ISSN 1810-4134

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ,
ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2007

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5
И88

И88 **Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам:** Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. – Вып. 4. – 144 с.: ил.

Сборник содержит работы, посвященные исследованию различных задач теории L-функций, диофантового анализа, а также работы, связанные с применением методов гомологической алгебры и функционального анализа в смежных вопросах.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области алгебры, теории чисел и функционального анализа.

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1810-4134

УДК 511

Н.Ю. Агафонова

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ БОРЕЛЕВСКИХ МЕР

Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, таких что $2 \leqslant p_i \leqslant N$, $i \in \mathbb{N}$. Группа $G(\mathbf{P})$ состоит из элементов $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in \mathbb{Z}_+$, $x_i < p_i$, $i \in \mathbb{N}$, и снабжена операцией сложения $\tilde{x} \oplus \tilde{y} = \tilde{z}$, где $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots) \in G(\mathbf{P})$ и $z_i = x_i + y_i \pmod{p_i}, i \in \mathbb{N}$. Аналогично вводится $x \ominus y$. Пусть $m_0 = 1$, $m_i = p_1 \dots p_i$, при $i \in \mathbf{N}$. Тогда каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbf{Z}_+, \quad k_i < p_i. \tag{1}$$

По $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (1) и $\tilde{x} \in G(\mathbf{P})$ определяем

$$\tilde{\chi_k}(\tilde{x}) = exp(2\pi i(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j)).$$

Система $\{\tilde{\chi_k}(\tilde{x})\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной относительно системы Хаара на $G(\mathbf{P})$ [1, гл. 3, §2]. Каждому $\tilde{x}$ можно сопоставить элемент $x \in [0, 1)$ по формуле

$$x = \lambda(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i / m_i.$$

Обратное к λ отображение $g_{\mathbf{P}}$ ставит в соответствие числам $k/m_n \in [0,1)$ элементы $\tilde{x} \in G(\mathbf{P})$, такие что $x_i = 0$ при $i \geqslant i_0$, для остальных чисел из $[0,1)$ значение $g_{\mathbf{P}}(x)$ определяется однозначно.

Полагаем для $x \in [0,1)$ $\chi_k(x) = \tilde{\chi}_k(g_{\mathbf{P}}(\tilde{x})) = exp(2\pi i(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j))$, где $k \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогично для $x, y \in [0,1)$ $x \oplus y = \lambda(g_{\mathbf{P}}(x) \oplus g_{\mathbf{P}}(y))$. Пусть E — множество точек из $G(\mathbf{P})$, не входящих в $g_{\mathbf{P}}([0,1))$. Функции $f(x)$, заданной на $[0,1)$, соответствует функция $\tilde{f}(\tilde{x})$, равная $f(\lambda(\tilde{x}))$ при $\tilde{x} \in G\backslash E$ и равная верхнему пределу $\tilde{f}(\tilde{y})$ при условии, что $\tilde{y}$ стремится к $\tilde{x}$ в топологии, заданной окрестностями нуля $G_n = \{x \in G(\mathbf{P}) : x_1 = \cdots = x_n = 0\}$ и $\tilde{y} \in G\backslash E$. Каждой борелевской мере на $G(\mathbf{P})$ или $[0,1)$ соответствуют коэффициенты Фурье $(d\tilde{m})\hat{}(k) = \int\limits_G \overline{\tilde{\chi}_k} d\tilde{m}$ или $(dm)\hat{}(k) = \int\limits_0^1 \overline{\chi_k(t)} dm(t)$, $k \in$ $\in \mathbb{Z}_+$. Если у $\tilde{m}$ и m одни и те же коэффициенты Фурье, а $\tilde{f}$ определяется по f как выше, то $\int\limits_G \tilde{f} d\tilde{m} = \int\limits_0^1 f(t) dm(t)$. Пусть $f \in L[0,1)$, $(\tilde{f} \in L(G))$. Тогда $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k}(t)\, dt$, а $(\tilde{f})\hat{}(k)$ определяется аналогично. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \chi_k(x)$ называется рядом Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, а $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x)$ — частичной суммой ряда Фурье. Аналогично вводится ряд Фурье и его частичные суммы для $\tilde{f}$, $d\tilde{m}$ и dm. Функция $h_1(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t) g(t) dt$ называется сверткой $f * g(x)$, где $f, g \in L[0,1)$, а функция $h_2(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t) dm(t)$ называется сверткой $f * dm(x)$, где m — мера на $[0,1)$ и $f(x) \in MC[0,1)$, т.е. $\lim\limits_{h \to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x)|$. Легко видеть, что $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, а $S_n(dm) = D_n * dm$, где $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $S_n(\tilde{f}) = \tilde{f} * \tilde{D}_n(x)$ и $S_n(d\tilde{m}) = \tilde{D}_n * d\tilde{m}$, где $\tilde{D}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \tilde{\chi}_k(x)$.

Известно [3, гл. 6, §7], что каждый функционал $C(K)$, где K — компакт, имеет вид $\varphi(f) = \int\limits_K f d\mu$, где μ — борелевская мера на K. Поэтому функционал $\varphi_0(f) = f(0)$ тоже имеет такой вид и существует борелевская мера $\tilde{m}$ на $G(\mathbf{P})$, такая что $(d\tilde{m})\hat{}(k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Будем рассматривать классы $S(\tilde{S})$ — борелевских мер на $[0,1)\,(G(P))$ $C(G)$-непрерывных на $G(P)$ функций и $B[0,1)\,(B(G))$ — ограниченных на $[0,1)$ (на $G(\mathbf{P})$) функций с нормой $\|f\|_\infty$. Кроме того, пусть $\|f\|_p = = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ и аналогично для $\|\tilde{f}\|_p$. По определению для убывающей к нулю последовательности ω_n

$$H_p^\omega[0,1) := \{f \in L_p[0,1) : \omega_n(f)_p := \sup_{0<h<1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p \leqslant C\omega_n\},$$

где C не зависит от n. Класс $H_p^\omega(G)$ определяется аналогично. Пусть A, B — два класса функций или мер на $[0,1)$ или $G(P)$. Будем писать $\{\lambda_k\} \in (A, B)$, если из того, что ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k \chi_k(x)$ есть ряд Фурье функции или меры из A, следует, что $\sum\limits_{k=0}^\infty \lambda_k a_k \chi_k(x)$ есть ряд Фурье функции или меры из B. В нашей работе даны критерии $\{\lambda_k\} \in (S, C)$, (S, B), (S, H_p^ω) в обоих случаях (для $[0,1)$ и $G(P)$).

Дадим сначала необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (2,§1.5)**.** Для $n \in \mathbb{Z}_+$ верны равенства $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}$, $\tilde{D}_{m_n}(\tilde{x}) = m_n X_{G_n}(\tilde{x})$, где X_E — характеристическая функция множества E. Для $x \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|D_n(x)| \leqslant C/x$, а для $\tilde{x} \in G(\mathbf{P}) \setminus G_n$ имеем $|\tilde{D}_{m_n}(\tilde{x})| \leqslant C m_n$.

Лемма 2. 1) Ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in B[0,1)$ тогда и только тогда, когда $\|S_{m_n}\|_\infty := \|\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} a_k \chi_k\|_\infty$ ограничены.

2)Ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty a_k \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in MC[0,1)$ тогда и только тогда, когда S_{m_n} равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такая, что для всех

$|h| < \delta$ и всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\|S_{m_n}(x \oplus h) - S_{m_n}(x)\|_\infty < \varepsilon$. Аналогичные утверждения верны для $B(G)$ и $C(G)$.

Доказательство

Так как $S_{m_n}(f)(x) = (D_{m_n} * f)(x)$, то для $f \in B[0,1)$

$$\|S_{m_n}(f)\|_\infty \leqslant \|D_{m_n}\|_1 \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

и

$$\|S_{m_n}(f)(x \oplus h) - S_{m_n}(f)(x)\|_\infty \leqslant \|D_{m_n}\|_1 \cdot \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty,$$

откуда легко следует необходимость и в 1) и в 2). Пусть $\|S_{m_n}(x)\|_\infty \leqslant C$ для всех n. Тогда в силу ортонормированности $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ получаем, что $\sum\limits_{k=0}^{m_n-1} |a_k|^2 = \int\limits_0^1 |S_{m_n}(x)|^2 dx \leqslant C^2$, откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ сходится к функции $f \in L_2[0,1)$. Известно [2, § 2.8], что $S_{m_n}(f)(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке Лебега, откуда следует, что $|f(x)| \leqslant C$ п.в. на $[0,1)$, и значит, существует $f_0 \in B[0,1)$ такая, что $f = f_0$ п.в. на $[0,1)$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k(x)$ есть ряд Фурье $f_0(x)$.

Пусть теперь $S_{m_n}(x)$ равностепенно непрерывны. По теореме Арцела существует $S_{m_{n_i}}(x)$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_\infty$ к некоторой функции $f \in MC[0,1)$. Если в случае $G(P)$ теорема Арцела сразу дает нужный результат, то в случае $[0,1)$ $\tilde{S}_{m_n}(\tilde{x})$ построенные по $S_{m_n}(x)$ также равностепенно непрерывны, поэтому находим равномерно сходящуюся подпоследовательность $\tilde{S}_{m_{n_i}}(\tilde{x})$ и соответствующая $S_{m_{n_i}}(x)$ также сходится равномерно. Так как при $k < m_{n_i}$ $\int\limits_0^1 S_{m_{n_i}}(x)\overline{\chi}_k(x)\,dx = a_k$, то и $\hat{f}(k) = a_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Для $C(G)$ и $B(G)$ рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Лемма 3. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ является рядом Фурье функции $f \in H_p^\omega$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\|S_{m_k} - S_{m_n}\|_p \leqslant C\omega_n, \tag{2}$$

где $k > n$, C не зависит от k и n, $S_{m_k} = \sum\limits_{i=0}^{m_k-1} a_k \chi_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Необходимость следует из неравенства А.В.Ефимова [2, § 10.5]. Из условия (2) следует фундаментальность S_{m_k} в $L_p[0,1)$ (или в $MC[0,1)$), т.е. S_{m_k} сходится к $f \in L_p[0,1)$ (или в $MC[0,1)$). Переходя в (2) к пределу при $k \to \infty$, получаем $\|f - S_{m_n}(f)\|_p \leqslant C\omega_n$, откуда по неравенству А.В. Ефимова следует $f \in H_p^\omega$.

Лемма 4. Пусть $\tilde{m}$ — борелевская мера на $G(\mathbf{P})$. Тогда $S_n(d\tilde{m})(\tilde{x})/n \to$ $\to \tilde{m}(\{\tilde{x}\})$, где $\tilde{m}(A)$ — мера множества A. Аналогичное утверждение верно для меры m на $[0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Как отмечено выше, $S_n(d\tilde{m})(\tilde{x})/n = = \int_G \tilde{D}_n(\tilde{x} \ominus \tilde{u})/n \, d\tilde{m}(\tilde{u})$, причем $|\tilde{D}_n(\tilde{x}\ominus\tilde{u})/n| \leqslant 1$ и в силу леммы 1 при $x \ominus u \neq 0$ $\tilde{D}_n(\tilde{x}\ominus\tilde{u})/n$ сходится к 0, а в точке $\tilde{x} = \tilde{u}$ равно 1. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, левая часть стремится к $\int\limits_G X_{\{x\}}(u) d\tilde{m}(u) = \tilde{m}(\{\tilde{x}\})$, что и требовалось доказать.

Основные результаты

Теорема 1. *1) Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{\chi_k}$ *является рядом Фурье борелевской меры* $\tilde{m}$ *на* $G(\mathbf{P})$ *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_G |S_{m_n}(\tilde{x})| d\tilde{x}$ *ограничены, где* $d\tilde{x}$ *— мера Хаара на* $G(\mathbf{P})$.

2) Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k$ *является рядом Фурье борелевской меры* m *на* $[0,1)$ *тогда и только тогда, когда* $\int\limits_0^1 |S_{m_n}(x)| dx$ *ограничены и для любой* $\rho = k/m_n \in [0,1)$ *имеем* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\rho - 0)/n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

1) Пусть $\tilde{m}$— мера на $G(P)$.

Имеем в силу теоремы Фубини и леммы 1

$$\int_G |S_{m_n}(d\tilde{m})(\tilde{x})|d\tilde{x} \leqslant \int_G \left(\int_G |D_{m_n}(\tilde{x}\ominus\tilde{u})d\tilde{m}(\tilde{u})\right) d\tilde{x} =$$

$$= \int_G \left(\int_G |D_{m_n}(\tilde{x}\ominus\tilde{u})|d\tilde{x}\right) d\tilde{m}(\tilde{u}) = \tilde{m}(G).$$

Обратно, пусть $T_n(f) = \int\limits_G S_{m_n}(\tilde{x})\overline{f(\tilde{x})}d(\tilde{x})$. Тогда нормы $T_n(f)$ как функционалов в $C(G)$ ограничены и по теореме о слабой компактности ограниченного множества в сопряженном пространстве существует подпоследовательность T_{n_i} и функционал T, такой что для любой $f \in C(G)$

$$T_{n_i}(f) \to T(f) = \int\limits_G f d(\tilde{m}).$$

При $f = \chi_k$ и $n_i > k$ левая часть равна a_k, следовательно, $(\tilde{m})\check{}(k) = a_k$.

2) Борелевская мера $\tilde{m}$ на $G(P)$ разлагается на 2 слагаемых: $\tilde{m}_1$ обращающееся в 0 на любом подмножестве E и $\tilde{m}_2$, обращающееся в ноль вне E. Ясно, что мере $\tilde{m}$ на $[0,1)$ соответствует мера $\tilde{m}_1$ первого вида с теми же коэффициентами Фурье по системе $\{\tilde{\chi}_k\}_{k=0}^{\infty}$, что и у m по системе$\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$. По лемме 4 отсутствие слагаемого $\tilde{m}_2$ у $\tilde{m}$ равносильно соотношению $S_n(d\tilde{m})(\tilde{x}) \to 0$ для всех $\tilde{x} \in E$. Но если $\tilde{x} \in E$, то $\lambda(\tilde{x}) = = k/m_n \in (0,1)$ и $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_l, p_{l+1}-1, p_{l+2}-1, \dots)$, причем $\tilde{y}$, близким к $\tilde{x}$ в топологии $G(P)$, соответствуют $y = \lambda(\tilde{y})$, такие что $y < k/m_n$. Поэтому условие $S_n(d\tilde{m})(\tilde{x})/n \to 0$ на E равносильно $S_n(dm)(x-o)/n \to 0$ для всех x вида k/m_n, $k,n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant m_n$, где m — мера с теми же коэффициентами Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, что и у $\tilde{m}$ по системе $\{\tilde{\chi}_k\}_{k=0}^{\infty}$. Таким образом, условие $\int\limits_0^1 |S_{m_n}(x)|dx = \int\limits_G |S_{m_n}(\tilde{x})|d(\tilde{x}) \leqslant C$ равносильно существованию $\tilde{m}$ на $G(P)$ с коэффициентами Фурье a_k, а второе условие равносильно тому, что мера $\tilde{m}$ не имеет слагаемого $\tilde{m}_2$ и поэтому ей соответствует мера m на $[0,1)$, такая что $\tilde{m}(A) = m(\lambda(A))$. Теорема доказана.

Замечание 1. Аналог теоремы 1, где вместо S_{m_n} использовались средние Чезаро, доказан Файном [4] в случае $p_n \equiv 2$.

Теорема 2. *Для того чтобы $\{\lambda_k\} \in (S, H_p^\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x) \tag{3}$$

был рядом Фурье функции $g(x) \in H_p^\omega$. Аналогичное утверждение верно для $(\tilde{S}, H_p^\omega(G))$.

Доказательство

Как уже отмечалось, ряд $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{\chi_k}(\tilde{x})$ является рядом Фурье некоторой меры $\tilde{m_0}$ на $G(P)$. Но в силу леммы 1 $|D_n(x-o)| < 2C/x$, поэтому для ряда $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_k(x)$ имеем $S_n(x-o)/n = D_n(x-o)/n \to 0$ при всех $x \neq 0$ и по теореме 1 существует мера m_0 на $[0,1)$, такая что $d\hat{m}_0(k) = 1,\ k \in \mathbf{Z}_+$.

Если $\lambda_k \in (S, H_p^\omega)$, то $\lambda_0 \cdot 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \cdot 1) \chi_k(x)$ есть ряд Фурье функции $g \in H_p^\omega$, что и требовалось доказать. Пусть, напротив, существует $g \in \in H_p^\omega$, такая что $\hat{g}(k) = \lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим $S^*_{m_n}(x) = S_{m_n}(g) * dm(x)$. Так как $S_{m_n} \in MC[0,1)$ при $h \in [0, 1/m_k)$

$$\|S^*_{m_k}(x) - S^*_{m_n}(x)\|_p \leqslant \|S_{m_k}(g) - S_{m_n}(g)\|_p \cdot \int_0^1 |dm(t)| \leqslant C\omega_n.$$

Снова по лемме 3 получаем, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k (dm)\check{}(k) \chi_k(x)$ является рядом Фурье функции из H_p^ω . Имеем неравенство $\|f * dm\|_p \leqslant \|f\|_p \cdot \int\limits_0^1 |dm(t)|$ [5,гл. 12, п.12.7.2].

Теорема 3. *Условие $\{\lambda_k\} \in (S, B)(\{\lambda_k\} \in (S, MC))$ равносильно тому, что ряд (3) является рядом Фурье функции $g \in B[0,1)$ $(g \in MC[0,1))$.*

Доказательство

Необходимость проверяется так же, как в теореме 2. Пусть $g \in MC[0,1)$. Тогда для $m \in S$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ $\lambda_k (dm)\check{}(k) = (g * dm)\check{}(k)$ и при

$h \in [0, 1/m_l)$

$$\|S_{m_n}(g * dm)(x \oplus h) - S_{m_n}(g * dm)(x)\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \|D_{m_n}\|_1 \cdot \|g(x \oplus h \ominus t) - g(x \ominus t)\|_\infty \cdot \int_0^1 |dm(t)| \leqslant C\omega_l(g)_\infty$$

и последнее выражение стремится к 0. Для $B[0,1)$ доказательство достаточности аналогично.

Замечание 2. Аналог теоремы 2 при $p = \infty$ и $\omega_n = m_n^{-\alpha}$ и аналог теоремы 3 в тригонометрическом случае доказаны М.Г. Скворцовой[6].

Библиографический список

1. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М.,Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.

2. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

4. *Fine N.J.* Fourier-Stielties series of Walsh functions //Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 86, №1. P.246-255.

5. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985. Т.2.

6. *Скворцова М.Г.* Некоторые новые теоремы о преобразованиях рядов Фурье при помощи множителей // Учен. зап. ЛГПИ им. А.И. Герцена. 1956. Т. 125. С. 197-205.

УДК 517.51

С.С. Волосивец

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Введение

Данная работа посвящена исследованию некоторых операторов в пространствах $L_p[0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, действие которых удобнее рассматривать на коэффициентах Фурье первоначальной и преобразованной функции. К ним относятся мультипликаторы, которым посвящены теоремы 2.1, 2.3 и 2.4, а также преобразование Харди (в тригонометрическом случае см. [1]), некоторые свойства которого изложены в теоремах 2.5 и 2.6. Теорема 2.2 носит вспомогательный характер и используется при доказательстве теоремы 2.6. Большинство результатов данной работы являются аналогами результатов А.А.Конюшкова [2] для тригонометрической системы.

§1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, таких что $2 \leqslant p_n \leqslant N$ при $n \in \mathbf{N}$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbf{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad 0 \leqslant x_n < p_n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Разложение (1) не единственно для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $n \in \mathbf{N}$. В этом случае будем брать разложение с конечным числом ненулевых x_n. Для $k \in \mathbf{Z}_+$ существует единственное разложение

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad 0 \leqslant k_i < p_i, \quad i \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

(сумма в (2) конечна). Если y представлено в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $0 \leqslant z_n < p_n,\ n \in \mathbf{N}$, $z_n = x_n + y_n(\pmod p)_n)$. Аналогично вводится $x \ominus y$. Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbf{Z}_+$ вида (2) положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right).$$

Известно, что при фиксированном $x \in [0,1)$ при всех $y \in [0,1)$, за исключением счетного множества значений, верно равенство $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $k \in \mathbf{Z}_+$. Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной и полной в $L[0,1)$. Эти факты можно найти в [3, §1.5]. Коэффициенты Фурье функции $f \in L[0,1)$ задаются формулой $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}dt$, а частичная сумма ряда Фурье есть $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$. Здесь и далее рядом Фурье называется ряд Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$. Пространство $L_p[0,1)$, $1 \leqslant\ p\ < \infty$, задается как обычно с помощью нормы $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{1/p}$.

Пространство $MC[0,1)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$ состоит из функций f, для которых $\lim\limits_{h\to 0} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$, и является банаховым. Везде далее $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$ полагаем $q = \infty$ и наоборот). Сверткой функций $f, g \in L[0,1)$ называется функция $f * g(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t)g(t)dt$. Ясно, что $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, где $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$. Для так называемых однородных пространств $X[0,1)$, к которым относятся все изучаемые в этой работе пространства, верно неравенство $\|f * g\|_X \leqslant \|f\|_X \|g\|_1$. Для двоичного случая это неравенство можно найти в [4, п.4.4, лемма 1], в общем случае доказательство аналогично.

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \geqslant n\}$, $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, и $\omega_n(f)_p = \sup\limits_{0<h<1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

Имеет место неравенство А.В.Ефимова [3, §10.5]

$$2^{-1}\omega_n(f)_p \leqslant E_{m_n}(f)_p \leqslant \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leqslant \omega_n(f)_p. \tag{3}$$

Из него видно, что, в отличие от тригонометрического случая модули непрерывности и наилучшие приближения в указанных выше пространствах ведут себя практически одинаково. Поэтому будем рассматривать классы с заданной мажорантой модуля непрерывности. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность. Тогда $H_p^\omega := \{f \in L_p[0,1) : \omega_n(f)_p \leqslant C\omega_n; n \in \mathbf{Z}_+\}$. Здесь C зависит от f, но не от n. При $\omega_n = m_n^{-\alpha}$ будем обозначать H_p^ω через $Lip(\alpha, p)$. Аналогично вводятся пространства $H^\omega := \{f \in MC[0,1) : \omega_n(f)_\infty \leqslant C\omega_n; n \in \mathbf{Z}_+\}$ и $Lip(\alpha)$. Пусть A, B - функциональные пространства на $[0,1)$. Если последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что для любой функции $f \in A$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{f}(n)\chi_n(x)$ является рядом Фурье функции $g \in B$, то будем писать $\{\lambda_n\} \in (A, B)$.

Далее мы рассматриваем последовательности ω_n, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k = O(\omega_n), \quad n \in \mathbf{N}, \tag{B}$$

Это условие является аналогом условия Н.К.Бари [5].

Переходим к изложению необходимых в дальнейшем вспомогательных результатов.

Лемма 1.1.[3, §1.5]. *Пусть $n \in \mathbf{Z}_+$. Тогда $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}$, где X_E — характеристическая функция E. Кроме того, существует константа $C > 0$, не зависящая от n, такая что $|D_n(x)| \leqslant C/x$ при $x \in (0,1)$.*

Из леммы 1.1 легко вытекает оценка:

$$\|D_n(x)\|_p \leqslant \int_0^{1/n} n^p dx + \int_{1/n}^1 (C/x)^p dx \leqslant C_1 n^{p-1}. \tag{4}$$

Лемма 1.2. [6]. *Пусть* $K_n = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)/n$, $n \in \mathbf{N}$. *Тогда нормы* $\|K_n\|_1$ *ограничены.*

Теперь напомним определения **P**-ичной производной и интеграла произвольного порядка. Пусть $T_r^{(\alpha)}(t) := \sum\limits_{k=0}^{m_r-1} k^\alpha \chi_k(t)$ ($0^\alpha = 1$ при $\alpha \leqslant 0$). Если для $f \in L_p[0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, существует $g \in L_p[0,1)$, такая что $\lim\limits_{r\to\infty} \|T_r^{(\alpha)} * f - g\|_p = 0$, то при $\alpha > 0$ g называется сильной производной f, а при $\alpha \leqslant 0$ — сильным интегралом порядка $|\alpha|$. В обоих случаях записываем $g = T^{(\alpha)} f$. При $\alpha < 0$ и $f \in L_p[0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, всегда существует $T^\alpha f \in L_p[0,1)$. Из свойств свертки следует, что $(T^{(\alpha)} f)\widehat{\ }(k) = k^\alpha \hat{f}(k)$ при $k \in \mathbf{N}$. Это понятие, обобщающее двоичную производную П.Бутцера—Х.Вагнера [4, с.40], появилось в работе [7]. В [7] установлено, что если $\alpha, \beta < 0$ и для $f \in L_p$ существует $T^{(\alpha+\beta)} f \in L_p[0,1)$, то $T^{(\alpha+\beta)} f = T^{(\alpha)}(T^{(\beta)} f)$. Кроме того, при условии $\hat{f}(0) = 0$ и $\alpha > 0$ справедливо равенство $T^{(\alpha)}(T^{(-\alpha)} f) = f$. Там же были доказаны прямая и обратная теоремы приближения, вошедшие в лемму 1.3.

Лемма 1.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha > 0$ *и для* $f \in L_p[0,1)$ *существует* $T^{(\alpha)} f \in L_p[0,1)$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\omega_r(f)_p \leqslant C_1 m_r^{-\alpha} \omega_r(T^{(\alpha)} f)_p, \quad r \in \mathbf{N},$$

$$\omega_r(T^{(\alpha)} f)_p \leqslant C_2 \sum_{k=r}^{\infty} m_k^\alpha \omega_k(f)_p, \quad r \in \mathbf{N}.$$

В §2 активную роль будут играть выпуклые последовательности. Последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ называется выпуклой, если для любого $n \in \mathbf{Z}_+$ верно $\Delta^2 a_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0$. Справедлива

Лемма 1.4.[8, вводный материал, §3]. *Пусть последовательность* a_n *выпукла и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Тогда*

1) a_n *убывает;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta a_n := \lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$*;*

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n < \infty$.

Следующая лемма является аналогом теоремы М.Рисса для тригонометрических рядов и доказана в [9].

Лемма 1.5. *Пусть* $f \in L_P[0,1)$, $1 < p < \infty$*. Тогда существует* $C(p) > 0$*, такое что* $\|S_n(f)\|_p \leqslant C(p)\|f\|_p$*. Кроме того,* $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_{m_n}(f)\|_p = 0$.

Далее при $p = \infty$ мы отождествляем H_p^ω и H^ω, $L_p[0,1)$ и $MC[0,1)$. Константы C, C_i в разных местах являются разными.

§2. Условия принадлежности классам H_p^ω

Лемма 2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$*. Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ *является рядом Фурье функции* $f \in H_p^\omega$ *тогда и только тогда, когда для любой функции* $g \in L_q[0,1)$ *выполнено условие*

$$\sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \hat{g}(k) = O(\omega_n). \tag{5}$$

При $p = 1, \infty$ *и* $\omega \in B$ *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k$ *является рядом Фурье функции* $f \in H_p^\omega$ *тогда и только тогда, когда для любых* $n \in \mathbf{N}$ *и* $g \in L_q[0,1)$ *выполнено условие*

$$\left|\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k)\right| \leqslant C\omega_n, \tag{5'}$$

где C *не зависит от* l *и* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Необходимость. Пусть $1 < p < \infty$. Так как согласно лемме 1.5 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0$ для $f \in L_p[0,1)$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \hat{g}(k) = \int_0^1 (f(x) - S_{m_n}(f)(x))\overline{g^*(x)}dx.$$

Здесь $g^*(t) = \overline{g(\ominus t)}$. Согласно неравенству Гельдера и (3) получаем

$$\left|\sum_{k=m_n}^{\infty} a_k \hat{g}(k)\right| \leqslant \|f - S_{m_n}(f)\|_p \|g(x)\|_q \leqslant C_1 \omega_n(f)_p \leqslant C_2 \omega_n.$$

При $p = 1, \infty$ имеем

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \hat{g}(k) = \int_0^1 (S_{m_{n+1}}(f)(x) - S_{m_n}(f)(x))\overline{g^*(x)dx} \leqslant$$

$$\leqslant (\|f - S_{m_{n+1}}(f)\|_p + \|f - S_{m_n}(f)\|_p)\|g\|_q,$$

и нужная оценка следует из (3).

Достаточность. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (5). Тогда по теореме Банаха—Штейнгауза следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ есть ряд Фурье функции $f \in L_p[0,1)$, а из ограниченности функционалов $F_n(g) = \int_0^1 (f - -S_{m_n})(x)\overline{g^*(x)}\omega_n^{-1} dx$ на каждой функции $g \in L_q[0,1)$ следует ограниченность норм $\|f - S_{m_n}(f)\|_p \omega_n^{-1}$, что благодаря (3) дает $f \in H_p^\omega$. При $p = 1$ или $p = \infty$ из $(5')$ выводим ограниченность $\omega_n^{-1} \sum\limits_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} a_k \chi_k(x)$ по норме $L[0,1)$ или $L_\infty[0,1)$ соответственно. В силу ступенчатости функций $\chi_k(x)$ во втором случае получаем ограниченность в $B[0,1)$. Таким образом, с учетом условия (B), частичные суммы с номерами m_n ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ в первом случае фундаментальны в $L[0,1)$, а во втором случае – в $MC[0,1)$, откуда следует их сходимость к $f \in L[0,1) (f \in MC[0,1))$. Из условия (B) и $(5')$ следует

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_p \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \|S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(f)\|_p \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} C_3 \omega_k \leqslant C_4 \omega_n.$$

и согласно (3) $f \in H_p^\omega$, $p = 1$ или $p = \infty$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Аналогично доказывается, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f \in L_p[0,1)$, $1<p<\infty$ в том и только в том случае, когда для любой $g \in L_q[0,1)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\hat{g}(k)$ сходится.

Лемма 2.2. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in H_p^\omega$. Тогда для любой выпуклой сходящейся к нулю последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k\hat{f}(k)\chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $\Lambda f \in H_p^\omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

При $1<p<\infty$ проще воспользоваться аналогом теоремы Марцинкевича о мультипликаторах [10], ибо по лемме 1.4 λ_n убывает. По этой теореме для $S_n^\lambda(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\hat{f}(k)\chi_k(x)$ верно неравенство $\|S_{m_k}^\lambda(f)-$ $-S_{m_n}^\lambda(f)\|_p \leqslant C_1\|S_{m_k}(f)-S_{m_n}(f)\|_p$, которое влечет сходимость $S_{m_k}^\lambda(f)$ в $L_p[0,1)$ к некоторой Λf. В пределе получаем $\|\Lambda f - S_{m_n}^\lambda(f)\|_p \leqslant$ $\leqslant C_1\|f-S_{m_n}(f)\|_p \leqslant C_2\omega_n$, и согласно (3) $\Lambda f \in H_p^\omega$. В общем случае имеем, применяя два раза преобразование Абеля:

$$\sum_{i=m_k}^{m_n-1} \lambda_i\chi_i(x) = \sum_{i=m_k}^{m_n-3} \Delta^2\lambda_i(i+1)K_{i+1}(x) + \Delta\lambda_{m_n-2}(m_n-1)K_{m_n-1}(x)-$$

$$-\Delta\lambda_{m_k}(m_k)K_{m_k}(x) + \lambda_{m_n-1}D_{m_n}(x) - \lambda_{m_k}D_{m_k}(x). \tag{6}$$

Используя леммы 1.1 и 1.2 (ограниченность $\|K_i\|_1$ и $\|D_{m_i}\|_1$), получаем оценку

$$\left\|\sum_{i=m_k}^{m_n-1} \lambda_i\chi_i(x)\right\|_1 \leqslant C_3\left(\sum_{i=m_k}^{m_n-3}(i+1)\Delta^2\lambda_i + m_n\Delta\lambda_{m_n-2}+\right.$$

$$\left.+m_k\Delta\lambda_{m_k} + \max_{i\geqslant m_k}\lambda_i\right). \tag{6$'$}$$

Из (6$'$) и леммы 1.4 следует фундаментальность последовательности $\sum\limits_{i=m_k}^{m_n-1} \lambda_i\chi_i(x)$ в $L_1[0,1)$. Значит, она сходится к $g \in L[0,1)$ и тогда

$$\left\|\sum_{i=m_k}^{m_n-1}\lambda_i\hat{f}(i)\chi_i(x)\right\|_p=\|S_{m_n}(f*g)-S_{m_k}(f*g)\|_p=$$

$$=\|D_{m_n}*f*g-D_{m_k}*f*g\|_p\leqslant\|g\|_1\|S_{m_n}(f)-S_{m_k}(f)\|_p\leqslant C_4\|g\|_1\omega_k,$$

согласно (3). При $n\to\infty$ получаем $\|f*g-S_{m_k}(f*g)\|_p\leqslant C_4\|g\|_1\omega_k$ и по (3) $f*g\in H_p^\omega$. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Из доказательства ясно, что для любой $g\in L[0,1)$ имеем $\{\hat{g}(k)\}\in(H_p^\omega,H_p^\omega)$. Аналогично доказывается, что $\{\hat{g}(k)\}\in(L_p,L_p)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Условие выпуклости в лемме 2.2 можно заменить на условие квазивыпуклости $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)|\Delta^2\lambda_i|<\infty$. Тогда пункт 2) леммы 1.4 снова имеет место и доказательство выше для случая $p=1,\infty$ проходит для всех p.

