,$$

т. е.

$$m^{(1)}(u) = m,\ d_2^0(u) = u|\,(I_m \times \{0\}) = \omega,\ d_2^1(u) = u|\,(I_m \times \{1\}) = \ \gamma,$$

$$d_2^0(u) = u|\left(\{0,1\} \times I_{m^{(2)}(u)}\right) = b_0.$$

Тогда для произвольного n-мерного пунктированного ТС куба

$$v : I_{(m^{(1)}(v),\dots,m^{(n)}(v))} \longrightarrow F$$

существует $(n+2)$-мерный пунктированный ТС куб

$$U(v) : I_{(M^{(1)}(u),M^{(2)}(u),M^{(1)}(v),\dots,M^{(n)}(v))} \longrightarrow E,$$

в котором

$$M^{(1)}(u) = m + max\left\{m(\overline{\overline{\omega}}), m(\overline{\overline{\gamma}})\right\} = M, \quad M^{(2)}(u) = 2^{(n+1)L}(m^{(2)}(u)+1) - 1,$$

$$M^{(j)}(v) = 2^{n\cdot L}(m^{(j)}(v)+1) - 1,\ j = \overline{1,n},\ L = 2M,$$

и который удовлетворяет следующим свойствам:

$(U1)$ $\nu(U(v)) \leqslant 2;$

$(U2)$ $\mathcal{B}_2(U(v)) = d(0,(n+1)L)(u_{1,M});$

$(U3)$ $d_1^0(U(v))\left(\frac{k^{(2)}}{M^{(2)}(u)}, \frac{k^{(3)}}{M^{(1)}(v)}, \dots, \frac{k^{(n+2)}}{M^{(n)}(v)}\right) = v^{\vee n\cdot L}\left(\frac{k^{(3)}}{M^{(1)}(v)}, \dots, \frac{k^{(n+2)}}{M^{(n)}(v)}\right);$

$(U4)$ $d_2^0(U(v)) = W_{\omega_{1,M}}(v), \quad d_2^1(U(v)) = W_{\gamma_{1,M}}(v);$

$(U5)$ $\left(\forall j = \overline{1,n}\right)\ \left(\forall \varepsilon = \overline{0,1}\right) \quad d_{j+2}^{\varepsilon}(U(v)) = d(0, L, \underbrace{\overline{L}}_{n-1})(U(d_j^{\varepsilon}(v)));$

$(U6)$ v – вырожденный ТС куб $\Rightarrow U(v)$ – вырожденный ТС куб.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Аналогичное доказательству теоремы 1. $\square$

Нетрудно показать, что эндоморфизм $(\Phi_\omega)_*$ зависит только от класса $[\omega]$ толерантно гомотопных петель.

Теорема 2. *Пусть* $\omega : I_{m(\omega)} \longrightarrow B$ *и* $\gamma : I_{m(\gamma)} \longrightarrow B$ *– две толерантные петли с вершиной в точке* $b_0 = \omega(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon),\ \varepsilon = \overline{0,1}$. *Если две эти петли являются толерантно гомотопными путями, т.е.* $\omega \simeq \gamma$, *тогда соответствующие им гомоморфизмы групп гомологий слоя* $(F,\overline{\tau})$ *совпадают:*

$$(\Phi_\omega)_* = (\Phi_\gamma)_* : H^\bullet(F) \longrightarrow H^\bullet(F). \ \square$$

Итак, каждому элементу $[\omega]$ фундаментальной группы $\pi(B,b_0)$ базы (B,τ) толерантного расслоения $p : (E,\overline{\tau}) \longrightarrow (B,\tau)$ ставится в соответствие эндоморфизм

$$\Phi_{[\omega]} = (\Phi_\omega)_* : H^\bullet(F) \longrightarrow H^\bullet(F) \tag{56}$$

группы гомологий слоя $F = p^{-1}(b_0)$.

Замечание 1) к теореме 2. Как уже отмечалось, гомоморфизм $(\Phi_\omega)_*$ можно определить имея отображения W_ω со свойствами 1)–4) из предложения 2 без дополнительных свойств, причем способ построения W_ω является несущественным. В дальнейшем мы будем иметь дело с петлями ω в (B,τ), уже имеющими накрывающие их петли в $(E,\overline{\tau})$. Как было сказано выше, всякая петля ω становится таковой после продления $\omega_{1,N},\ N \geqslant M(\omega)$. Для этих петель $m(\overline{\overline{\omega}}) = 0, M(\omega) = m(\omega), l(\omega) = 2m(\omega)$. Если имеются две такие петли ω и γ в (B,τ), имеющие одинаковую длину $m(\omega) = m(\gamma) = M$, и являющиеся толерантно гомотопными отображениями: $\omega \sim \gamma(rel\{0,1\})$, то для петель ω и γ остается верным и неизменным доказательство предложения 4 (оно даже упрощается ввиду того, что $\omega_{1,M} = \omega,\ \gamma_{1,M} = \gamma$). При этом доказательство не использует дополнительных свойств, кроме свойств 1)–4) из предложения 2. Следовательно, при тех же условиях имеет место и теорема 2:

$$\omega \sim \gamma(rel\{0,1\}) \Rightarrow (\Phi_\omega)_* = (\Phi_\gamma)_*\,. \tag{57}$$

В частности (57) имеет место, когда $\omega = \gamma$ и при этом W_ω строится, как в доказательстве предложения 2, и обладает дополнительными свойствами (46)-(49), в то время как W_γ строится произвольно и обладает лишь свойствами 1)–4) из предложения 2.

Замечание 2) к теореме 2 и предложению 4 Пусть ω - толерантная петля в $((B,\tau),b_0)$, имеющая накрывающую ее петлю в $((E,\overline{\tau}),x_0)$. И пусть имеется отображение $W_\omega^{(l'(\omega))}$, удовлетворяющее свойствам 1)–4) из предложения 2, в которых $l(\omega)$ заменено на фиксированное $l'(\omega) \geqslant l(\omega)$. Тогда отображение $\Phi_\omega^{(l'(\omega))}$, задаваемое формулой

$$\Phi_\omega^{(l'(\omega))}(\overline{v}) \overset{df}{=} \overline{d_1^1(W_\omega^{(l'(\omega))}(v))}, \tag{58}$$

индуцирует гомоморфизм

$$\left(\Phi_\omega^{(l'(\omega))}\right)_*:\ H^\bullet(F) \to H^\bullet(F).$$

Отметим, что предложение 4 остается справедливым, а его доказательство неизменным, если заменить $l(\omega)$ на $l'(\omega)$, а W_ω на $W_\omega^{(l'(\omega))}$, и соответственно $l(\gamma)$ на $l'(\gamma) = l'(\omega)$, а W_γ на $W_\gamma^{(l'(\gamma))}$. Поэтому и в доказательстве теоремы 2 можно сделать такие же замены, в результате чего будем иметь

$$\omega \sim \gamma(rel\{0,1\}),\ l'(\omega) = l'(\gamma) \Rightarrow \left(\Phi_\omega^{(l'(\omega))}\right)_* = \left(\Phi_\gamma^{(l'(\gamma))}\right)_*. \tag{59}$$

Из (59) в частности следует, что если взять $\omega \sim \gamma = \omega$, то получаем независимость гомоморфизма $\left(\Phi_\omega^{(l'(\omega))}\right)_*$ от способа построения отображения $W_\omega^{(l'(\omega))}$, удовлетворяющего свойствам 1)–4) из предложения 2 при замене $l(\omega)$ на $l'(\omega)$. Имея в виду эту независимость, определим

$$W_\omega^{(l'(\omega))}(v) \overset{df}{=} d(0, \underbrace{\overline{n \cdot (l'(\omega) - l(\omega))}}_{n})(W_\omega(v)),\ n = dim\ v. \tag{60}$$

Следовательно, применяя (60) в определении (58), получаем для любого цикла $z \in Z_n^\bullet(F)$:

$$\Phi_\omega^{(l'(\omega))}(z) = (\Phi_\omega(z))^{\vee(l'(\omega)-l(\omega))}.$$

Но согласно предложению 7 работы [3], которое можно использовать в виду (52), имеем гомологичность

$$(\Phi_\omega(z))^{\vee(l'(\omega)-l(\omega))} \overset{C^\bullet(F)}{\sim} \Phi_\omega(z).$$

Таким образом, переходя к индуцированным гомоморфизмам на группах гомологий, получаем

$$(\Phi_\omega^{(l'(\omega))})_* = (\Phi_\omega)_*. \tag{61}$$

При этом, как следует из замечания 1) к теореме 2, правая часть в (61) может определяться через W_ω, удовлетворяющее как свойствам 1)–4) из предложения 2, так и дополнительным свойствам (46)–(49).

Итак, подводя итог двум сделанным замечаниям 1) и 2) к теореме 2 в определении (56) эндоморфизма $\Phi_{[\omega]} = (\Phi_\omega)_*$ в правой части можно брать петли ω, имеющие накрывающие их петли и использовать для определения гомоморфизма $(\Phi_\omega)_*$ произвольные отображения $W_\omega^{(l'(\omega))}$ с $l'(\omega) \geqslant 2m(\omega)$, удовлетворяющие свойствам 1)–4) из предложения 2 с заменой $l(\omega) = 2m(\omega)$ на $l'(\omega)$.

Покажем теперь, что соответствие

$$[\omega] \in \pi(B, b_0) \longmapsto \Phi_{[\omega]} \overset{df}{=} (\Phi_\omega)_* : H^\bullet(F) \longrightarrow H^\bullet(F) \tag{62}$$

определяет действие группы $\pi(B, b_0)$ на группе $H^\bullet(F)$. Заметим, что из свойства (46), свойства 1) из предложения 2 для постоянного пути $\omega = \varepsilon_{b_0}$ и $\overline{v} = v + D_n^\bullet(F)$ следует

$$\Phi_{\varepsilon_{b_0}}(\overline{v}) = \overline{d_1^1(W_{\varepsilon_{b_0}}(v))} = \overline{d_1^0(W_{\varepsilon_{b_0}}(v))} = \overline{v}^{\vee\ n\cdot 2m(\varepsilon_{b_0})}.$$

Это позволяет, используя предложение 7 работы [3], получить

$$\Phi_{[\varepsilon_{b_0}]} = (\Phi_{\varepsilon_{b_0}})_* = \mathbf{1}_{H^\bullet(F)}. \tag{63}$$

Рассматривая далее две произвольные толерантные петли ω, γ в (B, τ) с вершиной в $b_0 \in B$ и, продляя их до петель $\omega_{1,M(\omega)}$ и $\gamma_{1,M(\gamma)}$, имеющих накрывающие их петли в $(E,\overline{\tau})$ с вершиной в $x_0 \in E$, согласно определению и свойствам отношения $\sim$ (см.[2], гл.1, п.3), будем иметь

$$\omega * \gamma \sim \omega_{1,M(\omega)} * \gamma_{1,M(\gamma)},$$

откуда по теореме 2 получаем

$$(\Phi_{\omega*\gamma})_* = (\Phi_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}})_*. \tag{64}$$

По определению (50)

$$\Phi_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}}(\overline{v}) = \overline{d_1^1(W_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}}(v))} \tag{65}$$

А по построению в доказательстве предложения 2:

$$W_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}}(v)\left(\{\frac{k_1}{M(\omega)+M(\gamma)}\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{M^{(i)}(v;\omega,\gamma)}\right) =$$

$$= \begin{cases} d(0,\underbrace{\overline{n \cdot 2M(\gamma)}}_{n})(W_{\omega_{1,M(\omega)}}(v))\left(\{\frac{k_1}{M(\omega)}\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{M^{(i)}(v;\omega,\gamma)}\right), \\ k_1 = \overline{0, M(\omega)}; \\ \\ W_{\gamma_{1,M(\gamma)}}(d_1^1(W_{\omega_{1,M(\omega)}}(v)))\left(\{\frac{k_1-M(\omega)}{M(\gamma)}\} \times \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{M^{(i)}(v;\omega,\gamma)}\right), \\ k_1 = \overline{M(\omega), M(\omega)+M(\gamma)}; \end{cases} \tag{66}$$

где

$$M^{(i)}(v;\omega,\gamma) = 2^{n(2M(\omega)+2M(\gamma))}(m^{(i)}(v)+1) - 1,\ i = \overline{1,n};$$

$$W_{\omega_{1,M(\omega)}} = W_\omega,\ W_{\gamma_{1,M(\gamma)}} = W_\gamma (\text{см.}(45)).$$

Возьмем формулу (66) за определение отображения $W_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}}$. Согласно (57), это можно сделать, так как определенное в (66) отображение удовлетворяет свойствам 1)–4) из предложения 2 при наличии для $W_{\gamma_{1,M(\gamma)}}$ дополнительного свойства (49).

Использовав (66) в (65), получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}}(\overline{v}) &= \overline{d_1^1(W_{\omega_{1,M(\omega)}*\gamma_{1,M(\gamma)}}(v))} = \\ &= \overline{d_1^1(W_\gamma(d_1^1(W_\omega(v))))} = \Phi_\gamma(\Phi_\omega(\overline{v})) \end{aligned} \tag{67}$$

Формулы (64), (65), (67) и (62) в итоге дают

$$\Phi_{[\omega]*[\gamma]} = \Phi_{[\omega*\gamma]} = \Phi_{[\gamma]} \circ \Phi_{[\omega]}. \tag{68}$$

Объединяя формулы (63), (64), (68) получаем утверждение:

Теорема 3. *Пусть $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ — толерантное расслоение с линейно связными базой (B, τ) и слоем $(F = p^{-1}(b_0), \overline{\tau})$. Сопоставление каждому классу толерантно гомотопных петель $[\omega] \in \pi(B, b_0)$ автоморфизма $\Phi_{[\omega]} \in Aut(H^\bullet(F))$ определяет представление (гомоморфизм) фундаментальной группы $\pi(B, b_0)$ базы (B, τ) в группу автоморфизмов группы гомологий $H^\bullet(F)$ слоя $(F, \overline{\tau})$. Или другими словами, фундаментальная группа $\pi(B, b_0)$ базы (B, τ) действует на группе гомологий $H^\bullet(F)$ слоя $(F, \overline{\tau})$.*

Докажем теперь еще одно утверждение, которое показывает связь ТС куба w с ТС кубами $\mathcal{B}_s(w)$ и $\mathcal{F}_s(w)$.

