

# ОЦЕНКА СТОИМОСТИ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ФИНАНСОВЫХ ПРОДУКТОВ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

**Т. А. Васильева, И. В. Селиверстов**

*Волгоградский государственный университет, Россия*  
E-mail: tatiana\_vas@mail.ru, igrseliwjorstow@bk.ru

Современный рынок ценных бумаг предлагает множество различных инструментов для инвестиций. Каждый инвестор сталкивается с вопросом выбора оптимального соотношения «риск/доходность» для себя. В данной работе для исследования выбраны структурированные финансовые продукты (СП). Посредством явной, неявной разностных схем и схемы Кранка-Николсона проведен сравнительный анализ численного решения уравнения Блэка-Шоулза при расчете СП [1, 2]. Результаты численных расчетов и их анализ приведены в работе.

## VALUATION OF STRUCTURED FINANCIAL PRODUCTS BY DIFFERENCE METHODS

**T. A. Vasileva, I. V. Seliverstov**

The modern securities market offers many different instruments for investment. Each investor is faced with the question of choosing the optimal risk/return ratio. In this paper, structured financial products are selected for the study. The analysis of the numerical solution of the Black-Scholes equation is carried out by means of explicit, implicit and the Krank-Nicholson difference schemes. The results of numerical calculations and their analysis are given in the paper.

Развитие рынка производных финансовых инструментов привело к появлению такого финансового инструмента, как структурированный продукт.

*Структурированный продукт* – это инвестиционный продукт с указанными условиями выплаты, включающий страховую составляющую (облигации, депозиты и т.п.) и доходную (дериватив). С одной стороны, инвестор получит большую, чем по банковскому депозиту, доходность, с другой, укажет максимальный допустимый уровень риска [2].

Разновидностей СП достаточно много. В данной работе рассматривается структурированный продукт типа Autocallable. Главное отличие продукта от остальных типов скрыто в названии. Продукт имеет опцию отзыва до момента окончания срока продукта (досрочно). То есть погашение по номиналу с возвратом инвестированной суммы.

Одним из способов оценки стоимости СП является модифицированное уравнение Блэка-Шоулза [4]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - (r + CDS)V = 0, \quad (1)$$

где  $S$  – цена базового актива,  $t$  – время,  $V(S,t)$  – цена опциона,  $\sigma$  – коэффициент

волатильности,  $r$  – влияние процентных ставок на стоимость опциона,  $q$  – процент выплат по дивидендам с базисного актива,  $CDS$  – спрэд кредитно-дефолтного свопа на долг эмитента, который отражает величину кредитного риска эмитента.

Для структурированных продуктов Autocallable граничное условие, отвечающее за особенность продукта, то есть возможность отзыва до момента окончания  $T$ , будет иметь вид [1]

$$V(C, t) = P_t, t \in T_c, \quad (2)$$

где  $C$  – фиксированная цена, при достижении ее базовым активом, продукт будет отозван,  $P_t$  – итоговая выплата по отозванному продукту,  $T_c$  – дискретное множество дат отзыва.

Величина  $P_t$  рассчитывается как  $P_t = He^{Bt}$ , где  $H$  – константа,  $B$  – процент возвращаемых средств.

Второе граничное условие, гарантирующее нулевую стоимость продукта при нулевой стоимости базового актива, имеет вид

$$V(0, t) = f(0)e^{-(r+CDS)(T-t)}, \quad (3)$$

То есть, структурный продукт не может быть отозван, если базовый актив становится бесполезным. Для этого будет считать, что  $f(0) = 0$ .

