СВОЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

М. А. Кузнецова

Саратовский государственный университет, Россия
E-mail: kuznetsovama@info.sgu.ru

В статье представлены обобщения свойств дискретных преобразований Фурье по системам Виленкина-Крестенсона на системы мультипликативных функций, порожденных последовательностями-палиндромами. Описаны преобразования, которым подвергается вектор спектральных характеристик при растяжении/удлинении исходного вектора. Основным результатом являются оценки погрешности восстановления для зонного сжатия информации с помощью дискретного преобразования Фурье по данной системе.

PROPERTIES OF THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM USING THE MULTIPLICATIVE FUNCTIONS SYSTEM

M. A. Kuznetsova

The article presents generalizations of features of the discrete Fourier transforms using Vilenkin-Crestenson functions on the ones using multiplicative functions generated with the palindrome sequences. The transformations of the spectral coefficients vector influenced by the original vector tension/prolongation are described. The main result is the estimation of the recovery error for zone compression of information using the discrete Fourier transform using the considered system.

Пусть $P_n = \{p_j\}_{j=1}^n$ — конечная последовательность натуральных чисел длины $n \geq 1$, такая что при всех $1 \leq j \leq n$ выполнено $p_j \geq 2$. Введем множества $Z_j = \{0,1,\ldots,p_j - 1\}$ и последовательность $\{m_i\}_{i=0}^n$: $m_0 = 0$, $m_s = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$, $s \geq 1$. Тогда для любой дроби $x = l / m_n$, где целое неотрицательное $l < m_n$, справедливо следующее разложение:

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i^{-1} x_i, x_i \in Z_i. \tag{1}$$

С другой стороны, любое целое $0 \leq k < m_n$ можно записать как

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} m_i k_i, k_i \in Z_i. \tag{2}$$

Разложения (1)-(2) можно рассматривать как обобщение разложений в системе счисления с основанием p, когда все $p_i = p$.

Будем рассматривать дискретные функции f, заданные векторами своих значений в точках l / m_n: $f = (f_l)_{l=0}^{m_n - 1}$. Введем систему дискретных мультипликативных функций $\mathrm{X} = \{\chi_k\}_{k=0}^{m_n - 1}$ по следующей формуле:

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j k_j}{p_j}\right), \qquad 3)$$

где для k, x справедливы разложения (1)-(2). Отметим, что при $n = \infty$ в разложении (1) может быть представлено любое число $x \in [0,1)$, если брать бесконечную сумму, в разложении (2) $k \in Z_+$, а формула (3) задает ортонормированную систему функций Виленкина.

Введем комплексную матрицу $B = \frac{1}{m_n}\left(\chi_k(l/m_n)\right)_{k,l=0}^{m_n-1}$, с помощью которой находится ДПФ (дискретное преобразование Фурье) $\hat{f} = Bf$ по системе X. Пусть последовательность P_n является палиндромом, т.е. $p_j = p_{n-j}$, $1 \le j \le n$. Тогда $\chi_k(l/m_n) = \chi_l(k/m_n)$, и обратное преобразование выполняется с помощью матрицы $m_n\overline{B}$: $f = m_n\overline{B}\hat{f}$. Кроме того, для таких последовательностей допускают обобщение некоторые свойства преобразований по ВКФ (системам функций Виленкина-Крестенсона, $p_i = p$, $i = 1,\ldots,n$).

Пусть $g = \left(g_j\right)_{j=0}^{m_s-1}$, $\hat{g} = B_s g$, $s < n$ (последовательность P_s является префиксом P_n, но не обязательно палиндромом). Введем следующие операции преобразования вектора размерности m_s в вектор размерности m_n:

1) Растяжение 1 типа, $f = S1(g)$, если $f_j = g_{[j/m_{n-l}]}$;

2) Растяжение 2 типа, $f = S2(g)$, если $f_j = \begin{cases} g_k, j = km_{n-l}, \\ 0, \forall k \quad j \ne km_{n-l}. \end{cases}$;

3) Удлинение 1 типа, $f = L1(g)$, если $f_j = \begin{cases} g_j, j < m_l, \\ 0, j \ge m_l. \end{cases}$;

4) Удлинение 2 типа, $f = L2(g)$, если $f_j = g_{j\% m_l}$.