Теорема 4. *Пусть $w : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s+t} I_{m^{(i)}(w)} \longrightarrow E$ – произвольный пунктированный куб, удовлетворяющий условию $\nu(w) \leqslant s$. Возьмем соответствующие ТС кубы в базе и слое*

$$u = \mathcal{B}_s(w) : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m^{(i)}(u)} \longrightarrow B,\ m^{(i)}(u) = m^{(i)}(w),\ i = \overline{1, s};$$

$$v = \mathcal{F}_s(w) : \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{m^{(j)}(v)} \longrightarrow F,\ m^{(j)}(v) = m^{(s+j)}(w),\ j = \overline{1, t}.$$

Определим натуральные числа $l_2 = l_2(u) = 2\sum\limits_{i=1}^{s} m^{(i)}(u)$,

$$M^{(j)}(v) = 2^{t \cdot l_2}(m^{(j)}(v) + 1) - 1,\ j = \overline{1, t},\ M = 2^{t \cdot l_2 + 1} - 1.$$

Тогда существует пунктированный ТС куб

$$D_s(w) : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s+t} I_{m^{(i)}(u)} \times I_M \times \mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{M^{(j)}(v)} \longrightarrow E,$$

который удовлетворяет следующим свойствам

$(D1)$ $\nu(D_s(w)) \leqslant s$;

$(D2)$ $\mathcal{B}_s(D_s(w)) = (\mathcal{B}_s(w)) = u$;

$(D3)$ $\mathcal{F}_s(D_s(w)) = (\mathcal{F}_s(w))^{\vee t \cdot l_2} = v^{\vee t \cdot l_2}$;

$(D4)$ $d^0_{s+1}(D_s(w)) = d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \underbrace{\overline{t \cdot l_2}}_{t})(w),\ d^1_{s+1}(D_s(w)) = W(u, v)$;

$(D5)$ $(\forall j \geqslant s)$ $\left(\forall \varepsilon = \overline{0,1}\right)$ $d^{\varepsilon}_{j+1}(D_s(w)) = d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, l_2, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})(D_s(d^{\varepsilon}_j(w)))$;

$(D6)$ $t > 0$, *w - вырожден $\Rightarrow D_s(w)$ - вырожден.*

Доказательство

Проведем индукцию по t. При $t = 0$ нам надо доказать существование пунктированного ТС куба $D_s(w) : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m^{(i)}(u)} \times I_1 \longrightarrow (E, \overline{\tau})$ такого, что

1) $\nu(D_s(w)) \leqslant s$;

2)$p \circ D_s(w) = (p \circ w) = u$;

3)$D_s(w)(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \frac{k_{s+1}}{M}) = w(0, \ldots, 0) = x_0, \ \ \forall\ k_{s+1} = \overline{0, M}$;

4)$d^0_{s+1}(D_s(w)) = w, \ \ d^1_{s+1}(D_s(w)) = W(u, 0) = w$.

Этим свойствам очевидно удовлетворяет ТС куб $D_s(w) = w$, так как при построении $W(u, v)$ в теореме 1 в базе индукции с помощью $l_1(u)$ -кратного полного двойного замедления требуется построить пунктированный ТС куб $w(l_1(u))$ накрывающий u, в нашем же случае имеем $l_1(u) = 0,\ w(l_1(u)) = w,\ p \circ w = u$.

Далее делаем предположение индукции о том, что утверждение теоремы 4 верно для всех ТС кубов w таких, что $dim(\mathcal{F}_s(w)) = dim\ v < t$. Рассмотрим ТС куб w размерности $s + t$, у которого $\nu(w) \leqslant s$ и $dim\,(\mathcal{F}_s(w)) = t$. Если ТС куб w является вырожденным, то есть

$w = d^\varepsilon_{s+t}(w)$, то, пользуясь предположением индукции, полагаем по определению

$$D_s(w) \overset{df}{=} d^\varepsilon_{s+t+1}(D_s(w)) \overset{df}{=} d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, l_2, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))). \tag{69}$$

Проверим свойства $(D1) - (D6)$. Свойства $(D1)$ и $(D6)$ очевидны. Для доказательства свойства $(D2)$ заметим, что из (12) следует

$$\mathcal{B}_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)) = \mathcal{B}_s(w) = u. \tag{70}$$

Используя (69), (70) и предположение индукции, будем иметь следующее:

$$\mathcal{B}_s(D_s(w)) = \mathcal{B}_s\left(d(\overline{0}, l_2, \overline{l_2})(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)))\right) =$$
$$= p \circ d(\overline{0}, l_2, \overline{l_2})(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)))|_{k_{s+1}=k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t+1)}=0} =$$
$$= p \circ D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))|_{k_{s+1}=k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t)}=0} = \mathcal{B}_s\left(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))\right) = u.$$

Для проверки свойства $(D3)$ заметим, что из определения $\mathcal{F}_s$ следует, что $\mathcal{F}_s(w) = v$ является вырожденным ТС кубом. Поэтому из (12) следует

$$\mathcal{F}_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)) = d^\varepsilon_t(\mathcal{F}_s(w)) = d^\varepsilon_t(v) = v. \tag{71}$$

Заметим также, что из (70) следует, что $l_2\left(\mathcal{B}_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))\right) = l_2(u) = l_2$. Учитывая эти замечания и применяя предположение индукции, получаем

$$\mathcal{F}_s(D_s(w)) = (d(\overline{0}, l_2, \overline{l_2})(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))))|_{k^{(1)}=\ldots=k^{(s)}=0} =$$
$$= d(l_2, \overline{l_2})(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))|_{k^{(1)}=\ldots=k^{(s)}=0}) = \left(\mathcal{F}_s(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)))\right)^{\vee l_2} =$$
$$= \left(\mathcal{F}_s(d^\varepsilon_{s+t}(w))^{\vee\ (t-1)\cdot l_2}\right)^{\vee l_2} = \left(v^{\vee\ (t-1)\cdot l_2}\right)^{\vee l_2} = v^{\vee\ t\cdot l_2}.$$

Перейдем к проверке свойства $(D4)$:

$$d^0_{s+1}(D_s(w)) = d^0_{s+1}\left(d(\overline{0}, l_2, \overline{l_2})(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)))\right) =$$
$$= d(\overline{0}, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})\left(d^0_{s+1}(D_s(d^\varepsilon_{s+t}(w)))\right) =$$

$$= d(\overline{0}, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})(d(\overline{l_1}, \underbrace{\overline{(t-1)l_2}}_{t-1})(d^{\varepsilon}_{s+t}(w))) = d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \underbrace{\overline{tl_2}}_{t})(w).$$

А теперь в дополнение к предположению индукции применим (70), (71) и (17):

$$d^1_{s+1}(D_s(w)) = d^1_{s+1}\left(d(\overline{0}, l_2, \overline{l_2})(D_s(d^{\varepsilon}_{s+t}(w)))\right) =$$

$$= d(\overline{0}, \overline{l_2})\left(d^1_{s+1}(D_s(d^{\varepsilon}_{s+t}(w)))\right) =$$

$$= d(\overline{0}, \overline{l_2})\left(W(u, \mathcal{F}_s(d^{\varepsilon}_{s+t}(w)))\right) =$$

$$= d(\overline{0}, \overline{l_2})\left(W(u, d^{\varepsilon}_t(v)))\right) = W(u, v).$$

Для проверки свойства $(D5)$ рассмотрим два случая. Сначала предположим, что $j = s + t$. Тогда в виду вырожденности $D_s(w)$ и формулы (69) имеем

$$d^{\varepsilon}_{s+t+1}(D_s(w)) = D_s(w) = d(\overline{0}, l_2, \overline{l_2})(D_s(d^{\varepsilon}_{s+t}(w))).$$

Если $j < s+t$, тогда ТС куб $d^{\varepsilon}_j(w)$ – вырожден и мы можем использовать предположение индукции и формулу (69), заменив t на $t-1$:

$$d^{\varepsilon}_{j+1}(w)(D_s(w)) = d(\overline{0}, l_2, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})\left(d^{\varepsilon}_{j+1}(D_s(d^{\varepsilon}_{s+t}(w)))\right) =$$

$$= d(\overline{0}, l_2, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})(d(\overline{0}, l_2, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-2})\left(D_s(d^{\varepsilon}_j(d^{\varepsilon}_{s+t}(w)))\right) =$$

$$= d(\overline{0}, l_2, \underbrace{\overline{l_2}}_{t-1})\left(D_s(d^{\varepsilon}_j(w))\right).$$

Теперь осталось рассмотреть случай невырожденного ТС куба w такого, что $\nu(w) \leqslant s$, $dim\,(\mathcal{F}_s(w)) = dim\ v = t$. Возьмем семейство ТС кубов $\{d^{\varepsilon}_{s+j}(w) | j = \overline{1,t},\ \varepsilon = \overline{0,1}\}$. Очевидно, что $\nu(d^{\varepsilon}_{s+j}w) \leqslant s$ для всего семейства. При этом формула (12) дает

$$(\forall\ j=\overline{1,t})\ (\forall\ \varepsilon=\overline{0,1})\ \mathcal{B}_s(d^{\varepsilon}_{s+j}(w)) = \mathcal{B}_s(w) = u,$$

$$\mathcal{F}_s(d^{\varepsilon}_{s+j}(w)) = d^{\varepsilon}_j(\mathcal{F}_s(w)) = d^{\varepsilon}_j(v). \tag{72}$$

По предположению индукции имеем семейство пунктированных ТС кубов

$$\{D_s(d^{\varepsilon}_{s+j}(w))|j=\overline{1,t},\ \varepsilon=\overline{0,1}\}, \tag{73}$$

удовлетворяющих свойствам $(D1)-(D6)$. Как и при доказательстве теоремы 1, отсюда делаем вывод, что семейство $\{d(\underbrace{\overline{0}}_{s+1},\underbrace{\overline{1}}_{t-1}(D_s(d^{\varepsilon}_{s+j}(w)))|j=\overline{1,t},\ \varepsilon=\overline{0,1}\}$ определяет толерантное отображение

$$D_s(w,\partial v):\mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{m^{(i)}(u)}\times I_{2^{(t-1)\cdot l_2+1}-1}\times\partial\left(\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2M^{(j)}(\partial v)+1}\right)\longrightarrow(E,\overline{\tau}),$$

где $M^{(j)}(\partial v)=2^{(t-1)\cdot l_2}(m^{(s+j)}(w)+1)-1$. Выполненное 1-кратное полное двойное замедление можно не считать отдельно, а учитывать его в последующих замедлениях. Отображение $D_s(w,\partial v)$ надо распространить на весь Т куб с помощью необходимых замедлений так, чтобы удовлетворить условиям $(D1)-(D6)$. Это можно сделать, комбинируя методы доказательства теоремы 1 и предложения 4. Продемонстрируем применение этих методов, выполнив первый (и одновременно общий) шаг построения искомого отображения. Будем последовательно строить толерантные отображения

$$D^{(r,k)}_s(w):\mathop{\times}_{i=1}^{r-1} I_{m^{(i)}(u)}\times\{(\tfrac{k^{(r)}}{M^{(r)}(u)},\underbrace{\overline{0}}_{s-r})|_{k^{(r)}=\overline{0,k}}\}\times I_{M(r,k)}\times\mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{M^{(j)}(r,k)}\longrightarrow E$$

$$r=\overline{1,s},\ k=\overline{0,m^{(r)}(u)},\ M(r,k)=2^{(t-1)\cdot l_2+2(\sum\limits_{i=1}^{r-1}M^{(i)}(u)+k)+1}-1,$$

$$M^{(j)}(r,k)=2^{2(\sum\limits_{i=1}^{r-1}M^{(i)}(u)+k)}(M^{(j)}(\partial v)+1)-1.$$

Эти отображения должны быть построены так, чтобы отображение $D^{(r,k)}_s(w)$ продолжало бы отображение $d(\underbrace{\overline{0}}_{r},\underbrace{\overline{2}}_{t+1}\left(D^{(r,k-1)}_s(w)\right)$, и $D^{(r,m^{(r)}(u))}_s(w)=D^{(r+1,0)}_s(w)$, а отображение $D^{(s,m^{(s)}(u))}_s(w)=D_s(w)$ удовлетворяло бы всем свойствам $(D1)-(D6)$.

Для построения $D_s^{(1,0)}(w)$ заметим, что предположение индукции для семейства (73) в части свойства $(D3)$, с учетом (72) и без учета замедления $d(\overline{0},\overline{1})$ дает нам следующее:

$$D_s(w,\partial v)|_{k^{(1)}=\ldots=k^{(s)}=0} = (\partial v)^{\vee(t-1)l_2}.$$

Поэтому естественно определить

$$D_s^{(1,0)}(w) = v^{\vee(t-1)l_2},$$

что в последствии обеспечит свойство $(D3)$ для $D_s(w)$.

Далее, используя метод построения отображения $w_{\overline{0,1}}$ в доказательстве теоремы 1, мы строим отображение

$$D_s^{(1,1)'}(w) : \{(\tfrac{k^{(1)}}{M^{(1)}(u)}, \underbrace{\overline{0}}_{s-1})|_{k^{(1)}=\overline{0,1}}\} \times I_{M(1,0)} \times \mathop{\times}_{j=1}^{t} I_{2^2(M^{(j)}(\partial v)+1)-1} \longrightarrow (E,\overline{\tau}),$$

которое продолжает $d(\underbrace{\overline{0}}_{s+1},\underbrace{\overline{2}}_{t-1})(D_s(\partial v))$ и $d(\underbrace{\overline{0}}_{s+1},\underbrace{\overline{2}}_{t})(D_s^{(1,0)}(w))$ и удовлетворяет по построению аналогам условий $(D1)$, $(D2)$, $(D3)$ и $(D5)$, но не $(D4)$. В правых частях аналога условия $(D4)$ должны стоять отображение $d(\overline{0},\overline{(t-1)l_2+2})(w)$ и отображение $w_{\overline{0,1}}$, которое является результатом первого шага в построении отображения $W(u,v)$ в доказательстве теоремы 1. Чтобы удовлетворить этим граничным условиям надо подправить отображение

$$d(\underbrace{\overline{0}}_{s},2,\underbrace{\overline{0}}_{t})(D_s^{(1,1)'}(w))$$

тем же способом, какой был использован при построении отображения $U_{k+1}(v)$ в доказательстве предложения 4. В результате мы получим искомое отображение $D_s^{(1,1)}(w)$. Доказательство теоремы 4 завершено. $\square$

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). 1962.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3.

4. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестник Самарского Государственного Университета. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2007. Вып.7(57).

5. *Небалуев С.И.* Фундаментальная группа, толерантные пространства и толерантные накрытия // Чебышевский сборник: Тр. VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та, 2004. Т. 5. Вып. 3.

6. *Ху Сы-цзян* Теория гомотопий. М.: Мир. 1964.

УДК 513.6

С.И. НЕБАЛУЕВ, И.А. КЛЯЕВА, М.Н. СУСИН

Построение спектральной последовательности толерантного расслоения

В предлагаемой статье строиться спектральная последовательность Лере-Серра толерантного расслоения. Статья является продолжение работы [4] и наследует все ее результаты и обозначения. Нами также используется теория пунктированных толерантных кубических сингулярных (ТКС) гомологий, развитая в работе [3].