Уравнение (1) сводится к уравнению теплопроводности путем замены переменных [5], [6]  $\{S, t, V(S, t)\}$  на  $\{h, \tau, u(h, \tau)\}$

$$S = Ce^h, t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, V(S, t) = Ce^{ah+\beta\tau}u(h, \tau) + f(0)$$

где

$$k_1 = \frac{2(r-q)}{\sigma^2}, a = -\frac{k_1-1}{2}, \beta = -a^2 - \frac{2(r+CDS)}{\sigma^2}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial h^2}, -\infty < x < 0, \quad \tau > 0$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$u(-\infty, \tau) = 0, u(0, \tau) = h_1(\tau)T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \in T_c \text{ и } u(x, 0) = h_2(h),$$

$$h_1(\tau) = C^{-1}e^{-\beta\tau}(P_r - f(0)e^{-(r-CDS)\frac{2\tau}{\sigma^2}})$$

$$h_2(h) = C^{-1}e^{-ah}(f(Ce^x) - f(0)).$$

Для уравнения (1) производится дискретизация области функции  $u(x, \tau)$ , в которой  $(h, \tau) \in (-\infty, 0] \times [0, \frac{T\sigma^2}{2}]$  с сеткой  $N \times M$ , с размером ячейки  $\delta h \times \delta \tau$ . Так как  $h$  не имеет нижней границы, ограничим его величиной  $-N\delta h$ . Величина  $\delta \tau$  берется такой, что выполняется  $M\delta \tau = \frac{T\sigma^2}{2}$ .

Вычисляем значения  $u_n^m$ , аппроксимирующие решения  $V(S, t)$  на сетке

$$u_n^m = u(nh, m\tau), \quad 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq m \leq M \quad (7)$$

с условиями

$$\begin{aligned}u_n^0 &= h_2(-n\delta h), \quad 0 \leq n \leq N, \\u_0^m &= 0, \quad 0 \leq m \leq M, \\u_N^m &= h_1(m\delta t), \quad T - \frac{2m\delta t}{\sigma^2} \in T_c\end{aligned}$$

с помощью неявной, явной и симметричной разностных схем [4].

Для решения уравнения Блэка-Шоулза (1) относительно цены структурированных продуктов типа Autocallable с помощью разностных схем был написан и отлажен программный код на языке C#. В качестве дериватива-компонента структурированного продукта берется Европейский опцион Колл (опцион на продажу).

Для разностных схем была введена следующая величина для соотношения шагов дискретизации задачи:

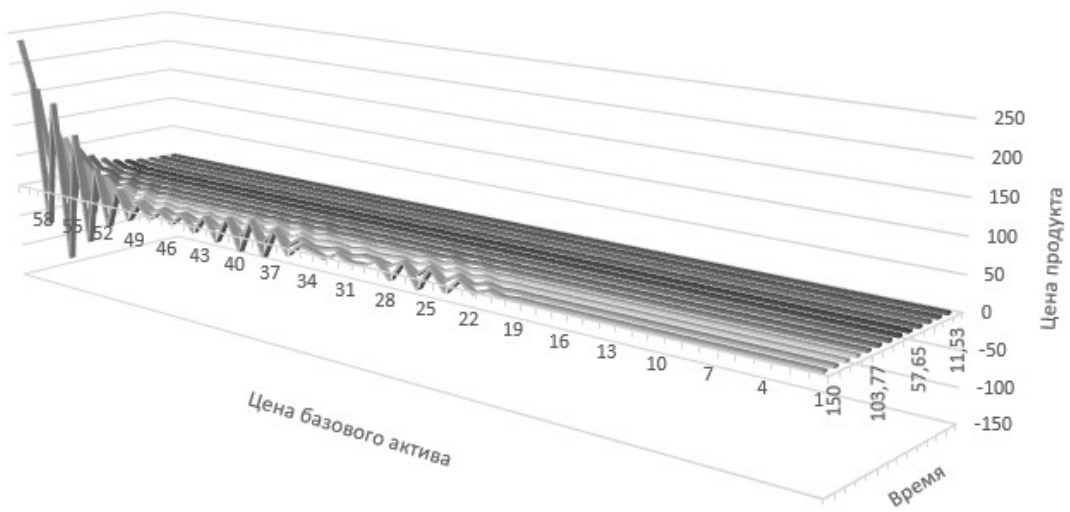
$$\gamma = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (8)$$

относительно которой велись исследования устойчивости численных расчетов для явной, неявной и симметричной (Кранка-Никольсона) разностных схем.