Здесь $[\cdot]$ обозначает взятие целой части, а % — нахождение остатка по модулю. Свойства спектров функций после данных преобразований в случае ВКФ рассматривались в [1]; приведем теорему, обобщающую эти результаты.

Теорема 1. *Пусть последовательность P_n является палиндромом. Тогда* $f = S1(g) \Leftrightarrow \hat{f} = L1(\hat{g})$, $f = L1(g) \Leftrightarrow \hat{f} = S1(\hat{g})$, $f = S2(g) \Leftrightarrow \hat{f} = L2(\hat{g})/m_{n-l}$, $f = L2(g) \Leftrightarrow \hat{f} = S2(\hat{g}) * m_{n-l}$.

Теорема 1 имеет следующий смысл: во многих случаях сигнал не имеет нужной длины для преобразования и его приходится либо растягивать, повторяя одно значение несколько раз или добавляя нули после каждого отсчета, либо удлинять, приписывая в конец нули или повторяя сигнал несколько раз. Тогда результаты объясняют взаимосвязь между спектрами исходного сигнала и полученного.

Рассмотрим возможное применение преобразования Фурье по X для зонного сжатия информации. Часто в задачах сжатия данных изменяют и хранят вектор коэффициентов преобразования Фурье. В [2] было предложено использовать ВКФ для зонного сжатия, когда нулями заменяются целые блоки коэффициентов, малых по модулю (удобство замены целого блока обусловлено необходимостью последующего вычисления обратного ДПФ). Подобные результаты известны для ДПФ по экспонентам, но оценки погрешности восстановления гарантируют худший результат, чем в случае базиса ВКФ. Перейдем к обобщению данных результатов для последовательностей-палиндромов.

Пусть $y=\left(y_j\right)_{j=0}^{m_n-1}$ — вектор, $k<n$, $j<p_{k+1}$ — некоторые натуральные числа. Тогда пачкой вектора y с номером k назовем вектор $\langle y\rangle^k=(\underbrace{0,\ldots,0}_{m_k},y_{m_k},\ldots,y_{m_{k+1}-1},\underbrace{0,\ldots,0}_{m_n-m_{k+1}})$, а подпачкой с номером j данной пачки назовем $\langle y\rangle^{j,k}=(\underbrace{0,\ldots,0}_{jm_k},y_{jm_k},\ldots,y_{(j+1)m_k-1},\underbrace{0,\ldots,0}_{m_n-(j+1)m_k})$. Предполагается следующий вариант зонного сжатия: считаем ДПФ, заменяем какую-либо пачку или подпачку нулями, храним ненулевые компоненты измененного вектора коэффициентов. Следующая теорема описывает точность восстановления исходного вектора при таком сжатии.

Теорема 2. *Пусть* $M=\max\limits_{0<j<m_n}|y_j-y_{j-1}|$, $u^k=m_n\overline{B}(\hat{y}-\langle\hat{y}\rangle^k)$, $u^{j,k}=m_n\overline{B}(\hat{y}-\langle\hat{y}\rangle^{j,k})$, P_n *- палиндром. Тогда* $\left\|y-u^{j,k}\right\|\le Mm_{n-k-1}/\sin\left(\dfrac{\pi j}{p_{k+1}}\right)$,

$$\left\|y-u^k\right\|\le Mm_{n-k-1}\sqrt{(p_{k+1}-1)^2+\frac{1}{12}(p_{k+1}^2-1)},\text{ где } \|x\|=\sqrt{\frac{1}{m_n}\sum_{j=0}^{m_n-1}|x_j|^2}.$$

Полученные оценки говорят о том, что для минимальной погрешности восстановления нужно обнулять либо последнюю пачку с номером $n-1$, либо несколько средних подпачек последней пачки с номерами $\approx[n/2]$(в зависимости от того, насколько сильного сжатия необходимо достичь, подробнее см. [с.274, 2]). В дальнейшем планируется использовать полученные результаты для сжатия данных на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трахтман А. Н., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М. : Советское радио, 1975. 207 с.

2. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. М : Наука, 1987. 344 с.