Теорема 2.1. *Пусть $1<p<\infty$. Тогда $f\in L_p[0,1)$ принадлежит классу H_p^ω тогда и только тогда, когда для любой выпуклой сходящейся к нулю последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k\hat{f}(k)\chi_k(x)$ является рядом Фурье функции $f_\lambda\in H_p^\omega$.*

Доказательство

Необходимость установлена в лемме 2.2. Докажем достаточность. Пусть $g\in L_q[0,1)$. Для произвольной последовательности $b_i>0$, $i\in\mathbf{Z}_+$ и $S_n'(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_i\hat{g}(i)\chi_i(x)$ с помощью преобразования Абеля находим, что

$$S_n'(x)-b_0g(x)=\sum_{i=0}^{n-2}(S_{i+1}(g)(x)-g(x))\Delta b_i+(S_n(g)(x)-g(x))b_{n-1}.$$

Согласно лемме 1.5 имеем

$$\|g-S_i(g)\|_q\leqslant C(q)E_i(g)_q\leqslant C(q)E_{m_n}(g)_q\leqslant C(q)\|g-S_{m_n}(g)\|_q,$$

где $m_n \leqslant i \leqslant m_{n+1}$. С помощью леммы 1.1 легко доказывается, что последнее выражение есть $O(\omega(g, 1/m_n))_{L_q} = O(\omega(g, 1/i))_{L_q}$, где $\omega(g, \delta)_{L_q} = \sup\limits_{0 \leqslant h \leqslant \delta} (\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^q)^{1/q}$. Как известно, если $\omega(g, \delta)_{L_q}$ не равен нулю тождественно и $\delta > \eta$, то $\omega(g, \delta)_{L_q} \leqslant 2\delta/\eta\omega(g, \eta)_{L_q}$. Рассмотрим возрастающую последовательность $a_i = \omega^{-1/2}(g, 1/i)_{L_q} =: \varepsilon_i^{-1/2}$. Из неравенства выше вытекает, что при $i < j$ верно $2^{1/2} a_i (j/i)^{1/2} \geqslant a_j$. Следуя С.Б.Стечкину [11], для ломаной функции, равной нулю в нуле, a_i при $x = i$ и линейной на $[i-1, i]$ при всех $i \in \mathbf{N}$, рассмотрим минимальную вогнутую мажоранту $b(x)$. Она существует, поскольку $a_n = O(n^{1/2}) = o(n)$, и тоже является ломаной. Пусть (n_k, a_{n_k}) — узлы этой ломаной ($n_0 = 0, a_{n_0} = 0$). Тогда при $n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k$ имеем

$$a_n \leqslant b_n := b(n) = (n_k - n_{k-1})^{-1}((n_k - n)a_{n_{k-1}} + (n - n_{k-1})a_{n_k}) \leqslant$$
$$\leqslant (n_k - n_{k-1})^{-1}(n_k - n + (n - n_{k-1})(2n_k/n)^{1/2})a_n \leqslant$$
$$\leqslant (n_k - n_{k-1})^{-1}(n_k - n_{k-1} + 2^{1/2}n_k - 2^{1/2}n_{k-1})a_n \leqslant 3a_n.$$

Теперь при $n > m$ $\|S_n'(x) - S_m'(x)\|_q \leqslant C(q)(\sum\limits_{i=m}^{n-1} \varepsilon_i |\Delta b_{i-1}| + \varepsilon_n b_{n-1} + \varepsilon_m b_{m-1})$. По определению a_i и неравенству $b_i \leqslant 3a_i$ два последних слагаемых стремятся к нулю при $m \to +\infty$. Далее имеем $\sum\limits_{i=m}^{n-1} \varepsilon_i |\Delta b_{i-1}| \leqslant 9 \sum\limits_{i=m}^{n-1} b_i^{-2}(b_i - b_{i-1})$. Последняя сумма является интегральной суммой для функции $y = x^{-2}$ на $[b_{m-1}, b_{n-1})$ и она стремится к нулю при $m \to +\infty$. В силу полноты $L_q[0,1)$ существует функция $g_1 \in L_q[0,1)$ с рядом Фурье $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i \hat{g}(i) \chi_i(x)$. Так как $\lambda_i = 1/b_i$ выпукла и $\lambda_i \to 0$, то согласно условию $f_\lambda \in H_p^\omega$ и лемме 2.1

$$\sum_{i=m_n}^{\infty} \hat{f}(i)\hat{g}(i) = \sum_{i=m_n}^{\infty} \lambda_i \hat{f}(i)\hat{g}_1(i) = O(\omega_n).$$

В силу произвольности $g \in L_q[0,1)$ по лемме 2.1 получаем $f \in H_p^\omega$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\omega \in B$ *и*

$$\omega_n \leqslant C\omega_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{7}$$

а $f \in L_p[0,1)$ *такова, что* $\{n^{-\tau}\hat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает при некотором* $\tau \geqslant 0$. *Тогда следующие четыре условия равносильны:*

1) $f \in H_p^{\omega}$;

2) $\hat{f}(n) = O(n^{1/p-1}\varphi_n)$, *где* $\varphi_n = \omega_k$ *при* $m_k \leqslant n < m_{k+1}$;

3) $\left(\sum\limits_{k=m_n}^{\infty} \hat{f}^q(k)\right)^{1/q} = O(\omega_n)$;

4) $\left(\sum\limits_{k=m_n}^{\infty} k^{p-2}\hat{f}^p(k)\right)^{1/p} = O(\omega_n)$.

Доказательство

Докажем эквивалентность 2) и 3). Если выполнено 3), то при $n \in [m_k, m_{k+1})$ и n_0, таком, что $\hat{f}(n_0) = \min\limits_{m_{k-1} \leqslant n < m_k} \hat{f}(n)$ имеем

$$\hat{f}(n) \leqslant N^{2\tau}\hat{f}(n_0) \leqslant N^{2\tau}(m_k - m_{k-1})^{-1/q} \left(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} \hat{f}^q(i)\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\omega_{k-1}n^{-1/q} \leqslant C_2 n^{1/p-1}\varphi_n.$$

Если же верно 2), то согласно неравенству Йенсена

$$\left(\sum_{n=m_k}^{\infty} \hat{f}^q(n)\right)^{1/q} \leqslant C_3 \left(\sum_{i=k}^{\infty} \sum_{n=m_i}^{m_{i+1}-1} n^{-1}\omega_i^q\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\sum_{i=k}^{\infty} \omega_i^q\right)^{1/q} \leqslant C_4 \sum_{i=k}^{\infty} \omega_i \leqslant C_5\omega_k.$$

Аналогично, если верно 4), то при $n \in [m_k, m_{k+1})$ и прежнем n_0 имеем

$$\hat{f}(n) \leqslant N^{2\tau}\hat{f}(n_0) \leqslant N^{2\tau}(m_k - m_{k-1})^{-1/p} C_6 m_k^{2/p-1} \left(\sum_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} i^{p-2}\hat{f}^p(i)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_7\omega_{k-1}n^{1-1/p} \leqslant C_8 n^{1/p-1}\varphi_n.$$

Условие 4) выводится из 2) точно так же, как и условие 3) выше. Пусть теперь верно 1) и $u_k \in \mathcal{P}_{m_k}$ таков, что $\|f-u_k\|_p = E_{m_k}(f)_p$. Тогда в силу (4), (3) и неравенства Гельдера

$$\left|\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1} \hat{f}(n)\right| = \left|\int_0^1 (f(t)-u_k(t))(D_{m_{k+1}}(t)-D_{m_k}(t))dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f-u_k\|_p(\|D_{m_{k+1}}\|_q + \|D_{m_k}\|_q) \leqslant C_9\omega_k m_k^{1-1/q}. \tag{8}$$

Имеем $m_k\hat{f}(m_{k+1}) \leqslant (m_{k+1}-m_k)\hat{f}(m_{k+1}) \leqslant C_9 N^\tau \omega_k m_k^{1-1/q}$ или $\hat{f}(m_{k+1}) \leqslant C_{10} m_k^{1/p-1}\omega_k$. Условие 2) легко получается из последнего неравенства. Наконец, пусть выполнено 2) или 3). При $p \geqslant 2$ по теореме Ф.Рисса—Хаусдорфа—Юнга [8, гл. 2, §4]

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_p \leqslant C_{11}\left(\sum_{k=m_n}^{\infty} |\hat{f}(k)|^q\right)^{1/q} \leqslant C_{12}\omega_n,$$

и согласно (3) $f \in H_p^\omega$. При $1 < p < 2$ считаем сначала, что $\tau = 0$. Запишем с помощью преобразования Абеля

$$\sum_{i=m_k}^{n-1} \hat{f}(i)\chi_i(x) = \sum_{i=m_k}^{n-2} \Delta\hat{f}(i)(D_{i+1}(x)-D_{m_k}(x)) + \hat{f}(n-1)(D_n(x)-D_{m_k}(x)).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n = 0$ и верно (4), L_p-норма последнего слагаемого стремится к нулю. То же верно при фиксированном $x > 0$. Согласно оценке $D_n(x)$ из леммы 1.1 при $x \in [1/m_{l+1}, 1/m_l)$

$$\left|\sum_{i=m_n}^{\infty} \hat{f}(i)\chi_i(x)\right| \leqslant C_{13} m_l \sum_{i=m_n}^{\infty} \Delta\hat{f}(i) \leqslant C_{13} m_l \hat{f}(m_n). \tag{9}$$

Поэтому

$$\|f(x) - S_{m_n}(f)(x)\|_{L_p[1/m_n,1)} \leqslant C_{13}\hat{f}(m_n)\left(\sum_{l=0}^{n-1} m_l^p(m_l^{-1} - m_{l+1}^{-1})\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} m_n^{1/p-1} \omega_n m_n^{1-1/p} = C_{14}\omega_n.$$

Пусть теперь $l \geqslant n$ и $x \in [1/m_{l+1}, 1/m_l)$. Используя очевидную оценку $|\sum\limits_{i=m_n}^{m_l-1} \hat{f}(i)\chi_i(x)| \leqslant \sum\limits_{i=m_n}^{m_l-1} \hat{f}(i)$, (8) и (9), а также монотонность $\hat{f}(i)$, получаем

$$\int_0^{1/m_n} |f(x) - S_{m_n}(f)(x)|^p dx = \sum_{l=n}^{\infty} \int_{1/m_{l+1}}^{1/m_l} |f(x) - S_{m_n}(f)(x)|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} \sum_{l=n}^{\infty} \int_{1/m_{l+1}}^{1/m_l} \left(\left| \sum_{i=m_n}^{m_l-1} \hat{f}(i)\chi_i(x) \right|^p + \left| \sum_{i=m_l}^{\infty} \hat{f}(i)\chi_i(x) \right|^p \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} \left(\sum_{l=n}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{l} m_i^{1/p}\omega_i \right)^p m_l^{-1} + \sum_{l=n}^{\infty} (m_l m_l^{1/p-1}\omega_l)^p m_l^{-1} \right). \qquad (10)$$

Благодаря неравенству Йенсена, вторая из внутренних сумм в правой части (10) есть $O(\omega_n^p)$. Для оценки первой суммы воспользуемся идеей Харди и Литтлвуда [12, теорема 346]. Пусть $d_l = \sum\limits_{i=l}^{\infty} m_i^{-1}$, $s_l = \sum\limits_{i=n}^{l} m_i^{1/p}\omega_i$ $(s_{n-1} = 0)$. Применяя неравенство Гельдера и теорему Лагранжа о среднем, имеем

$$\sum_{l=n}^{N} m_l^{-1} s_l^p = \sum_{l=n}^{N} (d_l - d_{l+1}) s_l^p \leqslant \sum_{l=n}^{N} d_l (s_l^p - s_{l-1}^p) \leqslant$$

$$\leqslant 2p \sum_{l=n}^{N} m_l^{-1} s_l^{p-1} m_l^{1/p} \omega_l = 2p \sum_{l=n}^{N} m_l^{-1/q} s_l^{p-1} \omega_l \leqslant 2p \left(\sum_{l=n}^{N} \omega_l^p \right)^{1/p} \left(\sum_{l=n}^{N} m_l^{-1} s_l^p \right)^{1/q}.$$

Сокращая на последний сомножитель и используя неравенство Йенсена, получаем

$$\left(\sum_{l=n}^{N} m_l^{-1} s_l^p \right)^{1/p} \leqslant 2p \left(\sum_{l=n}^{N} \omega_l^p \right)^{1/p} \leqslant C_{16}\omega_n.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, видим, что правая часть (10) есть $O(\omega_n^p)$, откуда $\|f - S_{m_n}(f)\|_p = O(\omega_n)$ и $f \in H_p^\omega$. В случае $\tau > 0$ рассмотрим $T^{(-\tau)} f$. В силу условия 3) теоремы $\left(\sum\limits_{k=m_n}^{\infty} |(T^{(-\tau)} f)\hat{}(k)|^q \right)^{1/q} =$

$= O(m_n^{-\tau}\omega_n)$. Используя разобранный случай $\tau = 0$ находим, что $\omega_n(T^{(-\tau)}f)_p = O(m_n^{-\tau}\omega_n)$ и в силу леммы 1.3 и условия (B) получаем, что $\omega_n(f)_p \leqslant C_{17} \sum\limits_{k=n}^{\infty} m_k^{\tau} m_k^{-\tau}\omega_k \leqslant C_{18}\omega_n$. Таким образом показано, что из 2) следует 1) и тем самым показана попарная равносильность утверждений 2) и 3), 2) и 4), 1) и 3). Значит, все утверждения 1)-4) эквивалентны. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь $K(\alpha,p) = \{f \in L[0,1) : T^{(-\alpha)}f \in Lip(\alpha,p)\}$, $\alpha > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Теорема 2.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha > 0$, $f \in L[0,1)$. *Тогда* $f \in K(\alpha,p)$ *в том и только в том случае, когда для любой* $g \in Lip(\alpha,q)$ *верно соотношение*

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k)\hat{g}(k) = O(m_n^{-\alpha}). \tag{11}$$

Доказательство

Пусть $0 < \beta < \alpha$, $g \in Lip(\alpha,q)$, $f \in K(\alpha,p)$, $1 < p < \infty$. В силу леммы 1.3

$$\omega_n(T^{(\beta)}g)_q \leqslant C_1 \sum_{i=n}^{\infty} m_i^{\beta} m_i^{-\alpha} \leqslant C_2 m_n^{\beta-\alpha}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{12}$$

то есть $T^{(\beta)}g \in Lip(\alpha-\beta,q)$. Далее, пусть $h = T^{(-\alpha)}f \in Lip(\alpha,p)$. Тогда $T^{(\alpha-\beta)}h$ в силу (12) принадлежит $Lip(\beta,p)$ и по теореме единственности $T^{(-\beta)}f = T^{(\alpha-\beta)}h + C$. Таким образом, согласно лемме 1.3, (3) и (12), примененному два раза, имеем

$$\left|\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k)\hat{g}(k)\right| = \left|\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} (T^{(-\beta)}f)\hat{}(k)(T^{(\beta)}g)\hat{}(k)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (S_{m_{n+1}}(T^{(-\beta)}f(x)) - S_{m_n}(T^{(-\beta)}f)(x))(S_{m_{n+1}}(T^{(\beta)}g(x)) -\right.$$

$$\left.- S_{m_n}(T^{(\beta)}g)(x))dx\right| \leqslant C_3 E_{m_n}(T^{(-\beta)}f)_p E_{m_n}(T^{(\beta)}g)_q \leqslant C_4 m_n^{-\beta} m_n^{\beta-\alpha} = C_4 m_n^{-\alpha}.$$

В итоге, (11) установлено. Пусть, напротив, для всех $g \in Lip(\alpha, q)$ верно (11). В силу соотношения $T^{(\alpha)}T^{(-\alpha)}h = h$ при $\hat{h}(0) = 0$ и леммы 1.3 получаем

$$\omega_n(T^{(-\alpha)}h)_q \leqslant C_5 m_n^{-\alpha}\omega_n(h)_q, \quad n \in \mathbf{N}, \quad h \in L_q[0,1), \tag{13}$$

то есть $g = T^{(-\alpha)}h \in Lip(\alpha, q)$ при $h \in L_q[0,1)$. Ясно, что (13) не зависит от $\hat{h}(0)$ и что $\hat{h}(k) = k^\alpha \hat{g}(k)$ при $k \in \mathbf{N}$. Значит, для любой функции $h \in L_q[0,1)$ в силу леммы 2.1

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{h}(k)k^{-\alpha}\hat{f}(k) = \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{g}(k)\hat{f}(k) = O(m_n^{-\alpha}).$$

Так как $\omega_n = m_n^{-\alpha}$ удовлетворяет условию (B), снова применяя лемму 2.1 и замечая, что также $\sum\limits_{k=m_n}^{\infty} \hat{h}(k)k^{-\alpha}\hat{f}(k) = O(m_n^{-\alpha})$, находим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\hat{f}(k)\chi_k(x)$ является рядом Фурье функции класса $Lip(\alpha, p)$, то есть $f \in K(\alpha, p)$. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *1) Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда $\{\lambda_n\} \in (Lip(\alpha, p), Lip(\alpha))$ тогда и только тогда, когда найдется $h \in K(\alpha, q)$, такая что $\hat{h}(n) = \lambda_n$, $n \in \mathbf{Z}_+$.*

2) Пространство $K(\alpha, p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, не зависит от α.

Доказательство

1) Пусть существует $h \in K(\alpha, q)$ со свойством $\hat{h}(n) = \lambda_n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, и $f \in Lip(\alpha, p)$. Согласно замечанию 2.2 для любой $g \in L[0,1)$ имеем $\{\hat{g}(k)\} \in (L_q, L_q)$ и поэтому $\{\hat{g}(k)\} \in (K(\alpha, q), K(\alpha, q))$. По теореме 2.3 $\sum\limits_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{g}(k)(\lambda_k\hat{f}(k)) = \sum\limits_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k)(\lambda_k\hat{g}(k)) = O(m_n^{-\alpha})$. В силу произвольности g и леммы 2.1 $h * f \in Lip(\alpha)$ ($\widehat{(h*f)}(k) = \lambda_k\hat{f}(k)$ и $\omega_n = m_n^{-\alpha}$ удовлетворяет условию (B)).

Пусть теперь $\{\lambda_n\} \in (Lip(\alpha, p), Lip(\alpha))$. Снова по лемме 2.1 для всех $f \in Lip(\alpha, p)$ и $g \in L[0,1)$, $l > n$, имеем $\sum\limits_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k)(\lambda_k\hat{g}(k)) = O(m_n^{-\alpha})$.

В силу (13) $T^{(-\alpha)}f_1 \in lip(\alpha,p)$ для всех $f_1 \in L_p[0,1)$, поэтому $\sum\limits_{k=m_n}^{m_{n+1}-1}(k^{-\alpha}\hat{f}_1(k))(\lambda_k\hat{g}(k)) = O(m_n^{-\alpha})$, где $f_1 \in L_p[0,1)$ и $g \in L[0,1)$. Полагая $g(x) = D_{m_i}(x)$, $i \geqslant n+1$, по теореме Банаха—Штейнгауза получаем, что $\sum\limits_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} k^{-\alpha}\hat{f}_1(k)\lambda_k = O(m_n^{-\alpha})$ для любой $f_1 \in L_p[0,1)$. По лемме 2.1 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\lambda_k\chi_k(x)$ есть ряд Фурье функции из $Lip(\alpha,q)$, что и требовалось доказать.

2) Пусть $0 < \beta < \alpha$, $f \in K(\alpha,p)$ и $g = T^{(-\alpha)}f$. Согласно (12) имеем $\omega_n(T^{(\alpha-\beta)}g)_p \leqslant C_1 m_n^{-\beta}$. Последнее означает, что $g_1 = T^{(\alpha-\beta)}g \in Lip(\beta,p)$ или что $k^{\alpha-\beta}\hat{g}(k) = k^{-\beta}\hat{f}(k) = \hat{g}_1(k)$, $k \in \mathbf{N}$, где $g_1 \in Lip(\beta,p)$, то есть $f \in K(\beta,p)$. Если же $f \in K(\beta,p)$, то, как отмечалось в §1, $T^{(-\alpha)}f = T^{(\beta-\alpha)}T^{(-\beta)}f$. В силу (13), учитывая $T^{(-\beta)}f \in Lip(\beta,p)$, получаем

$$\omega_n(T^{(-\alpha)}f)_p \leqslant C_2 m_n^{\beta-\alpha}\omega_n(T^{(-\beta)}f) \leqslant C_3 m_n^{-\alpha},$$

откуда $f \in K(\alpha,p)$. Теорема доказана.

Чтобы сформулировать две последние теоремы, определим оператор $\mathfrak{C}f$ следуюшим образом: $(\mathfrak{C}f)\check{}(0) = \hat{f}(0)$, $(\mathfrak{C}f)\check{}(k) = \sum\limits_{i=1}^{k}\hat{f}(i)/k$, $k \in \mathbb{N}$. Можно доказать, что этот оператор, называемый преобразованием Харди по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, ограничен в пространствах $L_p[0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ (при $p_n \equiv 2$ см. [13], в общем случае результат получен автором, но еще не опубликован). Здесь приводятся два результата, касающиеся рядов по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ с монотонными или квазимонотонными коэффициентами. Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ убывает к нулю. Тогда тем же свойством обладает последовательность $A_k = k^{-1}\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$.

Теорема 2.5. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Если* $f \in L[0,1)$ *такова, что* $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ *убывает, то включения* $\mathfrak{C}f \in L_p[0,1)$ *и* $f \in L_p[0,1)$ *равносильны.*

Доказательство

Как известно [14], если $\{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ убывает, то $f \in L_p[0,1)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p n^{p-2} < \infty. \tag{14}$$

Для $a_i \geqslant 0$ имеет место частный случай неравенства Харди—Литтлвуда [12, теорема 346]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} \left(n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^p \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} (na_n)^p. \tag{15}$$

С другой стороны, при убывающих a_i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^p \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p$. Таким образом, для f и $\mathfrak{C}f$ сходимость рядов (14) равносильна. Теорема доказана.

Теорема 2.6. *Пусть $1 < p < \infty$, $\omega \in B$ и $f \in L_p[0,1)$ такова, что $\{n^{-\tau}\hat{f}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ убывает при некотором $\tau \geqslant 0$. Тогда $f \in H_p^{\omega}$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{C}f \in H_p^{\omega}$.*

Доказательство

В силу (15) и теоремы 2.2 из $f \in H_p^{\omega}$ следует $\mathfrak{C}f \in H_p^{\omega}$. Далее, если $n^{-\tau} a_n$ убывает, то

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\tau} a_k k^{\tau} = \sum_{k=1}^{n-1} (k^{-\tau} a_k - (k+1)^{-\tau} a_{k+1}) \sum_{j=1}^{k} j^{\tau} + n^{-\tau} a_n \sum_{j=1}^{n} j^{\tau} \geqslant$$

$$\geqslant n^{-\tau} a_n C(\tau) n^{\tau+1} = Cna_n.$$

Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^p \geqslant C^p \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p$. Осталось показать, что $n^{-\alpha} A_n$, где $A_n = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ и $n^{-\tau} a_n$ убывает, тоже убывает при достаточно большом $\alpha > 0$. Неравенство $n^{-\alpha} A_n \geqslant (n+1)^{-\alpha} A_{n+1}$ равносильно неравенству $((n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}) \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geqslant n^{\alpha+1} a_{n+1}$. Как показано выше, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geqslant$ $\geqslant C(\tau) n a_n$, а $(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}((1+1/n)^{\alpha+1} - 1) \geqslant (\alpha+1)n^{\alpha}$. Теперь ясно , что при фиксированном τ можно подобрать α, такое что нужное неравенство будет выполняться для всех $n > n_0$ и теорему 2.2 можно применять к $\mathfrak{C}f$ Таким образом , из $\mathfrak{C}f \in H_p^\omega$ следует $f \in H_p^\omega$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Hardy G.H.* Notes on some points in the integral calculus //Messenger of Math. 1928. V.58. P.50-52.

2. *Конюшков А.А.* О классах Липшица //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т.21, №5. С.423-448.

3. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

4. *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. 1990.

5. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций //Тр. Моск. Матем. об-ва. 1956. Т.5. С.483-522.

6. *Pal J., Simon P.* On a generalization of the concept of derivative //Acta Math. Hung. 1977. T.29, №1-2. P.155-164.

7. *He Zelin.* The derivatives and integrals of fractional order in Walsh-Fourier analysis with applications to approximation theory // J. Approx. Theory. 1983. V.39. P.361-373.

8. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

9. *Watari C.* On generalized Walsh-Fourier series // Tohoku Math. J. 1958. V.10, №3. P.211-241.

10. *Блюмин С.Л.* Некоторые свойства одного класса мультипликативных систем и вопросы приближения функций полиномами по этим системам //Изв. вузов. Математика. 1968. №4. С.13-22.

11. *Стечкин С.Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера //Труды МИАН им. В.А.Стеклова. 1961. Т.62. С.48-60.

12. *Харди Г., Литттлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

13. *Eisner T.* The dyadic Cesaro operators //Acta Sci. Math. (Szeged). 1998. V.64. P.99-111.

14. *Тиман М.Ф., Тухлиев К.* Свойства некоторых ортонормированных систем // Изв. вузов. Математика. 1983. №9. С.65-73.

УДК 519.984

О.Ю. Дмитриев

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$y^{(4)} - \lambda y = 0 \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + b_i y^{(i-1)} = 0, \quad i = \overline{1,4}, \tag{2}$$

где $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1,\ a_4 = 0,\ b_1 = b_2 = b_4 = 1,\ b_3 = 0$, λ — спектральный параметр.

Ранее в литературе изучались случаи распадающихся краевых условий [1] или краевых условий, у которых только один из коэффициентов a_i равен нулю, а $b_i \neq 0$ [2–3]. Данные краевые условия носят принципиально новый характер, являясь, как и в ранее изученных случаях, нерегулярными по Биркгофу [4]. Функция Грина $G(x,t,\lambda)$ имеет экспоненциальный рост как при $t < x$, так и при $t > x$, что представляет основную трудность при исследовании.

Положим $\lambda = -\rho,\ \arg\rho \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Тогда функции $y_j(x) = y_j(x,\rho) = \exp\rho_j x$, где $\omega_j = \exp\frac{2j-1}{4}\pi i,\ j = \overline{1,4}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Для собственных чисел λ_k справедливы асимптотические формулы $\lambda_k = -\rho_k^4,\ \rho_k = \rho_{k+h}^0 + O\left(\frac{1}{k}\right),\ \rho_k^0 = \sqrt{2}\pi(k+1)$, где h — некоторое целое число, не зависящее от k.

Обозначим

$$\varphi(x,\rho) = \begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & \dots & y_4(x,\rho) \\ U_2(y_1) & \dots & U_2(y_4) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ U_4(y_1) & \dots & U_4(y_4) \end{vmatrix}.$$

Если $\rho = \rho_k$, то $\varphi(x,\rho)$ — собственная функция краевой задачи (1)–(2).

Обозначим через $T_{1-2\beta}$ многоугольник, описываемый системой неравенств:

$$Re(\omega_j z) < \beta Re\omega_3 + Re\omega_1, \quad j = 1, 4,$$

$$Re(\omega_j z) < \beta Re\omega_3 \quad j = 2, 3.$$

Рассмотрим ряд по собственным функциям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k). \tag{3}$$

Теорема 1. *Если ряд (3) сходится равномерно на* $[\alpha_1, \beta_1]$, *где* $0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 \leqslant \frac{1}{2}$, *то он сходится абсолютно и равномерно внутри* T_{α_2} $(\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1)$ *к аналитической функции. Сумма ряда (3)* f *удовлетворяет уравнению:*

$$\Phi(f, x) = 0, \tag{4}$$

где $\Phi(f,x) = a_3^* f(\omega_4 x) + a_4^* f(\omega_1 x) + b_1^* f(1 - \omega_4 x) + b_2^* f(1 - \omega_1 x)$, $a_3^* = 1,\ a_4^* = i,\ b_1^* = \frac{1}{i+1} = b_2^*$.

Теорема 2. *Если ряд (3) сходится равномерно на* $[0,1]$, f *— его сумма и* μ *не является собственным значением, то функция* $g(x) = R_\mu f = \int\limits_0^1 G(x,t,\mu) f(t)dt$ *аналитически продолжима в* T_0, *ограничена в угле* $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4},\ |z| \leqslant |z_0|$ *и удовлетворяет уравнению (4).*

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in [0,1]$ *и при некотором натуральном* k *функция* $g(x) = R_\mu^k f$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) она аналитически продолжима в четырехугольник T_0 *с вершинами* $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_4\right)$;

б) она непрерывна на интервалах $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_4\right)$, $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_1\right)$, $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_4\right)$;

в) она ограничена в угле $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}$, $|z| \leqslant |z_0|$ *и в угле* $|\arg(1-z)| \leqslant \frac{\pi}{4}$, $|1-z| \leqslant |z_1|$;

г) она удовлетворяет уравнению (4) при $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Тогда функция $g(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся на* $(0,1)$ *ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)–(2).*

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1969. Т.70(112).

2. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Мат. и ее приложения. Саратов, 1991. №2.

3. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Мат. и ее приложения. Саратов, 1991. №2.

4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

УДК 511.3+517.5

А.В. Ермоленко, В.Н. Кузнецов, В.В. Кривобок

К ПРОБЛЕМЕ ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРОВ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Известная гипотеза Н.Г. Чудакова [1] утверждает, что функция натурального аргумента $h(n)$, удовлетворяющая условиям:

1. $h(n)$ — конечнозначная;
2. $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p;
3. $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} h(n) = O(1)$,

является периодической функцией, то есть характером Дирихле.

В данной статье аналогичная гипотеза высказывается для определенного класса характеров числовых полей.

Определение 1. Пусть $h(\mathfrak{a})$ — мультипликативная функция, определенная на группе идеалов и удовлетворяет следующим условиям:

1. $h(\mathfrak{a})$ — конечнозначная;
2. $h(\wp) \neq 0$ почти для всех простых идеалов $\wp$;
3. $S(x) = \sum\limits_{N(\mathfrak{a}) \leqslant x} h(\mathfrak{a}) = O(1)$.

Такие функции будем называть обобщенными числовыми характерами.

Замечание. Даже в случае характеров Дирихле не известно, имеет ли место условие 3. В настоящее время доказано [2,3], что $S(x,\chi) = O(x^{1-\frac{1}{\nu}})$, где χ — характер Дирихле.

Основным результатом работы является доказательство того факта, что к классу обобщенных числовых характеров можно отнести норменные характеры Дирихле.

Определение 2. Характер Дирихле χ поля k называется норменным, если существует числовой характер χ_1 такой, что

$$\chi(\wp) = \chi_1(\wp).$$

Известно [4], что для норменного характера имеет место разложение L-функции в произведение классических L-функций, то есть

$$L(s,\chi) = \prod_{i=1}^{s} L_i(s,\chi_i).$$

Для таких характеров в данной работе доказывается

Теорема. *Пусть χ — норменный характер числового поля k, отличный от единичного. Тогда*

$$S(x) = O(1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Имеем $L(s,\chi) = \prod\limits_{i=1}^{s} L_i(s,\chi_i)$. Пусть классическим L-функциям $L_i(s,\chi_i)$ отвечают степенные ряды:

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} z^k, \qquad i = \overline{1,s}.$$

Обозначим через $g_N(z) = \prod\limits_{i=1}^{s} S_N^{(i)}(z)$, где $S_N^{(i)}(z) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^k$ — частичные суммы рядов $g_i(z)$.

Рассмотрим также $g_N^*(z) = \bigodot\limits_{i=1}^{s} S_N^{(i)}(z) = \sum\limits_{k=1}^{N} b_k z^k$, где символом $\bigodot$ обозначено произведение по Дирихле конечных сумм $S_N^{(i)}(z)$.

В работе [4, гл.I, п.1.3, лемма 1.7] было показано, что для любого z имеет место оценка

$$|g_N^*(z)| \leqslant C|g_N(z)|.$$

В частности, при $z = 1$ имеем:

$$|g_N^*(1)| \leqslant C|g_N(1)| = C\prod_{i=1}^{s} m_i = C_1,$$

где m_i — модуль характера χ_i. Последняя оценка дает $|g_N^*(1)| \leqslant C$. А $|g_N^*(1)| = S(N)$, что и доказывает утверждение теоремы.

Таким образом, нами показано, что в качестве обобщенных характеров можно взять норменные.

В заключении можно высказать гипотезу, аналогичную гипотезе Н.Г. Чудакова:

Гипотеза. *Любой обобщенный характер числового поля, отличный от единичного, является характером Дирихле этого поля.*

Библиографический список

1. *Чудаков Н.Г., Родосский К.А.* Об обобщенном характере // ДАН СССР. 1950. Т.73.
2. *Hecke E.* Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen // Math. Ann. 1926. №97. P.240-242.
3. *Hecke E.* Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Bezenhungen zur Verteilung der Primzahlen // Math. Z. 1920. №6. P.11-67.
4. *Сецинская Е.В.* Граничное поведение степенных рядов, отвечающих L-функциям числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.

УДК 511.23

Г.И. Гусев

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И ОЦЕНКАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Пусть p — простое, $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, O_p — кольцо целых p-адических чисел и U_p — группа единиц поля $\mathbb{Q}_p$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ — многочлен из кольца $O_p[x]$, $n \geqslant 1$.

Разложим производную $f'(x)$ на неприводимые множители над полем рациональных чисел:

$$f'(x) = c \cdot \varphi_1^{k_1}(x) \cdot ... \cdot \varphi_s^{k_s}(x),$$

где c — целое и $\varphi_i(x)$ — примитивный многочлен.

Далее, обозначим через $g(x) = \varphi_1^{k_1}(x) \cdot ... \cdot \varphi_s^{k_s}(x)$, а через $Res(\varphi_i, \varphi_j)$, $i \neq j$ — результант многочленов $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$, и $Res(\varphi_i, \varphi_i')$ — результант $\varphi_i(x)$ и его производной $\varphi_i'(x)$. Тогда для результантов имеют место равенства:

$$Res(\varphi_i, \varphi_j) = \varphi_i(x) \cdot A_{ij}(x) + \varphi_j(x) \cdot B_{ij}(x), \tag{1}$$

$$Res(\varphi_i, \varphi_i') = \varphi_i(x) \cdot C_i(x) + \varphi_i'(x) \cdot D_i(x), \tag{2}$$

где $A_{ij}(x),\ B_{ij}(x),\ C_i(x),\ D_i(x)$ являются многочленами с целыми коэффициентами.

Определение 1. Простое число p называется f-регулярным, если на p не делится произведение

$$c \cdot \prod_{i=1}^{s} Res(\varphi_i, \varphi_i') \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} Res(\varphi_i, \varphi_j).$$

Известно, что $Res(g(x), g'(x))$ можно представить в виде произведения

$$Res(g, g') = (-1)^{\sigma_2} \prod_{i=1}^{s} Res(\varphi_i, \varphi_i') \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant s} Res^2(\varphi_i, \varphi_j),$$

где $\sigma_2 = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant s} deg\ \varphi_i \cdot deg\ \varphi_j$.

