2. *Huff D. L.* Parameter Estimation in the Huff Model // ArcUser. Post at October-December, 2003. [Электронный ресурс]. URL: http://www.esri.com/news/arcuser/1003/files/huff.pdf (дата обращения: 20.12.2011).

3. *Huff D. L., Black W. C.* The Huff model in retrospect // Applied Geographic Studies. 1997. Vol. 1. № 2. P. 83–93.

4. *Спирина В. С.* Эмпирическое определение коэффициента λ, описывающего степень влияния времени корреспонденции потребителей до торгового центра в формуле Д. Хаффа // Master's Journal. 2013. № 1. С. 243–251.

5. *Алексеев А. О., Спирина В. С., Коргин Н. А.* Технология управления объектом коммерческой недвижимости с учётом потребительских предпочтений // Управление большими системами [Электронный ресурс]. 2016. Вып. 62. С. 124-168.

6. *Харитонов В. А., Белых А. А.* Технологии современного менеджмента / Под науч. ред. В.А. Харитонова. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. 190 с.

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014660537. Автоматизированная система комплексного оценивания объектов с возможностью выбора нечеткой процедуры свертки в соответствии со степенью неопределенности экспертной информации о параметрах их состояния: заявка № 2014618056 от 12.08.2014 РФ / А. О. Алексеев, В. А. Харитонов, Р. Ф. Шайдулин, М. И. Мелехин (РФ) – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09.10.2014 г. (РФ).

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

О. М. Степанова, М. Ф. Степанов

ООО «Реестр-РН», Саратов, Россия
Саратовский государственный технический университет, Россия
E-mail: omstepanova@mail.ru, mfstepanov@mail.ru

Рассматривается задача определения условий обеспечения перевода динамической системы в целевое состояние при действии внешних возмущений. Сформулированы условия, при которых достигается цель управления при ограниченных в L_2-норме внешних возмущениях. Показана зависимость вероятности превышения допустимой ошибки регулирования от параметров нормально распределенного внешнего возмущения.

RESEARCH OF CONTROLLABILITY CONDITIONS OF DYNAMIC SYSTEMS WITH EXTERNAL INFLUENCES

O. M. Stepanova, M. F. Stepanov

The problem of definition of conditions of ensuring transfer (translation) of dynamic system in a target status at action of external perturbations is considered. Conditions under which the goal of management at the external perturbations limited in L2 norm (rate) is achieved are formulated. The dependence of probability of exceeding of an admissible error of regulation on parametres of normally distributed external perturbation is shown.

Управление динамическими системами значительно осложняется в условиях действия неопределённых внешних возмущений. Возникающая при этом проблема принятия решений в условиях неопределённости характеризуется дополнительными ограничениями, обусловленными особенностями предметной области. Указанным вопросам посвящены многочисленные работы различных авторов, предлагающие различные подходы к решению задач выбора к конкретных областях [1] – [6].

Классическое определение управляемости динамической системы не учитывает наличие внешних воздействий, способных противодействовать управлению. Ещё более осложняется задача, если рассматриваемая динамическая система представляет собой совокупность иерархически связанных и взаимодействующих динамических систем, предназначенных для достижения некоторой общей цели.

Рассмотрим динамические системы вида

$$S = \left\langle S^A, S^X, S^U, S^Y, S^{S_s} \right\rangle : A \times X \times U \times F \times T \times S_s \Rightarrow A \times X \times U \times Y \times S_s, \qquad (1)$$

$$S^A = \left\{ a = s^a(a,x,u,f,t) \middle| a \in A, x \in X, u \in U, f \in F, t \in T \right\} : A \times X \times U \times F \times T \Rightarrow A,$$

$$S^X = \left\{ x = s^x(a,x,u,f,t) \middle| a \in A, x \in X, u \in U, f \in F, t \in T \right\} : A \times X \times U \times F \times T \Rightarrow X,$$

$$S^U = \left\{ u = s^u(a,x,y,u,f,t) \middle| a \in A, x \in X, y \in Y, u \in U, f \in F, t \in T \right\} :$$
$$A \times X \times Y \times U \times F \times T \Rightarrow U,$$

$$S^Y = \left\{ y = s^y(a,x,u,f,t) \middle| a \in A, x \in X, u \in U, f \in F, y \in Y, t \in T \right\} :$$
$$A \times X \times U \times F \times T \Rightarrow Y,$$