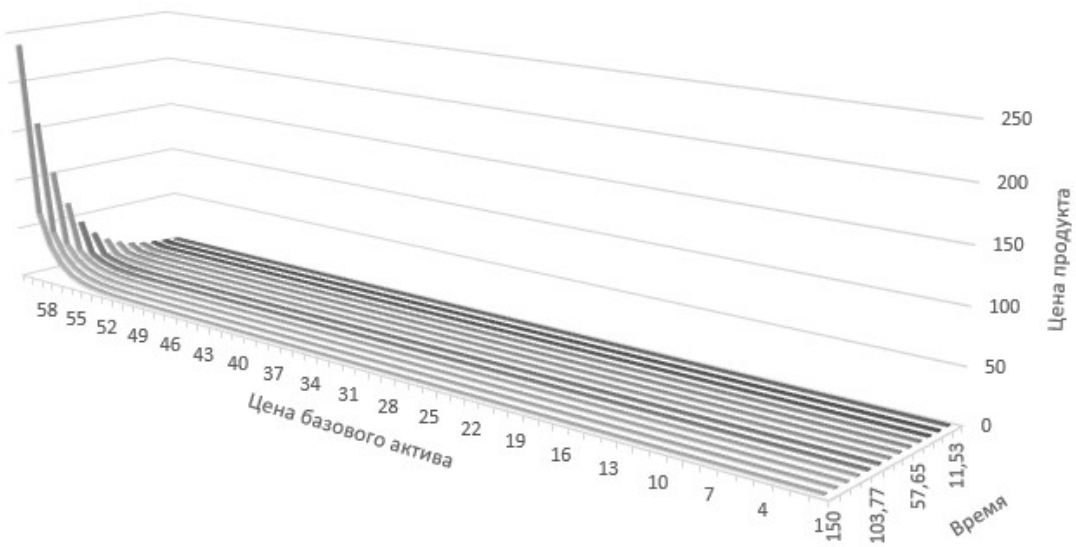
На рис. 1а представлены результаты вычислений при значении параметра  $\gamma = 0.81$ . Как видно из расчетного графика поверхности  $V(S,t)$ , устойчивость решения явной разностной схемы нарушена: имеются большие колебания. Неявная и симметричные схемы (рис 1б и 1в), имеют визуально различимые отличия на последних временных слоях: более гладкий график наблюдается у симметричной схемы. Численные значения имеют различия в пределах 0.01-11.

На основе проведения серии расчетов при параметре  $\gamma$  равной 0.46, 0.65, 0.62, 0.87 можно заключить, что для уравнения Блэка-Шоулза (1), сведенного к уравнению теплопроводности выполняется критерий устойчивости явной схемы для уравнения теплопроводности при  $\gamma \leq 0.5$ , и для любого  $\gamma$  для неявной и симметричной схем, для которых наблюдаются различия со второго знака после запятой при увеличении  $\gamma$ .