Отсюда следует, что простое число p является f-регулярным тогда и только тогда, когда на p не делится произведение $c \cdot Res(g, g')$.

Теорема 1. *Предположим, что для f-регулярного простого числа p существует корень θ производной $f'(x)$ кратности k, принадлежащий* *кольцу O_p. Тогда имеют место равенства*

$$\nu_p\left(\frac{f^{(k+1)}(\theta)}{k!}\right)=0,$$

$$\nu_p(k+1)=0.$$

Доказательство

Пусть $\varphi=\varphi_j(x)$ — неприводимый многочлен, входящий в каноническое разложение $f'(x)$, корнем которого является p-адическое число θ. Тогда

$$f^{(k+1)}(\theta)=c\cdot k_j!(\varphi_j'(\theta))^{k_j}\prod_{i\neq j}\varphi_i^{k_i}(\theta).$$

Отсюда следует, что

$$\nu_p\left(\frac{f^{(k+1)}(\theta)}{k_j!}\right)=\nu_p(c)+k_j\nu_p(\varphi_j'(\theta))+\sum_{i\neq j}k_i\nu_p(\varphi_i(\theta)).$$

Покажем, что $\nu_p(\varphi_i(\theta))=0$ при $i\neq j$. Действительно, из равенства (1) следует, что при $i\neq j$

$$\nu_p(\varphi_i(\theta)A_{ij}(\theta))=\nu_p(Res(\varphi_i,\varphi_j)).$$

Далее, так как $\nu_p(Res(\varphi_i,\varphi_j))=0$ и $A_{ij}(\theta)\in O_p$, то $\nu_p(\varphi_j(\theta))=0$ при всех i, не равных j.

Аналогично, из равенства (2) получаем, что $\nu_p(\varphi_j'(\theta))=0$. Ввиду f-регулярности простого числа p $\nu_p(c)=0$, а поэтому $\nu_p\left(\frac{f^{(k+1)}(\theta)}{k_j!}\right)=0$.

Теперь легко установить, что $\nu_p(k_j+1)=0$.

Действительно, по условию $\nu_p\left(\frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k_j+1)!}\right)\geqslant 0$ или $\nu_p\left(\frac{f^{(k+1)}(\theta)}{k!}\right)-\nu_p(k+$ $+1)\geqslant 0$, что и приводит нас к неравенству $\nu_p(k_j+1)\leqslant 0$, равносильному условию $\nu_p(k+1)=0$. Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть p — простое нечетное и n — натуральное, $n\geqslant 2$, такое, что $\nu_p(n)=0$. Тогда p-адический аналог ряда Ньютона

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)...\left(\frac{1}{n}-s+1\right)x^s \qquad (3)$$

сходится, если $\nu_p(x)\geqslant 1$.

Доказательство

Прежде всего отметим, что для натурального s

$$\nu_p(s) = \frac{s - \sigma_p(s)}{p-1},$$

где $\sigma_p(s)$ — сумма цифр p-ичного разложения $s = \sum\limits_{l=0}^{m} a_l p^l, \ \ \sigma_p(s) = \sum\limits_{l=0}^{m} a_l$. Тогда при $x = pu, \ u \in O_p$

$$\nu_p\left(\frac{1}{s!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-s+1\right)p^s u^s\right) \geqslant -\frac{s-\sigma_p(s)}{p-1} + s + s\nu_p(u),$$

отсюда следует, что ряд (3) сходится при $\nu_p(x) \geqslant 1$. Более того, при $s \geqslant 1$

$$-\frac{s-\sigma_p(s)}{p-1} + s \geqslant 1,$$

то есть ряд (3) при $x = pu$ представляет собой сумму $1 + pT(u)$, где $T(u) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} t_\nu p^\nu$ — ряд с целыми p-адическими коэффициентами, сходящийся в O_p.

Следствие. Предположим, что степенной ряд $G(u) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} g_s u^s$ имеет целые p-адические коэффициенты, сходящиеся к нулю. Тогда в условиях леммы существует такой же степенной ряд $F(u) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} b_s u^s$, что выполняется равенство

$$1 + pG(u) = (1 + pF(u))^n.$$

Теорема 2. *Пусть при f-регулярном p существует корень $\theta \in O_p$ производной $f'(x)$ кратности k.*

Тогда на компакте $K_\theta = \theta + pO_p$ имеет место изометрическая эквивалентность

$$f(x) \cong f(\theta) + \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}(x-\theta)^{k+1}.$$

Доказательство

Положим $x = \theta + pu$, где $u \in O_p$. Тогда, используя формулу Тейлора, получим:

$$f(x) = f(\theta) + \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}p^{k+1}u^{k+1} + \sum_{s=k+2}^{deg\ f} \frac{f^{(s)}(\theta)}{s!}p^s u^s.$$

Обозначим $\varepsilon_\theta = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$. По теореме 1 $\varepsilon_\theta \in U_p$. Тогда

$$f(x) = f(\theta) + \varepsilon_\theta p^{k+1} u^{k+1} \left(1 + p \sum_{s=k+2}^{deg\ f} \frac{\varepsilon_\theta^{-1} f^{(s)}(\theta)}{s!} p^{s-k-2} u^{s-k-1}\right).$$

Для ряда $G(u) = \sum\limits_{s=k+2}^{deg\ f} \frac{\varepsilon_\theta^{-1} f^{(s)}(\theta)}{s!} p^{s-k-2} u^{s-k-1}$ в силу следствия леммы при $n = k+1$ получим ряд $F(u)$ с указанными свойствами.

Поэтому

$$f(\theta + pu) = f(\theta) + \varepsilon_\theta p^{k+1} u^{k+1} (1 + pF(u))^{k+1}.$$

Далее отметим, что $\sigma(u) = u(1 + pF(u))$ является изометрией O_p. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть p — f-регулярное нечетное и $\theta_1, ..., \theta_r$ — множество всех корней производной соответственно кратностей $k_1, ..., k_r$. Тогда при произвольных i и j, $i \neq j$ $\theta_i \not\equiv \theta_j (mod\ p)$ и для полной тригонометрической суммы*

$$S(f, mod\ p^\alpha) = \sum_{x_\alpha | mod\ p^\alpha} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(x_\alpha)\right)$$

при всех $\alpha \geqslant 2$ имеет место тождество

$$S(f, mod\ p^\alpha) = \sum_{s=1}^{r} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(\theta_s)\right) \cdot SG_{k_s+1}(\varepsilon_s, p^\alpha),$$

где $\varepsilon_s = \frac{f^{(k_s+1)}(\theta_s)}{(k_s+1)!}$ и $SG_{k_s+1}(\varepsilon_s, p^\alpha) = \sum\limits_{x_\alpha | p^\alpha} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} \varepsilon_s x_\alpha^{k_s+1}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Предположим, что θ_i и θ_j являются корнями различных многочленов $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$. Тогда из равенства (1) следует, что $\varphi_j(\theta_i) \in U_p$. Отсюда следует, что $\theta_i \not\equiv \theta_j (mod\ p)$.

В случае, когда θ_i и θ_j являются корнями одного и того же многочлена $\varphi_i(x)$, из равенства

$$\varphi_i'(\theta_j)(\theta_i - \theta_j) + \sum_{s=2}^{deg\ \varphi_i} \frac{\varphi_i^{(s)}(\theta_j)}{s!} (\theta_i - \theta_j)^2 = 0$$

следует, что $\theta_i \not\equiv \theta_j(mod\ p)$ при $i \neq j$.

Дополним множество всех корней до полной системы вычетов по модулю p числами $a_1, a_2, ..., a_{p-r}$. Тогда имеет место тождество

$$S(f, mod\, p^\alpha) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{x_\alpha | mod\ p^\alpha \\ x_\alpha \equiv \theta_s (mod\ p)}} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(x_\alpha)\right) + \sum_{t=1}^{p-r} \sum_{\substack{x_\alpha | mod\ p^\alpha \\ x_\alpha \equiv a_t (mod\ p)}} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(x_\alpha)\right).$$

Докажем, что

$$\sum_{\substack{x_\alpha | mod\ p^\alpha \\ x_\alpha \equiv a_t (mod\ p)}} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(x_\alpha)\right) = 0$$

при $t = 1, 2, ..., p - r$.

Действительно, $f'(a_t) \not\equiv 0(mod\ p)$. В противном случае по лемме Гензеля о подъеме решения, существовал бы корень $f'(x)$, принадлежащий компакту $K_t = a_t + pO_p$, что невозможно. Поэтому на K_t имеет место изометрическая эквивалентность

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x - a).$$

И, следовательно, указанная сумма обращается в 0. Таким образом,

$$S(f, mod\ p^\alpha) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{\substack{x_\alpha | mod\ p^\alpha \\ x_\alpha \equiv \theta_s (mod\ p)}} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(x_\alpha)\right).$$

Далее, ввиду изометрической эквивалентности на компакте $K_s^* = \theta_s +$ $+pO_p$ $f(x) \cong f(\theta_s) + \frac{f^{(k_s+1)}(\theta_s)}{(k_s+1)!}(x - \theta_s)^{k_s+1}$ и равенства

$$\sum_{\substack{x_\alpha | mod\ p^\alpha \\ \nu_p(x_\alpha - \theta_s) = 0}} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(\theta_s)\right) exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} \frac{f^{(k_s+1)}(\theta)}{(k_s+1)!}(x_\alpha - \theta_s)\right) = 0$$

получим

$$S(f, mod\ p^\alpha) = \sum_{s=1}^{r} exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha} f(\theta_s)\right) \cdot SG_{k_s+1}\left(\frac{f^{(k_s+1)}(\theta_s)}{(k_s+1)!}, p^\alpha\right),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда $\{\theta_s\}_{s=1}^{r}$ имеют кратность $k_s = 1$. Тогда

$$S(f, mod\ p^{\alpha}) = \sum_{s=1}^{r} exp\left(\frac{2\pi i}{p^{\alpha}} f(\theta_s)\right) \cdot \left(\frac{2f''(\theta_s)}{p}\right)^{\alpha} \cdot i^{\left(\frac{p^{\alpha}-1}{2}\right)^2} \cdot p^{\frac{\alpha}{2}}.$$

В случае, когда кратность $k_s \geqslant 1$, воспользуемся формулой

$$SG_{k_s+1}(\varepsilon_s, p^{\alpha}) = p^{k_s} SG_{k_s+1}(\varepsilon_s, p^{\alpha-k_s-1}),$$

если $\alpha \geqslant k_s + 1$. Если же $\alpha = 2, 3, ..., k_s$, то легко показать, что $SG_{k_s+1}(\varepsilon_s, p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}$.

Отсюда и из оценок сумм $SG_{k_s+1}(\varepsilon_s, p)$ следуют нетривиальные оценки для $S(f, mod\ p^{\alpha})$.

УДК 511.23

Г.И. Гусев

МНОГОМЕРНЫЕ ИЗОМЕТРИИ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ

Пусть k — локально компактное неархимедово поле, V — кольцо нормирования поля k, $\mathbb{P}$ — идеал нормирования этого поля, V^n — n-я декартова степень V, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in V^n$, $||\alpha|| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$ — норма α.

Определение 1. Отображение

$$\sigma : V^n \longrightarrow V^n$$

называется изометрией компакта V^n, если для произвольных $\alpha,\ \beta$ из V^n выполняется равенство

$$||\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)|| = ||\alpha - \beta||.$$

Отметим свойства изометрий компакта V^n.

1. Если σ и τ — изометрии компакта V^n, то $\tau \circ \sigma$ также является изометрией.

2. Изометрия σ является биекцией компакта V^n.

3. Обратное отображение σ^{-1} является изометрией V^n.

Поэтому изометрии компакта V^n образуют группу.

Определение 2. Квадратная матрица $U = (u_{ij})_{n\times n}$ называется унимодулярной, если все ее элементы u_{ij} принадлежат V, а определитель $\det U$ является единицей поля k.

Приведем важный пример n-мерной изометрии компакта V^n.

Пусть $U = (u_{ij})_{n\times n}$ — унимодулярная матрица, $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in$ $\in V^n$, $F_i(X) = \sum\limits_{\substack{s_1\geqslant 0,\dots,s_n\geqslant 0\\ s_1+\dots+s_n\geqslant 1}} c^{(i)}_{s_1,\dots,s_n} \cdot x_1^{s_1}\dots x_n^{s_n}$ — степенной ряд с коэффициентами из V, $\quad i = \overline{1,n}$, причем $\lim\limits_{\sum\limits_{\nu=1}^{n} s_\nu\to\infty} c^{(i)}_{s_1\dots s_n} = 0$.

Тогда отображение $\sigma : V^n \longrightarrow V^n$, определяемое условием

$$X^T \longrightarrow UX^T + \pi \begin{pmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{pmatrix},$$

где π — простой элемент поля k, является изометрией компакта V^n.

Изометричность данного отображения легко устанавливается в терминах сравнений по $\mod \pi^m$.

Определение 3. Унимодулярные матрицы порядка n

$$U_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где ε — единица поля k, $a_{ij} \in V$ и a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы U_2^* будем называть элементарными.

Используя элементарные унимодулярные матрицы порядка n, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ существует, по крайней мере, одна пара унимодулярных матриц (U_1, U_2) порядка n такая, что произведение U_1AU_2 является диагональной матрицей вида*

$$D = \begin{pmatrix} \pi^{\nu_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi^{\nu_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pi^{\nu_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где r — ранг матрицы A, целые числа ν_i подчинены условию: $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant \nu_r$.

При этом диагональная матрица D определена единственным способом.

Числа $\nu_i,\ i = \overline{1,r}$ назовем инвариантными показателями матрицы A.

Обозначим $\nu_0 = \min\limits_{\substack{i,(s_1,\ldots,s_n) \\ s_1+\ldots+s_n \geqslant 2}} \nu_p(a^{(i)}_{s_1\ldots s_n})$.

Теорема 2. *Пусть для вектор-функции $\bar{f}(X) = (f_1(X), ..., f_n(X))$, где $f_i(X) = \sum\limits_{s_1 \geqslant 0,\ldots,s_n \geqslant 0} a^{(i)}_{s_1\ldots s_n} x_1^{s_1} \ldots x_n^{(s_n)}$ — степенной ряд с целыми π-адическими коэффициентами, причем $\lim\limits_{\sum\limits_{\nu=1}^{n} s_\nu \to +\infty} a^{(i)}_{s_1\ldots s_n} = 0$, выполнены условия:*

1. *Существует точка $c = (c_1, ..., c_n) \in V^n$ такая, что матрица Якоби*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(c) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(c) \end{pmatrix}$$

   является невырожденной и имеет инвариантные показатели $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$.

2. *Точка $c = (c_1, ..., c_n)$ является решением системы сравнений:*

$$\begin{cases} f_1(X) \equiv 0(\mod \pi^{\nu^*}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(X) \equiv 0(\mod \pi^{\nu^*}) \end{cases},$$

   где $\nu^* = \nu_n + \max(0; \nu_n + 1 - \nu_0)$.

Тогда в компакте $K_n(c) = c + \pi^{\bar{\nu}} V^n$, где $\bar{\nu} = \max(0; \nu_n + 1 - \nu_0)$, суще-

ствует и притом единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(X) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(X) = 0 \end{cases}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Разложим $f_i(X)$ в ряды Тейлора с центром в точке c:

$$f_1(X) = f_1(c) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) + g_1(x - c)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(X) = f_n(c) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) + g_n(x - c),$$

где $g_i(x-c) = \sum\limits_{\substack{s_1\geqslant 0,\ldots,s_n\geqslant 0\\ s_1+\ldots+s_n\geqslant 2}} b^{(i)}_{s_1\ldots s_n}(x_1-c_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x_n-c_n)^{s_n}$ — степенные ряды с целыми π-адическими коэффициентами, причем $\min\limits_{\substack{s_1\geqslant 0,\ldots,s_n\geqslant 0\\ s_1+\ldots+s_n\geqslant 2}} \nu_\pi(b^{(i)}_{s_1\ldots s_n}) \geqslant$ $\geqslant \nu_0$ при всех $i,\ 1\leqslant i\leqslant n$.

Обозначим через U_1 и U_2 — унимодулярные матрицы порядка n, с помощью которых матрица Якоби $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)\right)_{n\times n}$ приводится к диагональной форме: $D = U_1 A U_2$, где $D = [\pi^{\nu_1}, \ldots, \pi^{\nu_n}]$.

Тогда

$$U_1 \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \ldots\ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} f_1(c) \\ \ldots\ldots \\ f_n(c) \end{pmatrix} + DU_2^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - c_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n - c_n \end{pmatrix} + U_1 \begin{pmatrix} g_1(x-c) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(x-c) \end{pmatrix}.$$

Положим для всякого $x \in K_n(a, \rho^{\bar\nu})$ $x = c + \pi^{\bar\nu} v$, где $v = (v_1, \ldots, v_n) \in$ $\in V^n$.

Тогда

$$U_1 \begin{pmatrix} f_1(\ + \pi^{\bar\nu} v) \\ \ldots\ldots \\ f_n(\ + \pi^{\bar\nu} v) \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} f_1(c) \\ \ldots\ldots \\ f_n(c) \end{pmatrix} + \pi^{\bar\nu} DU_2^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} + U_1 \begin{pmatrix} g_1(\pi^{\bar\nu} v) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(\pi^{\bar\nu} v) \end{pmatrix}.$$

При этом $g_i(\pi^{\bar{\nu}}v)$ представляется в виде ряда

$$g_i(\pi^{\bar{\nu}}v) = \pi^{2\bar{\nu}} \sum_{\substack{s_1 \geqslant 0, \dots, s_n \geqslant 0 \\ s_1 + \dots + s_n \geqslant 2}} c^{(i)}_{s_1 \dots s_n} v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n},$$

где $c^{(i)}_{s_1 \dots s_n} \in V$ и $\lim\limits_{\sum\limits_{j=1}^{n} s_j \to +\infty} c^{(i)}_{s_1 \dots s_n} = 0$.

Введем новые переменные $(u_1, \dots, u_n)$, связанные с переменными $(v_1, \dots, v_n)$ следующим образом:

$$DU_2^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = DU_2^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \pi^{\bar{\nu}} U_1 \begin{pmatrix} g_1^*(v) \\ \dots\dots \\ g_n^*(v) \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $g_i^*(v) = \sum\limits_{\substack{s_1 \geqslant 0, \dots, s_n \geqslant 0 \\ s_1 + \dots + s_n \geqslant 2}} c^{(i)}_{s_1 \dots s_n} v_1^{s_1} \dots v_n^{s_n}$.

Докажем, что преобразование (*) является изометрией компакта V^n.

Действительно, из (*) следует, что

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \pi^{\bar{\nu}} U_2 D^{-1} U_1 \begin{pmatrix} g_1^*(v) \\ \dots\dots \\ g_n^*(v) \end{pmatrix},$$

где $\pi^{\bar{\nu}} D^{-1} = [\pi^{\bar{\nu} - \nu_1}, \dots, \pi^{\bar{\nu} - \nu_n}]$.

Отсюда следует, что

$$\pi^{\bar{\nu}} U_2 D^{-1} U_1 = \pi B,$$

где $B = (b_{ij})_{n \times n}$ — матрица с целыми π–адическими элементами.

Следовательно, преобразование (*) является изометрией компактаV^n.

По условию система линейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(c) + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(c) + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение в компакте $K_n(c)$.

В силу биективности изометрии система уравнений

$$\begin{cases} f_1(X) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(X) = 0 \end{cases}$$

также имеет единственное решение, принадлежащее компакту $K_n(c)$. Теорема доказана.

УДК 519.21

В.В. Красильщиков, А.В. Шутов

ВЛОЖЕНИЕ РЕШЕТОК В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ*

Работа посвящена изучению одномерных квазипериодических разбиений Фибоначчи. Их можно определить различными способами [1–3], например, с помощью пересечения луча $y = \alpha x$ и целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, где α — иррациональный угол наклона . В работе используется альтернативный подход, основанный на иррациональном повороте окружности.

Определение 1. Множество вершин $\{x_n\}$ разбиения $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ определяется по правилу: $x_{-1} = 0$,

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \text{если } \langle n\alpha\rangle \in [0; 1-\alpha), \\ x_n + l_2, & \text{если } \langle n\alpha\rangle \in [1-\alpha; 1), \end{cases}$$

где $\langle\cdot\rangle$ - дробная доля.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант (05-01-00435).

Определение 2. Решеткой будет называться множество L вида $L = \{h_0 + nh_L\},\ n \in \mathbb{Z}$.

В работах [5], [6] вкладывающаяся решетка определялась следующим образом. Было получено полное описание таких решеток [5].

Определение 3. Будем говорить, что решетка L вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, если

1) каждый длинный интервал разбиения содержит единственную точку решетки L;

2) короткие интервалы разбиения не содержат точек решетки L.

Определим функцию $[x > y]$: $[x > y] = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x \leqslant y. \end{cases}$

Теорема 1. *Пусть α — иррационально и решетка $L = \{h_0 + nh_L\}$ вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$. Тогда $h_0 \in (-l_{max}, -l_{min})$ и*

$$h_L = \frac{l_1(1-\alpha) + l_2\alpha}{\alpha[l_1 < l_2] + (1-\alpha)[l_1 > l_2]}.$$

Рассмотрим вопрос о сильном вложении решеток в одномерное квазипериодическое разбиение. Введем функцию $l(n)$ и определим ее следующим образом:

$$l(n) = \begin{cases} l_1, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha), \\ l_2, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1). \end{cases}$$

Определение 4. Будем говорить, что решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, если каждый интервал разбиения содержит единственную точку решетки L.

Исходя из определений решетки и множества $\{x_n\}$ определим решетку L, сильно вкладывающуюся в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, следующим двойным неравенством для любого $n \geqslant 0$:

$$x_n - l(n) < h_0 + nh_L < x_n. \tag{1}$$

Определим две функции:

$$N_1(\alpha, n) = \#\{i : 0 \leqslant i < n, \langle i\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha)\} \tag{2}$$

и

$$N_2(\alpha, n) = \#\{i : 0 \leqslant i < n, \langle i\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1)\}. \tag{3}$$

Исходя из определений (2) и (3), можно утверждать, что $N_1(\alpha, 0) = 1$ и $N_2(\alpha, 0) = 0$. Выполняется следующее равенство:

$$N_1(\alpha, n) + N_2(\alpha, n) = n + 1. \tag{4}$$

Из определений функций $N_1(\alpha, n)$ и $N_2(\alpha, n)$ следует формула

$$x_n = N_1(\alpha, n) l_1 + N_2(\alpha, n) l_2. \tag{5}$$

В работе [7] показано, что справедливы выражения для $N_1(\alpha, n)$ и $N_2(\alpha, n)$:

$$N_1(\alpha, n) = n(1-\alpha) + r_1(\alpha, n), \tag{6}$$

$$N_2(\alpha, n) = n\alpha + r_2(\alpha, n), \tag{7}$$

где $1-\alpha$ — доля интервалов длины l_1, а α — доля интервалов длины l_2 во всем разбиении $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, а $r_1(\alpha, n)$,$r_2(\alpha, n)$ — соответствующие остатки. Тогда можно записать равенство:

$$x_n = (l_1(1-\alpha) + l_2\alpha)n + r_1(\alpha, n) l_1 + r_2(\alpha, n) l_2.$$

В работах [4] и [7] получены следующие оценки для $r_1(\alpha, n)$ и $r_2(\alpha, n)$: $|r_1(\alpha, n)| \leqslant C$, $|r_2(\alpha, n)| \leqslant C$, где C – некоторая константа.

Можно записать следующие равенства:

$$x_n = (l_1(1-\alpha) + l_2\alpha)n + O(1) = nh_L + O(1), \tag{8}$$

Таким образом, мы получили теорему 2.

Теорема 2. *Если решетка* $L = \{h_0 + nh_L\}$ *сильно вкладывается в разбиение* $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, *то*

$$h_L = l_1(1-\alpha) + l_2\alpha. \tag{9}$$

Определим четыре величины:

$$S_1^a = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha)} (x_n - nh_L), \quad S_2^a = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha)} (x_n - nh_L), \tag{10}$$

$$S_1^b = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1)} (x_n - nh_L), \quad S_2^b = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1)} (x_n - nh_L). \tag{11}$$

Предложение 1. *Если решетка* L *сильно вкладывается в разбиение* $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$, *тогда выполняется система неравенств:*

$$\begin{cases} S_2^a - S_1^a < l_1, \\ S_2^b - S_1^b < l_2. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство

По определению (1) сильно вкладывающейся решетки можно получить двойное неравенство: $h_0 < x_n - nh_L < h_0 + l(n)$. В случае, когда $\langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha)$ можно записать: $h_0 < S_1^a \leqslant x_n - nh_L \leqslant S_2^a < h_0 + l_1$. В случае, когда $\langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1)$ можно записать: $h_0 < S_1^b \leqslant x_n - nh_L \leqslant S_2^b < h_0 + l_2$. Данные двойные неравенства равносильны системе:

$$\begin{cases} S_1^a > h_0, \\ S_2^a < h_0 + l_1, \\ S_1^b > h_0, \\ S_2^b < h_0 + l_2. \end{cases} \tag{13}$$

откуда и получаем требуемую систему неравенств.

Теорема 3. *Решетка* L *сильно вкладывается в разбиение* $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ *тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств:*

$$\begin{cases} l_1 > (1-\alpha)^{[l_2 > l_1]}(l_{max} - l_{min}), \\ l_2 > \alpha(l_{max} - l_{min}). \end{cases} \tag{14}$$

Вначале докажем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $F(n)$, $G(n)$ — две функции, отображающие множество целых чисел $\mathbb{Z}$ в себя. Пусть $\Delta F(n) = F(n+1) - F(n)$. Предположим, что $F(0) = G(0)$ и $\Delta F(n) = \Delta G(n)$ для всех целых n. Тогда $F(n) = G(n)$ для всех целых n.

Доказательство

Проведем индукцией по n.

Для $n = 0$ справедливо $F(0) = G(0)$. Предположим, что $F(n) = G(n)$ и $F(-n) = G(-n)$. Сравним $F(n+1)$ с $G(n+1)$ и $F(-(n+1))$ с $G(-(n+1))$. $F(n+1) = F(n) + \Delta F(n) = G(n) + \Delta G(n) = G(n+1)$, $F(-(n+1)) = = F(-n) - \Delta F(-n-1) = F(-n) - \Delta F(-n-1) = G(-(n+1))$.

Лемма 2. Значение функции $N_1(\alpha, n)$ вычисляется по формуле для всех целых $n > 0$:

$$N_1(\alpha, n) = [(n+1)(1-\alpha)] + 1.$$

Доказательство

Определим функцию: $F(n) = [(n+1)(1-\alpha)] + 1$. Покажем, что функции $F(n) = N_1(\alpha, n)$ для всех целых n. Для этого воспользуемся леммой 1. Рассмотрим значения этих функций при $n = 1$: $N_1(\alpha, 1) = F(1) = 1$. Теперь рассмотрим разности $\Delta F(n) = F(n) - F(n-1)$ и $\Delta N_1(\alpha, n) = = N_1(\alpha, n) - N_1(\alpha, n-1)$. Из определения $N_1(\alpha, n)$ следует, что при $n > 0$

$$\Delta N_1(\alpha, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [0; 1-\alpha), \\ 0, & \text{если } \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha; 1). \end{cases} \tag{15}$$

Учитывая определение функции целой части действительного числа, для $\Delta F(n)$ получим:

$$\Delta F(n) = (n+1)(1-\alpha) - \langle (n+1)(1-\alpha) \rangle + 1 - (n(1-\alpha) - \langle n(1-\alpha) \rangle + 1).$$

В результате элементарных преобразований получим, что $\Delta F(n) = 1 - -\alpha + \langle (n+1)\alpha \rangle - \langle n\alpha \rangle$. Возможны два случая.

1. В случае $\langle n\alpha\rangle \in [0; 1-\alpha)$: $\Delta F(n) = 1-\alpha+(n+1)\alpha - n\alpha = 1$.

2. В случае $\langle n\alpha\rangle \in [1-\alpha; 1)$: $\Delta F(n) = 1-\alpha+(n+1)\alpha - 1 - n\alpha = 0$.

Тогда для функции $F(n)$ можно записать выражение при $n > 0$:

$$\Delta F(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle n\alpha\rangle \in [0; 1-\alpha), \\ 0, & \text{если } \langle n\alpha\rangle \in [1-\alpha; 1). \end{cases} \tag{16}$$

Из определений (15) и (16) следует, что $\Delta F(n) = \Delta N_1(\alpha, n)$. По лемме 1 получаем, что $N_1(\alpha, n) = F(n) = [(n+1)(1-\alpha)] + 1$.

Следствие 1. Справедливо равенство для всех целых $n > 0$:

$$r_1(\alpha, n) = 1 - \alpha + \langle (n+1)\alpha\rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Исходя из леммы 2, выражение (6) для $r_1(\alpha, n)$ примет следующий вид: $r_1(\alpha, n) = [(n+1)(1-\alpha)] + 1 - (1-\alpha)n$. Тогда, имеем, что $r_1(\alpha, n) = 1 - \alpha + \langle (n+1)\alpha\rangle$.

Лемма 3. Справедливы следующие оценки для $r_1(\alpha, n)$ при $n > 0$:

$$\inf_{n, \langle n\alpha\rangle \in [0;1-\alpha)} r_1(\alpha, n) = 1, \quad \sup_{n, \langle n\alpha\rangle \in [0;1-\alpha)} r_1(\alpha, n) = 2 - \alpha,$$

$$\inf_{n, \langle n\alpha\rangle \in [1-\alpha;1)} r_1(\alpha, n) = 1 - \alpha, \quad \sup_{n, \langle n\alpha\rangle \in [1-\alpha;1)} r_1(\alpha, n) = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим два случая.

1. В случае, когда $0 \leqslant \langle n\alpha\rangle < 1-\alpha$, можно записать: $\alpha \leqslant \langle (n+1)\alpha\rangle < 1$. Воспользовавшись следствием 1, можно записать: $1 \leqslant r_1(\alpha, n) < 2 - \alpha$, более того:

$$\sup_{n, \langle n\alpha\rangle \in [0;1-\alpha)} r_1(\alpha, n) = 2 - \alpha, \quad \inf_{n, \langle n\alpha\rangle \in [0;1-\alpha)} r_1(\alpha, n) = 1.$$

2. В случае, когда $1-\alpha \leqslant \langle n\alpha\rangle < 1$, можно записать: $0 \leqslant \langle (n+1)\alpha\rangle < \alpha$. Учитывая условие следствия 1, можно записать: $1 - \alpha \leqslant r_1(\alpha, n) < 1$,

более того:

$$\sup_{n,\langle n\alpha\rangle\in[1-\alpha;1)} r_1(\alpha,n)=1,\ \inf_{n,\langle n\alpha\rangle\in[1-\alpha;1)} r_1(\alpha,n)=1-\alpha.$$

Лемма 4. Справедливо следующее равенство:

$$r_2(\alpha,n)=1-r_1(\alpha,n).$$

Доказательство

Равенство (4), учитывая (6) и (7), можно записать: $\alpha n+r_1(\alpha,n)+(1-\alpha)n+r_2(\alpha,n)=n+1$.

Лемма 5. Верно равенство:

$$x_n-nh_L=l_2+(l_1-l_2)r_1(\alpha,n).$$

Доказательство

Равенство (5) можно переписать в следующем виде: $x_n-nh_L=N_1(\alpha,n)l_1+N_2(\alpha,n)l_2-nh_L$. Учитывая равенства (6), (7) и (9), это выражение перепишем в следующем виде:

$$x_n-nh_L=((1-\alpha)n+r_1(\alpha,n))l_1+(\alpha n+r_2(\alpha,n))l_2-n(l_1(1-\alpha)+l_2\alpha).$$

Отсюда $x_n-nh_L=l_1r_1(\alpha,n)+l_2r_2(\alpha,n)$. Применяя лемму 4 и непосредственно вычисляя получим, что $x_n-nh_L=l_2+(l_1-l_2)r_1(\alpha,n)$.

Доказательство теоремы 3

Определение сильно вкладывающейся решетки можно записать в виде системы неравенств (13). Поэтому, чтобы решетка L сильно вкладывалась в разбиение $Til_\infty(\alpha,l_1,l_2)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} h_0\in(S_2^a-l_1;S_1^a),\\ h_0\in(S_2^b-l_2;S_1^b). \end{cases} \tag{17}$$

Обозначим $I_1^S=(S_2^a-l_1;S_1^a)$ и $I_2^S=(S_2^b-l_2;S_1^b)$. Для разрешения системы (17) необходимо и достаточно выполнения трех условий:

1) $I_1^S \neq \emptyset$, то есть $S_2^a - S_1^a < l_1$;

2) $I_2^S \neq \emptyset$, то есть $S_2^b - S_1^b < l_2$;

3) $I_1^S \cap I_2^S \neq \emptyset$.

Определим функции:

$$r_1^+ = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in [0;1-\alpha)} r_1(\alpha, n), r_1^- = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in [0;1-\alpha)} r_1(\alpha, n),$$

$$r_2^+ = \sup_{n, \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha;1)} r_1(\alpha, n), r_2^- = \inf_{n, \langle n\alpha \rangle \in [1-\alpha;1)} r_1(\alpha, n).$$

Рассмотрим аффинное преобразование $f(x) = \frac{x - l_2}{l_{max} - l_{min}}$ и интервалы $f(I_1^S) = I_1^R$, $f(I_2^S) = I_2^R$. Возможны два случая.

1. При $l_1 > l_2$, воспользовавшись леммой 5, получим:

$$I_1^R = (r_1^+ - \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}; r_1^-), I_2^R = (r_2^+ - \frac{l_2}{l_{max} - l_{min}}; r_2^-).$$

Тогда три условия можно записать так:

1) $I_1^R \neq \emptyset$, то есть $r_1^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}$;

2) $I_2^R \neq \emptyset$, то есть $r_2^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{max} - l_{min}}$;

3) $I_1^R \cap I_2^R \neq \emptyset$, что возможно лишь в случае, когда $r_2^- > r_1^+ - \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}$.