Пусть $p : ((E, \overline{\tau}), x_0) \to ((B, \tau), b_0)$ — пунктированное толерантное расслоение с линейно связными базой (B, τ) и слоем $(F, \overline{\tau})$, где $F = p^{-1}(b_0)$. Для каждого толерантного сингулярного (ТС) куба $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m^{(i)}(u)} \to E$ в [4] был определен вес $\nu(u)$ куба u, удовлетворяющий свойствам

$$0 \leqslant \nu(u) \leqslant n = \dim u, \tag{1}$$

$$\left(\forall\ j = \overline{1, \nu(u)}\right) \left(\forall\ \varepsilon = \overline{0, 1}\right) \quad \nu(d_j^{\varepsilon}(u)) < \nu(u), \tag{2}$$

$$\left(\forall\ j = \overline{\nu(u) + 1, n}\right) \left(\forall\ \varepsilon = \overline{0, 1}\right) \quad \nu(d_j^{\varepsilon}(u)) = \nu(u). \tag{3}$$

В группе пунктированных ТКС цепей $C^{\bullet} = C^{\bullet}(E)$ для каждого целого $s \in \mathbb{Z}$ определим подгруппу

$$C^s \stackrel{df}{=} \langle\ \overline{u} \mid u - \text{невырожденный пунктированный ТС куб, } \nu(u) \leqslant s \rangle\,,$$

где скобки $\langle \ldots \rangle$ означают групповое порождение. Из определения и свойств веса следует, что

$$s < 0 \Rightarrow C^s = 0,\ \bigcup_s C^s = C^{\bullet},\ C^s \subset C^{s+1},\ \partial(C^s) \subset C^s,$$

а это означает, что $\{C^s\}$ является возрастающей фильтрацией цепного комплекса $C^{\bullet}$. Так как цепи $C^{\bullet}$ градуированны по размерностям ТС кубов, то и все C^s будут градуированны:

$$C^s = \bigoplus_{n \geqslant 0} (C^s \cap C_n^{\bullet}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} C_n^s.$$

Пусть $c \in C^{\bullet}$ отличная от нуля однородная цепь, $c = \sum \alpha_i \overline{u}_i$, тогда ее вес определяется формулой

$$\nu(c) \stackrel{df}{=} \min \{s \in \mathbb{Z} |\ c \in C^s\} = \max \{\nu(u_i) \mid \alpha_i \neq 0\}\,,$$

и для него выполняется свойство

$$0 \leqslant \nu(c) \leqslant \dim\ c. \tag{4}$$

Фильтрацию $\{C^s\}$, удовлетворяющую этому свойству, называют регулярной (см.[5, гл.8, п.11]).

Рассмотрим присоединенную градуированную группу

$$\mathcal{G}(C^\bullet) = \bigoplus_s \hat{C}^s,\ \hat{C}^s \stackrel{df}{=} C^s/C^{s-1} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \hat{C}^s_n,\ \hat{C}^s_n \stackrel{df}{=} C^s_n/C^{s-1}_n,$$

и связанные с ней короткие точные последовательности цепных комплексов

$$0 \to\ C^{s-1} \hookrightarrow\ C^s \to\ \hat{C}^s \to\ 0,$$

которые определяют соответствующие точные гомологические последовательности

$$\begin{tikzcd} H(C^{s-1}) \arrow[rr, "i"] & & H(C^s) \arrow[dl, "j"] \\ & H(\hat{C}^s) \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd} \quad . \tag{5}$$

Таким образом, если мы определим градуированные группы

$$\mathcal{D} = \bigoplus_s \mathcal{D}_s,\ \mathcal{D}_s \stackrel{df}{=} H(C^s),\ \mathcal{E} = \bigoplus_s \mathcal{E}_s,\ \mathcal{E}_s \stackrel{df}{=} H(\hat{C}^s),$$

то гомоморфизмы в диаграмме (5) определяют однородные гомоморфизмы степеней 1,0,-1 соответственно, которые задают точную пару (см.[5, гл.8, п.4])

$$\mathfrak{E}(C^\bullet) = \langle \mathcal{D}, \mathcal{E};\ i, j, k \rangle\,,$$

ассоциированную с комплексом $C^\bullet$ и регулярной фильтрацией $\{C^s\}$.

Так как дифференциальные группы C^s и $\hat{C}^s$ градуированны по размерности ТС кубов и являются цепными комплексами, то на группах $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ в точной паре $\mathfrak{E}(C^\bullet)$ можно определить двойную градуировку $\mathcal{D} = \bigoplus_{s,t} \mathcal{D}_{s,t},\ \mathcal{E} = \bigoplus_{s,t} \mathcal{E}_{s,t}$ с однородными прямыми слагаемыми вида:

$$\mathcal{D}_{s,t} \stackrel{df}{=} H_{s+t}(C^s), \qquad \mathcal{E}_{s,t} \stackrel{df}{=} H_{s+t}(\hat{C}^s).$$

При этом, гомоморфизм

$$i : H_{s-1+t}(C^{s-1}) \to H_{s-1+t}(C^s) = H_{s+(t-1)}(C^s)$$

имеет степень $deg\ i = (1, -1)$; гомоморфизм

$$j : H_{s+(t-1)}(C^s) \to H_{s+(t-1)}(\hat{C}^s)$$

имеет степень $deg\ j = (0, 0)$; и наконец, гомоморфизм

$$k : H_{s+(t-1)}(\hat{C}^s) \to H_{s+t-1-1}(C^{s-1}) = H_{(s-1)+(t-1)}(C^{s-1})$$

имеет степень $deg\ k = (-1, 0)$.

Непосредственным следствием условия (4) являются следующие свойства

$$(\forall s < 0)\ C^s = 0,$$
$$(\forall t < 0)\ C^\bullet_s \subset C^s,$$

откуда сразу же следует, что $\mathcal{D}_{s,t} = 0$, при $s < 0$. А при $t < 0$ имеем

$$s + t = n \leqslant s - 1\ \Rightarrow\ C^s_n \subset C^n_n \subset C^{s-1}_n\ \Rightarrow\ \widehat{C}^s_n = C^s_n / C^{s-1}_n = 0.$$

Итак, точная пара $\mathfrak{E}(C^\bullet) = \langle \mathcal{D}, \mathcal{E};\ i, j, k \rangle$, ассоциированная с цепным комплексом $C^\bullet$ с регулярной фильтрацией $\{C^s\}$, удовлетворяет следующим свойствам

$$\begin{gathered} deg\ i = (1, -1),\ deg\ j = (0, 0),\ deg\ k = (-1, 0); \\ (\forall s < 0)\ \mathcal{D}_{s,t} = 0; \\ (\forall t < 0)\ \mathcal{E}_{s,t} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Согласно принятой терминологии (см.[5, гл.8, п.6]), дважды градуированная точная пара, удовлетворяющая свойствам (6), называется регулярной ∂-парой.

Для степеней гомоморфизмов в производных точных парах $\mathfrak{E}^m(C^\bullet) = \left\langle \mathcal{D}^m, \mathcal{E}^m; i^{(m)}, j^{(m)}, k^{(m)} \right\rangle$ имеют место следующие формулы:

$$\begin{gathered} deg\ i^{(m)} = deg\ i = (1, -1); \\ deg\ j^{(m)} = deg\ j - (m-1) \cdot deg\ i = (-m+1, m-1); \\ deg\ k^{(m)} = deg\ k = (-1, 0); \\ deg\ d^{(m)} = deg\ j + deg\ k - (m-1) deg\ i = (-m, m-1), \end{gathered} \tag{6}$$

где $deg\ d^{(m)} = j^{(m)} \circ k^{(m)}$ — граничный гомоморфизм в дифференциальной группе $\mathcal{E}^m$.

Применим общую теорию регулярных ∂-пар (см.[5, гл.8, п.6]) к точной паре $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(C^\bullet)$. Введем обозначения

$$H(\mathfrak{E}) \overset{df}{=} \bigoplus_n H_n(\mathfrak{E}),\ H_n(\mathfrak{E}) \overset{df}{=} \mathcal{D}_{n+1,-1} = H_n(C^{n+1});$$

$$\varphi_{s,t} \overset{df}{=} i^{t+1} |\ \mathcal{D}_{s,t} : \mathcal{D}_{s,t} \to H_{s+t}(\mathfrak{E}),$$

$$H_{s,t}(\mathfrak{E}) \overset{df}{=} \varphi_{s,t}(\mathcal{D}_{s,t}) = \mathcal{D}^{t+2}_{s+t+1,-1} \subset H_{s+t}(\mathfrak{E}),\ t \geqslant 0.$$

Имеется изоморфизм

$$H_{s,t}(\mathfrak{E})/H_{s-1,t+1}(\mathfrak{E}) \cong \mathcal{E}^\infty_{s,t}. \tag{7}$$

Вложения $C^\bullet_s \subset C^s \subset C^\bullet$ индуцируют изоморфизмы

$$h_{n+1,-1} : H_n(\mathfrak{E}) \cong H_n(C^\bullet) = H_n(E).$$

В результате с помощью (8) получается

Теорема 1. *Группа $H_n(E)$ имеет фильтрацию следующего вида*

$$H_n(E) = H_{n,0}(E) \supset H_{n-1,1}(E) \supset \ldots \supset H_{0,n}(E) \supset H_{-1,n+1}(E) = 0,$$

а присоединенная градуированная группа $\mathcal{G}H_n(C^\bullet) = \mathcal{G}H_n(E)$ этой фильтрации изоморфна группе $\sum\limits_{s+t=n} \mathcal{E}^\infty_{s,t}$, при чем

$$H_{s,t}(E)/H_{s-1,t+1}(E) \cong \mathcal{E}^\infty_{s,t}.$$

Таким образом, в нашем распоряжении имеется сходящаяся спектральная последовательность $\{\mathcal{E}^m = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}^m_{s,t} |\ m \geqslant 1\}$, определяемая точной парой $\mathfrak{E}(C^\bullet)$.

Наша цель — изучение строения двух первых членов этой последовательности: $\mathcal{E} = \mathcal{E}^1$ и $\mathcal{E}^2$.

Поскольку $\mathcal{E} = \bigoplus\limits_{s,t} \mathcal{E}_{s,t}$, а $\mathcal{E}_{s,t} = H_{s+t}(\hat{C}^s)$, то следует начать с рассмотрения $\hat{C}^s = \sum\limits_{n\geqslant 0} C_n^s/C_n^{s-1}$. Пусть $\overline{u}$ — свободный образующий элемент группы C_n^s, обозначим через $[\overline{u}]$ смежный класс $[\overline{u}] = \overline{u} + C_n^{s-1} \in \widehat{C}_n^s$. Из свойств веса $\nu(u)$ следует, что граничный гомоморфизм ∂ в $\hat{C}^s$ определяется следующим образом

$$\partial_n([\overline{u}]) = \sum_{j=s+1}^{n} (-1)^j \left(\left[\overline{d_j^0(u)}\right] - \left[\overline{d_j^1(u)}\right]\right) \in \widehat{C}_{n-1}^s. \qquad (8)$$

В [4] для всякого пунктированного ТС куба $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m^{(i)}(u)} \to E$ размерности $n = s+t$ такого, что $\nu(u) \leqslant s$, были определены два пунктированных ТС куба:

$$\mathcal{B}_s(u) : \mathop{\times}_{i=1}^{s} I_{m^{(i)}(u)} \to B, \quad \mathcal{F}_s(u) : \mathop{\times}_{i=s+1}^{s+t} I_{m^{(i)}(u)} \to F,$$

которые обладают рядом очевидных свойств:

$$\nu(u) < s \Rightarrow \mathcal{B}_s(u) \ - \ \text{вырожден}; \qquad (9)$$

$$u \ - \ \text{вырожден}, \ t = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_s(u) \ - \ \text{вырожден}; \qquad (10)$$

$$u \ - \ \text{вырожден}, \ t > 0 \Rightarrow \mathcal{F}_s(u) \ - \ \text{вырожден}; \qquad (11)$$

$$(\forall j > s)(\forall \varepsilon = \overline{0,1}) \ \ \mathcal{B}_s\left(d_j^\varepsilon(u)\right) = \mathcal{B}_s(u), \ \mathcal{F}_s\left(d_j^\varepsilon(u)\right) = d_{j-s}^\varepsilon\left(\mathcal{F}_s(u)\right). \qquad (12)$$

Согласно предложению 1 из [4], всякий пунктированный ТС куб в $((B,\tau), b_0)$ может быть поднят в $((E,\overline{\tau}), x_0)$ до накрывающего его пунктированного ТС куба после полного двойного замедления подходящей кратности. Так как такие кратности образуют непустое подмножество целых неотрицательных чисел, то среди них имеется минимальный элемент. В связи с этим дадим определение.

Определение. Для каждого пунктированного ТС куба u в $((B,\tau), b_0)$ назовем границей накрытия ТС куба u неотрицательное целое число

$l_1(u)$, являющееся минимальной кратностью полного двойного замедления $u^{\vee l_1(u)}$, имеющего в $((E,\overline{\tau}),x_0)$ пунктированный накрывающий ТС куб w такой, что $p\circ w=u^{\vee l_1(u)}$.

Эта граница накрытия обладает очевидными свойствами:

$$(\forall l\geqslant l_1(u))\;\; l_1(u^{\vee l})=0; \tag{13}$$

$$\left(\forall j=\overline{1,\dim\ u}\right)\left(\forall\varepsilon=\overline{0,1}\right)\;\; l_1(d_j^{\varepsilon}(u))\leqslant l_1(u); \tag{14}$$

$$l_1(u)=0\Rightarrow\left(\forall j=\overline{1,\dim\ u}\right)\left(\forall\varepsilon=\overline{0,1}\right)\;\; l_1(d_j^{\varepsilon}(u))=0. \tag{15}$$

Рассмотрим в $Q_n^{\bullet}(B)$ подгруппу

$$Q_n^p(B)\stackrel{df}{=}\left\langle\ u|\ u-\text{невырожденный ТС куб из } Q_n^{\bullet}(B)\text{ и } l_1(u)=0\ \right\rangle,$$

свободно порожденную невырожденными пунктированными ТС кубами, имеющими пунктированные накрытия в $((E,\overline{\tau}),x_0)$, и назовем её группой накрытых пунктированных ТКС цепей размерности n. Пусть далее

$$D_n^p(B)\stackrel{df}{=}\left\langle\ u|\ u-\text{вырожденный ТС куб из } Q_n^{\bullet}(B)\text{ и } l_1(u)=0\ \right\rangle=$$

$$=Q_n^p(B)\cap D_n^{\bullet}(B)$$

Из свойств границы накрытия следует, что

$$\partial_n\left(Q_n^p(B)\right)\subset Q_{n-1}^p(B),\;\partial_n\left(D_n^p(B)\right)\subset D_{n-1}^p(B).$$

Таким образом, имеем цепной комплекс

$$C^p(B)=\{C_n^p(B)=Q_n^p(B)/D_n^p(B),\partial_n\}_{n\geqslant 0}$$

накрытых пунктированных НТКС цепей, который с точностью до изоморфизма (Неттер) является подкомплексом в $C^{\bullet}(B)$. Группы $Z_n^p==Ker\partial_n$ и $B_n^p=Im\partial_{n+1}$ назовем соответственно группами накрытых циклов и границ в $C^p(B)$. А группы гомологий $H_n^p(B)=Z_n^p/B_n^p,\ n\geqslant 0$ назовем группами накрытых ТКС гомологий пространства $((B,\tau),b_0)$.

