

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Правительство Саратовской области

# **«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ, СТРАХОВАНИИ И УПРАВЛЕНИИ РИСКАМИ»**

*Сборник материалов  
IV Международной молодежной научно-практической конференции  
(Саратов, 2–5 декабря 2015 г.)*

В двух томах

Том 1

Математическое и компьютерное моделирование  
экономических процессов

Саратов  
Издательство Саратовского университета  
2015

УДК [330.131.7 : 519.866](082)  
ББК 65 я43  
М34

**Математическое моделирование в экономике, страхова-  
М34 нии и управлении рисками** : сборник материалов IV Междунар.  
молодежной науч.-практ. конф. : в 2 т. – Саратов : Изд-во Сарат.  
ун-та, 2015.

ISBN 978-5-292-04333-1

Т. 1 : Математическое и компьютерное моделирование эконо-  
мических процессов. – 320 с. : ил.

ISBN 978-5-292-04334-8

В сборнике опубликованы материалы IV Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое моделирование в экономике, страховании и управлении рисками». Тематика статей затрагивает круг вопросов, связанных с экономико-математическим моделированием и управлением рисками в финансовой деятельности, страховании, банковском деле, инвестировании, государственном управлении экономикой, бизнес-информатике и других разделах экономико-математических знаний.

Для сотрудников банков, финансовых и страховых компаний, экономических отделов организаций, служб управления корпоративными рисками, научных работников, преподавателей и аспирантов.

Редакционная коллегия:

доктор экон. наук *В. А. Балаш* (отв. редактор),  
доктор физ.-мат. наук *С. П. Сидоров* (отв. секретарь),  
доктор физ.-мат. наук *С. И. Дудов*

Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 15-31-10531)

УДК [330.131.7 : 519.866](082)  
ББК 65 я43

ISBN 978-5-292-04334-8 (т. 1)  
ISBN 978-5-292-04333-1

© Саратовский государственный  
университет, 2015

# **АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИЗА И ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ ЖИЛЬЯ В СЕЛЬСКОЙ МЕСТНОСТИ**

**А. М. Абдулгалимов, С. Г. Мурадалиев**

*Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Россия*

E-mail: [abdulgalimov@yandex.ru](mailto:abdulgalimov@yandex.ru), [Bayern.86@mail.ru](mailto:Bayern.86@mail.ru)

Разработана автоматизированная система анализа и оценки инвестиционных проектов по строительству жилья в сельской местности. Предложены структуры таблиц базы данных системы. Анализ и оценка инвестиционных проектов проведены на основе современной дисконтированной стоимости, индекса доходности, внутренней нормы доходности, рентабельности активов проекта, дисконтированного срока окупаемости проекта и реального срока окупаемости инвестиций.

## **ANALYSIS AND ESTIMATION AUTOMATION INVESTMENT PROJECTS ON HABITATION BUILDING IN COUNTRYSIDE**

**A. M. Abdulgalimov, S. G. Muradaliev**

The automated system of the analysis and estimation of investment projects on habitation building in countryside is developed. Structures of tables of a database of system are offered. The analysis and an estimation of investment projects are conducted on the basis of the modern discounted cost, an index of profitableness, an internal return rate, return on assets of the project, the discounted time of recovery of outlay of the project and a real time of recovery of outlay of investments.

### **1. Автоматизированная система анализа и оценки инвестиционных проектов по строительству жилья в сельской местности**

В работе предлагаемую нами автоматизированную систему (АС) будем называть «Сельстройжилье». Количество таблиц данных в «Сельстройжилье» равняется шести. Эти таблицы данных соответственно будут называться так: «Сведения о регионе» (REGION), «Объект жилищного строительства на селе» (OBJSTR), «Жилье для тружеников села,

проживающих в сельской местности» (JTS), «Инвестиционные проекты строительства жилья на селе» (PROJ), «Годовые денежные притоки прибыли по проектам» (PRIT), «Условия строительства жилья для труженников села, проживающих в сельской местности» (USL\_JTS) (табл. 1–6).