Если теперь применить условия леммы 3, то получим, что

1) $l_1 > (1 - \alpha)(l_{max} - l_{min})$;

2) $l_2 > \alpha(l_{max} - l_{min})$;

3) $l_1 > l_{max} - l_{min}$.

Таким образом, решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} l_1 > l_{max} - l_{min}, \\ l_2 > \alpha(l_{max} - l_{min}). \end{cases} \tag{18}$$

2. При $l_2 > l_1$, воспользовавшись леммой 5, получим:

$$I_1^R = (-r_1^- - \frac{l_1}{l_{max} - l_{min}}; -r_1^+), I_2^R = (-r_2^- - \frac{l_2}{l_{max} - l_{min}}; -r_2^+).$$

Тогда три условия можно записать так:

1) $I_1^R \neq \emptyset$, то есть $r_1^+ - r_1^- < \frac{l_1}{l_{max}-l_{min}}$;

2) $I_2^R \neq \emptyset$, то есть $r_2^+ - r_2^- < \frac{l_2}{l_{max}-l_{min}}$;

3) $I_1^R \cap I_2^R \neq \emptyset$, что возможно лишь в случае, когда $-r_2^+ > -r_1^- - -\frac{l_1}{l_{max}-l_{min}}$. Если теперь применить условия леммы 3, то получим, что

1) $l_1 > (1-\alpha)(l_{max} - l_{min})$;

2) $l_2 > \alpha(l_{max} - l_{min})$;

3) $l_1 > 0$.

Таким образом, решетка L сильно вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} l_1 > (1-\alpha)(l_{max} - l_{min}), \\ l_2 > \alpha(l_{max} - l_{min}). \end{cases} \tag{19}$$

Из систем (18) и (19) вытекает условие теоремы 3.

Теорема 4. *Решетка L вкладывается в разбиение $Til_\infty(\alpha, l_1, l_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$\frac{l_{min}}{l_{max} - l_{min}} > \alpha[l_1 > l_2] + (1-\alpha)[l_2 > l_1].$$

Доказательство

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $l_{max} = l_1$ и $l_{min} = l_2$. Тогда условие вложимости решетки примет следующий вид:

$$\begin{cases} l_1 > l_1 - l_2, \\ l_2 > \alpha(l_1 - l_2). \end{cases} \tag{20}$$

Поскольку первое неравенство системы (20)выполняется всегда, то условие вложимости решетки (20) сводится ко второму неравенству системы, которое можно переписать в следующей форме: $\alpha < \frac{l_2}{l_1 - l_2}$.

2. Пусть $l_{max} = l_2$ и $l_{min} = l_1$. Тогда условие вложимости решетки примет следующий вид:

$$\begin{cases} l_1 > (1-\alpha)(l_2 - l_1), \\ l_2 > \alpha(l_2 - l_1). \end{cases} \tag{21}$$

Рассмотрим второе неравенство из системы. Поскольку в рассматриваемом случае $l_2 > l_1$, то в результате преобразований получим: $\alpha(l_2 - l_1) < \alpha l_2 < l_2$. Поэтому условие вложимости решетки (21) сводится к первому неравенству системы, которое после преобразований примет вид: $1 - \alpha < \frac{l_1}{l_2 - l_1}$.*

Библиографический список

1. *Arnoux P., Berthe V., Ei H., Ito S.* Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions and multidimencional continued fractions // Discrete models: combinatirics, computation and geometry. Paris, 2001. P. 59–78.

2. *N. Pytheas Fogg.* Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Springer, 2002.

3. *Zhuravlev V.G.* One-dimensional Fibonacci tilings and derivatives of two-colour rotations of a circle // Max-Plank-Institut fur Mathematik. Preprint Series. 2004. V.59. P.1–43.

4. *Hecke E.* Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. 1921. V.5. P.54–76.

5. *Красильщиков В.В., Шутов А.В.* Одномерные квазикристаллы: аппроксимация периодическими структурами и вложение решеток// Новейшие проблемы теории поля. Казань, 2006. Т.5. С. 145–154.

6. *Красильщиков В.В., Шутов А.В.* О некоторых свойствах одномерных квазикристаллов// Тез. докл. XVIII Междунар. летней школы-семинара

*Авторы выражают благодарность профессору В.Г. Журавлеву за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные советы.

"Волга"по современным проблемам теоретической и математической физики. Казань, 2006. С. 45–46.
7. *Шутов А.В.* О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т.5, вып. 3. С.112–121.

УДК 539.3+517.4

Т.А. Кузнецова, К.А. Баев, С.В. Чумакова

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Введение

Известно, что при решении нелинейных граничных задач теории тонких оболочек в статическом случае наиболее простыми, в смысле их численной реализации, являются шаговые методы, суть которых заключается в том, что решение нелинейной задачи сводится на каждом шаге к решению линейных уравнений вида:

$$\alpha Aw - T_x(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - T_{xy}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = q \tag{1}$$

с нулевыми условиями на границе Γ области Ω, определяемой срединной поверхностью оболочки, где оператор A либо оператор Лапласа Δ, либо Δ^2, $T_x,\ T_y,\ T_{xy}$ — некоторые непрерывные функции.

Численное решение задачи (1) в случае прямоугольных в плане оболочек, как правило, определяется методом Бубнова–Галеркина. Это связано с тем, что для прямоугольной области Ω легко строится последовательность функций $\{f_n\}$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям и взаимно ортогональных в пространстве $L_2(\Omega)$ (такой системой является система попарных произведений синусов).

В случае области Ω произвольной конфигурации построение соответствующей системы функций вызывает значительные затруднения. Поэтому вместо метода Бубнова–Галеркина используются другие численные методы.

В теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа разработан метод, позволяющий сводить соответствующую граничную задачу для любой области Ω к некоторой граничной задаче для области прямоугольной формы. Этот метод известен в литературе как метод фиктивных областей [1].

В данной работе получен аналог метода фиктивных областей для граничных задач вида (1) в случае, когда оператор, стоящий в левой части уравнения (1), является положительно определенным, что, как показано в [2], соответствует устойчивому состоянию оболочки. Этот метод, сводящий решение граничной задачи (1) в случае оболочки произвольной конфигурации к решению соответствующей задачи для прямоугольной области Ω, авторы также назвали методом фиктивных областей.

Ниже приводится описание и обсуждаются вопросы численной реализации метода.

§1. Метод фиктивных областей для оболочечных конструкций произвольной конфигурации

Рассмотрим граничную задачу

$$\alpha\Delta^2 w - T_x(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - T_{xy}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = g(x,y) \qquad (1.1)$$

$$w|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \bar\eta}\right|_\Gamma = 0, \qquad (1.2)$$

где Γ — граница области D.

Замечание 1. Граничная задача (1.1), (1.2) встает на каждом шаге при решении геометрически нелинейной модели Кирхгофа–Лява жестко закрепленной по краям тонкой оболочки методом последовательного нагружения в статическом случае [3].

Дополним область Ω до прямоугольника D с границей Γ_1. Обозначим через D_1 дополнение Ω до D. В области D рассмотрим новую граничную задачу

$$A_\varepsilon w = \alpha_\varepsilon \Delta^2 w - T_{x,\varepsilon}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_{y,\varepsilon}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - T_{xy,\varepsilon}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = q_\varepsilon, \quad (1.3)$$

где

$$q_\varepsilon = \begin{cases} q, \ (x,y) \in \Omega \\ 0, \ (x,y) \in D_1 \end{cases} \qquad \alpha_\varepsilon = \begin{cases} \alpha, \ (x,y) \in \Omega \\ 0, \ (x,y) \in D_1 \end{cases} \qquad T_{x,\varepsilon} = \begin{cases} T_x, \ (x,y) \in \Omega \\ \frac{1}{\varepsilon^2}, \ (x,y) \in D_1 \end{cases}$$

$$T_{y,\varepsilon} = \begin{cases} T_y, \ (x,y) \in \Omega \\ \frac{1}{\varepsilon^2}, \ (x,y) \in D_1 \end{cases} \qquad T_{xy,\varepsilon} = \begin{cases} T_{xy}, \ (x,y) \in \Omega \\ 0, \ (x,y) \in D_1 \end{cases}$$

с граничными условиями

$$w|_{\Gamma_1} = 0, \qquad w|_{\Gamma} = \varphi_1(x,y), \quad (1.4)$$

где $\varphi_1(x,y)$ — заданная функция, для которой $||\varphi_1(x,y)||_{L_1(\Gamma)} = \varepsilon$.

Пусть $\hat{w}$ — решение задачи (1.3), (1.4) в области D_1 и пусть $\varphi_2(x,y) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \bar{\eta}}\Big|_\Gamma$ — заданная функция. Тогда последнее граничное условие запишется в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\eta}}\Big|_\Gamma = \varphi_2(x,y). \quad (1.5)$$

Таким образом, в области D решается граничная задача (1.3), (1.4), (1.5). По своей постановке эта задача имеет единственное решение w_ε, ограничение которого в области Ω принадлежит пространству Соболева $H^2(\Omega)$, а ограничение в области D_1 принадлежит пространству $H^1(D_1)$. Доказательство этих двух фактов можно найти в [4].

Рассуждения по своей сути, незначительно отличающиеся от рассуждений, приведенных в [5, Гл.2, §7] при обосновании метода фиктивных областей в случае дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа, позволяют доказать следующий результат, отражающий суть метода фиктивных областей.

Теорема. *Решение w_ε задачи (1.3), (1.4), (1.5) приближает решение w задачи (1.1), (1.2) в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$ с точностью до ε, то есть*

$$||w - w_\varepsilon||_{H^2(\Omega)} < c \cdot \varepsilon,$$

где постоянная c не зависит от ε.

Замечание 2. Задача (1.1), (1.2), фигурирующая в теореме 1 предполагает жесткое закрепление краев оболочки. Результат, аналогичный теореме1, имеет место и в случае шарнирного закрепления краев оболочки.

§2. Вопросы численной реализации метода фиктивных областей

Во-первых, нужно определиться с величиной ε, то есть с допустимой точностью решения линеаризованной задачи на каждом шаге соответствующего шагового метода. Ясно, что величина погрешности на каждом шаге будет суммарно влиять на величину погрешности решения нелинейной задачи. Поэтому здесь большую роль играют различные модификации шагового метода, позволяющие существенно уменьшить число шагов при сохранении точности. В этом направлении можно рекомендовать метод усреднения, описанный в работе [6].

Во-вторых, на каждом шаге вместо линейной задачи вида (1.1), (1.2) решается линейная задача (1.3), (1.4), (1.5). Эта задача решается методом Бубнова–Галеркина. В случае прямоугольной области со сторонами

a и b в качестве системы функций, ортогональных в пространстве $L_2(D)$ и удовлетворяющих нулевым граничным условиям, выбираются функции

$$f_{n,m} = \sin\frac{2\pi nx}{a}\sin\frac{2\pi ny}{b}. \tag{1.6}$$

Решение w_ε задачи (1.3), (1.4), (1.5) ищется в виде ряда по системе функций (1.6).

Отметим, что шаговые методы при решении нелинейных задач работают только в области устойчивости параметров.

В данной работе мы не будем останавливаться на вопросах, связанных с эффективными методами определения области устойчивости параметров.

Библиографический список

1. *Саульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.

2. *Кузнецов В.Н.* Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций: Дис. ... д-ра техн. наук. Саратов, 2000.

3. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1975.

5. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

6. *Чумакова С.В., Пшенов Д.А., Шабанов Л.Е.* К вопросу улучшения сходимости метода В.В. Петрова — метода последовательного возмущения параметров // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. техн. ун-та, 2002.

УДК 511.3+517.5

В.Н. Кузнецов, Е.В. Сецинская

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ АДАМАРА ОБ УМНОЖЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ

В данной работе доказывается утверждение, которое является обобщением теоремы Адамара об умножении особенностей, имеющей место для степенных рядов с изолированными особенностями на границе сходимости (напр., [1]), а также приводится следствие из него, которое играет важную роль при частичном решении задачи о целостности композита L-функций Дирихле числовых полей.

Пусть степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

можно представить в виде

$$g(z) = R(z) + \widetilde{g}(z)$$

где $R(z)$ — рациональная функция, полюсы которой располагаются на единичной окружности, а $\widetilde{g}(z)$ имеет конечные радиальные производные любого порядка в точках единичной окружности отличных от полюсов рациональной функции $R(z)$. Пусть, далее, для производной m-го порядка функции $g(z)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ найдется такой полином $P_{k_m}(z)$, нули которого совпадают с полюсами функции $R(z)$, что функция $g(z) \cdot P_{k_m}(z)$ ограничена в единичном круге. Класс степенных рядов, определяемый таким образом, обозначим через $\mathfrak{M}$.

Пусть $g_1(z)$ и $g_2(z)$ принадлежат классу $\mathfrak{M}$, то есть

$$g_1(z) = R_1(z) + \widetilde{g}_1(z), \quad g_2(z) = R_2(z) + \widetilde{g}_2(z), \tag{1}$$

где $R_1(z), R_2(z)$ — рациональные функции, полюсы которых располагаются на единичной окружности, а $\widetilde{g}_1(z)$ и $\widetilde{g}_2(z)$ имеют конечные радиальные производные любого порядка в точках единичной окружности, отличных от полюсов соответствующих рациональных функций.

Докажем утверждение, которое имеет место для скалярного произведения таких степенных рядов.

Теорема 1. *Пусть ряды* $g_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ *и* $g_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ *принадлежат классу* $\mathfrak{M}$. *Причем*

$$g_1(z) = R_1(z) + \widetilde{g}_1(z), \qquad g_2(z) = R_2(z) + \widetilde{g}_2(z).$$

Тогда их скалярное произведение (композит)

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

определяет функцию, которая в точках единичной окружности, отличных от попарных произведений полюсов функций $R_1(z)$ *и* $R_2(z)$, *имеет конечные радиальные производные вида*

$$\lim_{r \to 1-0} g^{(n)}(re^{i\varphi}), \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть степенные ряды $g_1(z)$ и $g_2(z)$ принадлежат классу $\mathfrak{M}$ и пусть $\sigma_{n,1}(z)$ и $\sigma_{n,2}(z)$ — арифметические средние частичных сумм степенных рядов $\widehat{g}_1(z) = g_1(z)P_{n_1}(z)$ и $\widehat{g}_2(z) = g_2(z)P_{n_2}(z)$ соответственно, где $P_{n_1}(z)$ и $P_{n_2}(z)$ — такие многочлены, что $\widehat{g}_1(z)$ и $\widehat{g}_2(z)$ ограничены в единичном круге. Тогда для любого z, $|z| < 1$, и любого $m \leqslant n$ для значения в нуле производной m-го порядка функции

$$f_n(u) = \sigma_{n,1}(u) \cdot \sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right) u^n$$

имеет место оценка

$$\left| f_n^{(m)}(0) \right| \leqslant c \cdot m!, \tag{2}$$

где константа c не зависит от n, m и z.

Доказательство

Известно [2, гл. VII, раздел 7.7.2], что арифметические средние частичных сумм степенного ряда, ограниченного в единичном круге константой M, удовлетворяют оценке

$$|\sigma_n(z)| < A \cdot M,$$

где A — абсолютная константа. Отсюда следует, что

$$|\sigma_{n,1}(u)| < c_1, \tag{3}$$

где константа c_1 не зависит от n. Аналогично, при $|z| < |u| < 1$, имеем

$$\left|\sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\right| < c_2, \tag{4}$$

где константа c_2 не зависит от n и z. Из оценок (3) и (4) следует, что для полинома

$$f_n(u) = \sigma_{n,1}(u) \cdot \sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right) u^n$$

при всех u, $|z| < |u| < 1$, имеет место оценка

$$|f_n(u)| < c_3, \tag{5}$$

где константа c_3 не зависит от n и z.

Из (5) в силу неравенства Коши для коэффициентов $a_k^{(n)}$ многочлена $f_n(u)$ имеем оценку

$$|a_k^{(n)}| \leqslant \frac{c_3}{r^k}, \tag{6}$$

где r — любое число, меньшее чем 1.

Возьмем для каждого k значение $r = 1 - \frac{1}{k}$. Тогда из условия (6) получаем

$$|a_k^{(n)}| < c_4, \tag{7}$$

где константа c_4 не зависит от n, z и k.

Учитывая тот факт, что

$$f_n^{(m)}(0) = m! \cdot a_m^{(n)}, \tag{8}$$

и оценку (7) для величины $f_n^{(m)}(0)$, получаем оценку (2), что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1

Покажем, что функция $g(z)$ имеет конечные радиальные производные во всех точках единичной окружности, отличных от точек $\alpha_i\beta_j$, где α_i — полюсы функции $R_1(z)$, а β_j — полюсы функции $R_2(z)$.

С этой целью сначала покажем, что при подходе к обычным граничным точкам вдоль радиального направления функция $g(z)$ ограничена константой, не зависящей от точек, лежащих на этом направлении. Пусть z — произвольная точка, $|z| > r_0 > 0$, лежащая на таком направлении. Достаточно показать, что для всех $n \geqslant n_0$, где n_0 зависит от z, для частичных сумм $S_n(z)$ разложения в ряд функции $g(z)$ имеет место неравенство

$$|S_n(z)| < M, \tag{9}$$

где константа M не зависит от n и выбора точки z на этом направлении.

Пусть $S_{n,1}$ и $S_{n,2}$ — частичные суммы рядов $g_1(z)$ и $g_2(z)$ соответственно. Тогда их композит будет частичной суммой $S_n(z)$ степенного ряда $g(z)$. Хорошо известно [2], глава IV, раздел 4.6, что для $S_n(z)$ имеет место интегральная формула

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C S_{n,1}(u) S_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\frac{du}{u}, \tag{10}$$

где контур C — окружность, внутри которой лежит точка z и радиус которой меньше единицы.

Запишем представление (10) в виде

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{S_{n,1}(u)\cdot P_{n_1}(u)\cdot S_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\cdot P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)\cdot u^{n+n_2}}{P_{n_1}(u)\cdot P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)\cdot u^{n+n_2+1}} du. \tag{11}$$

Заметим, что $S_{n,1}(u)\cdot P_{n_1}(u)$ и $S_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\cdot P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)$ — частичные суммы степенных рядов функций $g_1(u)P_{n_1}(u)$ и $g_2\left(\frac{z}{u}\right)P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)$ соответственно. Обозначим через $\sigma_{n,1}(u)$ и $\sigma_{n,2}(u)$ арифметические средние этих частичных сумм.

Пусть n_0 таково, что для всех $n \geqslant n_0$ и всех u, принадлежащих контуру C, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &1)\, |g_1(u) - S_{n,1}(u)| < \varepsilon, && |g_2(u) - S_{n,2}(u)| < \varepsilon; \\ &2) \left| \frac{g_1(u) P_{n_1}(u) - \sigma_{n,1}(u)}{P_{n_1}(u)} \right| < \varepsilon, && \left| \frac{g_2\left(\frac{z}{u}\right) P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right) - \sigma_{n,2}(u)}{P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)} \right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

В силу (12) для оценки интеграла вида (11) достаточно оценить интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\sigma_{n,1}(u) \cdot \sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right) \cdot u^{n+n_2}}{P_{n_1}(u) \cdot P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right) \cdot u^{n+n_2+1}} du. \tag{13}$$

Оценим последний интеграл, используя при этом теорему о вычетах.

Подынтегральная функция интеграла (13) является мероморфной функцией, полюсы которой находятся в точках $u = 0$ и $u_i = \frac{z}{\beta_i}$, где β_i — нули полинома $P_{n_2}(u)$. Оценим вычет подынтегральной функции в точке $u = 0$ и покажем, что он ограничен константой, которая не зависит от n и z. С этой целью разложим рациональную функцию

$$\frac{1}{P_{n_1}(u) \cdot P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)}$$

в сумму простейших

$$\frac{1}{P_{n_1}(u) \cdot P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{A_{ji}}{(u - \alpha_j)^{\nu_{ji}}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{t_j} \frac{B_{ij}}{\left(u - \frac{z}{\beta_i}\right)^{k_{ij}}}.$$

Тогда вычет подынтегральной функции интеграла (13) в точке $u = 0$ будет равен конечной сумме вычетов вида

$$res_{u=0} \left[\frac{\left(\sigma_{n,1}(u) \cdot \sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right) \cdot u^{n+n_2}\right) \cdot \frac{1}{(u-\alpha_j)^{\nu_{ij}}}}{u^{n+n_2+1}} \right] \tag{14}$$

и

$$res_{u=0} \left[\frac{\left(\sigma_{n,1}(u) \cdot \sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right) \cdot u^{n+n_2}\right) \cdot \frac{1}{\left(u-\frac{z}{\beta_i}\right)^{k_{ij}}}}{u^{n+n_2+1}} \right]. \tag{15}$$

Но вычет вида (15) равен

$$\frac{1}{(n+n_2)!}\left[\left(\sigma_{n,1}(u)\cdot\sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\cdot u^{n+n_2}\right)\cdot\frac{1}{\left(u-\frac{z}{\beta_i}\right)^{k_{ij}}}\right]^{(n+n_2)}\Bigg|_{u=0}. \qquad (16)$$

В силу леммы 1 и того факта, что

$$\left|\left(\frac{1}{\left(u-\frac{z}{\beta_i}\right)^{k_{ij}}}\right)^{(l)}\right|_{u=0}\leqslant\left|\frac{\beta_i}{z}\right|^{l+k_{ij}}$$

модуль производной m-порядка (16) не превосходит следующей величины:

$$\frac{c}{(n+n_2)!}\sum_{m=0}^{n+n_2}C_{n+n_2}^m m!\left|\frac{\beta_i}{z}\right|^{n+n_2-m}=c\cdot\sum_{m=0}^{n+n_2}\frac{1}{(n+n_2-m)!\cdot r^{n+n_2-m}},$$

где $r=|z|$ и константа c не зависит от n и z. Ясно, что при $r>\frac{1}{2}$ имеет место оценка

$$\sum_{m=0}^{n+n_2}\frac{1}{(n+n_2-m)!\cdot r^{n+n_2-m}}<c_1,$$

где константа c_1 не зависит от n и z. Таким образом, вычет подынтегральной функции интеграла (13) ограничен константой, независящей от n и z.

Оценим теперь вычет подынтегральной функции интеграла (13) в точке $u_i=\frac{z}{\beta_i}$. Этот вычет равен конечной сумме вычетов вида

$$res_{u=\frac{z}{\beta_i}}\left[\frac{\sigma_{n,1}(u)\cdot\sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\left(\frac{1}{P_{n_1}(u)}\cdot\frac{1}{\widehat{P}_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)}\right)}{\left(u-\frac{z}{\beta_i}\right)^{k_{ij}}}\right], \qquad (17)$$

где

$$\widehat{P}_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)=\frac{P_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)}{\left(u-\frac{z}{\beta_i}\right)^{k_{ij}}}.$$

Но вычет (17) равен

$$\frac{1}{k_{ij}!}\left[\sigma_{n,1}(u)\cdot\sigma_{n,2}\left(\frac{z}{u}\right)\left(\frac{1}{P_{n_1}(u)}\cdot\frac{1}{\widehat{P}_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)}\right)\right]^{(k_{ij})}\Bigg|_{u=\frac{z}{\beta_i}}. \tag{18}$$

В силу формулы Лейбница выражение (18) является конечной суммой попарных произведений производных вида

$$\sigma_{n,1}^{(m_1)}\left(\frac{z}{\beta_i}\right)\cdot\sigma_{n,2}^{(m_2)}(\beta_i)\cdot\left(\frac{1}{P_{n_1}(u)}\cdot\frac{1}{\widehat{P}_{n_2}\left(\frac{z}{u}\right)}\right)^{(m_3)}\Bigg|_{u=\frac{z}{\beta_i}}, \tag{19}$$

где $m_1\leqslant k_{ij}$, $m_2\leqslant k_{ij}$, $m_3\leqslant k_{ij}$.

Если $z\to z_0$ вдоль радиального направления и $z_0\neq\alpha_j\beta_i$, где α_j — нули многочлена $P_{n_1}(u)$, то каждый из трех сомножителей произведения (19) ограничен константой, не зависящей от n и z (z — вдоль этого направления). Когда z стремится к z_0 вдоль радиального направления и $n\to\infty$, то

$$\sigma_{n,1}^{(m_1)}\left(\frac{z}{\beta_i}\right)\to\left(g_1\left(\frac{z}{\beta_i}\right)P_{n_1}(z)\right)^{(m_1)}\Bigg|_{z=z_0},$$

и в силу регулярности $\sigma_{n,2}(u)$ в окрестности точки $u=\beta_i$ имеем

$$\sigma_{n,2}^{(m_2)}(\beta_i)=\lim_{u\to\beta_i}\sigma_{n,2}^{(m_2)}(u).$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n,2}^{(m_2)}(u)=(g_2(u)P_{n_2}(u))^{(m_2)}.$$

Но по определению, когда u стремится к β_i вдоль радиального направления, имеет место равенство

$$g_2(u)P_{n_2}(u)=P_{n_2}(u)\left(\frac{A}{(u-\beta_i)^{k_i}}+\widetilde{g}_2(u)\right)=\widehat{P}_{n_2}(u)+P_{n_2}(u)\widetilde{g}_2(u),$$

где $\widetilde{g}_2(u)$ имеет ограниченные радиальные производные любого порядка в точке β_i.

Таким образом, при $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство (9), что доказывает ограниченность функции $g(z)$, когда $z \to z_0$ вдоль радиального направления, где z_0 отлична от точек $\alpha_j \cdot \beta_i$.

Докажем аналогичное утверждение для производных любого порядка функции $g(z)$.

С этой целью покажем, что

$$g^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C g_1(u) g_2^{(m)}\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u^{m+1}}. \tag{20}$$

Действительно, пусть

$$g_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \qquad g_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n.$$

Тогда

$$g_2\left(\frac{z}{u}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{u^n},$$

$$g_2'\left(\frac{z}{u}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n n \frac{z^{n-1}}{u^{n-1}},$$

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n n z^n.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C g_1(u) g_2'\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n n z^{n-1}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{g_1(u)}{u^{n+1}} du = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = g'(z).$$

Повторив эти рассуждения $(m-1)$ раз, получим формулу (20).

Формула (20) показывает, что для доказательства ограниченности функции $g^{(m)}(z)$, когда z стремится вдоль радиального направления к точке z_0, лежащей на единичной окружности и отличной от точек $\alpha_j \cdot \beta_i$, проходят все рассуждения, проведенные выше для доказательства подобного факта для функции $g(z)$. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось заметить, что из ограниченности производной функции

$f(z)$ при $z \to z_0$ вдоль радиального направления следует существование конечного предела

$$\lim_{z\to z_0} f(z),$$

где $z \to z_0$ вдоль радиального направления. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

В работах [3,4] было показано, что ряд Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it$$

тогда и только тогда продолжим целым образом на комплексную плоскость, когда соответствующий ему степенной ряд $g(z)$ имеет конечные радиальные производные в точке $z = 1$, то есть существуют конечные пределы вида

$$\lim_{r\to 1-0} g^{(n)}(re^{i\varphi}), \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Как следствие теоремы 1, получается следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Пусть ряды Дирихле*

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

определяют степенные ряды $g_1(z)$ и $g_2(z)$, принадлежащие классу $\mathfrak{M}$. Причем точка $z = 1$ не принадлежит множеству $\{\alpha_i \cdot \beta_j\}$, где α_i — полюсы функции $R_1(z)$, а β_j — полюсы функции $R_2(z)$. Тогда скалярное произведение (композит) этих рядов Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^s}$$

определяет целую функцию.

Библиографический список

1. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.

2. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

3. *Кузнецов В.Н.* Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. С. 17–23.

4. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания одного класса рядов Дирихле, определяющих целые функции // Вычислительные методы и программирование: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 63–72.

УДК 511.3

В.Н. Кузнецов, Т.А. Кузнецова, Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок

О РЯДАХ ДИРИХЛЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПОРЯДКОМ РОСТА МОДУЛЯ

Известно [1], что классические L-функции с неглавными характерами в классе эйлеровских произведений с конечнозначными коэффициентами определяются как целые функции, модуль которых удовлетворяет условию

$$|f(s)| < e^{|s| \ln |s| + A|s|}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где A — некоторая положительная константа и $\sigma > 1$.

В [2] было доказано, что для того чтобы ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 1, \tag{2}$$

удовлетворяющий (1) определял целую функцию, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

определял функцию, регулярную в точке $z = 1$.

Последнее утверждение дает аналитическую характеристику классических L-функций Дирихле в классе эйлеровских произведений с произвольными коэффициентами, выраженную в терминах соответствующих степенных рядов.

В данной статье получен аналогичный результат для L-функций Дирихле и L-функций Гекке числовых полей.

Итак, пусть k — числовое поле, то есть расширение конечной степени поля рациональных чисел.

Пусть $\mathcal{O} \subset k$ — кольцо целых чисел и $\mathfrak{M}$ — некоторый идеал кольца $\mathcal{O}$.

Обозначим через I группу идеалов поля k, $I_{\mathfrak{M}}$ — группу идеалов, взаимно простых с $\mathfrak{M}$, $H \subset I$ — подгруппу главных идеалов (α), где $\alpha \equiv 1 (mod \mathfrak{M})$.

Напомним, что характером Дирихле модуля $\mathfrak{M}$ поля k называется такая комплекснозначная функция χ, определенная на группе I и удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\chi(\mathfrak{A}) = 0 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) \neq 1$;

(ii) $\chi(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \chi(\mathfrak{A}_1) \cdot \chi(\mathfrak{A}_2)$;

(iii) для любого $a \in k, \quad a \equiv 1 (\mod \mathfrak{M}) : \quad \chi((a)) = 1$.

Характером Гекке модуля $\mathfrak{M}$ называется такая комплекснозначная функция χ, определлнная на группе I и для которой имеют место условия:

(i) $\chi(\mathcal{O}) = 1$;

(ii) $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = 1$;

(iii) $\chi(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) = \chi(\mathfrak{A}_1) \cdot \chi(\mathfrak{A}_2)$;

(iv) $(\exists\, \vartheta \in Z[G])\ (\forall\, \alpha \in \mathcal{O}) \quad \alpha \equiv 1\ (mod\, \mathfrak{M}) \Rightarrow \chi((\alpha)) = \alpha^{\vartheta}$;

(v) $(\exists\, m \in \mathbb{Z})\ (\forall\, \sigma \in G) \quad n_\sigma + n_{j\sigma} = m$.

Здесь поле k является CM-полем, то есть оно является вполне комплексным расширением некоторого вполне вещественного подполя k_0. При этом $k \supset \mathbb{Q}$ — нормальное расширение с группой Галуа G.

В условии (iv) $Z[G]$ — групповое кольцо группы Галуа G, которое действует на поле k следующим образом: $\vartheta \sum\limits_{\sigma \in G} n_\sigma \sigma \in Z[G], \quad \alpha \in k$:

$$\alpha^{\vartheta} = \prod_{\sigma \in G} (\alpha^{\sigma})^{n_\sigma}\,.$$

Можно показать, что условие (v) эквивалентно условию $(1 + j)\vartheta = = mN$, где число m называется весом характера χ, при этом если $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = 1$, то $|\chi(\mathfrak{A})| = N(\mathfrak{A})^{\frac{m}{2}}$.

Характер $\hat{\chi}: \quad \hat{\chi}(\mathfrak{A}) = \frac{\chi(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^{\frac{m}{2}}}$ называется нормированным характером Гекке.

Замечание 1. Хорошо известно [3], что $I_{\mathfrak{M}}/H_{\mathfrak{M}}$ — конечная группа и, следовательно, характер Дирихле χ поля k — конечнозначная функция. В отличие от характеров Дирихле характер Гекке не является конечнозначной функцией.

Рассмотрим L-функцию числового поля k:

$$L(s, \chi, k) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(F(\wp))}{N(\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{4}$$

где произведение берется по всем простым идеалам поля k; χ — характер Дирихле или нормированный характер Гекке, в зависимости от чего данная L-функция называется L-функцией Дирихле или L-функцией Гекке числового поля.

Известно [4,5], что L-функции Дирихле и L-функции Гекке в случае неглавных характеров продолжаются на всю комплексную плоскость как целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению:

$$\Phi(s,\chi) = c_1 \Phi(1-s,\bar{\chi}), \tag{5}$$

где

$$\Phi(s,\chi) = c_2 \cdot \prod_{q=1}^{r_1} \Gamma\left(\frac{s+a_q}{2}\right) \cdot \Gamma(s)^{r_2} \cdot L(s,\chi,k),$$

где $c_1,\ c_2$ — константы, $r_1,\ r_2$ — соответственно число вещественных и комплексных нормирований поля k, $a_q = 1$ или 1.

В силу функционального уравнения (5) можно показать, что L-функция поля k (4) в случае неглавного характера χ продолжима на комплексную плоскость как целая функция первого порядка $f(s)$, модуль которой в левой полуплоскости удовлетворяет условию

$$|f(s)| = O(e^{k|s|\ln|s| + A|s|}), \tag{6}$$

где $k = r_1 + r_2$, A — некоторая положительная константа.

Замечание 2. Получение оценки (6) аналогично получению оценки (1).

Таким образом, в теории L-функций числовых полей встает задача описания рядов Дирихле (2), которые определяют целые функции, модуль которых в левой полуплоскости удовлетворяет условию (6). В этом направлении доказан следующий результат.