Теорема 2. *Группы пунктированных ТКС гомологий* $H^{\bullet}(B) = \bigoplus_{n\geqslant 0} H^{\bullet}_n(B)$ *и группы накрытых ТКС гомологий* $H^p(B) = \bigoplus_{n\geqslant 0} H^p_n(B)$ *изоморфны друг другу, т.е.* $(\forall n \geqslant 0)(\exists\varphi_n :\ H^{\bullet}_n(B) \cong H^p_n(B))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Для произвольного однородного элемента $c = \sum \alpha_i \overline{u}_i$ в $C^{\bullet}_n(B)$ определим границу накрытия $l_1(c) \stackrel{df}{=} \max\{l_1(u) \mid \alpha_i \neq 0\}$, $l_1(0) \stackrel{df}{=} 0$. Согласно свойствам границы накрытия, имеют место свойства

$$l_1(\partial c) \leqslant l_1(c),$$

$$(\forall l \geqslant l_1(c))\ c^{\vee l} \in C^p_n(B)).$$

Определим теперь градуированное отображение нулевой степени:

$$\varphi = \{\varphi_n :\ H^{\bullet}_n(B) \to\ H^p_n(B)\}_{n\geqslant 0}, \quad \varphi_n(z + B^{\bullet}_n) = z^{\vee l_1(z)} + B^p_n, \tag{16}$$

где $z \in Z^{\bullet}_n(B)$ – произвольный цикл. Для проверки корректности определения (17) возьмем два гомологичных цикла $z, z' \in Z^{\bullet}_n(B)$, $z - z' = \partial_{n+1}c$, $c \in C^{\bullet}_{n+1}(B)$. Определим $l \stackrel{df}{=} max\{l_1(z), l_1(z'), l_1(c)\}$ и , воспользовавшись свойствами границы накрытия, получим

$$z^{\vee l} - z'^{\vee l} = (\partial_{n+1}c)^{\vee l} = \partial_{n+1}(c^{\vee l}) \in B^p_n,$$

то есть имеем гомологичность $z^{\vee l} \stackrel{p}{\sim} z'^{\vee l}$ в $C^p(B)$. Далее будем использовать утверждение, аналогичное предложению 7 работы [3]:

$$(\forall z \in Z^p_n)\ (\forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ z^{\vee l} - z \in B^p_n. \tag{17}$$

Применим (18):

$$z^{\vee l} = (z^{\vee l_1(z)})^{\vee(l - l_1(z))} \stackrel{p}{\sim} z^{\vee l_1(z)},$$

$$z'^{\vee l} = (z'^{\vee l_1(z')})^{\vee(l - l_1(z'))} \stackrel{p}{\sim} z'^{\vee l_1(z')}.$$

А так как гомологичность транзитивна, то $z^{\vee l_1(z)} \stackrel{p}{\sim} z'^{\vee l_1(z')}$, что и доказывает корректность (17).

Покажем теперь гомоморфность отображения φ. Возьмем два произвольных цикла $z_1, z_2 \in Z_n^{\bullet}(B)$. Обозначим

$$l(z_1, z_2) = \max\{l_1(z_1), l_1(z_2)\} \geqslant l_1(z_1 + z_2).$$

Пусть для определенности $l(z_1, z_2) = l_1(z_1) \geqslant l_1(z_2)$. Тогда используя (17), (18) и свойства границы накрытия, получаем

$$\varphi_n(z_1 + B_n^{\bullet} + z_2 + B_n^{\bullet}) = \varphi_n(z_1 + z_2 + B_n^{\bullet}) =$$

$$= z_1^{\vee l_1(z_1)} + (z_2^{\vee l_1(z_2)})^{\vee(l_1(z_1) - l_1(z_2))} + B_n^p =$$

$$= \varphi_n(z_1 + B_n^{\bullet}) + \varphi_n(z_2 + B_n^{\bullet}).$$

Для проверки инъективности φ возьмем $z + B_n^{\bullet} \in Ker\ \varphi_n$. Тогда

$$z^{\vee l_1(z)} \in B_n^p = \partial_{n+1}(C_{n+1}^p(B)) \subset \partial_{n+1}(C_{n+1}^{\bullet}(B)) = B_n^{\bullet}.$$

Так как из предложения 8 в [3] следует, что $z - z^{\vee l_1(z)} \in B_n^{\bullet}$, то $z + B_n^{\bullet} = 0$. Чтобы проверить сюръективность φ, возьмем произвольный элемент $z + B_n^p \in H_n^p(B)$. Так как $z \in Z_n^p \subset Z_n^{\bullet}$ и $l_1(z) = 0$, то

$$\varphi_n(z + B_n^{\bullet}) = z^{\vee l_1(z)} + B_n^p = z + B_n^p.$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 2 позволяет вместо $H^p(B)$ использовать обозначение $H(B)$.

Рассмотрим цепной комплекс

$$K^s \stackrel{df}{=} C_s^p(B) \otimes C^{\bullet}(F) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (C_s^p(B) \otimes C_{n-s}^{\bullet}(F)),$$

с граничным гомоморфизмом ∂_F, который на образующих $a \otimes b$ в K^s определен формулой

$$\partial_F(a \otimes b) \stackrel{df}{=} (-1)^s a \otimes \partial b. \tag{18}$$

Определим теперь гомоморфизм $\varphi:\ C^s \to\ K^s$ на свободных образующих

$$\varphi(\overline{w}) \stackrel{df}{=}\ \overline{u} \otimes \overline{v},\ u = \mathcal{B}_s(w),\ v = \mathcal{F}_s(w).$$

Заметим , что согласно определению $u = \mathcal{B}_s(w) \overset{df}{=} p \circ (w|_{k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t)}=0})$, при этом $w|_{k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t)}=0}$ —пунктированный ТС куб в $((E, \overline{\tau}), x_0)$. Поэтому

$$\overline{u} = \overline{\mathcal{B}_s(w)} \in C^p_{s+t}(B),\ l_1(u) = l_1(\mathcal{B}_s(w)) = 0, \tag{19}$$

так что элемент $\overline{u} \otimes \overline{v} \in\ C^p_s(B) \otimes C^\bullet(F) =\ K^s$. Если $\overline{w} = 0$, то есть $w \in\ D^\bullet_n(E)$, тогда либо $\mathcal{B}_s(w) = u \in\ D^p_s(B)$ и $\overline{u} = 0$, либо $\mathcal{F}_s(w) = v \in D^\bullet_{n-s}(F)$ и $\overline{v} = 0$. Это доказывает корректность определения φ. Из (10) следует, что для $w \in\ C^{s-1}$ имеем $\varphi(\overline{w}) = 0 \otimes \overline{v} = 0$. Это значит, что $\varphi(C^{s-1}) = 0$. Поэтому определен индуцированный гомоморфизм

$$\hat{\varphi} :\ \hat{C}^s \to\ K^s,\ \hat{\varphi}([\overline{w}]) \overset{df}{=}\ \overline{u} \otimes \overline{v},\ u = \mathcal{B}_s(w),\ v = \mathcal{F}_s(w). \tag{20}$$

Применяя формулы (10), (20), (13), (19), получаем

$$(\hat{\varphi} \circ \partial)([\overline{w}]) = (\partial_F \circ \hat{\varphi})([\overline{w}]).$$

Это означает, что $\hat{\varphi}$ является цепным отображением. Для каждой пары целых чисел (s, t) цепное отображение $\hat{\varphi}$ индуцирует гомоморфизм

$$\psi_{s,t} :\ H_{s+t}(\hat{C}^s) \to\ H_{s+t}(K^s).$$

По определению имеем $H_{s+t}(\hat{C}^s) = \mathcal{E}_{s,t}$, а так как $C^p_s(B)$ — свободная группа, то $H_{s+t}(K^s) =\ C^p_s(B) \otimes H_t(F)$. Следовательно, имеется гомоморфизм

$$\psi_{s,t} :\ \mathcal{E}_{s,t} \to\ C^p_s(B) \otimes\ H_t(F).$$

Прежде чем изучать этот гомоморфизм, докажем предложение:

Предложение 1. *Имеется цепная гомотопия цепных отображений*

$$d(\overline{0}, \overline{1}) \simeq \boldsymbol{1}_{\hat{C}^s}, \tag{21}$$

следствием которой является свойство

$$\begin{gathered}(\forall z \in Z_n(\hat{C}^s)) \quad (\forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \underbrace{\overline{l}}_{t=n-s})(z) - z \in\ B_n(\hat{C}^s).\end{gathered} \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Выполним построения, подобные тем, что были в доказательстве теоремы 4 статьи [3]. Пусть $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m^{(i)}} \to E$ — произвольный ТС куб размерности n. Очевидны следующие свойства

$$u \ - \textit{вырожденный} \Rightarrow d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \underbrace{\overline{1}}_{n-s})(u) \ - \textit{вырожденный};$$

$$u \ - \textit{пунктированный} \Rightarrow d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \underbrace{\overline{1}}_{n-s})(u) \ - \textit{пунктированный};$$

$$\nu(d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \underbrace{\overline{1}}_{n-s})(u)) = \nu(u).$$

Это показывает, что $d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{1})$ определяет индуцированный однородный гомоморфизм нулевой степени

$$d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{1}) : \hat{C}^s \to \hat{C}^s.$$

С помощью (9) легко проверяется цепное свойство этого гомоморфизма.

Определим толерантное отображение

$$\delta^{(n,s;r)} : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m^{(i)}} \times \mathop{\times}\limits_{i=s+1}^{s+r} I_{M^{(i)}} \times I_{m^{(s+r)}} \times \mathop{\times}\limits_{i=s+r+1}^{n} I_{m^{(i)}} \to \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m^{(i)}},$$

$$r = \overline{1,t}, \ t = n - s, \ M^{(i)} = 2m^{(i)} + 1, \ i = \overline{s+1, s+r},$$

$$\delta^{(n,s;r)} \left(\frac{k_1}{m^{(1)}}, \dots, \frac{k_s}{m^{(s)}}, \frac{k_{s+1}}{M^{(s+1)}}, \dots, \frac{k_{s+r}}{M^{(s+r)}}, \frac{k'_{s+r}}{m^{(s+r)}}, \dots, \frac{k_n}{m^{(n)}} \right) =$$

$$= \left(\frac{k_1}{m^{(1)}}, \dots, \frac{k_s}{m^{(s)}}, \frac{1}{m^{(s+1)}} [\frac{k_{s+1}}{2}], \dots, \frac{1}{m^{(s+r)}} \max\{[\frac{k_{s+r}}{2}], k'_{s+r}\}, \dots, \frac{k_n}{m^{(n)}} \right).$$

Далее рассмотрим корректно определенные гомоморфизмы:

$$\mathcal{D}_n^{(s)} : C_n^{\bullet} \to C_{n+1}^{\bullet}, \ n \geqslant 0,$$

$$\mathcal{D}_n^{(s)}(u + D_n^{\bullet}(E)) \overset{df}{=} \sum_{r=1}^{n-s} (-1)^{r-1} u \circ \delta^{(n,s;r)} + D_{n+1}^{\bullet}(E).$$

Легко видеть, что $\nu(u \circ \delta^{(n,s;r)}) = \nu(u)$ для всех $r = \overline{1, n-s}$. Отсюда получаем

$$\mathcal{D}_n^{(s)}(C_n^s) \subset C_{n+1}^s, \ \mathcal{D}_n^{(s)}(C_n^{s-1}) \subset C_{n+1}^{s-1}.$$

Это позволяет рассмотреть гомоморфизмы $\hat{\mathcal{D}}_n^{(s)} : \hat{C}_n^s \to \hat{C}_{n+1}^s$, $n \geqslant 0$, индуцированные $\mathcal{D}_n^{(s)}$. Как и в доказательстве теоремы 4[3] получается формула

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{D}_n^{(s)} = d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{1}) - \mathbf{1}_{C_n^\bullet} - \mathcal{D}_{n-1}^{(s)} \circ \partial_n,$$

из которой, переходя к индуцированным гомоморфизмам, получим

$$\partial_{n+1} \circ \hat{\mathcal{D}}_n^{(s)} = d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{1}) - \mathbf{1}_{\hat{C}_n^s} - \hat{\mathcal{D}}_{n-1}^{(s)} \circ \partial_n,$$

что доказывает (22). Из (22) следует (23) для $l = 1$. На случай произвольного l свойство (23) распространяется по индукции.□

Теорема 3. *Для каждой пары целых чисел (s, t) гомоморфизм $\psi_{s,t}$ является изоморфизмом*

$$\psi_{s,t} : \ \mathcal{E}_{s,t} \cong \ C_s^p(B) \otimes \ H_t(F).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Определим вспомогательный гомоморфизм на образующих

$$\lambda : K^s \to \hat{C}^s, \ \lambda(\overline{u} \otimes \overline{v}) \overset{df}{=} \left[\overline{W(u,v)}\right] = [\overline{w}]\,, \tag{23}$$

где $w = W(u,v)$ — пунктированный ТС куб в $((E, \overline{\tau}), x_0)$, определенный в теореме 1 статьи [4]. Согласно определению K^s и $C^p(B)$ в нашем случае $l_1(u) = 0$. Если ТС куб $u = u^{\vee l_1(u)}$ вырожден, то по свойству (W.2) теоремы 1[4] $\nu(w) < s$, и значит $[\overline{w}] = 0$ в $\hat{C}^s$. Если же ТС куб v вырожден, то по свойству (W.5) теоремы 1[4] будет вырожденным ТС куб w, и значит $[\overline{w}] = [0] = 0$. Таким образом, определение (24) корректно.