В качестве основы для построения АС «Сельстройжилье» служат данные о конкретном регионе (село, город, район, республика, край и т. д.) и об объекте жилищного строительства, по которому производятся анализ и оценка инвестиционного проекта. В качестве исходных данных для этого берутся значения параметров показателей, приведенных ниже в формулах (1) – (6).

Выходной информацией системы будут рекомендации по выбору того или иного инвестиционного проекта, а также те формы документов, которые необходимы для анализа и принятия управленческого решения пользователем.

Техническая база для функционирования АС «Сельстройжилье»: ПК на базе процессора IntelCore – i3, операционная система Windows 8 и выше. Система разрабатывается в среде СУБДMS SQL Server 2014, а блок программ для анализа и оценки инвестиционных проектов жилищного строительства в сельской местности разрабатывается с помощью языка программирования C #.

Ниже приведены структуры таблиц, входящих в базу данных [1].

Таблица 1

**REGION – сведения о регионе (основная таблица, служащая для связи всех таблиц в единую систему)**

№	Имя поля	Тип	Ширина	Описание поля
1	Region	Numeric	6	Номер региона (населенного пункта, района)
2	Nazv	Character	15	Название региона (населенного пункта, района)
3	Adres	Character	20	Почтовый адрес (название федерального округа)
Region		Индекс по возрастанию		

Таблица 2

**OBJSTR – объект жилищного строительства на селе**

№	Имя поля	Тип	Ширина	Описание поля
1	Region	Numeric	6	Номер региона (населенного пункта, района)
2	God	Numeric	4	Год, для которого верны данные
3	Name	Character	50	Наименование конкретного объекта
4	ID	Numeric	6	Идентификатор объекта
Region		Внешний индекс (FK), индекс по возрастанию		
God		Индекс (I), индекс по возрастанию		
ID		Первичный ключ (PK), индекс по возрастанию		

Таблица 3

**JTS – жилье для труженников села, проживающих в сельской местности**

№	Имя поля	Тип	Ширина	Описание поля
1	ID	Numeric	6	Идентификатор объекта
2	Usl_jts	Numeric	3	Условия строительства жилья для труженников села, проживающих в сельской местности (побережье моря, лес, тундра, горная местность, низменность, пески и т.д.). Справочник Usl_jts_.dbf
3	Tipe_jts	Numeric	4	Объект строительства жилья для труженников села, проживающих в сельской местности (коттедж, многоквартирный дом, юрта и т. д.). Справочник Tipe_jts_.dbf
ID		Первичный ключ (PK), индекс по возрастанию		

Таблица 4

**PROJ – инвестиционные проекты строительства жилья на селе**

№	Имя поля	Тип	Ширина	Описание поля
1	ID_pro	Numeric	6	Идентификатор проекта
2	ID	Numeric	6	Идентификатор объекта
3	Name_pro	Character	50	Наименование проекта
4	Invco	Numeric	14	Инвестиции в нулевой период
5	Stavd	Float	1.3	Ставка дисконтирования
6	Kollet	Numeric	4	Количество лет, в течение которых рассчитывается чистая дисконтированная стоимость (жизненный цикл проекта)
7	Amortiz	Numeric	12	Годовая сумма амортизации
ID_pro		Первичный ключ (PK) для данной таблицы, индекс по возрастанию		
ID		Внешний ключ (FK) для данной таблицы, индекс по возрастанию		

Таблица 5

**PRIT – годовые денежные притоки прибыли по проектам**

№	Имя поля	Тип	Ширина	Описание поля
1	ID_pro	Numeric	6	Идентификатор проекта
2	God	Numeric	4	Год, для которого верны данные
3	Prib	Numeric	14	Сумма прибыли в данный год
ID_pro		Внешний ключ (FK) для данной таблицы		

**USL\_JTS – условия строительства жилья для тружеников села,  
проживающих в сельской местности**

№	Имя поля	Тип	Ширина	Описание поля
1	Cod	Numeric	3	Код условия строительства
2	Name_jts	Char	30	Наименование условия строительства
Cod		Первичный ключ (PK) для данной таблицы, индекс по возрастанию		

Справочные DBF-файлы указаны в табл. 3 в графе «Описание поля». В их именах в конце стоит символ «\_». Справочники используются для выбора из них необходимых данных и вставки их в поля таблиц. Например, вместо ручного ввода типа объекта оператор выбирает нужный тип объекта из предложенного списка, тем самым экономится время на заполнение таблицы информацией и объем записи, так как в записи в действительности хранится не символьное выражение, а числовое (номер – код типа объекта).