где A – множество параметров системы S; X – множество состояний системы; U – множество внешних управляющих воздействий на систему; F – множество внешних возмущающих воздействий на систему; T – отрезок временной оси (множество моментов времени существования системы); S_s – множество подсистем системы S;

$$S^s = \bigcup_{i=0}^{N} S_i, \; S_i = \left\langle S_i^A, S_i^X, S_i^U, S_i^Y, S_i^s \right\rangle \therefore,$$

$$A_i \times X_i \times U_i \times F_i \times T \times S_i^s \Rightarrow A_i \times X_i \times U_i \times Y_i \times S_i^s,$$

Критерий оценки качества системы S и её подсистем S_i:

$$G = \left\{ \upsilon = g(u,y) \middle| u \in U, y \in Y \right\} : U \times Y \Rightarrow V,$$

$$G_i = \left\{ \upsilon_i = g_i(u_i, y_i) \middle| u_i \in U_i, y_i \in Y_i \right\} : U_i \times Y_i \Rightarrow V_i,$$

Цель управления системы S и её подсистем S_i: $\upsilon \in V^* \subset V$, $\upsilon_i \in V_i^* \subset V_i$,

$A = \{ \bigcup A_i \in R^{N_i} \}$ – пространство параметров системы S и её подсистем,

$X = \{ \bigcup X_i \in R^{n_i} \}$ – пространство состояний системы S и её подсистем,

$U = \{ \bigcup U_i \in R^{m_i} \left\| u_i \right\| \le \varepsilon_{u_i} \}$ – пространство управлений системы S и её подсистем,

$F = \{ \bigcup F_i \in R^{\mu_i} \left\| f_i \right\| \le \varepsilon_{f_i} \}$ – пространство возмущений системы S и её подсистем,

$X=\{\bigcup Y_i \in R^{r_i}\}$ – пространство выходов системы S и её подсистем,

$T=[0,\infty)$ – пространство времени существования системы S и её подсистем S_i,

$V=\bigcup\limits_{i=0}^{N} V_i$, $V=\left[\underline{\upsilon},\overline{\upsilon}\right]\subset R$, $V_i=\left[\underline{\upsilon}_i,\overline{\upsilon}_i\right]\subset R$, $\underline{\upsilon}=\inf\limits_{0\le i\le N}\underline{\upsilon}_i$, $\overline{\upsilon}=\sup\limits_{0\le i\le N}\overline{\upsilon}_i$ – множество допустимых значений критерия качества системы S и её подсистем S_i,

$V^*=\left[\underline{\upsilon}^*,\overline{\upsilon}^*\right]\subset R$, $\left[\underline{\upsilon}^*,\overline{\upsilon}^*\right]\subseteq\left[\underline{\upsilon},\overline{\upsilon}\right]$, $V_i^*=\left[\underline{\upsilon}_i^*,\overline{\upsilon}_i^*\right]\subset R$, $\left[\underline{\upsilon}_i^*,\overline{\upsilon}_i^*\right]\subseteq\left[\underline{\upsilon}_i,\overline{\upsilon}_i\right]$ – множество желаемых значений критерия качества системы S и её подсистем S_i,

$\rho(\psi,\Psi),\psi\in R^{n_\Psi},\Psi\subset R^{n_\Psi}$, – мера расстояния точки ψ от множества Ψ (метрика пространства значений критерия качества).

Для компактности дальнейшего изложения будем полагать, что модель системы вида (1) допускает приведение к виду (2).

$$\dot{x}=Ax+Bu+Gf,\ x\in R^n, u\in R^m, f\in R^{\mu},\ y=Cx,\ y\in R^r. \tag{2}$$

Прежде чем решать задачи управления необходимо исследовать управляемость рассматриваемой динамической системы в условиях наличия внешних возмущающих воздействий. Под управляемостью динамической системы будем понимать способность за конечное время перейти из начального в конечное состояние под действием ограниченного управления и при наличии внешних возмущений, удовлетворяющих известным условиям.

Сформулируем условия управляемости линейной динамической системы при ограниченных в L_2-норме управлениях и неизвестных ограниченных в L_2-норме внешних воздействиях:

$$f\in F\subset R^{\mu}, F=\{f\in R^{\mu}\,\big|\,\|f\|\le 1\}, \tag{3}$$

$$u\in U\subset R^m, U=\{u\in R^m\,\big|\,\|u\|\le 1\} \tag{4}$$

Цель управления

$$g(y)=\int_0^{\infty}(y^T(t)y(t))dt\to min. \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть линейная непрерывная системы описывается уравнениями вида (2). Если пара (A,B) управляема, то цель управления (5) достигается при действии внешних возмущений $f(t)$, ограниченных в L_2-норме (3) под действием ограниченного управления $u(t)$ (4) при выполнении условия

$$\gamma_u>\gamma_f, \tag{6}$$

где

$$\gamma_f=trP_f,\ P_f=C^TW_f^{-1}C,\ W_f=\int_0^{\infty}e^{A\tau}GG^Te^{A^T\tau}d\tau\succ 0, \tag{7}$$

$$\gamma_u=trP_u,\ P_u=C^TW_u^{-1}C,\ W_u=\int_0^{\infty}e^{A\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau\succ 0. \tag{8}$$

Доказательство.