Теорема 1. *Ряд Дирихле тогда и только тогда определяет целую функцию с условием роста модуля*

$$|f(-n)| = O(e^{kn\ln n + An}), \qquad k \geqslant 1, \tag{$*$}$$

где k — некоторая положительная константа, не зависящая от n, когда соответствующий степенной ряд $g(z)$ имеет в точке $z=1$ конечные радиальные производные вида $\alpha_n = \lim\limits_{x\to 1-0} g^{(n)}(x)$, для которых выполняется условие

$$|\alpha_n| = O(e^{kn\ln n + An}). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Ясно, что выполнение условия (7) для $\alpha_n = \lim\limits_{x\to 1-0} g^{(n)}(x)$ эквивалентно выполнению условия для $\hat{\alpha}_n = \lim\limits_{x\to 0+0} g^{(n)}(e^{-x})$. Действительно, $\alpha_n = \pm\hat{\alpha}_n$. В свою очередь, как показано в [6],

$$g^{(n)}(e^{-x}) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \psi_n(s)x^{-s}ds, \quad c_1 = c+n,$$

где $\psi_n(s) = f(s-n)\Gamma(s-n)(s-n+1)\dots(s-1)s$. Тогда, применяя метод контурного интегрирования, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \psi_n(s)x^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \psi_n(s)x^{-s}ds + \sum_{j=0}^{k}\gamma_j^{(n)}x^j,$$

где γ — контур, состоящий из дуги полуокружности с центром в точке $s=0$ радиуса R:

$$s = Re^{i\varphi}, \qquad \frac{3\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и соответствующих бесконечных участков мнимой оси. В этой формуле

$$\gamma_j^{(n)} = res_{s=-j}\psi(s), \qquad j=\overline{0,k}, \qquad k<R<k+1.$$

Обозначим контур дуги полуокружности через γ_R, а оставшийся участок контура — через γ_1. Тогда

$$\int\limits_{\gamma}\psi_n(s)x^{-s}ds = \int\limits_{\gamma_1}\psi_n(s)x^{-s}ds + \int\limits_{\gamma_R}\psi_n(s)x^{-s}ds. \tag{8}$$

Оценим первое слагаемое в представлении (8). При любом $x>0$ имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_1}\psi_n(s)x^{-s}ds\right| \leqslant c\int\limits_{R}^{\infty} e^{-\alpha t}dt = ce^{-\alpha R}.$$

Таким образом, при достаточно большой величине R выполняется оценка

$$\left|\int\limits_{\gamma_1}\psi_n(s)x^{-s}ds\right| \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Оценим второе слагаемое, стоящее в левой части формулы (8). При $0 < x < 1$ имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \psi_n(s) x^{-s} ds\right| \leqslant \left|\int\limits_{\gamma_R} \left[\psi_n(s) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}\right] x^{-s} ds\right| + \left|\int\limits_{\gamma_R} \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}\right] x^{-s} ds\right|.$$

Обозначим

$$\Phi_n(s) = \psi_n(s) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}.$$

Ясно, что функция $\Phi_n(s)$ регулярна внутри и на границе круга радиуса R с центром в точке $s = 0$. Следовательно, [6, лемма 1.2] существует полином вида

$$T_{N,n}(s) = \sum_{R<k\leqslant N} \frac{c_k^{(n)}}{s+k},$$

для которого выполняется оценка

$$\max_{s\in\gamma_R} |\Phi_n(s) - T_{N,n}(s)| < \varepsilon.$$

Тогда, в силу леммы 1.3 из [6], получаем при $0 < x < 1$ следующую оценку:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \Phi_n(s) x^{-s} ds\right| \leqslant \left|\int\limits_{\gamma_R} \left[\Phi_n(s) - T_{N,n}(s)\right] x^{-s} ds\right| + \left|\int\limits_{\gamma_R} T_{N,n}(s) x^{-s} ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{\gamma_R} \left|x^{-s}\right| ds + \sum_{R<k\leqslant N} c_k^{(n)} \int\limits_{\gamma_R} \left|\frac{x^{-s}}{s+k}\right| ds \leqslant \frac{c}{\ln x}.$$

Таким образом, получили, что при $0 < x < 1$ и $x \to 0$

$$\int\limits_{\gamma_R} \Phi_n(s) x^{-s} ds \to 0. \tag{10}$$

Аналогично, имеем при $0 < x < 1$ и $x \to 0$

$$\int\limits_{\gamma_R} \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}\right] x^{-s} ds \to 0. \tag{11}$$

Тогда из условий (10) и (11) для функции

$$\psi_n(s) = \Phi_n(s) + \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}$$

выполняется условие ($0 < x < 1$): при $x \to 0$

$$\int\limits_{\gamma_R} \psi_n(s) x^{-s} ds \to 0. \tag{12}$$

Итак, получаем

$$\lim_{x\to 0+0} \left(g(e^{-x})\right)^{(n)} = (-1)^n \gamma_0^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда имеем $\gamma_0^{(n)} = Res_{s=0}\psi_n(s)$ откуда

$$|\alpha_n| = |(-1)^n| \cdot |Res_{s=0} f(s-n)\Gamma(s-n)(s-n)\ldots(s-1)s| =$$

$$= \frac{|f(-n)|}{n!} \cdot n! = |f(-n)|.$$

Последнее равенство в силу (*) завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 3. Можно показать, что оценка (*) имеет место для любого $s = \sigma + it, \quad \sigma < 0$. Доказательство этого факта весьма громоздко и в данной работе не приводится.

Библиографический список

1. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле //Мат. заметки. 1984. Т. 36, вып. 6.

2. *Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 3.

3. *Ленг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1966.

4. *Hecke E.* Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Bezehungen zur Verteilung der Primzahlen // Math. Z. 1920. №6.

5. *Hecke E.* Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen // Math. Ann. 1926. №97.

6. *Сецинская Е.В.* Граничное поведение степенных рядов, отвечающих L-функциям числовых полей: Дис.... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.

УДК 681.3.06

А.В. Месянжин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОИСКА ЛИНЕЙНОГО БАЗИСА ФАКТОРА ПОЛИНОМИАЛЬНОГО КОЛЬЦА ПО НУЛЬМЕРНОМУ ИДЕАЛУ С ПОМОЩЬЮ НЕСТАНДАРТНЫХ БАЗИСОВ ГРЁБНЕРА[1]

C-делимость мономов

Обозначим $\mathbb{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ –множество независимых переменных, $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ – множество неотрицательных целых чисел.

Мономом от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется формальное произведение неотрицательных степеней переменных: $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Для монома $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ определим его полную степень $\deg(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ и степень по i-той переменной $\deg_i(u) = \alpha_i$.

Для упрощения записи введем мультистепенное обозначение монома:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}.$$

Пусть $\mathbb{M} = \{x^\alpha \ : \ \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\}$ – мультипликативный моноид мономов от переменных $\mathbb{X}$, изоморфный аддитивному моноиду $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, где ассоциативная операция для $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ – стандартное векторное сложение, и соответ-

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования РФ (проект НШ-6649.2006.2)

ствующая ей операция для $\mathbb{M} : x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. Нейтральным элементом соответственно будет $1_{\mathbb{M}} = x^0$.

Введем отношение частичного порядка $\ll$ на множестве $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$:

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})\ \alpha \ll \beta \Leftrightarrow (\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n)\ \alpha_i \leqslant \beta_i,$$

а изоморфно соответствующее ему отношение $|$ на мономах будем называть отношением делимости:

$$x^\alpha | x^\beta \Leftrightarrow \alpha \ll \beta.$$

Рассмотрим строго убывающие линейные цепи частично упорядоченного по отношению делимости множества $\mathbb{M}$.

Для монома $m \in \mathbb{M}$ определим множества $C_i(m) \subset \mathbb{M}$, обладающие следующими свойствами:

$$(\forall\ C_i(m))\ 1_{\mathbb{M}} \in C_i(m), \quad (1)$$

$$(\forall\ C_i(m))\ (\forall u \in C_i(m))\ u|m, \quad (2)$$

$$(\forall\ C_i(m))\ (\forall u, v \in C_i(m))(u|v \vee v|u), \quad (3)$$

$$(\forall\ C_i(m))\ (\forall u \in C_i(m), \deg(u) > 0)(\exists v \in C_i(m)) \deg(v) = \deg(u) - 1. \quad (4)$$

Очевидно, что множества $C_i(m)$ являются убывающими от m до $1_{\mathbb{M}}$ линейными цепями относительно отношения делимости. Также очевидно, что для произвольного монома m, удовлетворяющего условию $(\exists s \neq t, \deg_s(m) > 0, \deg_t(m) > 0)$, существует несколько различных цепей $C_i(m)$.

Введем правило выбора, ставящее в соответствие моному $m \in \mathbb{M}$ единственную цепь $C(m)$ из множества цепей $\{C_i(m)\}_i$, обладающее следующими свойствами:

$$(\forall m \in \mathbb{M})(\exists u \in \mathbb{M}, u \neq m)\ m \in C(u), \tag{5}$$

$$(\forall m \in \mathbb{M}, m \neq 1_{\mathbb{M}})(\forall v \in C(m), v \neq m)\ C(v) \subset C(m). \tag{6}$$

Это правило выбора определяет сужение бинарного отношения делимости на мономах $|$ до некоторого бинарного отношения $|_C$, также являющегося частичным порядком, будем называть его C-делимостью:

$$(\forall u, v \in \mathbb{M})\ v|_C u \Leftrightarrow v \in C(u).$$

Ориентированный граф, задаваемый на множестве $\mathbb{M}$ отношением $|_C$, будет деревом с корнем в $1_{\mathbb{M}}$, а цепи $C(m)$ представляют на графе ветвь от корня до узла m. Обозначим это дерево через $T_{(\mathbb{M},\ |_C)}$.

Если $v|_C u$, то моном v будем называть C-делителем для монома u. Отношение $|_C$ для каждого монома $m \in \mathbb{M}$ задает разбиение переменных $\mathbb{X}$ на два класса:

$$\mathbb{X} = \{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_i\ :\ m|_C x_i m\}\ \cup\ \{x_i\ :\ m \nmid_C x_i m\}.$$

Обозначим $\mathbb{X}_C(m) = \{x_i\ :\ m|_C x_i m\}$ – множество C-мультипликативных переменных для монома m, $\mathbb{X}_{NC}(m) = \mathbb{X} - \mathbb{X}_C(m)$ – множество C-немультипликативных переменных для монома m.

Отсюда имеем иной способ задания отношения C-делимости, а именно для всех мономов $m \in \mathbb{M}$ задав разбиения переменных $\mathbb{X} = \mathbb{X}_C(m) \cup$ $\cup \mathbb{X}_{NC}(m)$, $\mathbb{X}_C(m) \cap \mathbb{X}_{NC}(m) = \emptyset$, удовлетворяющие условиям:

$$\mathbb{X}_C(1_{\mathbb{M}}) = \mathbb{X}, \tag{7}$$

$$(\forall u \in \mathbb{M})\ \ \mathrm{card}(\mathbb{X}_C(u)) \geqslant 1, \tag{8}$$

$$(\forall m \in \mathbb{M}, m \neq 1_{\mathbb{M}})(\exists u \in \mathbb{M}, u|m)(\exists x_i \in \mathbb{X}_C(u))\ m = x_i u, \tag{9}$$

$$(\forall u, v \in \mathbb{M})(\forall x_i \in \mathbb{X}_C(u),\ x_j \in \mathbb{X}_C(v))\ x_i u = x_j v \Rightarrow u = v. \tag{10}$$

Здесь (7)—(9) задают существование цепи от $1_{\mathbb{M}}$ до произвольного монома $m \in \mathbb{M}$, (10) – гарантирует единственность такой цепи.

Для $m \in \mathbb{M}$ рассмотрим множество $T(m) = \{u \in \mathbb{M}\ \ :\ \ m|_C u\}$. Это множество задает поддерево с корнем в узле m дерева $T_{(\mathbb{M},\ |_C)}$. При изоморфизме моноидов $\mathbb{M}$ и $\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ образ $T(m)$, очевидно, представляет дискретный конус.

Пусть для некоторых $u, v \in \mathbb{M}$ выполняется $T(u) \cap T(v) \neq \emptyset$. Тогда:

$$(\exists w \in T(u) \cap T(v)) \Rightarrow u|_C w \wedge v|_C w \Rightarrow u \in C(w) \wedge v \in C(w),$$

тогда по (3) и (6) имеем:

$$u|_C v \vee v|_C u \Rightarrow T(v) \subseteq T(u) \vee T(u) \subseteq T(v).$$

Таким образом, мы получили:

1. Бинарное отношение частичного порядка $|_C$, являющееся сужением отношения делимости на мономах;
2. Для каждого $m \in \mathbb{M}$ построенное в соответствии с $|_C$ множество $T(m) = \{u \in \mathbb{M} \ : \ m|_C u\}$ является дискретным конусом;
3. $T(u) \cap T(v) \neq \emptyset \Longrightarrow T(v) \subseteq T(u) \vee T(u) \subseteq T(v)$.

А бинарное отношение, удовлетворяющее этим трем пунктам, согласно [4, 5], является отношением глобальной инволютивной делимости. (Множество $T(m)$ в обозначениях, введенных Гердтом и Блинковым, представляется как $mL(m)$) Таким образом, мы получили альтернативное определение глобального инволютивного деления, введенное через понятие цепей делителей. Так как $|_C$ – отношение инволютивной делимости, то мы можем для него привлекать результаты теории инволютивных делений, в частности, при построении инволютивного базиса полиномиального идеала.

Пример 1. *В качестве примера рассмотрим отношение C-делимости, удовлетворяющее условию*

$$(\forall u, v \in \mathbb{M}) \ \mathbb{X}_C(uv) = \mathbb{X}_C(u) \cap \mathbb{X}_C(v). \tag{11}$$

В этом случае возможно конструктивное построение отношения $|_C$. Из (5), (6) *и* (11) *следует, что:*

$$(\forall u, v \in \mathbb{M}, \ v|_C u) \ \mathbb{X}_C(u) \subseteq \mathbb{X}_C(v).$$

Очевидно, что для построения отношения $|_C$, удовлетворяющего условию (11), достаточно будет задать $\mathbb{X}_C(x_i)$ для всех переменных $x_i \in \mathbb{X}$, рассмотренных как мономы из $\mathbb{M}$ с учетом условия (8) и следующего:

$$(\forall x_i, x_j \in \mathbb{X},\ x_i \neq x_j)\ x_i \in \mathbb{X}_C(x_j) \Leftrightarrow x_j \notin \mathbb{X}_C(x_i). \tag{12}$$

Пользуясь (12), можем ввести полное упорядочение $\prec$ на переменных:

$$x_i \prec x_j \Leftrightarrow x_i \notin \mathbb{X}_C(x_j).$$

Не уменьшая общности рассуждений, будем полагать, что

$$x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n,$$

тогда из (11) и (12) следует, что

$$(\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)\ \mathbb{X}_C(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_i^{\alpha_i}) = \{x_j \in \mathbb{X}\ :\ i \leqslant j \leqslant n\},$$

где $\alpha_i > 0$. Полученное соотношение задает инволютивное деление Поммаре [2, 6] для выбранного порядка на переменных.

Введем следующее определение.

Определение 1. Конечное подмножество $U \subset \mathbb{M}$ будем называть C-авто形редуцированным, если выполняется:

$$(\forall u, v \in U, u \neq v)\ u \notin C(v) \wedge v \notin C(u). \tag{13}$$

C-базис полиномиального идеала

Пусть $\mathrm{R} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – полиномиальное кольцо над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. Полином $f \in \mathrm{R}$ представляет собой конечный ряд вида

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma x^\gamma,$$

где $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0},\ \mathrm{card}(\Gamma) < \infty,\ c_\gamma \in \mathbb{K},\ x^\gamma \in \mathbb{M}$.
Для введенной записи полинома f будем использовать обозначения:
$\mathrm{cf}(f, x^\gamma) = c_\gamma$, $\mathrm{supp}(f) = \{x^\gamma\ :\ \gamma \in \Gamma\}$.

Для однозначного представления полиномов введем на множестве мономов полное упорядочение.

Определение 2. Отношение линейного порядка $\preccurlyeq$, заданное на множестве $\mathbb{M}$, называется допустимым мономиальным упорядочением, если оно удовлетворяет соотношениям:

$$(\forall m \in \mathbb{M})\ 1_{\mathbb{M}} \preccurlyeq m,$$
$$(\forall u, v, m \in \mathbb{M})\ u \preccurlyeq v \Rightarrow um \preccurlyeq vm.$$

Стандартным образом полагаем $u \prec v$, если $u \preccurlyeq v$ и $u \neq v$.
Лидирующим мономом полинома f относительно некоторого фиксированного допустимого порядка $\prec$ будем называть моном $\mathrm{lm}(f) = max_{\prec}\,\mathrm{supp}(f)$.
Лидирующий коэффициент: $\mathrm{lc}(f) = \mathrm{cf}(f, \mathrm{lm}(f))$.
Лидирующий терм: $\mathrm{lt}(f) = \mathrm{lc}(f)\,\mathrm{lm}(f)$.
Для множества полиномов $F \subset \mathrm{R}$ будем обозначать
$\mathrm{lm}(F) = \{\mathrm{lm}(f)\ :\ f \in F\}$.

Через $< F >$ будем обозначать идеал, порождаемый множеством образующих $F \subset \mathrm{R}$.

Определение 3. Конечное множество образующих $G = \{g_1, \ldots, g_m\} \subset \mathrm{R}$ для идеала $\mathfrak{I} =< G >$ называется базисом Грёбнера данного идеала в некотором фиксированном допустимом мономиальном упорядочении, если:

$$(\forall\ h \in \mathfrak{I})(\exists g \in G)\,\mathrm{lm}(g)|\ \mathrm{lm}(h).$$

Альтернативное определение базиса Грёбнера G для идеала $\mathfrak{I} =< G >$:

$$< \mathrm{lm}(\mathfrak{I}) >=< \mathrm{lm}(G) > .$$

Определение 4. Базис Грёбнера G называется редуцированным базисом Грёбнера, если выполнено:

$$(\forall q_1, g_2 \in G)(\forall m \in \mathrm{supp}(g_2))\ \ \mathrm{lm}(g_1) \nmid m.$$

Согласно теореме Гильберта о конечнопорожденности идеалов в нётеровых кольцах, имеем, что для любого идеала полиномиального кольца существует конечный набор образующих идеала (конечный базис), а конструктивное доказательство теоремы Гильберта, проведенное Бухбергером [3], дает алгоритм построения базиса Грёбнера для идеала – алгоритм Бухбергера.

Стандартный алгоритм Бухбергера строит редуцированный базис Грёбнера, однако на многих задачах более эффективным является алгоритм построения инволютивного базиса идеала, введенный Гердтом и Блинковым [1, 4]. Инволютивный базис представляет частный случай базиса Грёбнера. Перепишем этот алгоритм для случая глобального инволютивного деления во введенной нами терминологии C-делимости.

Алгоритм 1 $CNormalForm$

Input **:** $f \in \mathrm{R};\ F \subset \mathrm{R},\ \mathrm{card}(F) < \infty$

Output : $h = CNormalForm(f, F), h \in \mathrm{R}$

```
h := f
while (∃g ∈ F) lm(g)|_C lm(h) do
    h := h − (lt(h)/lt(g)) · g
end while
```

Рассмотрим алгоритм $CNormalForm$.

Если $h = CNormalForm(f, F)$, то выполняется:

$$(\forall\ m \in \mathrm{lm}(F))\ m \notin C(\mathrm{lm}(h)),$$

то есть у $\mathrm{lm}(h)$ нет C-делителей среди $\mathrm{lm}(F)$. Также по построению алгоритма выполняется, что f и h принадлежат одному классу вычетов по идеалу $\mathfrak{I}$, и

$$\mathrm{lm}(h) \preccurlyeq \mathrm{lm}(f),\ \text{при чем}\ \mathrm{lm}(h) = \mathrm{lm}(f) \Leftrightarrow h = f.$$

Алгоритм 2 *CAutoReduce*

Input : $F \subset \mathrm{R},\ \mathrm{card}\, F < \infty$

Output : $H = CAutoReduce(F),\ H \subset \mathrm{R}$

$H := F$
while $(\exists f, h \in H)\, \mathrm{lm}(f)|_C\, \mathrm{lm}(h)$ **do**
  $H := H - \{h\}$
  $h := CNormalForm(h, H)$
  if $h \neq 0$ **then**
    $H := H \cup \{h\}$
  end if
end while

Если $H = CAutoReduce(F)$, то выполняется:

$$(\forall u, v \in \mathrm{lm}(H), u \neq v)\ v \notin C(u) \wedge u \notin C(v),$$

то есть никакие два монома $u, v \in \mathrm{lm}(H)$ не сравнимы между собой по отношению C-делимости. Таким образом, согласно (13), множество $\mathrm{lm}(H)$ является C-автоpедуцированным мономиальным множеством. Также по построению алгоритма выполняется, что F и H являются базисами одного и того же полиномиального идеала.

Алгоритм 3 *CBasis*

Input : $F \subset \mathrm{R},\ \mathrm{card}\, F < \infty$

Output : $H = CBasis(F),\ H \subset \mathrm{R}$

$H := CAutoReduce(F)$
while $(\exists h \in H)(\exists x_i \in \mathbb{X}_{NC}(\mathrm{lm}(h)))(\forall m \in \mathrm{lm}(H))\ m \notin C(\mathrm{lm}(x_i h))$ **do**
  $H := CAutoReduce(H \cup \{x_i h\})$
end while

Алгоритм $CBasis$ строит в общем случае нередуцированный базис Грёбнера идеала. Если $H = CBasis(F)$, то выполняется:

$$< F >=< H >= \mathfrak{I}, \tag{14}$$

$$(\forall u, v \in \mathrm{lm}(H), u \neq v)\ v \notin C(u) \wedge u \notin C(v), \tag{15}$$

$$(\forall f \in \mathfrak{I})(\exists h \in H)\ \ \mathrm{lm}(h)|_C\, \mathrm{lm}(f). \tag{16}$$

Определение 5. Базис H идеала $\mathfrak{J} =< H >$, удовлетворяющий соотношениям (14)—(16), будем называть C-базисом идеала.

Возникает вопрос о целесообразности введения новой терминологии для уже существующих определений глобального инволютивного деления и соответствующего ему инволютивного базиса. Заметим, что с алгоритмической точки зрения эффективность построения инволютивного базиса в сравнении со стандартным редуцированным базисом Грёбнера заключается, в частности, в расположении мономов по узлам дерева в соответствии с отношением инволютивной делимости, что дает возможность быстрого поиска (по сравнению с поиском в линейном списке) инволютивного делителя монома из некоторого множества других мономов.

Здесь же следует заметить, что для отношения C-делимости базовым понятием является цепь C-делителей, которая в свою очередь является ветвью дерева $T_{(\mathbb{M},\ |_C)}$. Таким образом, уже на уровне базовой терминологии имеем структуры, необходимые для реализации алгоритмов построения C-базиса.

Также эти структуры используются автором данной работы для выведения специфических свойств нульмерных полиномиальных идеалов.

Линейный базис фактора полиномиального кольца по нульмерному идеалу

Пусть дан нульмерный идеал $\mathfrak{J}$.

Известно, что в случае нульмерности идеала $\mathfrak{J}$, фактор-кольцо $\mathrm{R}/\mathfrak{J}$ является конечномерным линейным пространством над полем K, размерность которого равна числу корней идеала $\mathfrak{J}$ с учетом кратностей.

Если отождествить элементы-классы из $\mathrm{R}/\mathfrak{J}$ с их представителями – нередуцируемыми по $\mathfrak{J}$ полиномами, то в качестве базиса линейного пространства можно взять множество нередуцируемых по $\mathfrak{I}$ мономов: $\mathbb{M} - \mathrm{lm}(\mathfrak{I})$.

Пусть G – базис Грёбнера нульмерного идеала $\mathfrak{I}$ для некоторого фиксированного мономиального упорядочения. Тогда множество

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{M} \ : \ (\nexists g \in G) \ \mathrm{lm}(g)|\omega \ \} \tag{17}$$

является базисом линейного пространства $\mathrm{R}/\mathfrak{I}$.

Возникает задача эффективноого построения множества Ω для некоторого базиса Грёбнера G. Рассмотрим, какие затруднения возникают на этом пути.

- Верно, что $(\forall\ \omega \in \Omega)\ \omega|\,\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(G))$, однако перебор всех делителей монома $\mathrm{lcm}(\mathrm{lm}(G))$ с проверкой для них условия (17) – трудоемок.

- Верно, что если G – редуцированный стандартный базис Грёбнера, то выполняется $(\forall g \in G)(\forall m \in \mathbb{M})(m|\,\mathrm{lm}(g) \Rightarrow m \in \Omega)$, однако в этом случае во включении $\{m \in \mathbb{M} : (\exists g \in G)\ m|\,\mathrm{lm}(g)\} \subseteq \Omega$ равенства может не быть.

- Если G – нередуцированный базис Грёбнера, то возможна ситуация $m|\,\mathrm{lm}(g),\ m \notin \Omega$.

Рассмотрим, какие преимущества нам дает использование C-базиса в качестве базиса Грёбнера.

Пусть на множестве мономов $\mathbb{M}$ фиксировано некоторое отношение C-делимости и фиксирован некоторый допустимый мономиальный порядок.

Пусть H – C-базис идеала $\mathfrak{I}$. Так как H является базисом Грёбнера, а $\mathfrak{I}$ – нульмерный идеал, то построенное по (17) множество Ω – конечно. Тогда:

$$(\forall\omega \in \Omega)(\exists u \in \mathbb{M}, \omega|_C u)\ u \notin \Omega,$$

а так как Ω – множество всех нередуцируемых мономов

$$u \notin \Omega \Rightarrow u \in \mathrm{lm}(\mathfrak{I}) \Rightarrow (\exists h \in H)\, \mathrm{lm}(h)|_C u.$$

Имеем:

$$\omega \in C(u) \wedge \mathrm{lm}(h) \in C(u) \Rightarrow \omega \in C(\mathrm{lm}(h)) \vee \mathrm{lm}(h) \in C(\omega),$$

второй вариант отбрасывается по построению Ω, и мы получили:

$$(\forall \omega \in \Omega)(\exists h \in H)\ \omega \in C(\mathrm{lm}(h)), \tag{18}$$

то есть все $\omega \in \Omega$ являются C-делителями некоторых $\mathrm{lm}(h), h \in H$.

В обратную сторону, пусть $\omega|_C\, \mathrm{lm}(h), \omega \neq \mathrm{lm}(h)$ для некоторого $h \in H$. Тогда:

$$(\nexists q \in H)\, \mathrm{lm}(q)|_C \omega \Rightarrow \omega \notin \mathrm{lm}(\mathfrak{I}) \Rightarrow \omega \in \Omega.$$

Мы получили:

$$(\forall h \in H)(\forall \omega \in C(\mathrm{lm}(h)), \omega \neq \mathrm{lm}(h))\ \omega \in \Omega, \tag{19}$$

то есть все C-делители любого $\mathrm{lm}(h) \in \mathrm{lm}(H)$, не совпадающие с самим $\mathrm{lm}(h)$, принадлежат Ω.

Из (18) и (19) делаем вывод о совпадении множеств:

$$\Omega = \{m \in \mathbb{M}\ :\ (\exists h \in H)\ m \in C(\mathrm{lm}(h)), m \neq \mathrm{lm}(h)\}. \tag{20}$$

Если рассмотреть дерево $T_{(\mathbb{M},\ |_C)}$, то формула (20) и конечность множества Ω позволяют нам заключить, что при "усечении" ветвей дерева по мономам $\mathrm{lm}(H)$ получим дерево, не имеющее бесконечных ветвей, во всех листах которого находятся все мономы из $\mathrm{lm}(H)$, а во всех нелистовых узлах – все мономы из Ω, то есть для построения линейного базиса Ω фактора полиномиального кольца R по нульмерному идеалу $\mathfrak{I}$ с алгоритмической точки зрения достаточно произвести обход дерева. Построение самого дерева в данном случае уже произведено в ходе работы алгоритма $CBasis$.

Пример 2. *В качестве отношения C-делимости на мономах возьмем деление Поммаре из предыдущего примера.*

В ходе работы алгоритма $CBasis$ для деления Поммаре строится бинарный аналог дерева делимости – бинарное дерево Поммаре. Его построение в общем случае производится следующим образом. Пусть некоторый узел дерева помечен мономом $m = x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_i} \in \mathbb{M}$, $\alpha_i > 0$. Тогда по определению деления Поммаре $\mathbb{X}_C(m) = \{x_j \ : \ i \leqslant j \leqslant n\}$, и в дереве $T_{(\mathbb{M},|_C)}$ все мономы $x_j m$ являются непосредственными потомками монома m. Для бинарного дерева Поммаре левым потомком для m будет $x_i m$, а в качестве правого потомка, если $i < n$, конструируем новый узел, который будем помечать парой $(m, i+1)$. Если же дан некоторый узел дерева, помеченный парой (m, j), где $m \in \mathbb{M}$, $1 < j \leqslant n$, то его левым потомком будет узел, помеченный мономом $x_j m$, а если $j < n$, то правый потомок – пара $(m, j+1)$. Очевидно, что введенная структура бинарного дерева не нарушает отношения следования в цепях C-делителей, а лишь вводит промежуточные узлы на ветвях дерева, упрощающие структуру дерева для алгоритмов обхода и поиска. Обратный переход от бинарного дерева к дереву $T_{(\mathbb{M},|_C)}$ можно осуществить, произведя совмещение каждого узла, помеченного некоторым мономом m, со всеми узлами, соответственно помеченными парами (m, j) (если таковые для данного m имелись).

Пусть $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$. В качестве допустимого мономиального упорядочения возьмем порядок $DegRevLex$ (по полной степени, обратно лексикографический) с порядком переменных $x \succ y \succ z$.

Нульмерный идеал $\mathfrak{I}$ построим как произведение простых нульмерных идеалов:

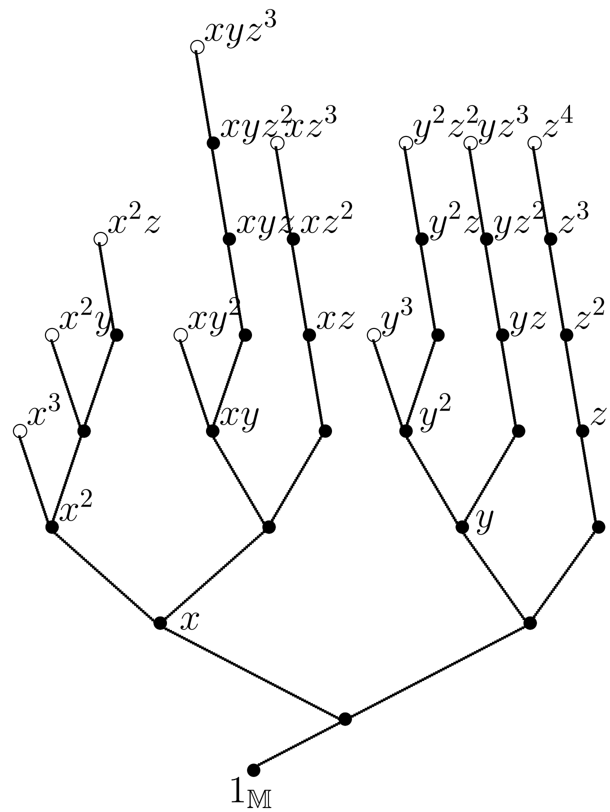
$$\mathfrak{I} = < x-1, y+2, z > \cdot < x+1, y+1, z-2 > \cdot < x-2, y-1, z-2 > \cdot$$
$$\cdot < x, y+1, z+1 > \cdot < x^2-1, y^2+1, z^3-3 >,$$

его C-базис H:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 2x^2z + 31y^2z - 20z^3 - 4x^2 - 12y^2 + 29z + 52,\\
h_2 &= 9y^3 + 197y^2z - 130z^3 - 12x^2 - 60y^2 + 9y + 197z + 342,\\
h_3 &= 3xy^2 - 28y^2z + 20z^3 - 6x^2 + 9y^2 + 3x - 28z - 45,\\
h_4 &= 3x^2y + 31y^2z - 20z^3 - 3x^2 - 12y^2 - 3y + 31z + 51,\\
h_5 &= 3x^3 + 31y^2z - 20z^3 - 6x^2 - 12y^2 - 3x + 31z + 54,\\
h_6 &= z^4 + 44y^2z - 30z^3 - 18y^2 + 41z + 72,\\
h_7 &= 9yz^3 + 74y^2z - 37z^3 - 30x^2 - 33y^2 - 27y + 74z + 108,\\
h_8 &= 6xz^3 + 139y^2z - 86z^3 - 30x^2 - 48y^2 - 18x + 139z + 240,\\
h_9 &= y^2z^2 + 29y^2z - 20z^3 - 12y^2 + z^2 + 29z + 48,\\
h_{10} &= 18xyz^3 + 41y^2z - 34z^3 - 30x^2 - 54xy - 42y^2 + 41z + 90,
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{lm}(H) = \{xyz^3, y^2z^2, xz^3, yz^3, z^4, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^2z\}.$$

При построении H получили "усеченное" по мономам из $\mathrm{lm}(H)$ *бинарное дерево Поммаре (метки-пары для промежуточных узлов ввиду несущественности не выписываем):*



Из помеченных мономами нелистовых узлов дерева собираем базис фактор-кольца $\mathrm{R}/\mathfrak{I}$*:*

$$\Omega = \{xyz^2, xyz, y^2z, xz^2, yz^2, z^3, x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2, x, y, z, 1_{\mathbb{M}}\}.$$

Библиографический список

1. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A.* Involutive Bases of Polynomial Ideals. Leipzig, Germany, 1996. (Preprint-Nr.1/1996, Naturwissenschaftlich-Theoretisches Zentrum, University of Leipzig)

2. *Gerdt V. P., Yanovich D. A., Blinkov Yu. A.* Construction of janet bases i. monomial bases // Computer Algebra in Scientific Computing / CASC, 2001. Springer-Verlag Berlin, 2001. P. 233–247.

3. *Бухбергер Б., Коллинз Дж., Лоос Р.* Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986. С. 392.

4. *Гердт В. П., Блинков Ю. А.* Инволютивные деления мономов // Программирование. 1998. № 6. С. 22–24.

5. *Жарков А. Ю., Блинков Ю. А.* Инволютивные системы алгебраических уравнений // Программирование. 1994. № 1. Р. 53–56.

6. *Поммаре Ж.* Система уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983. С. 1232.

УДК 513.6

С.И. Небалуев, И.А. Кляева

ТЕОРИЯ ТОЛЕРАНТНЫХ КУБИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНЫХ ГОМОЛОГИЙ

Статья содержит доказательство естественной изоморфности групп толерантных кубических сингулярных гомологий толерантного пространства, определенных различными способами. В статье также дока-

зывается, что эти группы кубических гомологий толерантного пространства естественно изоморфны его симплициальным гомологиям [1,2].