Предложенная структура таблиц данных, естественно, не претендует на полноту охвата всех сторон такого сложного процесса, как строительство жилья на селе.

## 2. Анализ и оценка инвестиционных проектов строительства жилья на селе

Анализ и оценка инвестиционных проектов строительства жилья на селе в рассматриваемой автоматизированной системе «Сельстройжилье», как сказано выше, проводятся посредством следующих показателей [2]:

1) *NPV – Net Present Value* – современная (чистая) дисконтированная стоимость:

$$NPV = -C_0 + \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \frac{P_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n}, \quad (1)$$

где  $C_0$  – инвестиции в нулевой период, предназначенные для внедрения инвестиционного проекта;

$P_1, P_2, \dots, P_n$  – денежный приток – получаемая в будущем по годам от внедрения проекта чистая прибыль;

$n$  – жизненный цикл проекта, т.е. количество лет, в течение которых рассчитывается чистая дисконтированная стоимость;

$r$  – ставка дисконтирования.

Уравнение (1) позволяет описать чистую прибыль инвестора от вложенных инвестиций. Инвестор должен произвести вложение своего капитала здесь в том случае, если чистая текущая (дисконтированная) стоимость больше нуля.

2) *PI – Profitability Index* – индекс доходности (рентабельности) реальных инвестиций в сельскохозяйственное строительство:

$$PI = \frac{1}{C_0} \sum_{t=1}^n \frac{P_t}{(1+r)^t}. \quad (2)$$

Проект принимается к внедрению, если  $PI < 1$ ; проект отклоняется, если  $PI > 1$ ; проект требует дополнительных исследований, если  $PI = 1$ .

Индекс доходности достаточно удобен при определении из набора альтернативных инвестиционных проектов, у которых современная стоимость реальных инвестиций имеет близкие значения, или для формирования портфеля инвестпроектов с наибольшей суммарной величиной NPV.

3) *IRR – Internal Rate of Return* – внутренняя норма доходности реальных инвестиций в строительство жилья на селе, представляющая собой такое значение ставки дисконтирования, при котором чистая текущая стоимость проекта равняется нулю:

$$IRR = r, \text{ при котором } NPV(r) = 0. \quad (3)$$

Суть *IRR* состоит в том, что этот коэффициент показывает допустимую величину расходов, связанных с реализацией конкретного проекта. Значение *IRR*, например, может означать максимальное значение банковской процентной ставки, на которое может идти сельхозпредприятие, если инвестиционный проект полностью финансируется за счет ссуды банка. Превышение *IRR* делает проект убыточным.

4) *ROA – Return On Assets* – рентабельность активов проекта:

$$ROA = \frac{\Pi}{C_0} 100 \%, \quad (4)$$

$\Pi$  – чистая прибыль от реализации проекта строительства жилья на селе в течение периода времени, за которое предполагается окупить все затраты на него. Проект, у которого этот коэффициент наибольший, выбирается для реализации.

5) *PP – Payback Period* – дисконтированный срок окупаемости проекта:

$$PP = n, \text{ при котором } \sum_{t=1}^{PP} \frac{P_t}{(1+r)^t} = PV, \quad (5)$$

где  $PV$  – *Present Value* – современная стоимость инвестиций;

$n$  – это количество лет, необходимых для погашения инвестиций.

В случае равномерного распределения дохода по годам срок окупаемости проекта можно рассчитывать как дробь, где в числителе – начальные единовременные затраты, а в знаменателе – годовой доход.

Если срок окупаемости с учетом дисконтирования находится в пределах жизненного цикла проекта, то проект считается эффективным.

Если реальный срок окупаемости меньше проектного срока окупаемости, то это свидетельствует о хороших условиях, созданных для внедрения инвестиционного проекта, и сам проект достаточно продуманный.