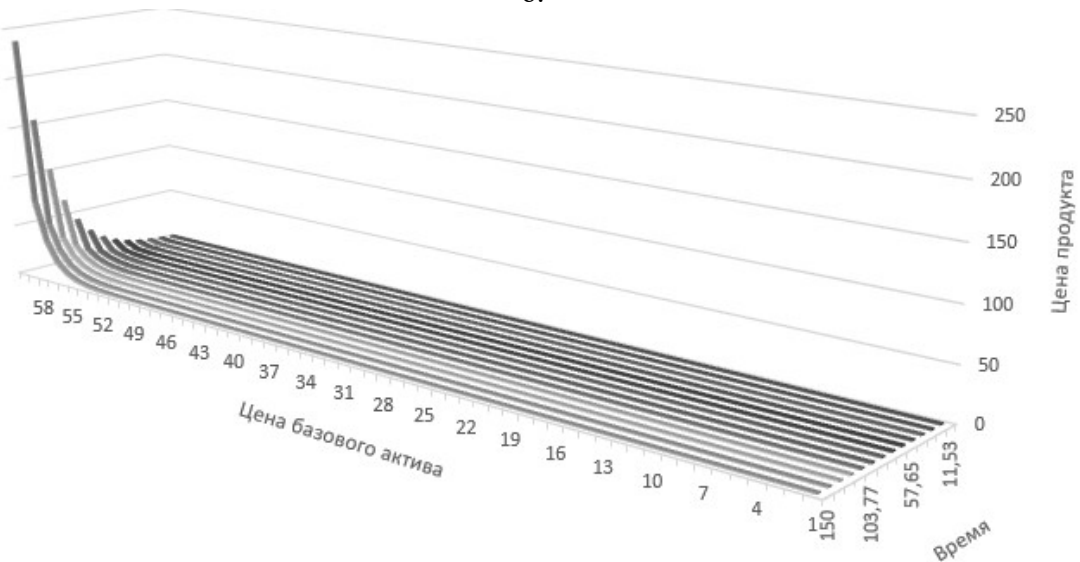
Также, была проведена серия расчетов по сравнению решений уравнения Блэка-Шоулза (1) для структурированных продуктов типа Autocallable симметричной разностной схемой при изменении параметров  $q$  и CDS, которые будут рассматриваться в сравнении со значением безрисковой процентной ставки  $r$ . Сравнение проводилось для того, чтобы показать зависимость стоимости структурированных продуктов от этих параметров. Расчеты производились с помощью симметричной разностной схемы при параметре  $\gamma = 0.46$ .



а.



б.



в.

Рис. 1. Визуализация решения уравнения (1) с помощью разностных явной (рис 1а), неявной (рис 1б) и симметричной (Кранка-Николсона) (рис 1в) соответственно при  $\gamma = 0.81$

Сравнительный анализ показал, что именно параметр CDS обеспечивал рост стоимости продукта при равенстве безрисковой процентной ставке. А процент выплат по дивидендам во всех случаях давал положительный прирост стоимости СП, наибольшее же увеличение было при  $q > r$ .

Таким образом, в данной работе с помощью программного кода был проведен сравнительный анализ численных расчетов уравнения Блэка-Шоулза для оценки стоимости структурированных продуктов. По результатам которого можно заключить, что условие устойчивости явной разностной схемы ( $\gamma \leq 0.5$ ) для уравнения Блэка-Шоулза (1) совпадает с условие устойчивости уравнения теплопроводности. Неявная и симметричные схемы сохраняют устойчивость при любом  $\gamma$  и дают отличные значения решения до второго знака после запятой в связи с вторым порядком аппроксимации каждой из схем по  $S$ . Это исследование показывает, что для расчета стоимости структурированных финансовых продуктов, описываемой уравнением Блэка-Шоулза (1), наиболее подходящими в смысле устойчивости и точности численных расчетов являются неявные разностные методы, особенно, метод Кранка-Никольсона.

А на основании второй серии расчетов можно заключить, что чем рискованней эмитент структурированного продукта, тем больший шанс понести убытки от вложений в продукт; а величина объёма выплат по дивидендам сказывается положительным ростом цены структурированного продукта чем больше сама эта величина.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Селиверстов И. В.* Оценивание структурированных финансовых продуктов путем численного решения модифицированного уравнения Блэка-Шоулза : дисс. ... магистра прикладной математики и информатики. ВГУ, Волгоград, 2019.
2. *Васильева Т. А., Селиверстов И. В.* Численное решение задачи оптимизации опционного портфеля методом Метрополиса // Приложение математики в экономических и технических исследованиях : сб. науч. трудов междунар. конф, Магнитогорск, 2017. С. 20-28.
3. *Никишин М. Д.* Структурированный продукт Autocallable и его инвестиционное применение : дисс. ... магистра прикладной математики и информатики. НИУ ВШЭ, Москва, 2014.
4. *Black F. and Sholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy, 81 (May/June 1973). P. 637-654.
5. *Christl J.* Financial Instruments. Structured Products Handbook. Vienna : Oesterreichische Nationalbank, 2004. P. 165.
6. *Wilmott P., Dewynne J, Howison S.* Option Pricing : Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press, 1994. P. 856.