6. *Шаталина А. В., Мухортова Н. А.* Расчет справедливой цены опциона, портфеля и капитала // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы V Междунар. молодежной науч.-практ. конф. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. 352 с.
7. *Шаталина А. В., Родионова Е. М.* Создание с помощью опционов безрисковых портфелей // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы V Междунар. молодежной науч.-практ. конф. Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2016. 352 с.

О МОДЕЛЕ РАМСЕЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА КАПИТАЛ ПРЕДПРИЯТИЯ

В. Р. Шебалдин

Саратовский государственный университет, Россия
E-mail:Vrsh2007@ramler.ru

В настоящей статье доказываются необходимые условия экстремума для одной задачи оптимального управления, имеющей приложение к модели экономического роста предприятия односекторной экономики. Данная модель была дополнена ограничением на капитал предприятия в фиксированный момент времени.

ABOUT THE RAMSEY'S MODEL WITH THE RESTRICTION ON THE CAPITAL OF ENTERPRISE

V. R. Shebaldin

This article is devoted to the theory of the maximum principle as applied to a special class of optimal control problems that arise in economic growth problems of single-sector enterprises. This model was supplemented by capital limitation of the enterprises at a fixed time.

В работе [1] рассматривалась модель Рамсея экономического роста предприятия односекторной экономики замкнутого типа. Под таким предприятием понимается производство, на котором создается один универсальный продукт, который может потребляться и инвестироваться. При этом рынки работают бесперебойно, производственные факторы существенно не меняются при изменении цен, технология не подвергается никаким изменением.

Введем следующие обозначения: пусть $K(t)$ - капитал предприятия, $L(t)$-количество занятых на производстве. В качестве управления $u(t)$ указывается часть стоимости произведенного продукта, которая идет на увеличение капитала предприятия; $F(K, L)$ - функция производства. В качестве критерия качества берется интеграл от логарифмической функции мгновенной полезности, характеризующий темпы роста потребления на единицу рабочей силы. Таким образом для конечного интервала времени имеем следующую модель:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \quad K(0) = K_0, \tag{1}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = L_0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \quad t \in [0, T] \tag{3}$$

$$J(K, L, u) = \int_0^T \{ e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K, L)]\} dt + e^{-\rho T} \ln C(T) \to \max, \tag{4}$$

где μ>0-заданный коэффициент потери трудовых ресурсов; ρ =const, $e^{-\rho}$- коэффициент дисконтирования; ε =const, ε >0 -заданный параметр, определяющий часть произведенного продукта, которую предприятие обязано потратить на развитие производства; функция производства F(K,L) дважды непрерывно дифференцируемая, $C(t) = (1 - u(t))F(K, L)$ -часть капитала, идущая на потребление, $F(K, L) -$ функция производства: положительная, однородная функция своих аргументов; u(t)-кусочно-непрерывная функция.

Дополним данную модель следующим утверждением. Пусть начальный капитал предприятия K_0 взят в кредит у банка и в момент времени T_0 данная сумма должна быть возвращена. Для того, чтобы эта операция была возможна, необходимо знать производственные возможности предприятия, то есть значения капитала предприятия на момент времени T_0, или оценки для множества достижимости функции $K(t)$ в данный момент времени.

В силу свойств функции производства $F(K, L)$ очевидно, что $K(T_0) \in [K_{\varepsilon,}, K'_\varepsilon]$, где K_ε-решение следующего дифференциального уравнения в момент времени T_0

$$\dot{K}(t) = \varepsilon F(K(t), L(t)), \quad K(0) = K_0,$$

а K'_ε $-$соответственно решение уравнения

$$\dot{K}(t) = (1 - \varepsilon)F(k(t), L(t)), \quad K(0) = K_0.$$

Тогда модель (1)-(4) необходимо дополнить следующим уравнением

$$K(T_0) \geq K_0 + K_\varepsilon.$$

Это условие можно удовлетворить, если

$$K_0 + K_\varepsilon \leq K'_\varepsilon.$$

Таким образом задача (1)-(4) сводится к следующей

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \quad K(0) = K_0, \tag{5}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = L_0, \tag{6}$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \quad t \in [0, T] \tag{7}$$

$$K(T_0) \geq K_0 + K_\varepsilon. \tag{8}$$

$$J(K, L, u) = \int_0^T \{ e^{-\rho t}[\ln(1 - u(t)) + \ln F(K, L)]\} dt + e^{-\rho T} \ln C(T) \to \max, \tag{9}$$

Для задачи (5)-(9) можно доказать следующие необходимые условия экстремума. Пусть функция производства является функцией Кобба-Дугласа, то есть

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, A = const, A > 0, \alpha = const, 0 \le \alpha \le 1.$$

Обозначим V_{ε} -множество кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих ограничению (7).

Теорема. Пусть ($\hat{K}(t), L(t)$) -оптимальная пара задачи (5)-(9), тогда существуют такие функции $\psi(t), \psi_0(t)$,что имеют место следующие уравнения

$$\max_{u(t)\in V_{\varepsilon}} \min \int_0^T \Delta_u H(t)dt, \int_0^T \Delta_u H_0(t)dt,$$

где

$$\Delta_u H(t) = \psi(t)(f_0(\hat{K}, L, u(t)) - f_0(\hat{K}, L, \hat{u})),$$

$$f_0 = e^{-\rho t}[\ln(1-u(t)) + \ln(AK^{\alpha}L^{1-\alpha})],$$

$$\dot{\psi}(t) = -A\alpha L^{1-\alpha}(t)\hat{K}^{\alpha-1}(t)\hat{u}(t)\psi(t) - \frac{\alpha e^{-\rho t}}{\hat{K}}, \quad \psi(T) = \frac{\alpha e^{-\rho T}}{\hat{K}(T)},$$

$$\Delta_u H_0(t) = \psi_0(t)A\hat{K}^{\alpha}L^{1-\alpha}(u(t)-\hat{u}(t)), \textit{если} \quad \hat{\mathrm{K}}(\mathrm{T}_0) = K_0 + K_{\varepsilon},$$

и $\Delta_{\mathrm{u}} H_0(t) = 0$ *в противном случае*,

$$\dot{\omega} = \omega(t)A\alpha L^{1-\alpha}(t)\hat{K}^{\alpha-1}(t)\hat{u}(t), \omega(T_0) = 1,$$

$$\psi_0(t) = \omega(t), \textit{при } \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}_0], \psi_0(t) = 0, \textit{при } \mathrm{t} \in [\mathrm{T}_0, T],$$

$$\dot{\hat{K}}(t) = \hat{u}(t)AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad \hat{K}(0) = K_0,$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad L(0) = L_0.$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы в статье [2]. Приведенные в теореме уравнения необходимых условий экстремума можно использовать при разработке алгоритма численного решения задачи (6)-(9), аналогичного алгоритму из статьи [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aseev S. M., Kryazhimsky A. V.* The Pontryagin Maximum Principle and Optimal Growth Problems // Steklov Institute of Math. RAS. Moscow, 2007. Vol. 237. P. 253.

2. *Шебалдин В. Р.* Необходимые условия экстремума в одной задаче экономического роста // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы V Междунар. молодежной науч.-практич. конф. Саратов, 2016. С. 124-128.

3. *Шебалдин В. Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. Деп. в ВИНИТИ, 1989. 37 с.