Внешнее возмущение $f(t)$ и управление $u(t)$ можно трактовать как внешние воздействия по отношению к системе (2). Вид управления, переводящего систему из начального состояния $x(0)=x_0$ в конечное (целевое) $x(t_k)=0$ имеет вид, например, $u(t)=B^T e^{A^T(t_k-t)}\upsilon$, где вектор υ подлежит выбору из условий $x(0)=x_0$ и $x(t_k)=0$, т.е. $0=e^{At_k}x_0+\int_0^{t_k}e^{A(t_k-\tau)}Bu(\tau)d\tau=e^{At_k}x_0+\left(\int_0^{t_k}e^{A(t_k-\tau)}BB^T e^{A^T(t_k-\tau)}d\tau\right)\upsilon$.

При этом матрица (граммиан управляемости) $W_u(t_k)=\int_0^{t_k}e^{A(t_k-\tau)}BB^T e^{A^T(t_k-\tau)}d\tau=\int_0^{t_k}e^{A\tau}BB^T e^{A^T\tau}d\tau$ невырождена и $W_u(t_k)\succ 0$, а уравнение $e^{At_k}x_0+W_u(t_k)\upsilon=0$ имеет решение $\upsilon=-W_u^{-1}(t_k)e^{At_k}x_0$ при любом x_0.

Таким образом, управление

$$u(t)=-B^T e^{A^T(t_k-\tau)}W_u^{-1}(t_k)e^{At_k}x_0 \tag{9}$$

переводит систему (1) из состояния $x(0)=x_0$ в состояние $x(t_k)=0$.

Доопределив $u(t)$ на всей полуоси: $u(t)=0$ при $t>t_k$, получим

$$\|u(t)\|_2^2=\int_0^{\infty}u^T(t)u(t)dt=\int_0^{t_k}\left(x_u^T W_u^{-1}(t_k)e^{A(t_k-\tau)}BB^T e^{A^T(t_k-\tau)}W_u^{-1}(t_k)x_u\right)d\tau=x_u^T W_u^{-1}(t_k)x_u\le 1,$$

(10) т.е. такое управление является допустимым. С другой стороны, это управление минимизирует критерий $\|u\|_2^2=\int_0^{t_k}u^T(t)u(t)dt$. Отсюда и из (9) следует, что если $x_u\notin\Re_u=\{y\in R^r: y^T C^T W_u^{-1}Cy\le 1\}$, т.е. $x_u^T W_u^{-1}(t_k)x_u>1$, то не существует управляющего воздействия $u(t)$ такого, что $\int_0^{t_k}u^T(t)u(t)dt\le 1$, и переводящего систему (2) из состояния $x(0)=0$ в состояние $x(t_k)=x_u$.

Внешнее воздействие $f(t)$, рассматриваемое как управление

$$f(t)=G^T e^{A^T(t_k-\tau)}W_f^{-1}(t_k)x_f \tag{11}$$

переводит систему (1) из состояния $x(0)=0$ в состояние $x(t_k)=x_f$. Доопределим $f(t)$ на всей полуоси: $f(t)=0$ при $t>t_k$, получим

$$\|f(t)\|_2^2=\int_0^{\infty}f^T(t)f(t)dt=\int_0^{t_k}\left(x_f^T W_f^{-1}(t_k)e^{A(t_k-\tau)}GG^T e^{A^T(t_k-\tau)}W_f^{-1}(t_k)x_f\right)d\tau=x_f^T W_f^{-1}(t_k)x_f\le 1$$

(12)

т.е. такое возмущение также является допустимым. С другой стороны, это воздействие (10) минимизирует критерий $\|f\|_2^2=\int_0^{t_k}f^T(t)f(t)dt$. Отсюда и из (10) следует, что если $x_f\notin\Re_f=\{y\in R^r: y^T C^T W_f^{-1}Cy\le 1\}$, т.е. $x_f^T W_f^{-1}(t_k)x_f>1$, то не существует воздействия $f(t)$ такого, что $\int_0^{t_k} f^T(t)f(t)dt \le 1$, и переводящего систему (1) из состояния $x(0)=0$ в состояние $x(t_k)=x_f$.