Применим (24), (9) и свойство (W.4) в теореме 1[4] и получим

$$\partial \circ \lambda(\overline{u} \otimes \overline{v}) = \sum_{j=s+1}^{s+t} (-1)^j \left(\left[\overline{d_j^0(W(u,v))} \right] - \left[\overline{d_j^1(W(u,v))} \right] \right) =$$

$$= (-1)^s \sum_{j=1}^{t} (-1)^j \Bigg([d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u)})(W(u, d_j^0(v))) + D^{\bullet}_{s+t-1}(E)] -$$

$$-[d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u)})(W(u, d_j^1(v))) + D^{\bullet}_{s+t-1}(E)] \Bigg) =$$

$$= d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u)})(\lambda((-1)^s(\overline{u} \otimes \partial \overline{v}))) =$$

$$= d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u)})(\lambda \circ \partial_F(\overline{u} \otimes \overline{v})).$$

Итак, вместо цепного свойства для λ имеет место формула

$$\partial \circ \lambda(\overline{u} \otimes \overline{v}) = d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u)})(\lambda \circ \partial_F(\overline{u} \otimes \overline{v})). \tag{24}$$

Тем не менее свойства (25) оказывается достаточно, чтобы получить гомоморфизм групп гомологий, индуцированный λ. В самом деле, возьмем произвольный цикл $z = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{u}_i \otimes \overline{v}_i \in \ Z(K^s)$, где I – конечное множество, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, и $\partial_F(z) = (-1)^s \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{u}_i \otimes \partial \overline{v}_i = 0$. Обозначим

$$I_0 \stackrel{df}{=} \{ i \in I | \ \partial \overline{v}_i = 0 \} \, ; \ J \stackrel{df}{=} I \backslash I_0;$$

$$\{ \overline{u}_{j_1}, \ldots, \overline{u}_{j_N} \} \stackrel{df}{-} \text{все различные элементы множества} \, \{ \overline{u}_i | \ i \in J \} \, ;$$

$$J_k \stackrel{df}{=} \{ j \in J | \ \overline{u}_j = \overline{u}_{j_k} \} \, , \ k = \overline{1, N}.$$

Тогда

$$\partial_F(z) = (-1)^s \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{j_k} \otimes (\sum_{j \in J_k} \alpha_j \partial \overline{v}_j) = 0. \tag{25}$$

Так как все элементы $\overline{u}_{j_k}, \ k = \overline{1, N}$, различны, а группа $C^p(B)$ свободна, то из (26) следует, что

$$(\forall k = \overline{1, N}) \ \partial (\sum_{j \in J_k} \alpha_j \overline{v}_j) = \sum_{j \in J_k} \alpha_j \partial \overline{v}_j = 0. \tag{26}$$

Применим теперь (25), (26), (27) и (19):

$$\partial(\lambda(z)) = \partial(\sum_{i\in I}\alpha_i\lambda(\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i)) = \sum_{i\in I}\alpha_i\partial\circ\lambda(\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i) =$$

$$= \sum_{i\in I}\alpha_i d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u_i)})(\lambda\circ\partial_F(\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i)) =$$

$$= \sum_{i\in I}\alpha_i d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u_i)})(\lambda((-1)^s(\overline{u}_i\otimes\partial\overline{v}_i))) =$$

$$= (-1)^s\sum_{k=1}^{N} d(\underbrace{\overline{0}}_{s}, \overline{l_2(u_{j_k})})(\lambda(\overline{u}_{j_k}\otimes(\sum_{j\in J_k}\alpha_j\partial\overline{v}_j))) = 0.$$

Итак, доказано, что

$$\lambda(Z(K^s)) \subset Z(\hat{C}^s). \tag{27}$$

Пусть теперь имеется цикл, являющийся границей:

$$z\in\ Z(K^s),\ z = \partial_F(\sum_{i\in I}\alpha_i\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i) = \sum_{i\in I}\alpha_i\partial_F(\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i). \tag{28}$$

Обозначим для краткости

$$L \overset{df}{=} \max\left\{l_2(u_i)|\ i\in I\right\}.$$

Из (28) следует, что $\lambda(z)\in Z(\hat{C}^s)$. Это позволяет воспользоваться предложением 1 и получить гомологичность $\lambda(z)\overset{\hat{C}^s}{\sim} d(\overline{0},\overline{L})(\lambda(z))$. Применим (29) и цепное свойство для $d(\overline{0},\overline{l})$ в $\hat{C}^s$:

$$d(\overline{0},\overline{L})(\lambda(z)) = \sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{L-l_2(u_i)})(d(\overline{0},\overline{l_2(u_i)})(\lambda\circ\partial_F(\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i))) =$$
$$= \partial(\sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{L-l_2(u_i)})(\lambda(\overline{u}_i\otimes\overline{v}_i))).$$

Таким образом, получаем $\lambda(z)\overset{\hat{C}^s}{\sim} d(\overline{0},\overline{L})(\lambda(z))\in B(\hat{C}^s)$, то есть $\lambda(z)\in B(\hat{C}^s)$. Итак,

$$\lambda(B(K^s)) \subset B(\hat{C}^s). \tag{29}$$

Из (28) и (30) следует, что гомоморфизм λ индуцирует гомоморфизм гомологий, и в частности, для любой пары целых чисел s, t имеем индуцированный гомоморфизм

$$\mu_{s,t} : C^p_s(B) \otimes H_t(F) \to \mathcal{E}_{s,t}.$$

Рассмотрим композицию гомоморфизмов $\psi_{s,t} \circ \mu_{s,t}$. Она индуцирована композицией $\hat{\varphi} \circ \lambda$ в размерности $s+t$, при чем

$$\hat{\varphi} \circ \lambda(\overline{u} \otimes \overline{v}) = \hat{\varphi}(\left[\overline{W(u,v)}\right]) = \overline{u} \otimes \overline{v}^{\vee t \cdot l_2(u)}. \tag{30}$$

Пусть

$$z = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{u}_i \otimes \overline{v}_i \in Z(K^s).$$

Обозначим $\overline{u}_{i_1}, \ldots, \overline{u}_{i_N}$ — все различные элементы в $\{\overline{u}_i |\ i \in I\}$, а также $I_k \stackrel{df}{=} \{i \in I |\ \overline{u}_i = \overline{u}_{i_k}\}$, $k = \overline{1, N}$. Тогда

$$z = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes (\sum_{i \in I} \alpha_i \overline{v}_i) = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes f_k,\ f_k = \sum_{i \in I_k} \alpha_i \overline{v}_i. \tag{31}$$

Поскольку z – цикл, делаем вывод:

$$\partial_F(z) = (-1)^s \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes \partial f_k = 0 \Rightarrow\ (\forall k = \overline{1, N})\ \partial f_k = 0,$$

то есть $f_k \in Z(C^{\bullet}(F))$. Отсюда получаем, используя предложение 8 в [3],

$$(\forall k = \overline{1, N})\ (\forall h \geqslant 0)\ (\exists c_{k,h} \in C^{\bullet}(F))\ f_k^{\vee h} = f_k + \partial(c_{k,h}). \tag{32}$$

Теперь применим (31), (32), (33) и (19):

$$\begin{gathered}(\psi_{s,t} \circ \mu_{s,t})(z + B_{s+t}(K^s)) = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes f_k^{t \cdot l_2(u_{i_k})} + B_{s+t}(K^s) = \\ = \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes f_k + \sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes \partial c_{k, t \cdot l_2(u_{i_k})} + B_{s+t}(K^s) = \\ = z + (-1)^s \partial_F(\sum_{k=1}^{N} \overline{u}_{i_k} \otimes c_{k, t \cdot l_2(u_{i_k})}) + B_{s+t}(K^s) = z + B_{s+t}(K^s).\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\psi_{s,t}\circ\mu_{s,t}=\mathbf{1}_{H_{s+t}(K^s)}=\mathbf{1}_{C_s^p(B)\otimes H_t(F)}. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь гомоморфизм $\mu_{s,t}\circ\psi_{s,t}:\mathcal{E}_{s,t}\to\mathcal{E}_{s,t}$, индуцированный гомоморфизмом

$$\lambda\circ\hat{\varphi}:\hat{C}^s\to\hat{C}^s,\ (\lambda\circ\hat{\varphi})([\overline{w}])=\lambda(\overline{u}\otimes\overline{v})=\left[\overline{W(u,v)}\right], \tag{34}$$

где $u\in\mathcal{B}_s(w),\ v=\mathcal{F}_s(w)$. Определим отображение

$$\chi:w\longmapsto(-1)^sD_s(w),$$

сопоставляющее каждому $(s+t)$-мерному пунктированному ТС кубу w в $((E,\overline{\tau}),x_0)$, удовлетворяющему условию $\nu(w)\leqslant s$, новый пунктированный $(s+t+1)$-мерный ТС куб в $((E,\overline{\tau}),x_0)$, определенный в теореме 3 статьи [4]. Согласно свойству (D1) в теореме 3[4], имеем $\nu(\chi(w))\leqslant s$. Если ТС куб w вырожден и $t>0$, то по свойству (D6) вырожденным будет и ТС куб $\chi(w)$. Если же w –вырожден и $t=0$, то по свойству (D2) получаем $\nu(\chi(w))<s$. Если $\nu(w)<s$, то и $\nu(\chi(w))<s$. Из всего этого следует, что отображение χ определяет однородный гомоморфизм степени 1:

$$\chi:\hat{C}^s\to\hat{C}^s,\ \chi([\overline{w}])=(-1)^s\left[\overline{D_s(w)}\right]. \tag{35}$$

Применим (36), (9), свойства (D4) и (D5) из теоремы 3[4]:

$$\partial_{s+t+1}(\chi([\overline{w}]))=((-1)^s((-1)^{s+1}(d(\underbrace{\overline{0}}_{s},\overline{t\cdot l_2(u)})([\overline{w}])-[\overline{W(u,v)}])+$$

$$+\sum_{j=s+2}^{s+t+1}(-1)^j(d(\underbrace{\overline{0}}_{s},\overline{l_2(u)})([\overline{D_s(d^0_{j-1}(w))}])-d(\underbrace{\overline{0}}_{s},\overline{l_2(u)})([\overline{D_s(d^1_{j-1}(w))}])))=$$

$$=\lambda\circ\hat{\varphi}([\overline{w}])-d(\underbrace{\overline{0}}_{s},\overline{t\cdot l_2(u)})([\overline{w}])-d(\underbrace{\overline{0}}_{s},\overline{t\cdot l_2(u)})(\chi(\partial_{s+t}([\overline{w}]))).$$

Полученную формулу распространим по линейности на произвольные цепи в $\widehat{C}^s$ и применим к произвольному циклу $z=\sum\limits_{i\in I}\alpha_i[\overline{w}_i]\in Z_{s+1}(\widehat{C}^s)$:

$$\partial(\chi(z))=\lambda\circ\hat{\varphi}(z)-\sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{t\cdot l_2(u_i)})([\overline{w_i}])-\sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{l_2(u_i)})(\chi(\partial([\overline{w_i}]))). \tag{36}$$

По условию имеем

$$\begin{aligned}\partial(z) &= \sum_{i\in I}\alpha_i\sum_{j=s+1}^{s+t}(-1)^j([\overline{d_j^0(w_i)}]-[\overline{d_j^1(w_i)}]) = \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{j=s+1}^{s+t}\sum_{\varepsilon=0}^{1}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon}[\overline{d_j^\varepsilon(w_i)}].\end{aligned} \tag{37}$$

Обозначим

$J \overset{df}{=} \{(i,j,\varepsilon)|\ i\in I,\ j=\overline{s+1,s+t}, \varepsilon=\overline{0,1},\ \overline{d_j^\varepsilon(w_i)}\notin C^{s-1}\}$,

$\{d_{j_k}^{\varepsilon_k}(w_{i_k})|\ k=\overline{1,N}\} \overset{df}{-}$ все различные элементы в $\{d_j^\varepsilon(w_i)|\ (i,j,\varepsilon)\in J\}$,

$J_k \overset{df}{=} \{(i,j,\varepsilon)\in J|\ d_j^\varepsilon(w_i)=d_{j_k}^{\varepsilon_k}(w_{i_k})\}$.

В этих обозначениях формулу (38) можно переписать в виде

$$\partial(z) = \sum_{k=1}^{N}(\sum_{(i,j,\varepsilon)\in J_k}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon})[\overline{d_{j_k}^{\varepsilon_k}(w_{i_k})}] = 0,$$

что эквивалентно следующему

$$(\forall\ k=\overline{1,N})\ \sum_{(i,j,\varepsilon)\in J_k}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon}=0. \tag{38}$$

Из (13) следует, что

$$\begin{aligned}(\forall(i,j,\varepsilon)\in J_k)\ l_2(u_i) = l_2(\mathcal{B}_s(w_i)) = l_2(\mathcal{B}_s(d_j^\varepsilon(w_i))) \equiv \\ \equiv l_2(\mathcal{B}_s(d_{j_k}^{\varepsilon_k}(w_{i_k}))) = l_2(\mathcal{B}_s(w_{i_k})) = l_2(u_{i_k}).\end{aligned} \tag{39}$$

Используя (39) и (40), вычислим последнее слагаемое в (37):

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{l_2(u_i)})(\chi(\partial([\overline{w_i}]))) = \\ &= \sum_{(i,j,\varepsilon)\in J}\alpha_i d(\overline{0},\overline{l_2(u_i)})(-1)^{j+\varepsilon}\chi([\overline{d_j^\varepsilon(w_i)}]) = \\ &= \sum_{k=1}^{N} d(\overline{0},\overline{l_2(u_{i_k})})((\sum_{(i,j,\varepsilon)\in J_k}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon})\chi([\overline{d_{j_k}^{\varepsilon_k}(w_{i_k})}])) = 0.\end{aligned}$$

Эти вычисления вместе с (37) дают гомологичность двух циклов

$$(\lambda\circ\hat{\varphi})(z) \overset{\hat{C}^s}{\sim} \sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{t\cdot l_2(u_i)})([\overline{w_i}]). \tag{40}$$

Согласно предложению 1 имеем:

$$\begin{gathered}\partial_{s+t+1}\left(\hat{\mathcal{D}}^{(s)}_{s+t}(d(\overline{0},\overline{l})([\overline{w}_i]))\right) = \\ = d(\overline{0},\overline{l+1})([\overline{w}_i]) - d(\overline{0},\overline{l})([\overline{w}_i]) - \hat{\mathcal{D}}^{(s)}_{s+t-1}\left(\partial_{s+t}(d(\overline{0},\overline{l})([\overline{w}_i]))\right).\end{gathered} \tag{41}$$

Просуммируем это выражение по всем $l = \overline{0, t\cdot l_2(u_i)-1}$:

$$\begin{gathered}\partial_{s+t+1}\left(\hat{\mathcal{D}}^{(s)}_{s+t}(\sum_{l=0}^{t\cdot l_2(u_i)-1} d(\overline{0},\overline{l})([\overline{w}_i]))\right) = d(\overline{0},\overline{t\cdot l_2(u_i)})([\overline{w}_i]) - [\overline{w}_i] - \\ -\hat{\mathcal{D}}^{(s)}_{s+t-1}\left(\partial_{s+t}(\sum_{l=0}^{t\cdot l_2(u_i)-1} d(\overline{0},\overline{l})([\overline{w}_i]))\right).\end{gathered} \tag{42}$$

Последнее выражение умножаем на α_i и суммируем по $i \in I$ с использованием (40), (39):

$$\begin{gathered}\partial_{s+t-1}\left(\hat{\mathcal{D}}^{(s)}_{s+t}(\sum_{i\in I}\alpha_i\sum_{l=0}^{t\cdot l_2(u_i)-1} d(\overline{0},\overline{l})([\overline{w}_i]))\right) = \sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{t\cdot l_2(u_i)})([\overline{w}_i]) - z - \\ -\hat{\mathcal{D}}^{(s)}_{s+t-1}\left(\sum_{k=1}^{N}(\sum_{l=0}^{t\cdot l_2(u_{i_k})-1} d(\overline{0},\overline{l}))(\sum_{(i,j,\varepsilon)\in J_k}\alpha_i(-1)^{j+\varepsilon}[\overline{d^{\varepsilon_k}_{j_k}(w_{i_k})}])\right) = \\ = \sum_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{t\cdot l_2(u_i)})([\overline{w}_i]) - z.\end{gathered}$$

В результате имеем гомологичность $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i d(\overline{0},\overline{t\cdot l_2(u_i)})([\overline{w}_i]) \overset{\hat{C}^s}{\sim} z$, что вместе с (41) дает гомологичность $(\lambda\circ\hat{\varphi})(z) \overset{\hat{C}^s}{\sim} z = \mathbf{1}_{\hat{C}^s}(z)$, из которой следует $\mu_{s,t}\circ\psi_{s,t} = \mathbf{1}_{H_{s+t}(\hat{C}^s)} = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_{s,t}}$, что завершает доказательство теоремы 3. □

Изучим теперь производную точную пару

$$\mathfrak{E}^2(C^\bullet) = \left\langle \mathcal{D}^2, \mathcal{E}^2; i^{(2)}, j^{(2)}, k^{(2)}\right\rangle.$$

Для вычисления дважды градуированной группы $\mathcal{E}^2 = \bigoplus\limits_{s,t}\mathcal{E}^2_{s,t}$ необходимо вычислить граничный гомоморфизм $d = j\circ k$ группы $\mathcal{E}$. Этот граничный гомоморфизм d с помощью изоморфизма ψ из теоремы 3 переходит в граничный гомоморфизм группы $\bigoplus\limits_{s,t}(C^p_s(B)\otimes H_t(F))$. Найдем этот гомоморфизм.