Мы будем рассматривать категорию $\mathbb{T}_0$, объектами которой являются толерантные пространства (X,τ), состоящие из базисных множеств X и определенных на них отношений толерантности $\tau \subset X \times X$ со свойствами рефлексивности и симметричности. Морфизмами в этой категории являются отображения, сохраняющие толерантность. В этой категории имеются декартовы произведения с покомпонентной толерантностью.

Толерантным отрезком длины m ($m \in \mathbb{N}$) назовем толерантное пространство (I_m, ι_m), в котором $I_m = \left\{ \frac{k}{m} \middle|\ k = \overline{0,m} \right\}$ — множество точек деления единичного отрезка на m частей, а толерантность ι_m определяется условием

$$\left(\forall\ k,l = \overline{0,m}\right) \qquad \frac{k}{m}\iota_m\frac{l}{m} \Leftrightarrow |k-l| \leqslant 1.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ и $\overline{m} = (m_1,\ldots,m_n) \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$ толерантное пространство $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i}, \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \iota_{m_i}\right)$ будем называть толерантным кубом размера $\overline{m} = (m_1,\ldots,m_n)$. Толерантные кубы размерности $\overline{m} = \overline{1} = (1,\ldots,1)$ будем называть простыми.

Определение 1. Толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X,\tau)$, где $\overline{m} = (m_1,\ldots,m_n) \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, назовем n-мерным толерантным сингулярным кубом толерантного пространства (X,τ). Если $m_1 = \ldots = m_n = 1$, то толерантный сингулярный куб $u : (I_{\overline{1}}, \iota_{\overline{1}}) \to (X,\tau)$ назовем простым. 0-мерным толерантным сингулярным кубом пространства (X,τ) будем называть любую точку в X. 0-мерные кубы мы также будем причислять к простым кубам.

Для $n \geqslant 0$ обозначим через $Q_n(X)$ абелеву группу, свободно порожденную над $\mathbb{Z}$ всеми n-мерными толерантными сингулярными кубами пространства (X,τ), и положим $Q_n(X) = 0$ для $n < 0$. Элементы этой группы $Q_n(X)$ будем называть n-мерными толерантными сингулярными цепями в (X, τ).

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим граничный гомоморфизм

$$\partial_n : Q_n(X) \to Q_{n-1}(X),$$

задаваемый на свободных образующих

$$u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}\right) : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to X$$

формулой

$$\partial_n u = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[d_j^0(u) - d_j^1(u)\right], \tag{1}$$

где

$$d_j^\varepsilon(u) = u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_{j-1}}{m_{j-1}}, \varepsilon, \frac{k_{j+1}}{m_{j+1}}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}\right), \quad \varepsilon = 0, 1.$$

Для $n \leqslant 0$ полагаем $\partial_n = 0$.

Обычным способом доказывается, что $(\forall\, n \in \mathbb{Z}) \quad \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, что позволяет говорить о цепном комплексе $\{Q_n(X), \partial_n\}$ толерантных кубических сингулярных цепей пространства (X, τ). Любое толерантное отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \vartheta)$ индуцирует цепное отображение $\{Q_n(f) : Q_n(X) \to Q_n(Y)\}$, которое на образующих задается формулой

$$Q_n(f)(u) = f \circ u. \tag{2}$$

В результате получается функтор, который вместе с гомологическим функтором на категории цепных комплексов позволяет определить гомологический функтор на категории толерантных пространств $\mathbb{T}_0$. Однако, как и в алгебраической топологии, эти гомологии подлежат нормировке, так как в противном случае одноточечное пространство будет иметь нетривиальные гомологии во всех размерностях.

Определение 2. Толерантный сингулярный n-мерный $(n > 0)$ куб $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to X$ назовем вырожденным по j-й координате $(j = \overline{1, n})$, если

$$(\forall\, i = \overline{1, n}) \quad (\forall\, k_i = \overline{0, m_i})$$

$$u\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_j}{m_j},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right)=u\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,0,\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right). \tag{3}$$

Обозначим через $D_n(X)$ подгруппу в $Q_n(X)$, свободно порожденную всеми вырожденными кубами. Так как $\partial_n(D_n(X))\subset D_{n-1}(X)$, то имеем цепной фактор-комплекс $\{C_n(X)=Q_n(X)/D_n(X),\partial_n\}$ нормализованных толерантных кубических сингулярных цепей. При этом толерантные отображения $f:(X,\tau)\to(Y,\vartheta)$ индуцируют цепные отображения $\{C_n(f):C_n(X)\to C_n(Y)\}$, действующие на свободные образующие $u+D_n(X)$ группы $C_n(X)$ по формуле

$$C_n(f)(u+D_n(X))=Q_n(f)(u)+D_n(X)=f\circ u+D_n(X). \tag{4}$$

В результате получается функтор $C=\{C_n\}$, который в композиции с гомологическим функтором позволит определить функтор толерантных кубических сингулярных гомологий толерантного пространства (X,τ):

$$H^Q(X)=\bigoplus_{n\geqslant 0}H_n^Q(X)\overset{df}{=}\bigoplus_{n\geqslant 0}H_n(C_n(X)).$$

Заметим, что толерантные пути $\omega_m:(I_m,\iota_m)\to(X,\tau)$ в пространстве (X,τ) представляют собой 1-мерные толерантные сингулярные кубы, чьи границы $\partial_1\omega_m=\omega_m(1)-\omega_m(0)$. Это означает, что точки, принадлежащие одной компоненте линейной связности, гомологичны друг другу. Более того, достаточно стандартно доказывается следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $\{C_\alpha|\alpha\in A\}$ — совокупность компонент линейной связности толерантного пространства (X,τ), тогда эти компоненты можно рассматривать как свободный базис 0-мерной группы $H_0^Q(X)$ толерантных кубических сингулярных гомологий, то есть*

$$H_0^Q(X)\cong\bigoplus_{\alpha\in A}\mathbb{Z}\cdot C_\alpha. \tag{5}$$

Это предложение наряду со следующим предложением используется при применении методов ациклических моделей и ациклических носителей.

Предложение 2. *Если (X, τ) — толерантно стягиваемое пространство, то его группы толерантных кубических сингулярных гомологий имеют вид*

$$H_n^Q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство

Пусть толерантное отображение $F : X \times I_m \to X$ осуществляет толерантную гомотопию $F : \mathbf{1}_X \sim const_{x_0}(rel\{x_0\})$, где $x_0 \in X$. Тогда толерантный путь $\omega_m^{(x)} = F\left(x, \frac{k}{m}\right)$ соединяет произвольную точку x с x_0, что означает наличие одной компоненты линейной связности в пространстве (X, τ). Поэтому первая часть формулы (6) следует из (5).

Пусть теперь $n > 0$ и $u : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} I_{m_i}, \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \iota_{m_i}\right) \to (X, \tau)$ — произвольный толерантный сингулярный n-мерный куб. Определим новый куб $R(u) \in$ $\in Q_{n+1}(X)$ формулой

$$R(u)\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}, \frac{k}{m}\right) = F\left(u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}\right), \frac{k}{m}\right). \tag{7}$$

поскольку кубы u являются свободными образующими группы $Q_n(X)$, мы получаем гомоморфизм $R : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$. Из формулы (7) с помощью (1) и определения толерантной гомотопии [2] получаем

$$\partial_{n+1} R(u) = R(\partial_n u) + (-1)^{n+1} u - (-1)^{n+1} \cdot const_{x_0}. \tag{8}$$

Пусть теперь $c = \sum\limits_{i=1}^{S} a_i u_i$ — произвольная цепь в $Q_n(X)$, которая определяет цикл $c + D_n(X)$ в комплексе $\{C_n(X), \partial_n\}$. Это значит, что $\partial_n c \in D_{n-1}(X)$. Тогда формула (8) дает следующее:

$$\partial_{n+1} R(c) = R(\partial_n c) + (-1)^{n+1} c + (-1)^n \left(\sum_{i=1}^{S} a_i\right) \cdot const_{x_0}. \tag{9}$$

Так как из (7) следует, что $R(D_n(X)) \subset D_{n+1}(X)$, то формулу (9) можно записать в виде

$$c = (-1)^{n+1}\partial_{n+1}R(c) + d,$$

где $d = (-1)^n R(\partial_n c) + \left(\sum_{i=1}^{S} a_i\right) \cdot const_{x_0} \in D_{n-1}(X)$. Следовательно, каждый цикл $c + D_n(X)$ в $C_n(X)$ является границей, что и доказывает вторую часть формулы (6).

Так как толерантный куб $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}})$ является толерантно стягиваемым [2, предложения 1.2.3, 1.2.4], то как следствие получаем

$$H_q^Q(I_{\overline{m}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0; \\ 0, & q > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Повторим теперь построение толерантных кубических сингулярных гомологий, ограничившись простыми кубами. Обозначим через $Q_n^S(X)$ абелеву группу, свободно порожденную простыми толерантными сингулярными кубами

$$u(k_1, k_2, \ldots, k_n) : \left(\overset{n}{\times} I_{m_1}, \overset{n}{\times} \iota_{m_1}\right) \to (X, \tau), \quad k_i \in \{0, 1\},\ i = \overline{1, n},$$

для $n > 0$ и точками пространства (X, τ) для $n = 0$. Граничные гомоморфизмы $\partial_n : Q_n^S(X) \to Q_{n-1}^S(X)$, группы вырожденных простых сингулярных кубов $D_n^S(X) \subset Q_n^S(X),\ (n > 0)$ определяются как и раньше и удовлетворяют свойству $\partial_n(D_n^S(X)) \subset D_{n-1}^S(X)$. Это позволяет определить цепной комплекс $\{C_n^S(X) = Q_n^S(X)/D_n^S(X), \partial_n\}$ простых нормализованных цепей и группы простых толерантных кубических сингулярных гомологий пространства (X, τ):

$$H_n^S(X) = H_n(C^S(X)), \quad n \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Два ковариантных функтора C и C^S из категории толерантных пространств $\mathbb{T}_0$ в категорию цепных комплексов являются естественно цепно гомотопно эквивалентными.*

Доказательство

Выберем среди объектов категории $\mathbb{T}_0$ множество моделей
$\mathcal{M} =$
$$= \left\{ M_{\overline{m}} = M_{(m_1,\ldots,m_n)} = \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i} \right) \middle| n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, (\forall\ i = \overline{1,n})\ m_i \in \mathbb{N} \right\}.$$
Функтор C на категории $\mathbb{T}_0$ с моделями $\mathcal{M}$ является по построению не отрицательным, а согласно формуле (10), ацикличным в положительных размерностях. Но функтор C не является свободным на категории $\mathbb{T}_0$ с моделями $\mathcal{M}$ (см. [3]), что не позволяет непосредственно использовать метод ациклических моделей. Однако функтор C обладает рядом свойств, позволяющих использовать для доказательства идеологию метода ациклических моделей. В соответствии с этой идеологией рассмотрим тождественные отображения:
$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad v_{\overline{m}} = v_{(m_1,\ldots,m_n)} = \mathbf{1}_{\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}} : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}).$$
Имеем $v_{\overline{m}} \in Q_n(M_{\overline{m}})$ и $v_{\overline{m}} \notin D_n(M_{\overline{m}})$. Зафиксируем классы
$$\overline{v}_{\overline{m}} = (v_{\overline{m}} + D_n(M_{\overline{m}})) \in C_n(M_{\overline{m}}).$$
В группе цепей $C_n(X)$ произвольного пространства (X,τ) имеется свободный базис $\{\overline{u} = u + D_n(X)\}$, где u пробегает все невырожденные толерантные сингулярные кубы $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X,\tau)$. Каждый элемент свободного базиса можно представить в следующем виде:
$$\overline{u} = u + D_n(X) = u \circ \mathbf{1}_{M_{\overline{m}}} + D_n(X) = C_n(u)\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}} + D_n(X)\right) = C_n(u)\left(\overline{v}_{\overline{m}}\right). \tag{11}$$
Следовательно, множество
$$\left\{ C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}}) \middle| \overline{m} \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}, u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}}, X), u \notin D_n(X) \right\} \tag{12}$$
является свободным базисом в $C_n(X)$. При этом имеем
$$(\forall\ u \in D_n(X)) \quad C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}}) = 0. \tag{13}$$

Это дополнительное условие (13) отличает функтор C от свободного функтора.

Отображения вложения $\{i_n : Q_n^S(X) \subset Q_n(X)\}$ индуцируют отображения

$$\varphi = \{\varphi_n : C_n^S(X) \to C_n(X)\}_{n \geqslant 0}, \quad \varphi_n(u + D_n^S(X)) = u + D_n(X), \quad (14)$$

которые также являются вложениями. Легко проверить, что отображение φ является цепным и естественным по (X, τ).

Построим еще одно естественное цепное отображение $\psi = \{\psi_n : C_n(X) \to C_n^S(X)\}_{n \geqslant 0}$, которое будет определяться формулой

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad \psi_n(u + D_n(X)) = j_n(u) + D_n^S(X) \quad (15)$$

и которое будет индуцироваться определяемыми ниже гомоморфизмами $j_n : Q_n(X) \to Q_n^S(X)$, удовлетворяющими условию $j_n(D_n(X)) \subset D_n^S(X)$. Поскольку гомоморфизмы j_n надо определить на свободных образующих группы $Q_n(X)$, то рассмотрим произвольный сингулярный куб $u : \left(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i}, \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \iota_{m_i}\right) \to (X, \tau)$, для $n > 0$. Для произвольных $i = \overline{1, n},\ k_i = \overline{0, m_i - 1}$ определим простые сингулярные кубы $u_{(k_1,\ldots,k_n)} \in Q_n^S(X)$ следующим образом:

$$(\forall\ i = \overline{1, n})\ (\forall\ \varepsilon_i = \overline{0, 1}) \quad u_{(k_1,\ldots,k_n)}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = u\left(\frac{k_1 + \varepsilon_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n + \varepsilon_n}{m_n}\right). \quad (16)$$

И в этих обозначениях гомоморфизмы j_n для $n > 0$ определим формулой

$$j_n(u) = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}. \quad (17)$$

А если $n = 0$, то положим $j_0(u) = u$, для любого 0-мерного сингулярного куба u.

Отметим, что условие $j_n(D_n(X)) \subset D_n^S(X)$, необходимое для индуцирования гомоморфизмов ψ_n, очевидным образом выполняется. Следовательно, гомоморфизмы ψ_n корректно определяются формулой (15), при этом из определения j_n следует, что

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad \psi_n | C_n^S(X) = \mathbf{1}_{C_n^S(X)}. \tag{18}$$

Цепное свойство для отображения $\psi = \{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ следует из цепного свойства для отображения $j = \{j_n\}_{n\geqslant 0}$. Это значит, что нам надо проверить равенство

$$\partial_n(j_n(u)) = j_{n-1}(\partial_n(u)), \tag{19}$$

для любого $n > 0$ и любого толерантного сингулярного куба

$$u\left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_n}{m_n}\right).$$

$$\partial_n(j_n(u)) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_n-1)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0} - u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{(k_1,\ldots,\widehat{k_i},\ldots,k_n)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,\widehat{m_i-1},\ldots,m_n-1)} \left[\sum_{k_i=0}^{m_i-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0} - \sum_{k_i=0}^{m_i-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1}\right].$$

Из формулы (16) легко получить соотношения

$$(\forall\ k_i = \overline{0, m_i - 1}) \quad u_{(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1} = u_{(k_1,\ldots,k_i+1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0},$$

из которых следует, что

$$\sum_{k_i=0}^{m_i-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0} - \sum_{k_i=0}^{m_i-1} u_{(k_1,\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1} = u_{(k_1,\ldots,k_{i-1},0,k_{i+1},\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=0} -$$

$$- u_{(k_1,\ldots,k_{i-1},m_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_n)}|_{\varepsilon_i=1} = (u|_{k_i=0})_{(k_1,\ldots,\widehat{k_i},\ldots,k_n)} - (u|_{k_i=m_i})_{(k_1,\ldots,\widehat{k_i},\ldots,k_n)}.$$

Это позволяет записать, что

$$\partial_n(j_n(u)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i j_{n-1}(u|_{k_i=0} - u|_{k_i=m_i}) =$$

$$= j_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left[u|_{k_i=0} - u|_{k_i=m_i}\right]\right) = j_{n-1}(\partial_n(u)).$$

Покажем теперь, что цепное отображение $\psi = \{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ естественно зависит от пространства (X, τ). Это означает, что для любого толерантного отображения $f : (X, \tau) \to (Y, \vartheta)$ имеют место равенства

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad C_n^S(f) \circ \psi_n = \psi_n \circ C_n(f). \tag{20}$$

Рассмотрим действия гомоморфизмов в (20) на свободные образующие.

$$(C_n^S(f) \circ \psi_n)(u + D_n(X)) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_n-1)} f \circ u_{(k_1,\dots,k_n)} + D_n^S(Y),$$

$$(\psi_n \circ C_n(f))(u + D_n(X)) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_n-1)} (f \circ u)_{(k_1,\dots,k_n)} + D_n^S(Y).$$

Таким образом, формула (20) следует из формулы $f \circ u_{(k_1,\dots,k_n)} = = (f\circ \circ u)_{(k_1,\dots,k_n)}$, которая легко получается из (16).

Осталось доказать, что два естественных цепных отображения φ и ψ взаимно обратны с точностью до естественной цепной гомотопии.

Так как отображение φ является вложением $C^S(X) \subset C(X)$, то из формулы (18) следует, что $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_{C^S(X)}$. Значит, нам осталось построить естественную цепную гомотопию $\varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_{C(X)}$. Другими словами, для каждого толерантного пространства (X, τ) надо построить семейство гомоморфизмов $\mathcal{D}^X = \{\mathcal{D}_n^X : C_n(X) \to C_{n+1}(X)\}_{n\geqslant 0}$, удовлетворяющих условию

$$(\forall\ n \geqslant 1) \quad \partial_{n+1} \circ \mathcal{D}_n^X = \chi_n^X - \mathbf{1}_{C_n(X)} - \mathcal{D}_{n-1}^X \circ \partial_n, \tag{21}$$

где для краткости обозначено $\chi_n^X = (\varphi \circ \psi)_n = \varphi_n \circ \psi_n$. При этом для любого толерантного отображения $f : (X, \tau) \to (Y, \vartheta)$ должно быть выполнено свойство естественности

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad C_{n+1}(f) \circ \mathcal{D}_n^X = \mathcal{D}_n^Y \circ C_n(f). \tag{22}$$

Гомоморфизм $\mathcal{D}_n^X$ можно определить, задав его подходящим для нас образом на элементах свободного базиса (12) группы $C_n(X)$. Условие

(22) применительно к толерантному отображению $u : M_{\overline{m}} \to X$ требует выполнения следующего условия:

$$(\forall\ n \geqslant 0)\ (\forall\ \overline{m} \in \overset{n}{\times}\, \mathbb{N})\ (\forall\ u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}}, X))$$

$$C_{n+1}(u) \circ \mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}} = \mathcal{D}_n^X \circ C_n(u). \tag{23}$$

Условие (23) для $u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}}, X) \setminus D_n(X)$, примененное к элементу $\overline{v}_{\overline{m}} \in C_n(M_{\overline{m}})$, позволяет определить значения гомоморфизма $\mathcal{D}_n^X$ на элементах свободного базиса (12) группы $C_n(X)$ следующим образом:

$$(\forall\ n \geqslant 0)\ (\forall\ \overline{m} \in \overset{n}{\times}\, \mathbb{N})\ (\forall\ u \in Hom_{\mathbb{T}_0}(M_{\overline{m}}, X) \setminus D_n(X))$$

$$\mathcal{D}_n^X\left(C_n(u)(\overline{v}_{\overline{m}})\right) = C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right). \tag{24}$$

Формулы (23) и (13) показывают, что должно выполняться еще одно условие

$$(\forall\ n \geqslant 0)\ (\forall\ \overline{m} \in \overset{n}{\times}\, \mathbb{N})\ (\forall\ u \in D_n(X))\quad C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right) = 0. \tag{25}$$

Нетрудная проверка показывает, что имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}} : C_n(M_{\overline{m}}) \to C_{n+1}(M_{\overline{m}})$ определены так, чтобы выполнялось свойство (25), а гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^X$ определяются формулой (24), тогда выполняется свойство естественности (22).

Определим теперь условия для выполнения свойства (21). Если в этом условии взять $X = M_{\overline{m}}$ и применить гомоморфизмы этого условия к элементу $\overline{v}_{\overline{m}} \in C_n(M_{\overline{m}})$, то получим следующее:

$$(\forall\ n > 0)\ (\forall\ \overline{m} \in \overset{n}{\times}\, \mathbb{N})\quad \partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right) = \chi_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}) - \overline{v}_{\overline{m}} - \mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n \overline{v}_{\overline{m}}). \tag{26}$$

С помощью формул (12), (24), (22), леммы 1 и естественности отображения χ^X доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. Если гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}$ удовлетворяют свойствам (26) и (25), то гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^X$, определяемые формулой (24), удовлетворяют условию (21).

Из этих двух лемм следует, что для завершения доказательства нам надо построить цепи $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}) \in C_{n+1}(M_{\overline{m}})$ так, чтобы выполнилось условие (25), затем для произвольного пространства (X,τ) определить гомоморфизмы $\mathcal{D}_n^X$ по формулам (24) и проверить, что выполняется условие (26).

Приступим к построению цепей $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})$. Пусть $u\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right) : I_{\overline{m}} \to X$ — произвольный толерантный сингулярный куб, пусть $s=\overline{1,n}$ и $(\forall\ i=\overline{1,s})\quad k_i=\overline{0,m_i-1}$, определим тогда новый куб

$$u_{(k_1,\ldots,k_s)} : \overset{s}{\times} I_1 \times I_{m_{s+1}} \times \ldots \times I_{m_n} \to X$$

следующим образом:

$$\begin{gathered}(\forall\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s \in \{0,1\}) \quad (\forall\ j=\overline{s+1,n}) \quad (\forall\ k_j=\overline{0,m_j}) \\ u_{(k_1,\ldots,k_s)}\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s,\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right)= \\ =u\left(\frac{k_1+\varepsilon_1}{m_1},\ldots,\frac{k_s+\varepsilon_s}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right).\end{gathered} \tag{27}$$

Рассмотрим цепь

$$j_{(n,s)}(u)=\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{m_1-1,\ldots,m_s-1} u_{(k_1,\ldots,k_s)} \in Q_n(X).$$

Очевидно, что если куб u является вырожденным, то $j_{(n,s)}(u) \in$ $\in D_n(X)$. Также выкладки, которые доказывают формулу (19), позволяют получить

$$\partial_n\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{m_1-1,\ldots,m_s-1} u_{(k_1,\ldots,k_s)}\right)=\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{m_1-1,\ldots,m_s-1}(\partial_n u)_{(k_1,\ldots,k_s)}, \tag{28}$$

где

$$(\partial_n u)_{(k_1,\ldots,k_s)}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\left[(u|_{k_j=0})_{(k_1,\ldots,k_s)}-(u|_{k_j=m_j})_{(k_1,\ldots,k_s)}\right], \tag{29}$$

при этом

$$(u|_{k_j=0})_{(k_1,\ldots,k_s)} = \begin{cases} (u|_{k_j=0})_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_s)}, & 1 \leqslant j \leqslant s; \\ (u|_{k_j=0})_{(k_1,\ldots,k_s)}, & s+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \tag{30}$$

и аналогичная формула для $u|_{k_j=m_j}$.

Определим теперь толерантные сингулярные кубы

$$w^{(n,s)} : \left(\mathop{\times}_{i=1}^{s-1} I_{m_i}\right) \times I_{m_s} \times I_{m_s} \times \left(\mathop{\times}_{i=s+1}^{n} I_{m_i}\right) \to \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_{m_i} = M_{\overline{m}}$$

следующим образом:

$$\begin{gathered} (\forall\ i = \overline{1,n}) \quad (\forall\ k_i = \overline{0,m_i}) \quad (\forall\ k'_s = \overline{0,m_s}) \\ w^{(n,s)}\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_s}{m_s},\frac{k'_s}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right) = \\ = v_{\overline{m}}\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_{s-1}}{m_{s-1}},\frac{\max\{k_s,k'_s\}}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right) = \\ = \left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_{s-1}}{m_{s-1}},\frac{\max\{k_s,k'_s\}}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right). \end{gathered} \tag{31}$$

Свойства функции max обеспечивают толерантность отображения $w^{(n,s)}$.

Определим теперь цепь $\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}) \in C_{n+1}(M_{\overline{m}})$ формулой

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_n^{M_{(m_1,\ldots,m_n)}}\left(v_{(m_1,\ldots,m_n)} + D_n(M_{(m_1,\ldots,m_n)})\right) = \\ = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left(w^{(n,s)}_{(k_1,\ldots,k_s)} + D_{n+1}(M_{(m_1,\ldots,m_n)})\right)\right). \end{gathered} \tag{32}$$

Используя очевидную формулу

$$(\forall\ f \in Hom_{\mathbb{T}_0}(X,Y)) \quad f \circ u_{(k_1,\ldots,k_s)} = (f \circ u)_{(k_1,\ldots,k_s)}, \tag{33}$$

получаем выражение

$$\begin{gathered} C_{n+1}(u)\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right) = \\ = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\left(\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left((u \circ w^{(n,s)})_{(k_1,\ldots,k_s)} + D_{n+1}(X)\right)\right). \end{gathered} \tag{34}$$

А так как

$$(u\circ w^{(n,s)})\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_s}{m_s},\frac{k'_s}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right)=$$
$$=u\left(\frac{k_1}{m_1},\dots,\frac{k_{s-1}}{m_{s-1}},\frac{\max\{k_s,k'_s\}}{m_s},\frac{k_{s+1}}{m_{s+1}},\dots,\frac{k_n}{m_n}\right),$$

то из формулы (34) следует, что для $u\in D_n(X)$ имеем свойство (25).

Осталось проверить свойство (26). Используя формулы (32), (28), (29) и (30), получаем

$$\partial_{n+1}\left(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{(k_1,\dots,k_s)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_s-1)}\left\{\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^j\left[\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\dots,\widehat{k_j},\dots,k_s)}-\right.\right.$$
$$\left.-\left(w^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\dots,\widehat{k_j},\dots,k_s)}\right]+(-1)^s\left[\left(w^{(n,s)}|_{k_s=0}\right)_{(k_1,\dots,\widehat{k_s})}-\right.$$
$$\left.-\left(w^{(n,s)}|_{k_s=m_s}\right)_{(k_1,\dots,\widehat{k_s})}\right]+(-1)^{s+1}\left[\left(w^{(n,s)}|_{k'_s=0}\right)_{(k_1,\dots,k_s)}-\right.$$
$$\left.-\left(w^{(n,s)}|_{k'_s=m_s}\right)_{(k_1,\dots,k_s)}\right]+\sum_{j=s+1}^{n}(-1)^{j+1}\left[\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\dots,k_s)}-\right.$$
$$\left.\left.-\left(w^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\dots,k_s)}\right]+D_n(M_{\overline{m}})\right\}. \tag{35}$$

Слагаемое $\left(w^{(n,s)}|_{k_s=0}\right)_{(k_1,\dots,\widehat{k_s})}=\left(v_{(m_1,\dots,m_n)}\right)_{(k_1,\dots,k_{s-1})}$ имеет знак в (35) равный $(-1)^{2s-1}=-1$. Слагаемое $\left(w^{(n,s)}|_{k_s=m_s}\right)$ вырождено по переменной $\frac{k'_s}{m_s}$. Следовательно,

$$(\forall\ i=\overline{1,s})\ (\forall\ k_i=\overline{0,m_i-1})\quad \left(w^{(n,s)}|_{k_s=m_s}\right)_{(k_1,\dots,\widehat{k_s})}\in D_n(M_{\overline{m}}).$$

Слагаемое $\left(w^{(n,s)}|_{k'_s=0}\right)_{(k_1,\dots,k_s)}=(v_{\overline{m}})_{(k_1,\dots,k_s)}$ имеет знак $(-1)^{2s}=1$. Все слагаемые вида $\left(w^{(n,s)}|_{k'_s=m_s}\right)_{(k_1,\dots,k_s)}\in D_n(M_{\overline{m}})$, так как $\left(w^{(n,s)}|_{k'_s=m_s}\right)$ имеет вырождение по переменной $\frac{k_s}{m_s}$. Эти выкладки показывают, что в сумме (35) при последовательных значениях параметра s произойдут множественные сокращения, после которых останутся слагаемые вида

$$-\left(w^{(n,1)}|_{k_1=0}\right)_{\widehat{k_1}}+D_n(M_{\overline{m}})=-v_{\overline{m}}+D_n(M_{\overline{m}})=-\overline{v}_{\overline{m}},$$

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_n-1)} \left(w^{(n,s)}|_{k'_n=0}\right)_{(k_1,\dots,k_n)} + D_n(M_{\overline{m}}) =$$

$$= \sum_{(k_1,\dots,k_n)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_n-1)} (v_{\overline{m}})_{(k_1,\dots,k_n)} + D_n(M_{\overline{m}}) = \chi_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}).$$

Принимая это во внимание, а также формулу (30), перепишем (35) в следующем виде:

$$\partial_{n+1}(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})) = -\mathbf{1}_{C_n(M_{\overline{m}})}(\overline{v}_{\overline{m}}) + \chi_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant j<s\leqslant n} (-1)^{s+j-1} \left\{ \sum_{(k_1,\dots,k_s)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_s-1)} \left[\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\dots,k_s)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(w^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\dots,k_s)} \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{1\leqslant s<j\leqslant n} (-1)^{s+j} \left\{ \sum_{(k_1,\dots,k_s)=(0,\dots,0)}^{(m_1-1,\dots,m_s-1)} \left[\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\dots,k_s)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(w^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\dots,k_s)} \right] \right\} + D_n(M_{\overline{m}}). \tag{36}$$

Найдем теперь выражение для цепи $\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n \overline{v}_{\overline{m}})$, используя правило (24).

$$\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n \overline{v}_{\overline{m}}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}} \left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0} + D_{n-1}(M_{\overline{m}})\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}} \left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=m_j} + D_{n-1}(M_{\overline{m}})\right). \tag{37}$$

Так как $\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0} + D_{n-1}(M_{\overline{m}}) = C_{n-1}\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0}\right)\left(\overline{v}_{(m_1,\dots,\widehat{m_j},\dots,m_n)}\right)$, то формулы (24) и (32) дают следующее:

$$\mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}} \left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0} + D_{n-1}(M_{\overline{m}})\right) =$$

$$= C_n\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0}\right)\left(\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{s-1}\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)} w^{(n-1,s)}_{(k_1,\ldots,k_s)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=j}^{n-1}(-1)^{s-1}\sum_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_{s+1})=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,\widehat{m_j-1},\ldots,m_{s+1}-1)} w^{(n-1,s)}_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_{s+1})}+D_n\left(M_{(m_1,\ldots,\widehat{m_j},\ldots,m_n)}\right)\right). \tag{38}$$

А с помощью формул (4), (33), (31) для $s<j$ получаем

$$C_n\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0}\right)\left(w^{(n-1,s)}_{(k_1,\ldots,k_s)}+D_n\left(M_{(m_1,\ldots,\widehat{m_j},\ldots,m_n)}\right)\right)=$$
$$=\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}+D_n(M_{\overline{m}}). \tag{39}$$

Аналогично для $s\geqslant j$ имеем

$$C_n\left(\mathbf{1}_{M_{\overline{m}}}|_{k_j=0}\right)\left(w^{(n-1,s)}_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_{s+1})}+D_n\left(M_{(m_1,\ldots,\widehat{m_j},\ldots,m_n)}\right)\right)=$$
$$=\left(w^{(n,s+1)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,\widehat{k_j},\ldots,k_{s+1})}+D_n(M_{\overline{m}}), \tag{40}$$

причем в соответствии с (30) отсутствие индекса k_j можно не указывать.

Далее следует подставить выражения (39) и (40) в формулу (38), при этом во второй сумме следует произвести замену $s+1$ на s. Затем аналогичные выкладки надо провести для случая $k_j=m_j$. Наконец, получившиеся выражения следует подставить в (37). В результате получим

$$\mathcal{D}^{M_{\overline{m}}}_{n-1}(\partial_n\overline{v}_{\overline{m}})=\sum_{1\leqslant s<j\leqslant n}(-1)^{j+s-1}\left\{\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left[\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(w^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right]\right\}+$$
$$+\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}(-1)^{j+s}\left\{\sum_{(k_1,\ldots,k_s)=(0,\ldots,0)}^{(m_1-1,\ldots,m_s-1)}\left[\left(w^{(n,s)}|_{k_j=0}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(w^{(n,s)}|_{k_j=m_j}\right)_{(k_1,\ldots,k_s)}\right]\right\}+D_n(M_{\overline{m}}). \tag{41}$$

Объединяя формулы (36) и (41), получаем

$$\partial_{n+1}(\mathcal{D}_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}})) = \chi_n^{M_{\overline{m}}}(\overline{v}_{\overline{m}}) - \mathbf{1}_{C_n(M_{\overline{m}})}(\overline{v}_{\overline{m}}) - \mathcal{D}_{n-1}^{M_{\overline{m}}}(\partial_n \overline{v}_{\overline{m}}).$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

В качестве прямого следствия теоремы 1 получаем следующий важный результат.

Теорема 2. *Определенные выше гомологические функторы H^Q и H^S на категории толерантных пространств $\mathbb{T}_0$ естественно изоморфны, то есть для каждого толерантного пространства (X, τ) имеются изоморфизмы групп*

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad H_n^Q(X) \cong H_n^S(X),$$

естественны по (X, τ).

Следующим шагом будет сравнение толерантных кубических гомологий с гомологиями, определяемыми через симплициальные комплексы и через сингулярные симплексы [2]. Имея в виду теорему 2 и теорему 2.6.1 из работы [2] достаточно сравнить гомологии $H^S(X)$ и толерантные сингулярные гомологии $H^\Lambda(X)$.

Теорема 3. *Для каждого толерантного пространства (X, τ) имеются изоморфизмы групп гомологий*

$$(\forall\ n \geqslant 0) \quad H_n^S(X) \cong H_n^\Lambda(X),$$

естественны по (X, τ).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим простой n-мерный ($n \geqslant 1$) толерантный куб $\left(\overset{n}{\times} I_1, \overset{n}{\times} \iota_1\right)$, все точки которого $\overset{n}{\times} I_1 = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) | (\forall\ i = \overline{1, n})\ \varepsilon_i = \overline{0, 1}\}$ толерантны друг другу. И рассмотрим толерантный n-мерный симплекс (Λ^n, τ_n) все точки которого $\Lambda^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ также толерантны между собой.