Если реальный срок окупаемости больше проектного срока окупаемости, то это говорит о плохих условиях для реализации инвестиционного проекта и о том, что сам проект недостаточно продуман и не учитывает всех факторов, влияющих на него.

Если же реальный срок окупаемости окажется равным проектному сроку окупаемости, то в этом случае проект никак нельзя оценить. Его нельзя отнести ни к эффективному, ни к неэффективному.

Реальный срок окупаемости инвестиций в сельскохозяйственное строительство  $T_{pco}$  нами предлагается вычислить по следующей формуле:

$$T_{pco} = \frac{C_0}{\Delta\Pi_{\text{ч}} + A}, \quad (6)$$

где  $\Delta\Pi_{\text{ч}}$  – прирост чистой прибыли в течение года при внедрении проекта;

$A$  – годовая сумма амортизации основных производственных фондов, введенных в производство при внедрении проекта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдулгалимов А. М., Белозерцева Ю. В., Гамидов С. Г.* О структуре таблиц баз данных автоматизированной системы управления сельскохозяйственным строительством // Информационные технологии в экономике и управлении: сб. науч. тр. Махачкала: ДГТУ, 2013. С. 3–8.
2. *Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика: учеб. пособие. М.: Дело, 2002. 888 с.

# **ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ ОТДЕЛЬНЫХ СТРАН И ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НОВОСТНЫХ ПОТОКОВ**

**В. А. Балаш, А. Н. Степанов**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: vladimirbalash@yandex.ru, anton.stepanof@gmail.com

Рассматриваются статистические взаимосвязи между характеристиками новостного потока и волатильностью фондовых индексов для финансовых рынков крупнейших стран мира. Оцениваются параметры многомерной модели условной волатильности с экзогенными переменными MGARCH(1,1).

## **RELATIONSHIPS BETWEEN VOLATILITIES AND NEWS FLOWS INTENSITIES**

**V. A. Balash, A. N. Stepanov**

The relationship between the news flow intensities and volatility of stock indexes was analyzed. This paper examine MGARCH model with exogenous predictors.

Влияние числа и характеристик новостных сообщений на волатильность активов рассматривалось в работах [1–3]. В данной работе для того чтобы оценить влияние информации на рыночную волатильность, нами были использованы меры количества информации, поступающей на рынок в разрезе отдельных стран по данным провайдеров новостной аналитики [4]. Рассчитывалось общее число текстовых новостных сообщений, относящихся к компаниям, зарегистрированным в конкретной стране, а также средний за текущий день индекс новостных настроений. Показатели, соответствующие выходным и праздничным дням, засчитывались в следующий рабочий день. Таким образом, были построены временные ряды числа новостей и индекса настроений для 58 финансовых рынков отдельных стран за пять лет (всего 1424 наблюдения). Так как поток информации для некоторых стран оказался незначительным, для дальнейшего анализа были выбраны 30 крупнейших финансовых рынков, относящихся ко всем географическим зонам. Среднее число новостных сообщений за день колебалось в интервале от 35 сообщений в день для Аргентины до более 12000 для компаний США.

Применение метода главных факторов для исследования взаимосвязей между выбранными нами мерами количества информации, поступающей на различные финансовые рынки, дает основание считать, что общие тенденции мирового информационного потока могут быть отра-

жены с помощью четырех факторов, объясняющих 51,8% суммарной дисперсии за анализируемый период. Причем на долю первого фактора приходится 34,3% дисперсии, второго – около 7,8%. Специфические для рынков отдельных стран факторы порождают около 48,2% колебаний числа новостных сообщений.

Следует отметить схожесть факторных нагрузок для географически близких между собой стран. Первый фактор можно интерпретировать как объем информации, поступающей на крупнейшие финансовые рынки Европы и Северной Америки, второй – на азиатские рынки.