Согласно утверждению теоремы 2 статьи [4], сопоставление каждому элементу $[\omega] \in \pi(B, b_0)$ автоморфизма $\Phi_{[\omega]}$ из $Aut(H(F))$ определяет действие фундаментальной группы $\pi(B, b_0)$ базы (B, τ) расслоения $p : ((E, \tau), x_0) \to ((B, \tau), b_0)$ на группе гомологий $H(F)$ слоя $F = p^{-1}(b_0)$. Это позволяет определить на $\bigoplus\limits_{s,t}(C^p_s(B) \otimes H_t(F))$ структуру цепного комплекса $C^p(B)$ с локальными коэффициентами в группе гомологий $H(F)$. Граничный гомоморфизм ∂_B определяется следующим образом: пусть $u : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{m^{(i)}}(u) \to B$ – произвольный пунктированный ТС куб в $((B, \tau), b_0)$ с условием $l_1(u) = 0$, и пусть $h \in H_t(F)$ – произвольный элемент группы гомологий, тогда

$$\partial_B(\overline{u} \otimes h) \stackrel{df}{=} \sum_{j=1}^{s} (-1)^j \left(\overline{d^0_j(u)} \otimes h - \overline{d^1_j(u)} \otimes \Phi_{[\sigma_j u]}(h) \right), \qquad (43)$$

где $\sigma_j u : I_{m^{(j)}(u)} \to B$ – петля в $((B, \tau), b_0)$, определяемая формулой

$$\sigma_j u(\frac{k_j}{m^{(j)}(u)}) = u(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, \frac{k_j}{m^{(j)}(u)}, 0, \ldots, 0), k_j = \overline{0, m^{(j)}}.$$

Граничное свойство $\partial_B \circ \partial_B = 0$ проверяется стандартно. Таким образом, имеем цепной комплекс $\{(C^p_s; H(F)), \partial_B\}_{s \geqslant 0}$, чьи группы гомологий обозначим $\{H_s(B; H(F))\}_{s \geqslant 0}$ и назовем группами гомологий базы (B, τ) с локальными коэффициентами в группе гомологий $H(F)$ слоя $(F, \overline{\tau})$.

Предложение 2. *Однородный гомоморфизм степени (0,0)*

$$\psi = \bigoplus_{s,t} \psi_{s,t} : \; \mathcal{E} = \bigoplus_{s,t} \mathcal{E}_{s,t} \cong \; C^p(B) \otimes H(F) = \bigoplus_{s,t} (C^p_s(B) \otimes H_t(F))$$

является цепным отображением, то есть $\partial_B \circ \psi = \psi \circ d$.

Доказательство

Возьмем в $C^p(B) \otimes H(F)$ произвольную образующую вида $\overline{u} \otimes h$, где $u : \mathop{\times}\limits_{j=1}^{s} I_{m^{(j)}}(u) \to B$ –пунктированный ТС куб в (B, τ) с условием $l_1(u) = 0$, а h – элемент группы гомологий $H(F)$. Пусть

$$z = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{v}_i \in Z^\bullet_t(F) \subset C^\bullet_t(F)$$

является представителем гомологического класса h, т.е. $z + B_t^\bullet(F) = h$. Рассмотрим $(s+t)$ -мерную цепь

$$c = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{W(u, v_i)} \in C_{s+t}^\bullet(E).$$

Применим формулы (24) и (34) и получим

$$\lambda(\overline{u} \otimes z) = [c] \in \hat{C}_s, \tag{44}$$

$$\psi^{-1}(\overline{u} \otimes h) = \mu(\overline{u} \otimes h) = \lambda(\overline{u} \otimes z) + B_{s+t}(\hat{C}_s) = [c] + B_{s+t}(\hat{C}_s) \in \mathcal{E}_{s,t}. \tag{45}$$

Заметим, что из условия $z \in Z_t^\bullet(F)$ и формулы (24) следует, что $\overline{u} \otimes z \in Z_{s+t}(K^s)$. Отсюда и из (45), (28) будем иметь

$$\lambda(\overline{u} \otimes z) = [c] \in Z_{s+t}(\hat{C}^s) \tag{46}$$

Из свойства 1 в теореме 1[4] непосредственно получается, что

$$c = \sum_{i \in I} \alpha_i \overline{W(u, v_i)} \in C_{s+t}^s. \tag{47}$$

Из (47) и (48), согласно общей теории точной гомологической последовательности (см.[5],гл.8,п.2) следует, что

$$k([c] + B_{s+t}(\hat{C}_s)) = \partial c + B_{s-1+t}(C^{s-1}) \in H_{s-1+t}(C^{s-1}),$$

$$j(\partial c + B_{s-1+t}(C^{s-1})) = [\partial c] + B_{s-1+t}(\hat{C}^{s-1}) \in \mathcal{E}_{s-1,t},$$

$$d([c] + B_{s+t}(\hat{C}_s)) = (j \circ k)([c] + B_{s+t}(\hat{C}_s)) = [\partial c] + B_{s-1+t}(\hat{C}^{s-1}) \in \mathcal{E}_{s-1,t}. \tag{48}$$

При этом выполняются свойства: $\partial c \in C^{s-1}$, $[\partial c] \in Z_{s-1+t}(\hat{C}^{s-1})$, в чем мы попутно убедимся ниже прямыми вычислениями. Для цикла z имеем

$$\begin{aligned} \partial(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i) &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{t} (-1)^j \alpha_i (d_j^0(v_i) - d_j^1(v_i)) = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{t} \sum_{\varepsilon=0}^{1} (-1)^{j+\varepsilon} \alpha_i d_j^\varepsilon(v_i) \in D_t^\bullet(F), \end{aligned} \tag{49}$$

то есть в правой части ТС кубы либо сокращаются, либо вырождены. Из (50) с помощью свойств 4, 5 в теореме 1[4] и следует, что

$$\partial c = \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{t}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}\alpha_i\overline{d_j^{\varepsilon}(W(u,v_i))} =$$
$$= \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}\alpha_i\overline{d_j^{\varepsilon}(W(u,v_i))} +$$
$$+\sum_{i\in I}\sum_{j=s+1}^{s+t}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}\alpha_i d(\overline{0},\overline{l_2(u)})\overline{(W(u,d_{j-s}^{\varepsilon}(v_i)))} =$$
$$= \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}\alpha_i\overline{d_j^{\varepsilon}(W(u,v_i))}.$$

Отсюда с использованием свойства 1 в теореме 1[4] и свойства (4) получим $\partial c \in C^{s-1}$. А с помощью определения граничного гомоморфизма ∂ в $\hat{C}^s$ и свойств 4, 5 в теореме 1[4] и (50) убеждаемся, что

$$\partial([\partial c]) = \partial\left(\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{s}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}\alpha_i\left[\overline{d_j^{\varepsilon}(W(u,v_i))}\right]\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}\sum_{i\in I}\sum_{k=s}^{s-1+t}\sum_{\delta=0}^{1}(-1)^{k+\delta}\alpha_i\left[\overline{d_k^{\delta}\circ d_j^{\varepsilon}(W(u,v_i))}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}d_j^{\varepsilon}\left(\sum_{i\in I}\sum_{k=s}^{s-1+t}\sum_{\delta=0}^{1}(-1)^{k+\delta}\alpha_i d(\overline{0},\overline{l_2(u)})([\overline{W(u,d_{k+1-s}^{\delta}(v_i))}])\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{\varepsilon=0}^{1}(-1)^{j+\varepsilon}d_j^{\varepsilon}\left((-1)^{s-1}d(\overline{0},\overline{l_2(u)})\right)\left(\sum_{i\in I}\sum_{k=1}^{t}\sum_{\delta=0}^{1}(-1)^{k+\delta}\alpha_i([\overline{W(u,d_k^{\delta}(v_i))}])\right) = 0.$$

Обозначим для краткости $f = [\partial c] + B_{s-1+t}(\hat{C}^{s-1}) \in \mathcal{E}_{s-1,t}$, и с учетом (49) и (46) запишем $f = (d\circ\psi^{-1})(\overline{u}\otimes h)$. Следовательно, элемент

$$(\psi\circ d\circ\psi^{-1})(\overline{u}\otimes h) = \psi(f) = \hat{\varphi}([\partial c]) + B_{s-1+t}(K^{s-1}) \qquad (50)$$

является классом гомологий цикла

$$g = \hat{\varphi}([\partial c]) = \sum_{i\in I}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j}\alpha_i\Big(\overline{\mathcal{B}_{s-1}(d_j^0(W(u,v_i)))}\otimes\overline{\mathcal{F}_{s-1}(d_j^0(W(u,v_i)))} -$$

$$-\overline{\mathcal{B}_{s-1}(d_j^1(W(u,v_i)))}\otimes\overline{\mathcal{F}_{s-1}(d_j^1(W(u,v_i)))}\Big)$$

группы $C^p_{s-1}(F) \otimes C^\bullet_t(F)$ относительно граничного гомоморфизма ∂_F. Так как $j \leqslant s$, то с учетом $l_1(u) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{s-1}(d^\varepsilon_j(W(u,v_i))) = p \circ (d^\varepsilon_j(W(u,v_i))|_{k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t)}=0}) = \\
&= d^\varepsilon_j(p \circ (W(u,v_i)|_{k^{(s+1)}=\ldots=k^{(s+t)}=0})) = d^\varepsilon_j(\mathcal{B}_s(W(u,v_i))) = d^\varepsilon_j(u), \\
&\mathcal{F}_{s-1}(d^\varepsilon_j(W(u,v_i)))\left(\tfrac{k^{(s+1)}}{M^{(1)}(v_i)}, \ldots, \tfrac{k^{(s+t)}}{M^{(t)}(v_i)}\right) = \\
&= W(u,v_i)(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1}, \varepsilon, 0, \ldots, 0, \tfrac{k^{(s+1)}}{M^{(1)}(v_i)}, \ldots, \tfrac{k^{(s+t)}}{M^{(t)}(v_i)}).
\end{aligned} \tag{51}$$

Если в (52) взять $\varepsilon = 0$, то из определения $\mathcal{F}_s$ и свойства (W.3) теоремы 1 из [4] следует, что $\mathcal{F}_{s-1}(d^0_j(W(u,v_i))) = \mathcal{F}_s(W(u,v_i)) = v_i^{\vee t \cdot l_2(u)}$. В результате имеем

$$g = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j \left(\overline{d^0_j(u)} \otimes (\sum_{i\in I}\alpha_i\overline{v_i})^{\vee t\cdot l_2(u)} - \overline{d^1_j(u)} \otimes y_j\right) \tag{52}$$

где

$$y_j = \sum_{i\in I}\alpha_i \overline{\mathcal{F}_{s-1}(d^1_j(W(u,v_i)))} \tag{53}$$

Поскольку $z = \sum\limits_{i\in I}\alpha_i\overline{v}_i$– цикл в $C^\bullet(F)$, то по (19) и предложению 8[3] получаем гомологическую эквивалентность относительно ∂_F

$$\overline{d^0_j(u)} \otimes \left((\sum_{i\in I}\alpha_i\overline{v_i})^{\vee t\cdot l_2(u)}\right) \overset{K^{s-1}}{\sim} \overline{d^0_j(u)} \otimes (\sum_{i\in I}\alpha_i\overline{v_i}) = \overline{d^0_j(u)} \otimes z. \tag{54}$$

Прямым вычислением с использованием свойства (W.4) из теоремы 1[4] легко убедиться в том, что $y_j \in Z^\bullet(F),\ j = \overline{1,s}$. Но в этом нет необходимости, так как этот факт будет установлен позднее автоматически.

Вычислим теперь гомологический класс $y_j + B_t(C^\bullet(F)) = y_j + B_t(F)$. Для этого рассмотрим толерантную петлю $\sigma_j u$. Так как по условию $l_1(u) = 0$, что означает наличие пунктированного ТС куба w в $((E,\overline{\tau}),x_0)$ такого, что $p \circ w = u$, то $p \circ (\sigma_j w) = \sigma_j u$, и следовательно $\sigma_j u$ имеет накрывающую петлю $\sigma_j w$ в $((E,\overline{\tau}),x_0)$, и поэтому $l(\sigma_j u) = 2m^{(j)}(u) < < 2\sum\limits_{i=1}^{s} m^{(i)}(u) = l_2(u)$. Определим теперь отображение $W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}$, сопоставляющее каждому пунктированному t -мерному ТС кубу v в $((F,\overline{\tau}),x_0)$

пунктированный $(t+1)$ -мерный ТС куб в $((E,\overline{\tau}),x_0)$:

$$W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}(v)\left(\tfrac{k^{(j)}}{m^{(j)}(u)},\tfrac{k^{(s+1)}}{M^{(1)}(v)},\ldots,\tfrac{k^{(s+t)}}{M^{(t)}(v)}\right)\overset{df}{=}$$

$$=W(u,v)(\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},\tfrac{k^{(j)}}{m^{(j)}(u)},0,\ldots,0,\tfrac{k^{(s+1)}}{M^{(1)}(v)},\ldots,\tfrac{k^{(s+t)}}{M^{(t)}(v)}). \tag{55}$$

Проверим, что $W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}$ удовлетворяет свойствам 1–4 из предложения 2[4], если заменить $l(w)=l(\sigma_j u)$ на $(l_2(u))$. В самом деле, из (55) и 3 в теореме 1[4] следует

$$d^0_1(W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}(v))=\mathcal{F}_s(W(u,v))=v^{\vee t\cdot l_2(u)}.$$

А из (56) и (W.1),(W.2) в теореме 1[4] следует

$$\left(p\circ W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}\right)(v)=p\left(W(u,v)|\;(\overset{j-1}{\times}\{0\}\times I_{m^{(j)}(u)}\times\overset{s-j}{\times}\{0\}\times\underset{i=1}{\overset{t}{\times}}I_{M^{(i)}(v)})\right)=$$
$$=p\left(W(u,v)|\;(\overset{j-1}{\times}\{0\}\times I_{m^{(j)}(u)}\times\overset{s-j}{\times}\{0\}\times\overset{t}{\times}\{0\})\right)=$$
$$=\mathcal{B}_sW(u,v)|\;(\overset{j-1}{\times}\{0\}\times I_{m^{(j)}(u)}\times\overset{s-j}{\times}\{0\})=u|\;(\overset{j-1}{\times}\{0\}\times I_{m^{(j)}(u)}\times\overset{s-j}{\times}\{0\})=\sigma_j u.$$

Теперь воспользуемся (56) и свойством (W.4) из теоремы 1[4]

$$d^{\varepsilon}_{1+j'}(W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}(v))=$$
$$=d^{\varepsilon}_{1+j'}\left(W(u,v)|\;(\overset{j-1}{\times}\{0\}\times I_{m^{(j)}(u)}\times\overset{s-j}{\times}\{0\}\times\underset{i=1}{\overset{t}{\times}}I_{M^{(i)}(v)})\right)=$$

$$=d(\underbrace{\overline{0}}_{s},\underbrace{\overline{l_2(u)}}_{t-1})\left(W(u,d^{\varepsilon}_{j'}(v))|(\overset{j-1}{\times}\{0\}\times I_{m^{(j)}(u)}\times\overset{s-j}{\times}\{0\}\times\underset{\substack{i=\overline{1,t}\\ i\neq j'}}{\overset{t}{\times}}I_{M^{(i)}(d^{\varepsilon}_{j'}(v))})\right)=$$
$$=d(\overline{0},\overline{l_2(u)})(W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}(d^{\varepsilon}_{j'}(v))).$$