Нам будет удобно представлять точки симплекса Λ^n как некоторые точки $(n+1)$-мерного куба $\overset{n+1}{\times} I_1 = \{(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n) | (\forall\ i = \overline{0,n})\ \delta_i = \overline{0,1}\}$, а именно

$$P_0 = (1, 0, \ldots, 0), \quad P_1 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad P_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Построим сюръективное толерантное отображение $p_n : \left(\overset{n}{\times} I_1, \overset{n}{\times} \iota_1\right) \to$ $\to (\Lambda^n, \tau_n)$ такое, что $p_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = P(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$, где координаты точки P определяются по формулам Серре

$$\begin{aligned}
&\delta_0 = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_1;\\
&\delta_1 = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_2 \cdot (1 - \varepsilon_1);\\
&\ldots\\
&\delta_k = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{k+1} \cdot (1 - \varepsilon_k);\\
&\ldots\\
&\delta_n = 1 - \varepsilon_n.
\end{aligned} \tag{42}$$

В работе [2] символом $\Lambda_n(X)$ обозначается группа толерантных сингулярных цепей пространства (X, τ), свободно порожденная толерантными сингулярными симплексами, то есть толерантными отображениями $\sigma : (\Lambda^n, \tau_n) \to (X, \tau)$. Определим гомоморфизмы $\varphi_n : \Lambda_n(X) \to C_n^S(X)$ формулой

$$\begin{aligned}
(\forall\ n \geqslant 1) \quad &\varphi_n(\sigma) = (-1)^n \sigma \circ p_n + D_n^S(X),\\
&\varphi_0(\sigma) = \sigma.
\end{aligned} \tag{43}$$

Покажем, что гомоморфизмы $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \geqslant 0}$ являются цепным отображением, то есть нам надо показать, что для произвольного свободного образующего $\sigma \in \Lambda_n(X)$, при $n \geqslant 0$, имеем

$$\partial_n(\varphi_n(\sigma)) = \varphi_{n-1}(\partial'_n(\sigma)),$$

где

$$\partial'_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial'^{(i)}_n(\sigma), \quad \partial'^{(i)}_n(\sigma) = \sigma | \{P_0, \ldots, \widehat{P}_i, \ldots, P_n\}.$$

Согласно (43) и (1)

$$\partial_n(\varphi_n(\sigma)) = (-1)^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[(\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_j=0} - (\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_j=1} \right] + D^S_{n-1}(X).$$

Из (42) следует

$$(\forall\, j > 1) \quad (\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_j=0} = \sigma(P(0,0,\varepsilon_n \ldots \varepsilon_3(1-\varepsilon_2),\ldots,1-\varepsilon_n)) \in D^S_{n-1}(X).$$

Таким образом,

$$\partial_n(\varphi_n(\sigma)) = (-1)^n \left[-(\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_1=0} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_j=1} + D^S_{n-1}(X) \right].$$

Формула (42), сюръективность p_n и представление $P_0 = (1,0,\ldots,0)$ дают следующее:

$$-(\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_1=0} = -\left(\sigma \,\middle|\, \left\{ \widehat{P_0}, P_1, \ldots, P_n \right\} \right) \circ p_{n-1} = -\partial'^{(0)}_n \circ p_{n-1}.$$

Аналогично,

$$(-1)^{j+1} (\sigma \circ p_n)|_{\varepsilon_j=1} = (-1)^{j+1} \partial'^{(j)}_n \circ p_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\partial_n(\varphi_n(\sigma)) = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} \partial'^{(j)}_n \circ p_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \partial'^{(j)}_n(\sigma) \right) \circ p_{n-1} = \varphi_{n-1}(\partial'_n(\sigma)).$$

Далее легко проверяется, что цепное отображение $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \geqslant 0}$ обладает свойством естественности, то есть для произвольного $f \in Hom_{\mathbb{T}_0}(X,Y)$ имеем

$$C^S_n(f) \circ \varphi_n = \varphi_n \circ \Lambda_n(f).$$

Следующей нашей целью является построение цепного отображения, действующего в обратную сторону $\psi = \{\psi_n : C^S_n(X) \to \Lambda_n(X)\}_{n \geqslant 0}$.

Построение гомоморфизмов ψ_n сводится к заданию их на свободных образующих группы $C_n^S(X)$, коими являются классы $u + D_n(X)$, где $u : \left(\overset{n}{\times} I_1, \overset{n}{\times} \iota_1\right) \to (X, \tau)$ — невырожденные толерантные сингулярные кубы. Примем сокращенное обозначение $I_1^n = \overset{n}{\times} I_1$ и будем рассматривать конечные линейные комбинации $\sum \alpha_j A_j$, где $\alpha_j \in Z,\ A_j \subset I_1^n$. Распространим отображение u на эти линейные комбинации по формуле

$$u\left(\sum \alpha_j A_j\right) = \sum \alpha_j u|A_j. \tag{44}$$

В частности, если определим $\partial_n I_1^n$ как формальную линейную комбинацию

$$\partial_n I_1^n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[I_1^{j-1} \times \{0\} \times I^{n-j} - I_1^{j-1} \times \{1\} \times I^{n-j}\right],$$

то согласно (41) можно записать

$$\partial_n(u) = u\left(\partial_n I_1^n\right). \tag{45}$$

Эти же идеи применим при работе с толерантными симплексами. Толерантный сингулярный симплекс $\sigma : \Lambda_n \to X$ однозначно определяется упорядоченным набором $\langle \sigma(P_0), \dots, \sigma(P_n) \rangle$ попарно толерантных точек из (X, τ). Здесь и далее упорядоченность набора обозначается скобками $\langle \dots \rangle$. Исходя из этого, симплекс σ мы будем рассматривать как толерантное отображение, сохраняющее упорядочение, $\sigma : \langle \sigma(P_0), \dots, \sigma(P_n) \rangle \to X$. В дальнейших построениях толерантные симплексы (Λ^n, τ_n) мы будем рассматривать как упорядоченные наборы точек толерантного куба (I_1^n, ι_1^n)

$$\Lambda^n = \left\langle P_0, P_1, \dots, P_n \,\middle|\, (\forall\ k = \overline{0,n}) \quad P_k = \left(\varepsilon_1^{(k)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)}\right) \in I_1^n \right\rangle.$$

В таком случае толерантный сингулярный куб $u : (I_1^n, \iota_1^n) \to (X, \tau)$ определяет толерантный сингулярный симплекс $\sigma = u|\Lambda^n = u|\left\langle P_0, \dots, P_n \right\rangle : \Lambda^n \to X$.

Определим

$$\partial'_n \Lambda^n = \partial'_n(\langle P_0, P_1, \dots, P_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \partial'^{(j)}_n(\langle P_0, P_1, \dots, P_n\rangle),$$

где

$$\partial'^{(j)}_n(\langle P_0, P_1, \dots, P_n\rangle) = \left\langle P_0, \dots, \widehat{P}_j, \dots, P_n \right\rangle.$$

Тогда перенос соглашения (44) на симплексы дает аналог формулы (45)

$$\partial'_n(\sigma) = \partial'_n(u|\Lambda^n) = u|\partial'\Lambda^n = \sigma(\partial'\Lambda^n). \tag{46}$$

Построим теперь вспомогательное отображение $\mathcal{D}_n$, сопоставляющее толерантному симплексу $\Lambda^n = \langle P_0, \dots, P_n\rangle \subset I_1^n$ формальную линейную комбинацию $(n+1)$-мерных симплексов, которая геометрически иллюстрируется разбиением многомерной призмы на тетраэдры

$$\mathcal{D}_n(\Lambda^n) = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \mathcal{D}^{(j)}_n(\Lambda^n), \tag{47}$$

где

$$\mathcal{D}^{(j)}_n(\Lambda^n) = \mathcal{D}^{(j)}_n(\langle P_0, \dots, P_n\rangle) = \langle (P_0, 1), \dots, (P_j, 1), (P_j, 0), \dots, (P_n, 0)\rangle.$$

На линейные комбинации n-мерных толерантных симплексов отображение $\mathcal{D}_n$ распространяется по линейности.

Договоримся для любого толерантного симплекса $\Lambda^n = \langle P_0, \dots, P_n\rangle \subset \subset I_1^n$ и для любого $\varepsilon = \overline{0, 1}$ записывать

$$\langle (P_0, \varepsilon), \dots, (P_n, \varepsilon)\rangle = \Lambda^n \times \{\varepsilon\} \subset I_1^n \times I_1 = I_1^{n+1},$$

и распространим это соглашение по линейности на линейные комбинации.

Лемма 1. Пусть $\Lambda^n = \langle P_0, \dots, P_n\rangle \subset I_1^n$ — произвольный n-мерный симплекс, тогда

$$\left(\partial'_{n+1} \circ \mathcal{D}_n\right)(\Lambda^n) = \left(\mathcal{D}_{n-1} \circ \partial'_n\right)(\Lambda^n) + (-1)^{n+1}\left[\Lambda^n \times \{0\} - \Lambda^n \times \{1\}\right]. \tag{48}$$

И более общо, для любой линейной комбинации $L = \sum \alpha_i \Lambda_i^n$ имеем

$$\left(\partial'_{n+1} \circ \mathcal{D}_n\right)(L) = \left(\mathcal{D}_{n-1} \circ \partial'_n\right)(L) + (-1)^{n+1}\left[L \times \{0\} - L \times \{1\}\right]. \quad (49)$$

Техника доказательства этого утверждения достаточно стандартная (см., напр., доказательство теоремы 2.2.1 в [2]).

Определим теперь еще одно вспомогательное отображение R_n индукцией по n. Геометрический смысл этого отображения R_n состоит в том, что куб I_1^n сначала разлагается на призмы, с учетом разложения куба I_1^{n-1}, а затем разложить призмы на тетраэдры с помощью $\mathcal{D}_n$. Итак, для $n = 0$ и для 0-мерного куба I_1^0, представляющего собой точку, полагаем

$$R_0(I_1^0) = I_1^0. \quad (50)$$

Для $n = 1$ формально представляем $I_1^1 = I_1^0 \times I_1 = \{(I_1^0, 0), (I_1^0, 1)\} = \{0, 1\}$ и полагаем

$$R_1(I_1^1) = R_1(I_1^0 \times I_1) = \mathcal{D}_0(R_0(I_1^0)) = \mathcal{D}_0(I_1^0) = -\langle 1, 0\rangle. \quad (51)$$

Наконец, для любого $n > 1$, поступаем аналогично, полагая

$$R_n(I_n^1) = R_n(I_1^{n-1} \times I_1) = \mathcal{D}_{n-1}(R_{n-1}(I_1^{n-1})). \quad (52)$$

По построению $R_n(I_1^n)$ представляет собой формальную целочисленную линейную комбинацию n-мерных симплексов, вложенных в I_1^n.

Лемма 2. Для всех $n \geqslant 1$ имеет место формула

$$\partial'_n(R_n(I_1^n)) = R_{n-1}(\partial_n(I_1^n)). \quad (53)$$

Проведем индукцию по n. При $n = 1$ из (51) следует

$$\partial'_1(R_1(I_1^1)) = \partial'_1(-\langle 1, 0\rangle) = -(\langle 0\rangle - \langle 1\rangle) = \langle 1\rangle - \langle 0\rangle.$$

А из (1) и (50) получим

$$R_0(\partial_1(I_1^1)) = R_0((-1)^1[\{0\} - \{1\}]) = -(\langle 0\rangle - \langle 1\rangle) = \langle 1\rangle - \langle 0\rangle.$$

Таким образом, при $n = 1$ формула (53) справедлива. Сделаем предположение индукции о справедливости формулы

$$\partial'_{n-1}(R_{n-1}(I_1^{n-1})) = R_{n-2}(\partial_{n-1}(I_1^{n-1})). \tag{54}$$

Применяя формулы (52), (49), (54), а также определение $\partial_n(I_1^n)$, получаем

$$\partial'_n(R_n(I_1^n)) = \partial'_n(\mathcal{D}_{n-1}(R_{n-1}(I_1^{n-1}))) = \mathcal{D}_{n-2}(\partial'_{n-1}(R_{n-1}(I_1^{n-1})))+$$

$$+(-1)^n\left[R_{n-1}(I_1^{n-1})\times\{0\} - R_{n-1}(I_1^{n-1})\times\{1\}\right] = \mathcal{D}_{n-2}(R_{n-2}(\partial_{n-1}(I_1^{n-1})))+$$

$$+(-1)^n\left[R_{n-1}(I_1^{n-1})\times\{0\} - R_{n-1}(I_1^{n-1})\times\{1\}\right] = R_{n-1}\left\{\partial_{n-1}(I_1^{n-1})\times I_1+\right.$$

$$\left.+(-1)^n\left[I_1^{n-1}\times\{0\} - I_1^{n-1}\times\{1\}\right]\right\} = R_{n-1}\left(\partial_n(I_1^n)\right).$$

Лемма 2 доказана.

Теперь мы можем определить гомоморфизмы $\psi_n : C_n^S(X) \to \Lambda_n(X)$, $n \geqslant 0$, задавая их на свободных образующих группы $C_n^S(X)$ формулой

$$(\forall\ n \geqslant 0)\quad \psi_n\left(u + D_n^S(X)\right) = u|R_n(I_1^n). \tag{55}$$

Докажем, что $\psi = \{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ — цепное отображение, то есть

$$(\forall\ n \geqslant 1)\quad (\partial'_n \circ \psi_n)(\overline{u}) = (\psi_{n-1}\circ\partial_n)(\overline{u}), \tag{56}$$

где $\overline{u} = u + D_n^S(X)$ — произвольный элемент свободного базиса в $C_n^S(X)$, однозначно определяемый невырожденным сингулярным кубом $u : (I_1^n, \iota_1^n) \to (X, \tau)$. Воспользуемся формулами (55), (46), (53), (45) и получим

$$(\partial'_n \circ \psi_n)(\overline{u}) = \partial'_n(u(R_n(I_1^n))) = u(\partial'_n(R_n(I_1^n)))) = u(R_{n-1}(\partial_n I_1^n)) =$$

$$= \psi_{n-1}\left(u|\partial_n I_1^n + D_{n-1}^S(X)\right) = \psi_{n-1}\left(\partial_n u + D_{n-1}^S(X)\right) = (\psi_{n-1}\circ\partial_n)(\overline{u}).$$

Далее с сожалением приходится констатировать, что отображение ψ не является естественным по (X, τ) в категории $\mathbb{T}_0$. Это связано с тем, что композиция $f \circ u$ невырожденного сингулярного куба u с произвольным толерантным отображением f может оказаться вырожденным кубом. В связи с этим мы зафиксируем пространство (X, τ) и рассмотрим категорию $\mathcal{A}(X)$, объектами которого будут подкомплексы цепного комплекса $\Lambda(X)$, упорядоченные по включению, а морфизмами — сами эти включения. Применим в этой ситуации метод ациклических носителей [4].

Каждое толерантное вложение $A \subset X$ индуцирует вложение симплициальных комплексов $\overset{\circ}{S}(A) \subset \overset{\circ}{S}(X)$, вершинами которых являются точки из A и из X, а симплексами являются конечные наборы попарно толерантных вершин.

Напомним [2], что свободными образующими групп цепей $\Lambda_n(X)$ являются толерантные отображения $\sigma_n : (\Lambda^n, \tau_n) \to (X, \tau)$, которые однозначно определяются упорядоченным симплексом $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$, в котором $x_i = \sigma(P_i)$, $i = \overline{1, n}$. Договоримся обозначать $\langle \sigma \rangle = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Множество $\sigma_n(\Lambda^n) = \{x_0, \ldots, x_n\}$, если удалить точки встречающиеся повторно, является симплексом в симплициальном комплексе $\overset{\circ}{S}(X)$. Обозначим этот симплекс $\{\sigma_n\}$. Воспользуемся стандартным обозначением: $\overline{\sigma}_n = \overset{\circ}{S}(\sigma_n(\Lambda^n)) \subset \overset{\circ}{S}(X)$ — подкомплекс в $\overset{\circ}{S}(X)$, состоящий из всех граней (то есть подмножеств) симплекса $\{\sigma_n\}$. Поскольку каждый сингулярный симплекс σ_n можно отождествить с упорядоченным симплексом $\langle \sigma_n \rangle$ и это отождествление согласовано с граничными операторами, то цепной комплекс $\Lambda(X)$ можно отождествить с комплексом упорядоченных цепей симплициального комплекса $\overset{\circ}{S}(X)$, который в связи с этим мы будем обозначать $\Lambda(\overset{\circ}{S}(X))$. Таким образом, для толерантного вложения $A \subset X$, индуцирующего вложение $\overset{\circ}{S}(A) \subset \overset{\circ}{S}(X)$, имеется вложение цепных комплексов

$$\Lambda(A) = \Lambda(\overset{\circ}{S}(A)) \subset \Lambda(\overset{\circ}{S}(X)) = \Lambda(X). \tag{57}$$

Обозначим через $\Lambda(\sigma_n) = \Lambda(\sigma_n(\Lambda^n))$, тогда толерантное вложение

$\sigma_n(\Lambda^n) \subset X$ согласно формуле (57) дает вложение цепных комплексов $\Lambda(\sigma_n) \subset \Lambda(X)$. Если $\sigma_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(X)$ — толерантный сингулярный симплекс, являющийся гранью симплекса $\sigma_n \in \Lambda_n(X)$, то есть $\partial'^{(j)}(\sigma_n) = \langle x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n \rangle = \pm\sigma_{n-1}$, для некоторого $j = \overline{0, n}$, то в знак этого будем писать $\sigma_{n-1} < \sigma_n$. Из (57) следует

$$\sigma_{n-1} < \sigma_n \Rightarrow \Lambda(\sigma_{n-1}) \subseteq \Lambda(\sigma_n). \tag{58}$$

В терминологии работы [4] формула (58) означает, что соответствие $\sigma_n \mapsto \Lambda(\sigma_n)$ определяет функцию-носителя из цепного комплекса $\Lambda(X)$ в $\Lambda(X)$. А так как все точки толерантного подпространства $\sigma_n(\Lambda^n) \subset X$ попарно толерантны, то подпространство $(\sigma_n(\Lambda^n), \tau)$ толерантно стягиваемое [2, предложение 1.2.3]. Следовательно, цепной комплекс $\Lambda(\sigma_n)$ ацикличен в положительных размерностях (а пополненный(приведенный) комплекс ацикличен во всех размерностях). Тем самым имеем все условия для применения метода ациклических носителей.

Рассмотрим теперь два отображения $\chi = \psi \circ \varphi$, $\mathbf{1}_{\Lambda(X)} : \Lambda(X) \to \Lambda(X)$. Возьмем произвольный элемент свободного базиса в $\Lambda_n(X)$, то есть произвольный сингулярный симплекс $\sigma_n : (\Lambda^n, \tau_n) \to (X, \tau)$. По построению (см. формулы (55), (43), (52), (47)) имеем

$$\chi_n(\sigma_n) = (\psi_n \circ \varphi_n)(\sigma_n) = (-1)^n \sigma \circ p_n | R_n(I_1^n) \in \Lambda_n(\sigma_n). \tag{59}$$

Формула (59) означает (см. [4]), что отображение χ переносится построенной выше функцией-носителем. Очевидно, что отображение $\mathbf{1}_{\Lambda(X)}$ также обладает этим свойством.

Наконец, опять же по определению отображений φ и ψ, имеем $\chi_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 = \mathbf{1}_{\Lambda_0(X)}$, что означает (см. [4]), что отображение χ является собственным.

Осталось констатировать, что налицо все условия теоремы 3.4.13 [4], из которой следует существование цепной гомотопии

$$\chi = \psi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_{\Lambda(X)}. \tag{60}$$

Рассмотрим еще одну пару цепных отображений $\chi' = \varphi \circ \psi$, $\mathbf{1}_{C^S(X)}$, к которым также применим метод ациклических носителей. Для каждого толерантного сингулярного куба $u_n : (I_1^n, \iota_1^n) \to (X, \tau)$ подпространство $u_n(I_1^n) \subset (X, \tau)$ является толерантно стягиваемым. Следовательно, цепной подкомплекс $C^S(u_n) = C^S(u_n(I_1^n)) \subset C^S(X)$ является ацикличным в положительных размерностях, а соответствующий приведенный (пополненный) цепной комплекс является ацикличным. Если куб $u_{n-1} : I_1^{n-1} \to X$ является одной из граней куба u_n, то есть $(\exists\ j = \overline{1,n})$ $(\exists\ \alpha \in \{0,1\})$ $\quad u_{n-1} = u_n|_{\varepsilon_j=\alpha}$, что будем обозначать $u_{n-1} < u_n$, тогда очевидно $u_{n-1}(I_1^{n-1}) \subseteq u_n(I_1^n)$. Следовательно $C^S(u_{n-1}) \subseteq C^S(u_n)$. Поскольку произвольный элемент $\overline{u}_n = u_n + D_n^S(X)$ свободного базиса группы $C_n^S(X)$ однозначно определяется невырожденным сингулярным кубом u_n, то естественно обозначить $C^S(\overline{u}_n) = C^S(u_n) = C^S(u_n(I_1^n))$. В этих обозначениях имеем

$$\overline{u}_{n-1} < \overline{u}_n \Rightarrow C^S(\overline{u}_{n-1}) \subseteq C^S(\overline{u}_n).$$

Это значит (см. [4]), что соответствие $\overline{u}_n \mapsto C^S(\overline{u}_n)$ определяет ациклическую функцию-носитель из $C^S(X)$ в $C^S(X)$.

С помощью определений функций ψ и φ получаем

$$\chi_n'(\overline{u}_n) = (\varphi_n \circ \psi_n)(\overline{u}_n) = u_n|(R_n(I_1^n) \circ P_n) \in C_n^S(\overline{u}_n),$$

что означает, что отображение χ' переносится функцией-носителем. Отображение $\mathbf{1}_{C^S(X)}$ с очевидностью обладает этим же свойством.

Так как отображения χ' и $\mathbf{1}_{C^S(X)}$ в нулевой размерности совпадают, то их пополнения совпадают в размерности -1. Отсюда следует [4, следствие 3.4.5] существование цепной гомотопии

$$\chi' = \varphi \circ \psi \simeq \mathbf{1}_{C^S(X)}. \tag{61}$$

Из цепных гомотопий (60) и (61) следуют равенства для индуцированных гомоморфизмов групп гомологий

$$\psi_* \circ \varphi_* = \mathbf{1}_{H^\wedge(X)}, \qquad \varphi_* \circ \psi_* = \mathbf{1}_{H^S(X)}. \tag{62}$$

Следовательно, имеется изоморфизм $\varphi_* : H^{\Lambda}(X) \cong H^S(X)$. А так как цепное отображение $\varphi : \Lambda(X) \to C^S(X)$ является естественным по (X, τ), то и изоморфизм φ_* является естественным по (X, τ).

Доказательство теоремы 3 завершено.

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception, in The Topology of 3–Monifolds. New-York: M.K. Ford(ed), 1962.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.

3. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

4. *Хилтон П., Уайли С.* Теория гомологий. М.: Мир, 1966.

УДК 517.927

В.Н. Поляков

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Замкнутые линейные операторы с плотной в гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}$ областью определения будем называть N-операторами [1]. N-оператор A назовем J-формально нормальным, если $D(JAJ) \subseteq \subseteq D(A^*)$ и $||JAJf|| = ||A^*f||$ для всех $f \in D(JAJ) = JD(A)$. Здесь $D(A)$ — область определения оператора A, $\mathfrak{N}(A)$ — его аннулирующее подпространство, а J — некоторый оператор сопряжения: $(Jf, Jg) = (g, f)$ и $J^2 f = f$ для любых $f, g \in \mathfrak{B}$. J-формально нормальный оператор A, для которого $D(JAJ) = D(A^*)$, будем называть J-нормальным. J-формально нормальными операторами будут, например, J-симметрические N-операторы, для которых просто $JAJ \subseteq A^*$.

J-нормальными будут, например, J-самосопряженные операторы, для которых $JAJ = A^*$ [2].

Мы рассмотрим здесь вопрос о расширении J-формально нормального оператора до J-нормального. Полученные результаты "параллельны"результатам статьи [3], посвященной нормальным расширениям формально нормальных операторов.

Известно [3], что если A и B суть N-операторы и $A \subset B$, то

$$D(B) = D(A) + \mathfrak{N}(I + A^*B) \tag{1}$$

и сумма в правой части равенства является прямой суммой.

Положим $\bar{A} = A^*|D(JAJ)$, где A — J-формально нормальный оператор в пространстве $\mathfrak{B}$. Таким образом, $\bar{A} \subset A^*,\ A \subset \bar{A}^*$. Следовательно, в силу (1)

$$D(\bar{A}^*) = D(A) + \mathfrak{M},\ \ \mathfrak{M} = \mathfrak{N}(I + A^*\bar{A}^*) \tag{2}$$

$$D(A^*) = D(\bar{A}) + \bar{\mathfrak{M}},\ \ \bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}(I + \bar{A}^*A^*). \tag{3}$$

Нам нужно найти такой оператор N, чтобы

$$A \subset N \subset \bar{A}^*, \quad \bar{A} \subset N^* \subset A^*$$

и чтобы $D(JNJ) = D(N^*)$ и $||JNJf|| = ||N^*f||$ для $f \in D(JNJ)$. Заметим, что оператор $\bar{A}$, как легко видеть, является J-формально нормальным оператором.

Теорема 1. *Если A — J-формально нормальный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}$, а N — его J-нормальное расширение в $\mathfrak{B}$, то существует такое разложение*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2,\ \ \mathfrak{M} = \mathfrak{N}(I + A^*\bar{A}^*) \tag{4}$$

в прямую сумму, что

$$\mathfrak{G}(\bar{A}^*|\mathfrak{M}_1) \perp \mathfrak{G}(\bar{A}^*|\mathfrak{M}_2), \tag{5}$$

$$\bar{A}^*\mathfrak{M}_2 = \bar{\mathfrak{M}}_1 = J\mathfrak{M}_1, \tag{6}$$

$$||J\bar{A}^*J\varphi|| = ||A^*\varphi||, \quad \varphi \in J\mathfrak{M}_1, \tag{7}$$

$$D(N) = D(A) + \mathfrak{M}_1, \quad Nf = \bar{A}^*f, \quad f \in D(N). \tag{8}$$

($\mathfrak{G}(A)$ — график оператора A).

Обратно, если задано разложение $\mathfrak{M}$ в прямую сумму (4), удовлетворяющее условиям (5)–(7), то оператор N, определяемый соотношениями (8), будет J-нормальным расширением оператора A.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Применяя к нашему случаю результаты теоремы 1 из [3], видим, что N является замкнутым расширением оператора A в том и только в том случае, когда имеют место соотношения (4), (5) и (8). Мы покажем, что N есть J-нормальное расширение оператора A тогда и только тогда, когда выполняются условия (6) и (7).

Пусть N — J-нормальное расширение оператора A, причем $D(N) = D(A) + \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}(I + A^*N)$. Тогда $JD(N) = D(JNJ) = D(N^*)$, то есть $JD(A) + J\mathfrak{M}_1 = D(\bar{A}) + \bar{\mathfrak{M}}_1$, $\bar{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{N}(I + \bar{A}^*N^*)$. Так как $J\mathfrak{M}_1 \subset JD(N) = D(N^*)$, а $N \subset \bar{A}^*$, $N^* \subset A^*$, то должно иметь место равенство (7). Покажем теперь, что справедливо соотношение (6). То, что $\bar{A}^*\mathfrak{M}_2 = \bar{\mathfrak{M}}_1$, известно [3]. Остается показать, что $\bar{A}^*\mathfrak{M}_2 = J\mathfrak{M}_1$. Предположим, что $h \in JD(N)$ и что

$$Jh = f' + \varphi', \quad f' \in D(A), \quad \varphi' \in \mathfrak{M}_1,$$

ибо тогда $Jh \in D(N)$. Тогда, очевидно,

$$h = J(Jh) = Jf' + J\varphi'. \tag{9}$$

Пусть, кроме того,

$$h = f + \bar{A}^*\psi, \quad f \in D(JAJ), \quad \psi \in \mathfrak{M}_2. \tag{10}$$

Покажем, что $Jf' = f$, $\bar{A}^*\psi = J\varphi'$. Для любого $g \in D(JAJ) \subset D(JNJ)$ имеем соотношение

$$(N^*h, N^*g) = (JNJh, JNJg). \tag{11}$$

Теперь, используя (9) и (10), из (11) находим, что

$$(\bar{A}f, \bar{A}g) + (A^*\bar{A}^*\psi, \bar{A}g) = (JAf', JAJg) + (J\bar{A}^*\varphi', JAJg)$$

или

$$(JAJf, JAJg) + (A^*\bar{A}^*\psi, \bar{A}g) = (AJg, Af') + (AJg, \bar{A}^*\varphi')$$

в силу определения операторов A и J. Но так как $\varphi', \psi \in \mathfrak{M}$, то $A^*\bar{A}^*\psi = -\psi$, $A^*\bar{A}^*\varphi' = -\varphi'$ и, значит,

$$(AJg, AJf - Af') = (\psi, \bar{A}g) - (Jg, \varphi')$$

или

$$(AJg, A(Jf - f')) = (\bar{A}^*\psi - J\varphi', g).$$

Но из (9) и (10) следует, что $\bar{A}^*\psi - J\varphi' = Jf' - f$. Поэтому

$$(AJg, A(Jf - f')) + (Jg, Jf - f') = 0$$

для всех $g \in JD(A)$. Полагая $g = f - Jf'$, то есть $Jg = Jf - f'$, получим

$$(A(Jf - f'), A(Jf - f')) + (Jf - f', Jf - f') = 0.$$

Таким образом, $Jf = f'$ или $f = Jf'$ и $\bar{A}^*\psi = J\varphi'$. Применяя эти соотношения к $h = J\varphi'$ будем иметь $J\mathfrak{M}_1 \subset \bar{A}^*\mathfrak{M}_2$, а применяя к $h = \bar{A}^*\psi$, получим $\bar{A}^*\mathfrak{M}_2 \subset J\mathfrak{M}_1$. Следовательно, равенство (6) доказано.

Для доказательства обратного утверждения теоремы предположим, что имеется замкнутое расширение N оператора A, заданное формулами (8), и что имеют место равенства (6) и (7). Поскольку $D(N^*) = D(JAJ) + \bar{\mathfrak{M}}_1 = JD(A) + \bar{\mathfrak{M}}_1$ и $\bar{\mathfrak{M}}_1 = J\mathfrak{M}_1$, мы видим, что

$$D(JNJ) = JD(N) = JD(A) + J\mathfrak{M}_1 = D(N^*).$$

Остается показать, что $||JNJh|| = ||N^*h||,\ h \in D(N^*)$. Пусть $h \in D(N^*)$ и $h = f + \varphi,\ f \in D(JAJ) = JD(A),\ \varphi \in \bar{\mathfrak{M}}_1 = J\mathfrak{M}_1$. Тогда $N^*h = \bar{A}f + A^*\varphi$ и мы имеем

$$||h||^2 + ||N^*h||^2 = ||f||^2 + ||\varphi||^2 + ||\bar{A}f||^2 + ||A^*\varphi||^2 =$$

$$= ||f||^2 + ||\varphi||^2 + ||JAJf||^2 + ||J\bar{A}^*J\varphi||^2.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathfrak{G}(\bar{A}) \perp \mathfrak{G}(A^*|\bar{\mathfrak{M}}_1)$ [1], равенством (7) и тем, что A — J-формально нормальный оператор. Но из равенства $h = f + \varphi$ имеем $Jh = Jf + J\varphi$, причем $Jh \in D(N),\ Jf \in D(A),\ J\varphi \in \mathfrak{M}_1$. Так как $A \subset N \subset \bar{A}^*$, то $\mathfrak{G}(A) \perp \mathfrak{G}(\bar{A}^*|\mathfrak{M}_1)$ и, следовательно,

$$||f||^2 + ||\varphi||^2 + ||JAJf||^2 + ||J\bar{A}^*J\varphi||^2 =$$

$$= ||f||^2 + ||\varphi||^2 + ||A(Jf)||^2 + ||\bar{A}^*(J\varphi)||^2 =$$

$$= ||h||^2 + ||N(Jh)||^2 = ||h||^2 + ||JNJh||^2.$$

Таким образом, $||JNJh|| = ||N^*h||,\ h \in D(N^*) = JD(N)$ и, следовательно, N — J-нормальное расширение A. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос о расширении J-формально нормального оператора с выходом из исходного пространства. Как известно ([3]), если A_1 — N-оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{B}_1$, а B — замкнутое расширение оператора A_1 в более широком гильбертовом пространстве$\mathfrak{B}$, то

$$D(B) = D(A_1) + \mathfrak{N}(P_1 + A_1^* P_1 B), \tag{12}$$

где сумма — прямая, а P_1 — проектор в $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_1$.