На следующем этапе мы оценивали параметры многомерной модели условной волатильности с экзогенными переменными MGARCH(1,1). В качестве экзогенных переменных включались характеристики новостных потоков для рынка той же страны и стран, расположенных в других часовых поясах. Результаты расчетов позволяют подтвердить значимость параметров при экзогенных переменных. В качестве примера приведем оценки параметров модели динамических корреляций MGARCH(1,1) для трех стран – США, Великобритании и Японии.

$$\sigma_{US,t}^2 = 3.82 + 0.71n_{US,t} + 0.002n_{GB,t} - 0.006n_{JP,t} + 0.08\varepsilon_{t-1}^2 + 0.89\sigma_{US,t-1}^2,$$

(1.62) (0.001) (0.005) (0.006) (0.013) (0.014)

$$\sigma_{GB,t}^2 = 0.03 + 0.03n_{US,t} + 0.06n_{GB,t} + 0.03n_{JP,t} + 0.11\varepsilon_{t-1}^2 + 0.86\sigma_{GB,t-1}^2,$$

(0.69) (0.01) (0.01) (0.03) (0.01) (0.01)

$$\sigma_{JP,t}^2 = 2.91 - 0.023n_{US,t} - 0.04n_{GB,t} - 0.07n_{JP,t} + 0.11\varepsilon_{t-1}^2 + 0.88\sigma_{JP,t-1}^2,$$

(0.016) (0.001) (0.07) (0.03) (0.01) (0.01)

$$\lambda_1 = 0.03, \lambda_2 = 0.84,$$

где в качестве зависимых переменных использовались значения индексов SP500, FTSE100, NIKKEY,  $n_{US}$ ,  $n_{GB}$ ,  $n_{JP}$  – число финансовых новостей, поступивших для компаний США, Великобритании и Японии, тыс. за день.

Интересно отметить, что для европейских стран, кроме новостных сообщений из своего региона, существенное влияние на волатильность оказывают новости из Северной Америки, для азиатских стран – новости из США и Азиатского региона, а для американских рынков – новости из Европы и США.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров С. П., Дате П., Балаш В. А. Использование данных новостной аналитики в GARCH моделях // Прикладная эконометрика. 2013. № 29 (1). С. 82–96.

2. *Sidorov S. P., Date P., Balash V. A., Faizliev A. R., Korobov E. A.* Individual stock volatility modeling with GARCH-jumps model augmented with news analytics data // *Computer Data Analysis and Modeling: Theoretical and Applied Stochastics: Proc. of the Tenth Intern. Conf. : in 2 vol. Vol. 2.* Minsk: Publ. center of BSU, 2013. P. 181–184.

3. *Sidorov S. P., Revutskiy A. S., Faizliev A. R., Korobov E. A., Balash V. A.* Some Empirical Results for Augmented GARCH Model with Jumps // *Математическое моделирование в экономике и управлении рисками: материалы III Междунар. молодеж. науч.-практ. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. С. 163–172.*

## **НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПЕРАЦИОННОГО РИСКА**

**О. С. Балаш, А. А. Стальмахова, О. Ю. Стальмахова**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: olgabalash@mail.ru, nastya.stal@gmail.com, o\_stal@mail.ru

Обсуждаются проблемы определения, классификации и моделирования операционного риска. Предложен подход к оцениванию операционного риска методом Монте-Карло.

## **SOME APPROACHES FOR OPERATIONAL RISK MODELING**

**O. S. Balash, A. A. Stalmakhova, O. U. Stalmakhova**

We discuss the problems of definition, classification and modeling of operational risk. The approach to assessment of operational risk using the Monte Carlo method.

Начиная с 1999 г. после обсуждения Базельским комитетом по банковскому надзору Нового соглашения по капиталу [1] все больше внимания банки уделяют проблеме исследования управления операционными рисками.

Источники операционного риска многообразны – это некорректный ввод данных, отсутствие контроля за действиями трейдеров, мошенничество и многое другое. Поэтому развитие в настоящее время риск-менеджмента очень актуально. Оно ведется по следующим направлениям: классификация операционных рисков, взаимосвязь их с другими видами рисков, анализ факторов на микро- и макроуровнях, количественное моделирование операционного риска и др.

Однозначного определения операционного риска не существует. В литературе приводятся формулировки, связанные с риском ведения бизнеса, позиционирования на рынке, ноу-хау, процедуре исполнения

операций, неэффективности внутренней системы контроля и много другое.