Наконец, свойство 4 предложения 2[4] для $W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}$ следует из (56) и свойства 5 теоремы 1[4]. Отсюда следует, что можно использовать (45)[4], в результате чего, для цикла $z=\sum\alpha_i\overline{v_i}$ будем иметь

$$\Phi_{[\sigma_j u]}(z+B^{\bullet}_t(F))=\Phi^{(l_2(u))}_{[\sigma_j u]}\underline{(z)+B^{\bullet}_t(F)}=$$
$$=\sum_{i\in I}\alpha_i\Phi^{(l_2(u))}_{[\sigma_j u]}(\overline{v_i})+B^{\bullet}_t(F)=\sum_{i\in I}\alpha_i\overline{d^1_1(W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}(v_i))+B^{\bullet}_t(F)}.$$

С другой стороны

$$y_j = \sum_{i\in I} \alpha_i \overline{\mathcal{F}_{s-1}(d_j^1(W(u,v_i)))} =$$
$$= \sum_{i\in I} \alpha_i \overline{W(u,v_i)|\ (\overset{j-1}{\times}\{0\}\times\{1\}\times\overset{s-j}{\times}\{0\}\times\overset{t}{\underset{i'=1}{\times}} I_{M^{(i')}(v_i)})} =$$
$$= \sum_{i\in I} \alpha_i \overline{d_1^1(W^{(l_2(u))}_{\sigma_j u}(v_i))}.$$

Отсюда следует, что y_j – цикл в $C^\bullet_F$ и, что гомологический класс этого цикла имеет вид:

$$y_j + B^\bullet_t(F) = \Phi_{[\sigma_j u]}(z + B^\bullet_t(F)) = \Phi_{[\sigma_j u]}(h). \tag{56}$$

Собирая воедино формулы (51), (52), (53), (57) и (44), получаем $\psi \circ d \circ \psi^{-1}(\overline{u}\otimes h) = \partial_B(\overline{u}\otimes h)$, что означает $\psi\circ d\circ\psi^{-1} = \partial_B$, и следовательно $\psi \circ d = \partial_B \circ \psi$.$\square$

Непосредственным следствием предложения 2 является важный результат.

Теорема 4. *Для любой пары целых чисел s, t изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм*

$$\psi^{(2)}_{s,t} : \mathcal{E}^2_{s,t} \cong H_s(B; H_t(F))$$

однородной подгруппы степени (s,t) второго члена спектральной последовательности толерантного расслоения $p : ((E,\overline{\tau})) \to ((B,\tau))$ на s -мерную группу накрытых пунктированных ТКС гомологий базы (B,τ) с локальными коэффициентами в группе $H_t(F)$ t -мерных пунктированных ТКС гомологий слоя $(F,\overline{\tau})$.

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). 1962.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестник Самарского Государственного Университета. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2007. Вып.7(57).

4. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Свойства сингулярных кубов в толерантных расслоениях // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып.5.

5. *Ху Сы-цзян* Теория гомотопий. М.: Мир. 1964.

УДК 513

Д.С. СТЕПАНЕНКО

К вопросу описания обобщенных тета–функций, удовлетворяющих функциональному уравнению

Хорошо известно [1], что при выводе функционального уравнения римановского типа для L–функции Дирихле в случае четного характера, существенным моментом является тот факт, что функция вида

$$\theta(x,\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{\pi n^2 x}{k}},$$

где k — модуль характера χ, удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\theta\left(\frac{1}{x},\bar{\chi}\right) = \alpha\sqrt{x}\theta(x,\chi).$$

В частности, θ–функция

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\theta(x).$$

В дальнейшем функциональные ряды

$$\theta(x, \{a_n\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi n^2 x}{k}}, \tag{1}$$

где $a_{-n} = a_n,\ a_0 = 0$, будем называть обобщенными θ–функциями.

В данной работе рассматривается следующая задача. Какие ряды вида (1) удовлетворяют функциональному уравнению

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \{a_n\}\right) = \alpha\sqrt{x}\theta(x, \{a_n\}). \tag{2}$$

Отметим, что эта задача тесно связана с задачей описания рядов Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению римановского типа.

Во-первых, рассмотрим случай, когда a_n — конечнозначные и мультипликативные.

Как показано в [2], ряды Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющие функциональному уравнению римановского типа, являются L–функциями Дирихле. Отсюда сразу следует следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функциональный ряд (1) с конечнозначными мультипликативными коэффициентами удовлетворяет функциональному уравнению (2). Тогда $a_n = \chi(n)$, где $\chi(n)$ — четный характер Дирихле по модулю k.*

Рассмотрим теперь ряды (1) с конечнозначными коэффициентами. В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ряд (1) с конечнозначными коэффициентами удовлетворяет функциональному уравнению (2). Тогда коэффициенты a_n периодичны, начиная с некоторого номера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

При условиях теремы 2 ряд Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа. Тогда легко показать, что $f(s)$ в левой полуплоскости удовлетворяет следующему условию роста модуля:

$$|f(s)|=O(e^{|s|\ln|s|+A|s|}),\quad A>0. \tag{3}$$

Как показано в [3] из условия (3) следует, что степенной ряд

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$$

определяет функцию, регулярную в точке $z=1$.

Отсюда, в силу известной теоремы Сеге, имеющей место для степенных рядов с конечнозначными коэффициентами [4], следует утверждение теоремы 2.

Нужно отметить, что в теории L–функций особый интерес представляют ответы на следующие два вопроса:

1. Будет ли ряд (1) с конечнозначными мультипликативными коэффициентами a_n и с дополнительным условием

   $$\sum_{n\leqslant x}a_n=O(1)$$

   удовлетворять функциональному уравнению (2)?

2. При каких дополнительных условиях на периодические коэффициенты a_n ряд вида (1) будет удовлетворять функциональному уравнению (2)?

Библиографический список

1. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.

2. *Кривобок В.В.* Об аналитических свойствах L–функций числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2008.

3. *Кузнецов В.В.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36. Вып. 6.

4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.

УДК 513.6

М.Н. СУСИН

Слабая толерантность в пространстве толерантных путей

В предлагаемой статье приводятся конструкции статьи [1] в более простом виде, что должно значительно облегчить их применение.

Напомним (см. [2,3]), что толерантное пространство — это пара (X, τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — рефлексивное и симметричное отношение, называемое отношением толерантности. Принято записывать $x_1 \tau x_2$, вместо $(x_1, x_2) \in \tau$, и называть точки $x_1, x_2 \in X$ толерантными. Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ называется толерантным, если $x_1 \tau x_2$ влечет $f(x_1)\theta f(x_2)$.

В гомотопической теории толерантных пространств роль единичного отрезка гомотопических параметров играют пространства (I_n, ι_n), где $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left\{ \frac{k}{n} \middle| \ k = \overline{0, n} \right\}$ — множество точек деления единичного отрезка на n частей, а толерантность ι_n определяется условием

$$\frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k - l| \leqslant 1.$$

Определение 1. Два толерантных отображения $f_0, f_1 : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ называются гомотопными, что записывается $f_0 \sim f_1$, если существует натуральное число n и толерантное отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \to (Y, \theta)$ такое, что

1)$(\forall x \in X) F(x, 0) = f_0(x)$,

2)$(\forall x \in X) F(x, 1) = f_1(x)$.

Если в определении 1 $n = 1$, то толерантную гомотопность называют простой или одношаговой и записывают $f_0 \approx f_1$. В этом случае

$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \tau x_2 \Rightarrow f_0(x_1) \theta f_1(x_2).$$

Определение 2. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ удовлетворяет условию накрывающей толерантной гомотопии относительно пространства (Y, θ), если для любых толерантных отображений

$$f' : (Y, \theta) \to (E, \overline{\tau}), F : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (B, \tau),$$

для которых $F(y, 0) = (p \circ f')(y), y \in Y$, существует толерантное отображение $F' : (Y \times I_n, \theta \times \iota_n) \to (E, \overline{\tau})$ такое, что $F'(y, 0) = f'(y)$ и $p \circ F' = F$.

Определение 3. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ называется толерантным расслоением (в смысле Гуревича), если p удовлетворяет свойству накрывающей толерантной гомотопии относительно любого толерантного пространства (Y, θ). В этом случае $(E, \overline{\tau})$ называется пространством расслоения, (B, τ) - базой расслоение, $p^{-1}(b)$ - слоем над точкой $b \in B$.

Определение 4. Толерантным путем длины n в пространстве (X, τ) называется толерантное отображение $\omega_n : (I_n, \iota_n) \to (X, \tau)$. Точки $\omega_n(0)$ и $\omega_n(1)$ называются началом и концом пути ω_n. Если $\omega_n(0) = \omega_n(1) = x_0$, то ω_n называется толерантной петлей в точке x_0.

Если ω_n — толерантный путь длины n, а $m \geqslant n$, то толерантный путь $\omega_{m,n} : (Im, \iota_m) \to (X, \tau)$ такой, что

$$\omega_{m,n}(\frac{k}{m}) = \begin{cases} \omega_n(\frac{k}{n}), k = \overline{0, n}, \\ \omega_n(1), k = \overline{n, m}, \end{cases}$$

называется продлением длины m пути ω_n.

На множестве толерантных путей в простанстве (X, τ) может быть определена частичная операция произведения путей ω_n и ω'_m, у которых $\omega_n(1) = \omega'_m(0)$. Результатом этой операции будет новый путь $\omega_n * \omega'_m$, определяемый формулой

$$\omega_n * \omega'_m \left(\frac{k}{n+m}\right) = \begin{cases} \omega_n(\frac{k}{n}),\ k = \overline{0, n}, \\ \omega'_m\left(\frac{k-n}{m}\right),\ k = \overline{n, m+n}. \end{cases}$$

Обозначим через $P(X)$ множество толерантных путей в пространстве (X, τ). Наряду с $P(X)$ определим его подмножества

$$P_M(X) = \{\omega_n \in P(X) |\ n \leqslant M\}, P'_M(X) = \{\omega_n \in P(X) |\ n = M\},$$

$$P(X, x_0) = \{\omega_n \in P(X) |\ \omega_n(0) = x_0\},$$

где $M \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$. Определим на множестве $P(X)$ отношение слабой толерантности, сохранив обозначения статьи [1].

Определим конструкцию элементарного замедления толерантного пути. Пусть $\omega_n : (I_n, \iota_n) \to (X, \tau)$ — толерантный путь в (X, τ). Элементарным замедлением пути ω_n в точке $k = \overline{0, n}$ назовем толерантный путь $\mu(k)(\omega_n) : (I_{n+1}, \iota_{n+1}) \to (X, \tau)$ такой, что

$$\mu(k)(\omega_n)(\frac{l}{n+1}) = \begin{cases} \omega_n(\frac{l}{n}), l = \overline{0, k}, \\ \omega_n(\frac{l-1}{n}), l = \overline{k+1, n+1}. \end{cases}$$

Определение 5. Два толерантных пути $\omega_n, \omega'{}_m \in P(X)$ назовем слабо толерантными и обозначим $\omega_n \varkappa_X \omega'{}_m$, если выполнено следующие условие:

$$(\exists 0 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n), (\exists 0 \leqslant k'{}_1 < \ldots < k'{}_t \leqslant m)$$

$$\mu(k_1)\circ\ldots\mu(k_s)(\omega_n)=\alpha_r:(I_r,\iota_r)\longrightarrow(X,\tau),$$

$$\mu(k'_1)\circ\ldots\mu(k'_t)(\omega_n)=\alpha'_r:(I_r,\iota_r)\longrightarrow(X,\tau),$$

$$\left(\forall\ k,l=\overline{0,r}\right)\quad |k-l|\leqslant 1\Longrightarrow\alpha_r\left(\frac{k}{r}\right)\tau\alpha'_r\left(\frac{l}{r}\right).$$

Отметим также, что

$$\omega_n\varkappa_X\omega'_m\Rightarrow\omega_n(0)\tau\omega'_m(0),\omega_n(1)\tau\omega'_m(1). \tag{1}$$

Предложение 1. *Пусть толерантные пути $\omega_{n_1},\omega'_{n_2},\gamma_{m_1},\gamma'_{m_2}$ в пространстве (X,τ) таковы, что $\omega_{n_1}\varkappa_X\omega'_{n_2},\gamma_{m_1}\varkappa_X\gamma'_{m_2}$ и $\omega_{n_1}(1)=\gamma_{m_1}(0)$, $\omega'_{n_2}(1)=\gamma'_{m_2}(0)$, тогда $(\omega_{n_1}*\gamma_{m_1})\varkappa_X(\omega'_{n_2}*\gamma'_{m_2})$.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1 статьи [1].

Легко видеть рефлексивность и симметричность отношения $\varkappa_X$. Следовательно имеем толерантное пространство $(P(X),\varkappa_X)$.

Распространим важное определение 1.3.3 работы [3] на случай произвольных толерантных путей.

Определение 6. Два толерантных пути ω_n,ω'_m в пространстве (X,τ) назовем толерантно гомотопными и обозначим $\omega_n\simeq\omega'_m$, если для некоторого $M\geqslant max\{n,m\}$ имеем $\omega_{M,n}\sim\omega'_{M,m}$.

Отношение $\simeq$ является отношением эквивалентности и разбивает множество $P(X)$ на классы толерантно гомотопных путей. Следующее предложение описывает эти классы как компоненты линейной связанности пространства $(P(X),\varkappa_X)$.