Если матрица A устойчива, то $W_f(t_k)\xrightarrow[t_k\to\infty]{}W_f \succ 0$ и $W_u(t_k)\xrightarrow[t_k\to\infty]{}W_u \succ 0$. Соответственно области достижимости для внешних воздействий $f(t)$ и управлений $u(t)$ примут вид эллипсоидов соответственно:

$$\Re_f = \left\{ y \in R^r : y^T C^T W_f^{-1} C y \le 1 \right\} \tag{13}$$

$$\Re_u = \left\{ y \in R^r : y^T C^T W_u^{-1} C y \le 1 \right\} \tag{14}$$

Как следствие, характеризуя размер эллипсоидов $\Re_f$ и $\Re_u$ величиной суммы квадратов длин его полуосей, получим оценки вида:

$$\gamma_f = trP_f ,\ P_f = C^T W_f^{-1} C , \tag{15}$$

$$\gamma_u = trP_u ,\ P_u = C^T W_u^{-1} C . \tag{16}$$

Учитывая разнонаправленность целей внешнего возмущения $f(t)$ и управления $u(t)$, для достижения цели управления необходимо, чтобы выполнялось условие $\gamma_u > \gamma_f$, ч. и т. д.

Определим оценку вероятности нарушения достижимости цели управления линейной динамической системы (2) при ограниченных в L_2-норме управлениях и нормально распределенных внешних воздействиях.

Пусть:

$f \in F \subset R^\mu$, $f(t)$ - нормально распределенная непрерывная случайная величина с математическим ожиданием m_f и дисперсией σ_f;

$u \in U \subset R^m, U = \left\{ u \in R^m \middle| \|u\| \le u_m \right\}$ - ограниченное по модулю управляющее воздействие.

Цель управления

$$y(t_k) \le y^*(t_k) . \tag{17}$$

Приведём без доказательства следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть линейная непрерывная системы описывается уравнениями вида (1). Если пара (A,B) управляема, то превышение выхода системы $y(t_k)$ над предельно допустимым значением $y^*(t_k)$ возможно с вероятностью не более 0,05 при действии внешних возмущений $f(t)$, представляющих собой нормально распределенную непрерывную случайную (векторную) величину с математическим ожиданием m_f и дисперсией σ_f при действии ограниченного управления $u(t)$

$$u \in U \subset R^m , U = \{ u \in R^m \| u \| \le u_m \}$$

при выполнении условия

$$\|u_m\| > m_f + 3 * \sigma_f . \tag{18}$$

В работе сформулированы условия обеспечения управляемости динамической системы при действии внешних возмущений. При этом управляемость трактуется как возможность под действием управления перевода системы в заданное состояние при действии внешних возмущений. Показано, что вероятность превышения допустимого значения ошибки регулирования определяется параметрами распределения вероятности внешнего возмущения и ограничениями на величину управляющего воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973.

2. *Обен Ж. П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М. : Мир, 1988.

3. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990.

4. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 530-542.

5. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

6. *Степанова О. М.* О задаче выбора в условиях неполноты информации // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы V Междунар. молодеж. науч.-практ. конф.- Саратов: ООО Изд-во «Научная книга». 2016. С. 101-104.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТРИКИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ В АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М. А. Тренина, Е. В. Давыдова

Тольяттинский государственный университет, Россия
Московский авиационный институт, Россия
E-mail: trenina.m.a@yandex.ru, elizaveta_2710@mail.ru

Эффективная работа эвристических алгоритмов дискретной оптимизации часто зависит от качества выбора решений при работе специальных вспомогательных алгоритмов. Примером последнего является выбор разделяющего элемента при решении некоторой задачи дискретной оптимизации методом ветвей и границ. При этом в процессе решения принимается достаточно большое количество ошибочных или далёких от оптимальных решений. Это происходит в связи с тем, что на практике программы-предикторы предлагают различные варианты выбора разделяющего элемента. Мы рассматриваем возможность оценки согласованности по процедуре строгого ранжирования на основе вычисления некоторой числовой меры, которая будет характеризовать степень близости значений программ-предикторов. Для этого оценка каждого предиктора представляется в виде точки некоторого пространства, в котором задана метрика. На получаемом множестве перестановок может быть использована одна из нескольких рассмотренных нами метрик.