Базельским комитетом предложена следующая трактовка: «операционный риск определяется как риск возникновения убытков в результате недостатков или ошибок во внутренних процессах, в действиях сотрудников и иных лиц, в работе информационных систем или вследствие внешних событий» [1, с. 10].

Стандартное определение операционного риска и его классификация, предложенная Базельским комитетом, хотя и взята за основу, но некоторыми банками и финансовыми учреждениями корректируются с учетом специфики своей деятельности. Так, Banker Trust предполагает следующую классификацию операционных рисков: персонала, технологического, физического ущерба, взаимоотношений, внешнего, модельного [2].

Риску, связанному с моделированием на базе математической модели (риск неадекватности), уделяется особое место, так как он связан не только с использованием некорректной модели, но и с рисками некомпетентности персонала, межличностных отношений, а также с риском изъянов компьютерных программных приложений (технологическим риском).

При математическом моделировании операционного риска определение его величины требует знания двух распределений – распределения убыточностей по величине потерь и распределения убытков по частоте. Частотные распределения убыточностей обычно моделируются с помощью неотрицательных вероятностных законов. Более глубокие исследования принимают во внимание коррелированность различных источников операционного риска.

Рассмотрим первоначально моделирование совокупного убытка по отдельно взятому источнику риска. Будет предполагать, что закон порождения убытков может быть описан некоторым точечным случайным процессом, так что совокупный годовой убыток равен

$$Z_m = \sum_{i=1}^{N_m} X(i, m),$$

где  $N_m$  – число (частота) убытков,  $X(i, m)$  – величины убытков в году  $m$ . В наиболее простом случае [3] полагают, что  $N_m$  – независимые, одинаково распределенные случайные величины, починающиеся распре-

делению Пуассона:

$$\Pr(N_m = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть далее распределение величины убытков соответствует некоторому вероятностному закону  $f(x|\beta)$ , но убытки фиксируются лишь в случае, если их величина превосходит некоторый заданный уровень  $L$ . Тогда плотность распределения убытков может быть описана усеченным слева распределением

$$f_L(x|\beta) = \frac{f(x|\beta)}{1 - F(L|\beta)}, \quad L \leq x < \infty.$$

Во многих случаях естественным является предположение, что закон распределения потерь описывается распределением Парето

$$G(x|a, \beta) = 1 - \left(1 + a \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{a}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \mu > 0, \quad \sigma > 0,$$

где  $\alpha$  и  $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$  – коэффициенты формы и масштаба соответственно,  $\beta = (a, y)$ . Распределения Парето и его обобщения часто именуют распределениями с «тяжелыми хвостами». Распределения с «тяжелыми хвостами» широко используются при оценке вероятности катастроф и иных экстраординарных событий. Оценки вероятностей больших убытков значительно отличаются от величин, полученных при предположениях о нормальном распределении.

Ожидаемая величина убытка, как показано в [4], может быть вычислена по формуле:

$$Q_L = \lambda_L E(X - L | X > L) = \lambda_L \frac{\beta_L + aL}{1 - a},$$

где  $\beta_L = \sigma + a(L - \mu)$ ,  $\lambda_L = \left(1 + a \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{a}}$ .

Для определения величины резерва по отдельному виду риска необходимо найти значение  $q$ -квантиля совокупного убытка  $Q_L^q$ . Общая величина капитала, необходимая для покрытия убытков с вероятностью, превышающей уровень  $(1 - q)$  за период  $T$ , составляет  $T \times L + T \times Q_L^q$ .

Алгоритм решения данной задачи методом Монте-Карло при предположении о независимости интенсивности и величины убытков включает следующие шаги [5]:

- 1) сбор статистики убыточностей  $(N_i, X_i)$ ;
- 2) оценка параметров  $(\lambda, \beta)$  маргинальных распределений  $F(n)$ ,  $G(X)$ ;
- 3) численное генерирование  $K$  реализаций случайных векторов  $(n_i, X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , удовлетворяющих маргинальным функциям распределения;
- 4) вычисление величины совокупного убытка  $z = \sum_{i=1}^n x_i$  при выбранных значениях параметров;
- 5) вычисление ожидаемого значения и  $q$ -квантиля совокупного убытка.