Теорема 2. *Пусть A_1 — J_1-формально нормальный оператор в пространстве $\mathfrak{B}_1$, а N — его J-нормальное расширение в пространстве $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2$. Тогда $\bar{A}_1 \subset N^*$ и справедливы разложения в прямую сумму*

$$D(N) = D(A_1) + \mathfrak{L}, \quad D(N^*) = D(\bar{A}_1) + \bar{\mathfrak{L}}, \tag{13}$$

где

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}(P_1 + A_1^* P_1 N), \quad \bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{N}(P_1 + \bar{A}_1^* P_1 N^*). \tag{14}$$

Кроме того,

$$J\mathfrak{L} = \bar{\mathfrak{L}} \tag{15}$$

и

$$P_1\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}^1, \quad P_1\bar{\mathfrak{L}} \subset \bar{\mathfrak{M}}^1.^* \tag{16}$$

Доказательство

Соотношения (13) и (14) прямо следуют из (12) и включения $\bar{A}_1 \subset N^*$. Пусть $f \in D(A_1)$ и $h \in D(JNJ) = D(N^*)$, тогда

$$(A_1 f, P_1 h) = (A_1 f, h) = (Nf, h) = (f, N^* h) = (f, P_1 N^* h),$$

откуда следует, что $P_1 h \in D(A_1^*)$ и

$$A_1^* P_1 h = P_1 N^* h \quad (h \in D(N^*)). \tag{17}$$

Если взять, в частности, $\varphi \in JD(A_1) = D(JA_1J) = J_1 D(A_1) \subset \mathfrak{B}_1$, то из (17) находим, что $A_1^* P_1 \varphi = A_1^* \varphi = \bar{A}_1 \varphi = P_1 N^* \varphi$ и, следовательно,

$$||P_1 N^* \varphi||^2 = ||\bar{A}_1 \varphi||^2 = ||A_1^* \varphi||^2 = ||J_1 A_1 J_1 \varphi||^2 = ||JNJ\varphi||^2 = ||N^* \varphi||^2.$$

Поэтому $P_2 N^* \varphi = 0$ или $P_1 N^* \varphi = N^* \varphi = \bar{A}_1 \varphi$. Таким образом, $\bar{A}_1 \subset N^*$. Если теперь $h' \in D(N)$, то так же, как и выше находим, что $P_1 h' \in D(\bar{A}_1^*)$ и

$$\bar{A}_1^* P_1 h' = P_1 N h' \quad (h' \in D(N)). \tag{18}$$

Следовательно, $P_1 D(N^*) \subset D(A_1^*)$, $P_1 D(N) \subset D(\bar{A}_1^*)$. Так как $\bar{A}_1 \subset N^*$, то из формулы (12) имеем $D(N^*) = D(\bar{A}_1) + \bar{\mathfrak{L}}$.

Пусть теперь $h \in JD(N) = JD(A_1) + J\mathfrak{L}$, то есть $h = f + \varphi$, $f \in JD(A_1)$, $\varphi \in J\mathfrak{L}$. Пусть, кроме того, $h = f' + \psi$, $f' \in D(\bar{A}_1)$, $\psi \in \bar{\mathfrak{L}}$. Тогда

$$(JNJh, JNJg) = (N^* h, N^* g) \tag{19}$$

---

*Здесь и далее J, J_1 и J_2 связаны соотношениями $J_i = J|\mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2$.

или

$$(JA_1Jf, JA_1Jg) + (JNJ\varphi, JA_1Jg) = (N^*h, N^*g) = (\bar{A}_1f' + N^*\psi, \bar{A}_1g) =$$

$$= (\bar{A}_1f', \bar{A}_1g) + (N^*\psi, \bar{A}_1g) = (\bar{A}_1f', \bar{A}_1g) - (\psi, g).$$

В то же время

$$(JNJ\varphi, JA_1Jg) = (A_1Jg, NJ\varphi) = (A_1Jg, P_1NJ\varphi) = (Jg, A_1^*P_1NJ\varphi) =$$

$$= (Jg, -P_1J\varphi) = -(P_1Jg, J\varphi) = -(Jg, J\varphi) = -(\varphi, g).$$

Таким образом, равенство (19) приобретает следующий вид:

$$(JA_1Jf, JA_1Jg) - (\varphi, g) = (\bar{A}_1f', \bar{A}_1g) - (\psi, g)$$

или

$$(JA_1Jf, JA_1Jg) - (\varphi, g) = (JA_1Jf', JA_1Jg) - (\psi, g)$$

для всех $g \in D(JA_1J)$. Но $\psi - \varphi = f - f'$ и, если еще положить $g = f - f'$, то получим

$$(JA_1J(f - f'), JA_1J(f - f')) + (f - f', f - f') = 0,$$

откуда следует, что $f = f',\ \varphi = \psi$. Поэтому равенство $J\mathfrak{L} = \bar{\mathfrak{L}}$ справедливо.

Применяя (17) к элементу $\varphi \in \bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{N}(P_1 + \bar{A}_1^*P_1N^*)$, будем иметь $P_1N^*\varphi = A_1^*P_1\varphi$. Кроме того,

$$0 = (P_1 + \bar{A}_1^*P_1N^*)\varphi = P_1\varphi + \bar{A}_1^*P_1N^*\varphi = P_1\varphi + \bar{A}_1^*A_1^*P_1\varphi = (I + \bar{A}_1^*A_1^*)P_1\varphi.$$

Таким образом, $P_1\varphi \in \bar{\mathfrak{M}}^1$. Но для $\varphi' \in \mathfrak{L}$ будет $\varphi' \in D(N)$ и стало быть в силу (18) имеет место равенство $P_1N\varphi' = \bar{A}_1^*P_1\varphi'$ и, кроме того,

$$0 = (P_1 + A_1^*P_1N)\varphi' = P_1\varphi' + A_1^*P_1N\varphi' = P_1\varphi' + A_1^*\bar{A}_1^*P_1\varphi' = (I + A_1^*\bar{A}_1^*)P_1\varphi'.$$

Таким образом, $P_1\varphi' \in \mathfrak{M}^1$.

Окончательно имеем $P_1\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}^1,\ P_1\bar{\mathfrak{L}} \subset \bar{\mathfrak{M}}^1$ или $P_1\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}^1,\ P_1J\mathfrak{L} \subset \subset \bar{\mathfrak{M}}^1$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть A_1 — J_1-формально нормальный оператор в пространстве $\mathfrak{B}_1$, а N — его J-нормальное расширение в пространстве $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2$. Положим $D_1 = D(N) \cap \mathfrak{B}_1$, $D_2 = D(N) \cap \mathfrak{B}_2$. Если D_2 плотно в $\mathfrak{B}_2$, то операторы $\hat{A}_1 = N|D_1$ и $A_2 = N|D_2$ — J_i-формально нормальны в $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ соответственно $(i = 1, 2)$.*

Доказательство

Если $h \in D_2$, то из (18) следует, что $P_1 N h = 0$, то есть $Nh \in \mathfrak{B}_2$. Но тогда $Jh \in D(N^*) \cap \mathfrak{B}_2$, поэтому из (17) следует, что $N^*(Jh) \in \mathfrak{B}_2$. Если же $h' \in D(N^*) \cap \mathfrak{B}_2$, то из (17) снова следует, что $N^* h' \in \mathfrak{B}_2$, но тогда $Jh' \in D(N) \cap \mathfrak{B}_2$ и стало быть $N(Jh') \in \mathfrak{B}_2$. Поэтому, положив $A_2 = N|D_2$, получим плотно заданный в $\mathfrak{B}_2$ оператор, и он замкнут, так как замкнут N. Теперь для $g \in D_2$ и $h \in JD_2$ имеем

$$(A_2 g, h) = (Ng, h) = (g, N^* h),$$

откуда следует, что $h \in D(A_2^*)$ и $A_2^* h = N^* h$. Поэтому $JD_2 \subset D(A_2^*)$ и для $h \in JD_2 = JD(A_2)$

$$||JA_2Jh||^2 = ||JNJh||^2 = ||N^*h||^2 = ||A_2^*h||^2,$$

то есть A_2 — J_2-формально нормален в $\mathfrak{B}_2$.

Пусть теперь $h \in D_1$ и $g \in JD_2 \subset \mathfrak{B}_2$. Тогда

$$(P_2 N h, g) = (Nh, g) = (h, N^* g) = (h, A_2^* g) = 0$$

и так как D_2 плотно в $\mathfrak{B}_2$, а потому и JD_2 тоже, то $P_2 N h = 0$, значит $\hat{A}_1 h \in \mathfrak{B}_1$ при всех $h \in D_1$. Так как, очевидно, $D(A_1) \subset D_1$, то отсюда следует, что D_1 плотно в $\mathfrak{B}_1$. Применяя те же рассуждения, что и в случае оператора A_2, легко показать, что $\hat{A}_1$ — J-формально нормален в $\mathfrak{B}_1$. Действительно, для $g \in D_1$ и $h \in JD_1$ имеем

$$(\hat{A}_1 g, h) = (Ng, h) = (g, N^* h),$$

откуда следует, что $h \in D(\hat{A}_1^*)$ и $\hat{A}_1^* h = N^* h$.

Таким образом, $JD_1 = JD(\hat{A}_1) \subset D(\hat{A}_1^*)$ и для $h \in JD_1$

$$||J\hat{A}_1Jh||^2 = ||JNJh||^2 = ||N^*h||^2 = ||\hat{A}_1^*h||^2.$$

Теорема доказана.

Далее, как и в [3] предположим, что A_1 — максимальный J_1-формально нормальный оператор в $\mathfrak{B}_1$, то есть что он не имеет нетривиальных J_1-нормальных расширений в $\mathfrak{B}_1$. В таком случае если A_1 имеет J-нормальное расширение N_1 в $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2$ с $D_2 = D(N_1) \cap \mathfrak{B}_2$ плотным в $\mathfrak{B}_2$, то по теореме 3 $A_1 = \hat{A}_1$ и

$$A_1 \subset N \subset N_1 \subset \bar{N}^*,$$

где

$$N = A_1 \oplus A_2,\ N^* = A_1^* \oplus A_2^*,\ \bar{N}^* = \bar{A}_1^* \oplus \bar{A}_2^*.$$

Мы можем теперь к оператору N применить теорему 1 и охарактеризовать все J-нормальные расширения оператора N в $\mathfrak{B}$. Пусть

$$\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{N}(I + A_1^*\bar{A}_1^*), \quad \bar{\mathfrak{M}}^1 = \mathfrak{N}(I + \bar{A}_1^*A_1^*)$$

и пусть, кроме того,

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{N}(I + A_2^*\bar{A}_2^*), \quad \bar{\mathfrak{M}}^2 = \mathfrak{N}(I + \bar{A}_2^*A_2^*).$$

Если положить

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}(I + N^*\bar{N}^*), \quad \bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}(I + \bar{N}^*N^*),$$

где I — единичный оператор в $\mathfrak{B}$, то легко видеть, что

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \oplus \mathfrak{M}^2, \quad \bar{\mathfrak{M}} = \bar{\mathfrak{M}}^1 \oplus \bar{\mathfrak{M}}^2$$

и

$$D(\bar{N}^*) = D(N) + \mathfrak{M}, \quad D(N^*) = JD(N) + \bar{\mathfrak{M}}.$$

Теорема 4. *Если* A_1 *— максимальный* J_1*-формально нормальный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{B}_1$*, а* N_1 *— его* J*-нормальное расширение в пространстве* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \oplus \mathfrak{B}_2$*, такое, что* $D(N_1) \cap \mathfrak{B}_2$ *плотно в* $\mathfrak{B}_2$*, то*

$$D(N_1) = D(N) + \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}(I + N^* N_1)$$

и, кроме того,

$$P_1\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}^1, \;\; P_1\bar{\mathfrak{M}}_1 = P_1 J\mathfrak{M}_1 \subset \bar{\mathfrak{M}}^1, \;\; P_2\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}^2,$$

$$P_2\bar{\mathfrak{M}}_1 = P_2 J\mathfrak{M}_1 \subset \bar{\mathfrak{M}}^2, \;\; \dim \mathfrak{M}_1 = \dim \bar{\mathfrak{M}}_1 = \dim \mathfrak{M}_2 =$$

$$= \dim \bar{\mathfrak{M}}_2 = \dim \mathfrak{M}^1 = \dim \mathfrak{M}^2 = \dim P_1\mathfrak{M}_1.$$

Если $\dim \mathfrak{M}^1 < \infty$*, то* $P_1\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}^1, \;\; P_2\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}^2$.

Библиографический список

1. *Наймарк М.А.* О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. №4. С. 53–104.

2. *Глазман И.М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифферциальных операторов / Гос. изд-во физ.-мат. литературы. М., 1963. С. 118–129.

3. *Biriuk G., Coddington E.* Normal extensions of unbounded formally normal operators // J. of Math. and Mech. 1964. V. 13, № 4.

УДК 519.21

А.В. Шутов

О МИНИМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ[1]

Основные определения и обозначения

Пусть α — иррационально, разложение α в цепную дробь имеет вид $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots]$, и $\frac{P_n}{Q_n}$ — n-я подходящая дробь к α.

Аналогично работе [2] рассмотрим множество

$$P(n) = \{\Pi(n) : n = \sum_{i \geqslant 1} z_i' Q_{i-1}, z_i' \in \mathbb{Z}\}$$

представлений числа n в виде сумм и разностей знаменателей подходящих дробей к α. Также рассмотрим множество

$$P^+(n) = \{\Pi(n) \in P(n), \text{ все } z_i' \geqslant 0\}.$$

разбиений числа n на слагаемые, равные знаменателям подходящих дробей к α.

Для представления $\Pi(n) : n = \sum\limits_{i \geqslant 1} z_i' Q_{i-1}, z_i' \in \mathbb{Z}$ рассмотрим его длину

$$|\Pi(n)| = \sum_{i \geqslant 1} |z_i'|.$$

Представление $\Pi(n)$ будем называть минимальным (положительно минимальным), если $|\Pi(n)| \leqslant |\Pi'(n)|$ для всех $\Pi'(n) \in P(n)$ ($\Pi'(n) \in P^+(n)$ соответственно). Очевидно, что минимальное и положительно минимальное представление в общем случае не единственно.

Важным примером представления $\Pi(n) \in P^+(n)$ является представление n в системе счисления Цеккендорфа:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00435).

$$\Pi^Z(n) : n = \sum_{i=1}^{t} z_i Q_{i-1}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

1) $0 \leqslant z_1 \leqslant q_1 - 1$,

2) $0 \leqslant z_i \leqslant q_i$ при $2 \leqslant i \leqslant t$,

3) если $z_i = q_i$, то $z_{i-1} = 0$.

Заметим, что с точки зрения информатики разложение n в систему счисления Цеккендорфа представляет собой разложение по жадному алгоритму.

Рассмотрим функции

$$l^Z(\alpha, n) = |\Pi^Z(n)|,$$

$$l^+(\alpha, n) = \min\{|\Pi(n)| : \Pi(n) \in P^+(n)\},$$

$$l(\alpha, n) = \min\{|\Pi(n)| : \Pi(n) \in P(n)\}.$$

Ясно, что

$$l(\alpha, n) \leqslant l^+(\alpha, n) \leqslant l^Z(\alpha, n).$$

Задача нахождения $l(\alpha, n)$ и $l^+(\alpha, n)$ имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим графы $G = (V, E)$ и $G^+ = (V, E^+)$, устроенные следующим образом. Множество вершин V графов G и G^+ занумеровано целыми неотрицательными числами: $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, \}$. Вершины v_i, v_j соединены ребром из E тогда и только тогда, когда $|i - j| = Q_k$ для некоторого k. Аналогично, вершины v_i, v_j соединены ориентированным ребром из E^+, если $j - i = Q_k$ для некоторого k. Тогда $l(\alpha, n)$ ($l^+(\alpha, n)$) есть расстояние между вершинами v_0 и v_n в графе G (G^+).

Функция $l(\alpha, n)$ обладает следующим свойством квазипериодичности, отличающим ее от $l^+(\alpha, n)$ и $l^Z(\alpha, n)$.

Теорема 1. *Для любых n, k справедливо равенство*

$$|l(\alpha, n+Q_k) - l(\alpha, n)| \leqslant 1. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\Pi(n) : n = \sum\limits_{i\geqslant 1} z'_i Q_{i-1}$ — минимальное разложение числа n. Пусть

$$z''_i = \begin{cases} z'_i, & i \neq k \\ z'_i + 1, & i = k \end{cases}.$$

Тогда определено разложение $\Pi'(n+Q_k) : n+Q_k = \sum\limits_{i\geqslant 1} z''_i Q_{i-1}$. Следовательно,

$$l(\alpha, n+Q_k) \leqslant |\Pi'(n+Q_k)| = l(\alpha, n) + 1. \tag{3}$$

С другой стороны, пусть $\Pi(n+Q_k) : n+Q_k \sum\limits_{i\geqslant 1} z'_i Q_{i-1}$ — минимальное разложение числа $n+Q_k$. Пусть

$$z''_i = \begin{cases} z'_i, & i \neq k \\ z'_i - 1, & i = k \end{cases}.$$

Тогда определено разложение $\Pi'(n) = \sum\limits_{i\geqslant 1} z''_i Q_{i-1}$ и, следовательно,

$$l(\alpha, n) \leqslant |\Pi'(n)| \leqslant l(\alpha, n+Q_k) + 1. \tag{4}$$

Собирая вместе (3) и (4), получаем требуемый результат.

Теоретико-числовые задачи, приводящие к минимальным разложениям

Пусть

$$C_n(\alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} (\langle i\alpha + \gamma \rangle - \frac{1}{2}), \tag{5}$$

$$D_n(\alpha) = \sup_I |N(\alpha, n, I) - n|I||, \tag{6}$$

где

$$N(\alpha, n, I) = \sharp\{i : 1 \leqslant i \leqslant n, \langle i\alpha \rangle \in I\},$$

— число точек вида $\langle i\alpha\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, попавших в интервал I, и $\langle\cdot\rangle$ — дробная часть числа.

Функции $C_n(\alpha,\gamma)$ и $D_n(\alpha)$ изучались многими математиками. В работе [3] доказаны следующие оценки:

$$|C_n(\alpha,\gamma)| \leqslant \frac{3}{2} l^Z(\alpha,n). \tag{7}$$

$$D_n(\alpha) \leqslant 2 l^Z(\alpha,n). \tag{8}$$

Используя понятие минимального разложения, оценки (7), (8) можно улучшить следующим образом.

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$|C_n(\alpha,\gamma)| \leqslant \frac{3}{2} l(\alpha,n). \tag{9}$$

Доказательство

Воспользуемся неравенством (7) для $n = Q_k$. Из определения системы счисления Цеккендорфа немедленно вытекает оценка

$$|C_{Q_k}(\alpha,\gamma)| \leqslant \frac{3}{2}. \tag{10}$$

Введем обозначение

$$C_n^*(\alpha) = \sup_{\gamma} |C_n(\alpha,\gamma)|.$$

Заметим, что для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant n_2$, выполняются неравенства

$$|C_{n_1+n_2}(\alpha,\gamma)| \leqslant C_{n_1}^*(\alpha) + C_{n_2}^*(\alpha). \tag{11}$$

$$|C_{n_1-n_2}(\alpha,\gamma)| \leqslant C_{n_1}^*(\alpha) + C_{n_2}^*(\alpha). \tag{12}$$

Действительно, обозначая $\gamma_1 = \langle n_1\alpha + \gamma\rangle$, $\gamma_2 = \langle (n_1 - n_2)\alpha + \gamma\rangle$, имеем,

$$|C_{n_1+n_2}(\alpha,\gamma)| = |C_{n_1}(\alpha,\gamma) + C_{n_2}(\alpha,\gamma_1)| \leqslant C_{n_1}^*(\alpha) + C_{n_2}^*(\alpha),$$

и

$$|C_{n_1-n_2}(\alpha,\gamma)| = |C_{n_1}(\alpha,\gamma) - C_{n_2}(\alpha,\gamma_2)| \leqslant C^*_{n_1}(\alpha) + C^*_{n_2}(\alpha),$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь представление $\Pi(n) : n = \sum\limits_{i=1}^{t} z'_i Q_{i-1}$. Из (11) и (12) следует, что

$$|C_n(\alpha,\gamma)| \leqslant \sum_{i=1}^{t} |z'_i| C^*_{Q_{i-1}}(\alpha).$$

Используя (10), получаем, что

$$|C_n(\alpha,\gamma)| \leqslant \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{t} |z'_i| = \frac{3}{2}|\Pi(n)|,$$

откуда и следует требуемый результат.

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$D_n(\alpha) \leqslant 2l(\alpha,n). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Оно во многом аналогично предыдущему. Используя неравенство (8) для $n = Q_k$, находим оценку

$$D_{Q_k}(\alpha) \leqslant 2. \tag{14}$$

Далее заметим, что для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant n_2$, выполняются неравенства

$$D_{n_1+n_2}(\alpha) \leqslant D_{n_1}(\alpha) + D_{n_2}(\alpha). \tag{15}$$

$$D_{n_1-n_2}(\alpha) \leqslant D_{n_1}(\alpha) + D_{n_2}(\alpha). \tag{16}$$

Действительно,

$$\sup_I |N(\alpha, n_1+n_2, I) - (n_1+n_2)|I|| = \sup_I |N(\alpha, n_1, I) - n_1|I| +$$

$$+ N(\alpha, n_2, I + \langle n_1\alpha\rangle) - n_2|I|| \leqslant \sup_I |N(\alpha, n_1, I) - n_1|I|| +$$

$$+\sup_I |N(\alpha, n_2, I + \langle n_1\alpha\rangle) - n_2|I|| \leqslant D_{n_1}(\alpha) + D_{n_2}(\alpha),$$

что и требовалось. Неравенство (16) доказывается аналогично.

Далее вновь рассмотрим представление $\Pi(n) : n = \sum\limits_{i=1}^{t} z'_i Q_{i-1}$. Из (15) и (16) следует, что

$$D_n(\alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{t} |z'_i| D_{Q_{i-1}}(\alpha).$$

Используя (14), получаем требуемый результат.

Положительная минимальность системы счисления Цеккендорфа

Теорема 4. *Равенство*

$$l^Z(\alpha, n) = l^+(\alpha, n) \tag{17}$$

выполняется для всех n тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &q_1 \leqslant q_2 + 1, \\ &q_i \leqslant q_{i+1} \ \text{\textit{для всех}}\ i \geqslant 2. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство

Рассмотрим представление $\Pi(n) \in P^+(n)$, $\Pi(n) : n = \sum\limits_{i \geqslant 1} z'_i Q_{i-1}$.

1) Пусть $z'_1 \geqslant q_1$. Определим числа

$$\begin{aligned} z''_1 &= z'_1 - q_1, \\ z''_2 &= z'_2 + 1, \\ z''_i &= z'_i \ \text{для}\ i \geqslant 3. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что представление $\Pi'(n) : n = \sum\limits_{i \geqslant 1} z''_i Q_{i-1}$ определено корректно и $|\Pi'(n)| \leqslant |\Pi(n)|$.

2) Пусть $z'_k \geqslant q_k + 1$, $k \geqslant 2$. Определим числа

$$
\begin{aligned}
&z''_{k+1} = z'_{k+1} + 1,\\
&z''_k = z'_k - q_k - 1,\\
&z''_{k-1} = z'_{k-1} + q_k - 1,\\
&z''_{k-2} = z'_{k-2} + 1 \text{ для } k \geqslant 2,\\
&z''_i = z'_i \text{ для остальных } i.
\end{aligned}
$$

Представление $\Pi'(n) : n = \sum\limits_{i\geqslant 1} z''_i Q_{i-1}$ вновь определено корректно. Из (17) следует, что $|\Pi'(n)| \leqslant |\Pi(n)|$.

3) Пусть $z'_k = q_k$ и $z'_{k-1} \geqslant 1$, $k \geqslant 2$. Определим числа

$$
\begin{aligned}
&z''_{k+1} = z'_{k+1} + 1,\\
&z''_k = 0,\\
&z''_{k-1} = z'_{k-1} - 1,\\
&z''_i = z'_i \text{ для остальных } i.
\end{aligned}
$$

Представление $\Pi'(n) : n = \sum\limits_{i\geqslant 1} z''_i Q_{i-1}$ по-прежнему определено корректно и $|\Pi'(n)| \leqslant |\Pi(n)|$.

Итак, операции 1) – 3) переводят представление числа n в представление той же или меньшей длины. Легко видеть, что после конечного числа операций 1) – 3) произвольное представление $\Pi(n) \in P^+(n)$ перейдет в представление Цеккендорфа $\Pi^Z(n)$. Достаточность условий (17) доказана.

Для доказательства необходимости условий (17) предположим, что $q_k > q_{k+1}$ для некоторого $k \geqslant 2$. Выберем $n = (q_{k+1} + 1)Q_k$. Тогда $\Pi^Z(n)$ имеет вид

$$n = Q_{k+1} + (q_k - 1)Q_{k-1} + Q_{k-2}$$

и

$$l^+(\alpha, n) \leqslant 1 + q_{k+1} < 1 + q_k = l^Z(\alpha, n).$$

Пример для случая $q_1 > q_2 + 1$ строится аналогично.

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{l(\alpha,n)}{l^Z(\alpha,n)} = 0. \tag{19}$$

Доказательство

Рассмотрим последовательность $n_t = Q_t - 1$. Ясно, что $l(n_t) = 2$. Замечая, что

$$n_t = Q_t - 1 = q_t Q_{t-1} + Q_{t-2} - 1 = q_t Q_{t-1} + n_{t-2},$$

по индукции получаем, что

$$l^Z(\alpha, n_t) = q_t + q_{t-2} + q_{t-4} + \dots$$

и, следовательно, $l^Z(\alpha,n) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Замечание. При выполнении условий (17) справедливо более сильное утверждение

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{l(\alpha,n)}{l^+(\alpha,n)} = 0. \tag{20}$$

Вероятно, (20) справедливо и для произвольного иррационального α, однако строгое доказательство этого утверждения неизвестно.

Следующие две теоремы можно интерпретировать как асимптотическую оптимальность системы счисления Цеккендорфа.

Теорема 6. *Пусть неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены. Тогда справедливо неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{l(\alpha,n)}{l^Z(\alpha,n)} > 0. \tag{21}$$

Доказательство

Пусть $K = \sup\limits_i q_i$. Справедлива следующая оценка [1]:

$$l^Z(\alpha,n) \leqslant 1 + \frac{K}{\ln(K+1)} \ln n. \tag{22}$$

Далее, в работе [4] получена оценка

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n(\alpha)}{\ln n} > c_1 > 0 \tag{23}$$

для всех α. Следовательно, существует возрастающая последовательность $\{n_t\}$, для которой

$$D_{n_t} > c_2 \ln n_t.$$

Учитывая неравенство (8), находим, что

$$\ln n_t < c_3 l(\alpha, n).$$

Учитывая (22), получаем требуемый результат.

Теорема 7. *Пусть неполные частные разложения α в цепную дробь удовлетворяют условию*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} q_i}{t} = \infty. \tag{24}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{l(\alpha, n)}{l^Z(\alpha, n)} > 0. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из определения системы счисления Цеккендорфа вытекает, что

$$l^Z(\alpha, n) \leqslant \sum_{i=1}^{t} q_i \tag{26}$$

для всех $n < Q_t$.

Далее, в работе [3] доказана оценка

$$\max\{D_n(\alpha) : 1 \leqslant n \leqslant Q_t\} \geqslant \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{t} q_i - \frac{9}{8} t. \tag{27}$$

Из (24), (27) и (8) получаем, что существует возрастающая последовательность $\{n_t\}$, для которой

$$\sum_{i=1}^{ord_\alpha n_t} q_i < c_4 l(\alpha, n_t),$$

где

$$ord_\alpha n = \min\{i : Q_i > n\}.$$

Учитывая (26), получаем требуемый результат.

Замечание. Неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{l(\alpha, n)}{l^Z(\alpha, n)} > 0$$

можно доказать тем же самым способом при более слабом условии

$$\sum_{i=1}^{t} q_i > c_6 t$$

с достаточно большим c_6. Доказательство этого неравенства для произвольного иррационального α остается открытой проблемой.

Случай $\alpha = \tau$

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\alpha = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — золотое сечение. В качестве знаменателей подходящих дробей Q_k выступают числа Фибоначчи F_k, определяемые рекуррентным соотношением $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ и начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$, а система счисления Цеккендорфа совпадает с системой счисления Фибоначчи, то есть принимает вид

$$\Pi^F(n) : n = \sum_{i\geqslant 2} z_i F_i, \tag{28}$$

где

$$z_i z_{i+1} = 0$$

для всех i, причем каждое из z_i равно 0 или 1. В этом случае можно получить более точные результаты о минимальных разложениях.

Предложение 1. *Пусть k определено условием $F_k \leqslant n < F_{k+1}$. Тогда существует минимальное представление*

$$\Pi(n) : n = \sum_{i\geqslant 2} z_i F_i, \tag{29}$$

в котором наибольшее по модулю слагаемое в разложении (29) положительно и $z_i = 0$ *для* $i > k+1$.

Доказательство

Представим разложение (29) в виде

$$n = \sum_{i \geqslant 2} z'_i F_i - \sum_{i \geqslant 2} z''_i F_i, \tag{30}$$

где все $z'_i, z''_i \geqslant 0$. Разложение τ в цепную дробь имеет вид $\tau = [0; (1)]$ и условия (18) выполнены. Следовательно, $l^Z(\tau, n) = l^+(\tau, n)$ и без ограничения общности можно считать, что

$$z'_i z'_{i+1} = z''_i z''_{i+1} = 0$$

для всех i, причем каждое из z'_i, z''_i равно 0 или 1. Обозначим $n_1 = \sum_{i \geqslant 2} z'_i F_i$ и $n_2 = \sum_{i \geqslant 2} z''_i F_i$. Предположим, что наибольшее по модулю слагаемое в разложении (30) положительно и равно F_t, $t > k+1$. Ясно, что $z''_{t-1} = z''_{t-2} = 0$ (иначе можно уменьшить длину разложения, используя рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи). Тогда $n_2 \leqslant F_{t-3} + F_{t-5} + F_{t-7} + \ldots = F_{t-2} - 1$ и $n = n_1 - n_2 \geqslant F_t - n_2 \geqslant F_t - F_{t-2} + 1 = F_{t-1} + 1 > F_{k+1}$, что противоречит определению k. Предположим теперь, что наибольшее по модулю слагаемое отрицательно и равно $-F_t$ для некоторого t. Тогда $n_1 \leqslant F_{t-3} + F_{t-5} + F_{t-7} + \ldots = F_{t-2} - 1$ и $n = n_1 - n_2 < F_{t-2} - 1 - F_t < 0$. Полученное противоречие и доказывает требуемый результат.

Рассмотрим алгоритм построения минимального представления для $\alpha = \tau$ (алгоритм, приведенный в [2] не всегда корректен). Рассмотрим граф $G_F(n)$, представляющий собой дерево, вершины которого помечены парами $(\Pi(m_1), m_2)$, с $m_1 + m_2 = n$. Корень дерева помечен парой $(0, n)$. Рассмотрим произвольную вершину v дерева $G_F(n)$. Возможно три случая:

1) Вершина v помечена парой $(\Pi(n), 0)$. В этом случае эта вершина не имеет потомков.

2) Вершина v помечена парой $(\Pi(m_1), 0)$ с $m_2 > 0$. В этом случае эта вершина имеет два потомка, помеченных $(\Pi(m_1)+F_k, m_2-F_k)$, $(\Pi(m_1)+$ $+F_{k+1}, m_2 - F_{k+1})$. Число k определяется из условия $F_k < m_2 < F_{k+1}$. Если $m_2 = F_k$, то вершина v имеет только одного потомка с меткой $(\Pi(m_1) + F_k, 0)$.

3) Вершина v помечена парой $(\Pi(m_1), 0)$ с $m_2 < 0$. В этом случае эта вершина имеет два потомка, помеченных $(\Pi(m_1)-F_k, m_2+F_k)$, $(\Pi(m_1)-$ $-F_{k+1}, m_2 + F_{k+1})$. Число k определяется из условия $F_k < -m_2 < F_{k+1}$. Если $m_2 = -F_k$, то вершина v имеет только одного потомка с меткой $(\Pi(m_1) - F_k, 0)$.

Заметим, что при переходе к потомкам величина $|m_2|$ уменьшается. Следовательно, дерево $G_F(n)$ состоит из конечного числа вершин. Более того, для числа вершин дерева легко доказать оценку $|V| < n^c$ с эффективно вычислимой постоянной c.

Рассмотрим вершины дерева $G_F(n)$ с метками $(\Pi(n), 0)$. По индукции с использованием предложения 1 можно показать, что среди полученных разложений обязано содержаться хотя бы одно из минимальных разложений. Таким образом, мы получили полиномиальный по сложности алгоритм нахождения $l(\tau, n)$.

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$l(\tau, \frac{F_{3t}}{2}) = t. \tag{31}$$

Доказательство

Вытекает из приведенного алгоритма и легко доказываемого по индукции тождества

$$\sum_{i=0}^{t} F_{3i+1} = \frac{F_{3(t+1)}}{2}. \tag{32}$$

Теорема 8. *Справедливо равенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{l(\tau,n)}{l^Z(\tau,n)} = 1. \tag{33}$$

Доказательство

Нужно рассмотреть последовательность $n_t = \frac{F_{3t}}{2}$ и воспользоваться предложением 2

Теорема 9. *Справедливо равенство*

$$\min\{n : l(\tau,n) = t\} = \frac{F_{3t}}{2}. \tag{34}$$

Доказательство

Проводится индукцией по t. Для малых t утверждение теоремы проверяется непосредственно. Предположим, что $l(\tau,n) < t$ при $n < \frac{F_{3t}}{2}$. Пусть $\frac{F_{3t}}{2} < n < \frac{F_{3(t+1)}}{2}$. Используя равенство (32), получаем, что $n - F_{3t+1} < \frac{F_{3t}}{2}$. Используя теорему 1, получаем, что $l(\tau,n) \leqslant l(\tau, n - F_{3t+1}) + 1 < t+1$, что и требовалось.

Сформулируем гипотетическое свойство оптимальности золотого сечения.

Гипотеза. *Пусть* $ml(\alpha,n) = \max\{l(\alpha,t) : 1 \leqslant t \leqslant n\}$. *Тогда для всех* α, n *справедливо неравенство*

$$ml(\tau,n) \leqslant ml(\alpha,n).$$

Библиографический список

1. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.:Мир, 1985.

2. *Шутов А.В.* О представлениях натуральных чисел при помощи чисел

Фибоначчи // Тез. докл. XVIII Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2006": Москва, 12-15 апр. 2006. М.:Изд-во Моск. ун-та, Т.IV. С.84-85.

3. *Pinner C.G.* On Sums of Fractional Parts $\{n\alpha + \gamma\}$ // J.Number Theory. 1997. V.65. P.48-73.

4. *Schmidt W.T.* Irregularities of distribution VII // Acta Arithmetica. 1972. V.21. P.45-50.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ,

ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 4

Ответственный за выпуск *В.Н. Кузнецов*
Технический редактор *Л.В. Агальцова*
Корректор *Е.Б. Крылова*
Подготовка оригинал-макета *Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок*

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл.печ.л. ( ). Уч.-изд.л. . Тираж 100 экз. Заказ

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.