Предложение 2. *Для того, чтобы толерантные пути ω_n и ω'_m в пространстве (X,τ) были толерантно гомотопными, необходимо и достаточно, чтобы пути ω_n и ω'_m в пространстве $(P(X),\varkappa_X)$ соединялись толерантным путем. Т.е.*

$$\omega_n\simeq\omega'_m\Leftrightarrow(\exists\gamma_n\in P(P(X)))\gamma_n(0)=\omega_n,\gamma_n(1)=\omega_m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\omega_n \simeq \omega'_m$. Тогда найдется $N \geqslant max\{n,m\}$ такое, что существует толерантное отображение $F : (I_N \times I_M, \iota_N \times \iota_M) \to (X, \tau)$, для которого

$$F|(I_N \times \{0\}) = \omega_{N,n}, F|(I_N \times \{1\}) = \omega^{'}_{N,m}. \tag{2}$$

По определению 5 имеем очевидную цепочку толерантностей

$$\omega_n \varkappa_X \mu(n)(\omega_n) = \omega_{n+1,n} \varkappa_X ... \varkappa_X \mu(N-1)(\omega_{N-2,n}) = \omega_{N,n},$$

определяющую толерантный путь $\gamma^{(1)}_{N-n} : (I_{N-n}, \iota_{N-n}) \to (P(X), \varkappa_X)$, такой, что

$$(\forall l = \overline{0, N-n}) \gamma^{(1)}_{N-n}(\frac{l}{N-n}) = \omega_{n+l,n}.$$

Очевидно, что путь $\gamma^{(1)}_{N-n}$ соединяет ω_n с $\omega_{N,n}$ в $P(X)$:

$$\gamma^{(1)}_{N-n}(0) = \omega_n, \gamma^{(1)}_{N-n}(1) = \omega_{N,n}$$

Аналогично получается толерантный путь $\gamma^{(2)}_{N-m}$ в $(P(X), \varkappa_X)$ такой, что

$$\gamma^{(2)}_{N-m}(0) = \omega^{'}_{N,m}, \gamma^{(2)}_{N-m}(1) = \omega^{'}_{m}.$$

Определим теперь толерантные пути $\omega^{(l)}_N = F|(I_N \times \{\frac{l}{M}\}), l = \overline{0, M}$. Из толерантности отображения F следует, что

$$(\forall l = \overline{0, M-1}) \omega^{(l)}_M \approx \omega^{(l+1)}_M, m.e. (\forall l = \overline{0, M-1}) \omega^{(l)}_M \varkappa_X \omega^{(l+1)}_M. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что имеем толерантный путь $\gamma^{(3)}_M$ в $P(X)$ такой, что $\gamma^{(3)}_M(\frac{l}{M}) = \omega^{(l)}_M, \gamma^{(3)}_M(0) = \omega_{N,n}, \gamma^{(3)}_M(1) = \omega^{'}_{N,m}$. Таким образом, толерантный путь $\gamma_n = \gamma^{(1)}_{N-n} * \gamma^{(3)}_M * \gamma^{(2)}_{N-n}$ в $P(X)$ соединяет ω_n с $\omega^{'}_m$.

Обратно, пусть имеется толерантный путь γ_n в $(P(X), \varkappa_X)$, соединяющий ω_n с $\omega^{'}_m$. Следовательно, имеется цепочка толерантностей:

$$\omega_n = \gamma_n(0) \varkappa_X \gamma_n(\frac{1}{n}) \varkappa_X ... \varkappa_X \gamma_n(1) = \omega^{'}_m.$$

Ввиду транзитивности отношения $\simeq$ достаточно доказать:

$$\omega_n \varkappa_X \omega_m^{'} \Rightarrow \omega_n \simeq \omega_m^{'}.$$

Итак, имеем $(\exists 0 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n), (\exists 0 \leqslant k'_1 < \ldots < k'_t \leqslant m)$

$$\mu(k_1) \circ ... \circ \mu(k_s)(\omega_n) \approx \mu(k_1^{'}) \circ ... \circ \mu(k_t^{'})(\omega_m^{'}) \tag{4}$$

Сначала покажем, что

$$(\forall k = \overline{0, n}) \mu(k)(\omega_n) \simeq \omega_n.$$

В самом деле очевидно, что $\mu(n)(\omega_n) = \omega_{n+1,n} \simeq \omega_n$. Непосредственно проверяется, что $\mu(k)(\omega_n) \approx \mu(k+1)(\omega_n)$, в частности,

$$\mu(k)(\omega_n) \simeq \mu(k+1)(\omega_n).$$

В силу транзитивности $\simeq$ имеем

$$\mu(k)(\omega_n) \simeq \mu(n)(\omega_n) \simeq \omega_n.$$

Значит

$$\mu(k_1) \circ \mu(k_2) \circ ... \circ \mu(k_s)(\omega_n) \simeq \mu(k_2) \circ ... \circ \mu(k_s)(\omega_n) \simeq ... \simeq \omega_n. \tag{5}$$

Аналогично

$$\mu(k_1^{'}) \circ ... \circ \mu(k_t^{'})(\omega_m^{'}) \simeq \omega_m^{'}. \tag{6}$$

Из (4),(5),(6) и свойств отношения эквивалентности $\simeq$ получаем, что $\omega_n \simeq \omega_m^{'}$.

Предложение 1 доказано. $\square$

На множестве $P_M^{'}(X)$ определим отношение толерантности $\varkappa_X^{'}$.

Определение 7. Два толерантных пути $\omega_M, \omega_M^{'} \in P_M^{'}(X)$ назовем $\varkappa_X^{'}$–толерантными, если они просто толерантно гомотопны, т.е. $\omega_M \approx \omega_M^{'}$.

Для произвольного толерантного отображения $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ и произвольного числа $M \in \mathbb{N}$ рассмотрим толерантное пространство

$(\overline{B}'_M, \overline{\tau}\times\varkappa'_B)$, где $\overline{B}'_M = \{(a, \omega_M) \in E\times P'_M(B) | \omega_M(0) = p(a)\}$. Определим отображение $\overline{p}_M : P'_M(E) \to \overline{B}'_M$ формулой

$$(\forall\overline{\omega}_M \in P'_M(E))\overline{p}_M(\overline{\omega}_M) = (\overline{\omega}_M(0), p\circ\overline{\omega}_M).$$

Толерантность отображения $\overline{p}$ следует из того, что у просто гомотопных толерантных путей начальные точки толерантны, а так же из того, что простая толерантная гомотопность сохраняется при композиции с толерантным отображением p.

Определение 8. Толерантное отображение $\lambda_M : (\overline{B}'_M, \overline{\tau}\times\varkappa'_B) \to$ $\to (P'_M(E), \varkappa'_E)$, являющееся правым обратным к $\overline{p}_M$, т.е. $\overline{p}_M\circ\lambda_M = 1_{\overline{B}'_M}$, назовем накрывающей функцией длины M для отображения p.

Предложение 3. *Если для толерантного отображения $p : (E, \overline{\tau}) \to$ $\to (B, \tau)$ существует накрывающая функция λ_M любой длины $M \in \mathbb{N}$, то отображение p является толерантным расслоением (в смысле Гуревича).*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 2 статьи [1].

До конца статьи будем предполагать, что (X, τ) — линейно связное толерантное пространство. Рассмотрим отображение $p : (P(X, x_0)) \to X$

$$p(\omega_n) = \omega_n(1). \tag{7}$$

Из (1) следует, что отображение $p : (P(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$ является толерантным.

Теорема. *Толерантное отображение $p : (P(X, x_0), \varkappa_X) \to (X, \tau)$, определяемое формулой (7), является толерантным расслоением (в смысле Гуревича).*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Как следует из предложения 3, для доказательства достаточно построить накрывающую функцию λ_M для отображения p произвольной длины $M \in \mathbb{N}$. Рассмотрим толерантное пространство $(\overline{X}'_M, \varkappa_X \times \varkappa'_X)$, где

$$\overline{X}'_M = \{(\gamma_m, \omega_M) | p(\gamma_m) = \gamma_m(1) = \omega_M(0), \gamma_m(0) = x_0\}.$$

Для построения накрывающей функции нам потребуется еще одно толерантное пространство $(P'_M(P(X, x_0)), \varkappa'_{P(X)})$, чьими элементами являются отображения

$$\overline{\omega}_M : (I_M, \iota_M) \to (P_M(X, x_0), \varkappa_X)$$

такие, что

$$(\forall k, l = \overline{0, n})\, |k - l| \leqslant 1 \Rightarrow \overline{\omega}_M(\frac{k}{n}) \varkappa_X \overline{\omega}_M(\frac{l}{n}).$$

Толерантное отображение

$$\overline{p}_M : (P'_M(P(X, x_0)), \varkappa'_{P(X)}) \to (\overline{X}'_M, \varkappa_X \times \varkappa'_X)$$

задается формулой

$$\overline{p}_M(\overline{\omega}_M) = (\overline{\omega}_M(0), p \circ \overline{\omega}_M), \tag{8}$$

в правой части которой $\overline{\omega}_M(0)$ - толерантный путь в (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$, а $p \circ \overline{\omega}_M = \omega_M$ - толерантный (см.(1)) путь в (X, τ) длины M, составленный из концов толерантных путей $\overline{\omega}_M(\frac{k}{n}), k = \overline{0, n}$,

$$(\forall k = \overline{0, n}) \omega_n(\frac{k}{n}) = \left(\overline{\omega}_n(\frac{k}{n})\right)(1)$$

Приступим к построению толерантного отображения

$$\lambda_M : (\overline{X}'_M, \varkappa_X \times \varkappa'_X) \to (P'_M(P(X, x_0)), \varkappa'_{P(X)})$$

такого, что

$$\overline{p}_M \circ \lambda_M = 1_{\overline{X}'_M}. \tag{9}$$

Пусть $(\gamma_m, \omega_n) \in \overline{X}'_M$. Определим отображение $\lambda_M(\gamma_m, \omega_M) : I_M \to$ $\to P(X, x_0)$ формулой

$$(\forall k = \overline{0, n})\lambda_M(\gamma_m, \omega_M)(\frac{k}{n}) = \gamma_m * \omega_M^{(k)} : (I_{m+k}, \iota_{m+k}) \to (X, \tau), \tag{10}$$

где $\omega_n^{(k)} : (I_k, \iota_k) \to (X, \tau)$ — толерантный путь такой, что

$$(\forall l = \overline{0, k})\omega_M^{(k)}(\frac{l}{n}) = \omega_M(\frac{l}{n}), \tag{11}$$

а для $k = 0$ полагаем по определению

$$\gamma_m \circ \omega_M^{(0)} = \gamma_m. \tag{12}$$

Заметим, что для всех $k = \overline{0, n}$

$$\left(\lambda_M(\gamma_m, \omega_M)(\frac{k}{n})\right)(0) = \left(\gamma_m * \omega_M^{(k)}\right)(0) = \gamma_m(0) = x_0. \tag{13}$$

Наконец из толерантности γ_m и ω_M и из построений (10) и (11) следует, что

$$(\forall k = \overline{0, n-1}) \left(\lambda_M(\gamma_m, \omega_M)(\frac{k}{n})\right) \varkappa_X \left(\lambda_M(\gamma_m, \omega_M)(\frac{k+1}{n})\right). \tag{14}$$

Из (10), (13), (14) следует, что $\lambda_M(\gamma_m, \omega_M) \in P'_M(P(X, x_0))$. Теперь нам надо доказать, что построенное отображение

$$\lambda_M : \overline{X}'_M \to P'_M(P(X, x_0))$$

является толерантным.

Возьмем $(\gamma_{m_1}, \omega_M), (\gamma'_{m_2}, \omega'_M) \in \overline{X}'_M$, причем $\gamma_{m_1} \varkappa_X \gamma'_{m_2}, \omega_M \varkappa'_X \omega'_M$. Выпишем соответствующие последовательности элементарных замедлений:

$$\mu(l_1) \circ \ldots \circ \mu(l_{t_1})(\gamma_{m_1}) = \beta_{r_2}, 0 \leqslant l_1 < \ldots < l_{t_1} \leqslant m_1,$$

$$\mu(l'_1) \circ \ldots \circ \mu(l'_{t_2})(\gamma'_{m_2}) = \beta'_{r_2}, 0 \leqslant l'_1 < \ldots < l'_{t_2} \leqslant m_2,$$

$$\beta_{r_2} \approx \beta'_{r_2}; \omega_M \approx \omega'_M.$$

Обозначим через $\overline{\omega}_M = \lambda_M(\gamma_{m_1}, \omega_M), \overline{\omega}'_M = \lambda_M(\gamma'_{m_2}, \omega'_M)$ — толерантные пути в пространстве. Теперь следует проверить наличие толерантности

$$\overline{\omega}_M \varkappa'_{P(X)} \overline{\omega}'_M. \tag{15}$$

Формулы (10), (11), (12) позволяют определить пути в $P(X, x_0)$:

$$(\forall i = \overline{0, r_1})\overline{\omega}_{r_1}(\frac{i}{r_1}) = \gamma_{m_1} * \omega_M^{(i)}, \overline{\omega}'_{r_1}(\frac{i}{r_1}) = \gamma'_{m_2} * \omega_M^{'(i)}.$$

Для доказательства толерантности (15) следует доказать, что пути $\overline{\omega}_{r_1}, \overline{\omega}'_{r_2}$ просто толерантно гомотопны в пространстве $(P(X, x_0), \varkappa_X)$. Т.е. надо проверить, что

$$(\forall i, j = \overline{0, r_1})|i - j| \leqslant 1 \Rightarrow \gamma_{m_1} * \omega_{r_1}^{(i)} \varkappa_X \gamma'_{m_2} * \omega_{r_1}^{'(i)}. \tag{16}$$

Рассмотрим лишь неочевидный случай $j = i + 1$. Применим следующие элементарные замедления:

$$\mu(l_1) \circ \ldots \circ \mu(l_{t_1}) \circ \mu(m_1 + i) \left(\gamma_{m_1} * \omega_{r_1}^{(i)}\right) = \left((\beta_{r_2} * \omega_{r_1})^{(r_2+i)}\right)_{r_2+i+1, r_2+i},$$

$$\mu(l'_1) \circ \ldots \circ \mu(l'_{t_2}) \left(\gamma'_{m_2} * \omega_{r_1}^{'(i+1)}\right) = \left(\beta'_{r_2} * \omega'_{r_1}\right)_{r_2+i+1}.$$

Условия $\beta_{r_2} \approx \beta'_{r_2}, \omega_{r_1} \approx \omega'_{r_1}$ влекут $\beta_{r_2} * \omega_{r_1} \approx \beta'_{r_2} * \omega'_{r_1}$, а это в свою очередь влечет $\left((\beta_{r_2} * \omega_{r_1})^{(r_2+i)}\right)_{r_2+i+1, r_2+i} \approx \left(\beta'_{r_2} * \omega'_{r_1}\right)^{(r_2+i+1)}$, что согласно определению 5, дает толерантность (16), а вместе с ней доказывает (15). Случай $j = i$ рассматривается аналогично. Таким образом, толерантность отображения λ_M доказана и осталось проверить, что отображение λ_M является правым обратным к $\overline{p}_M$.

Пусть $(\gamma_m, \omega_M) \in \overline{X}'_M$. Формулы (10) и (12) дают нам следующее:

$$\lambda_M(\gamma_m, \omega_M)(0) = \gamma_m * \omega_M^{(0)} = \gamma_m,$$

а формулы (10), (7) и (11) показываю, что для $k = \overline{0, n}$

$$(p \circ \lambda_M(\gamma_m, \omega_M))(\frac{k}{n}) = p\left(\gamma_m * \omega_M^{(k)}\right) = \left(\gamma_m * \omega_M^{(k)}\right)(1) = \omega_M^{(k)}(1) = \omega_M(\frac{k}{n}).$$

Отсюда, применяя формулу (8), получаем

$$(\overline{p}_M \circ \lambda_M)(\gamma_m, \omega_M) = (\lambda_M(\gamma_m, \omega_M)(0), p \circ \lambda_M(\gamma_m, \omega_M)) = (\gamma_m, \omega_M),$$

что и доказывает (9).$\square$

Библиографический список

1. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3.

2. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds, M.K. Ford(ed). 1962.

3. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ,
ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 5

Ответственный за выпуск *В.Н. Кузнецов*
Технический редактор *Л.В. Агальцова*
Корректор *Е.Б. Крылова*
Подготовка оригинал-макета *Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок*

Подписано в печать 20.04.2009. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 7,90(8,5). Уч.-изд.л. 6,9 . Тираж 100 экз. Заказ 42.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.