Если интенсивность наступления убытков не постоянна во времени, то это может быть учтено в модели путем допущения, что частота убытков соответствует неоднородному пуассоновскому процессу с переменной интенсивностью  $\lambda(t)$ . Также можно допускать непостоянство во времени величины порога отсечения  $L(t)$ . Кроме того, средняя величина убытков  $X(t)$  может зависеть от времени, например включать временной тренд.

В таких случаях необходимо оценивать параметры совместной плотности распределения, что представляет собой нетривиальную проблему [6].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М, 1994. 192 с.
2. *Bradley S. P., Crain D. B.* A dynamic model for bond portfolio management // Management Science. 1972. Vol. 19. P. 139–151.
3. *Мак Т.* Математика рискованного страхования / пер. с нем. М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2005. 432 с.
4. *Medova E. A., Kyriacou M. N.* Extremes in operational risk measurement // Risk Management: Value At Risk And Beyond. 2002. № 15. P. 247–274.
5. *Shevchenko P. V., Temnov G.* Modeling operational risk data reported above time-varying threshold // J. of Oper. Risk. 2009. Vol. 4. P. 19–42.
6. *Балаш В. А., Балаш О. С.* Моделирование операционного риска методом Монте-Карло // Стратегия развития страховой деятельности в РФ: первые итоги, проблемы, перспективы: материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф. Ярославль: ЯрГУ, РОСГОССТРАХ, 2015. 580 с.

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТИРОВАНИЯ

**А. И. Безруков, Г. Г. Погожилская**

*Саратовский социально-экономический институт (филиал)  
Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*

E-mail: bezr\_Alex@mail.ru, galina.pog@inbox.ru

Предложена методика статистического анализа результатов тестирования, накопленных в системе тестирования АСТ. Сложность тестовых заданий оценивается в логитах как логарифм отношения количества неудачных попыток выполнения задания к числу удачных. Оценка уровня подготовленности студента проводится одним из трёх методов: долей выполненных заданий, методом максимального правдоподобия и методом скользящего окна. Строится зависимость вероятности выполнения заданий от уровня подготовленности студентов. Отсутствие монотонного возрастания вероятности от уровня подготовленности свидетельствует о некорректности задания.

## METHODS OF ANALYSIS OF TEST RESULTS

**A. I. Bezrukov, G. G. Pogozhilskaia**

The methods of statistical analysis of test results accumulated in the ACT system. The complexity of tests is estimated in the logits as the logarithm of the number of failed attempts the task among the successful. Assessing the level of preparedness of students is conducted by one of three methods: the proportion of completed jobs, the maximum likelihood method and sliding window method. Building graph according to the probability assignments on the level of preparedness of students. The absence of a monotonic increase in the probability of the level of preparedness indicates incorrect test.

Применение тестов является мощным инструментом оперативного контроля знаний студентов и управления качеством образовательного процесса [1]. Однако отсутствие анализа банка тестовых заданий приводит к тому, что по результатам тестирования иногда очень трудно судить о фактических знаниях тестируемых [2]. Вместе с тем, накоплены большие объёмы информации результатов тестирования, что даёт возможность применять компьютерные алгоритмы для выявления некорректных заданий и последующего их исправления. Кроме того, отсутствие контроля над уровнем сложности тестов приводит к тому, что распределение заданий по сложности близко к нормальному. При этом наше исследование показывает, что наилучшие результаты получаются при равномерном и даже экспоненциальном распределении заданий по сложности (простых заданий должно быть существенно больше чем сложных). Для оценки сложности тестовых заданий и анализа статистики их выполнения предлагается следующая информационная технология.

Несмотря на то что база данных среды АСТ выполнена в собственном формате, она довольно легко конвертируется в среду Access. Так как целостность данных в АСТ не поддерживается, её приходится восста-

навливать, отбрасывая несвязанные записи из различных таблиц. После такого восстановления становится возможным формулировать запросы к базе данных на языке SQL. Например, мы можем выбрать результаты выполнения тестовых заданий из одного банка тестовых заданий. Это даёт возможность оценить сложность каждого задания в логитах [3]:

$$\delta_i = \log\left(\frac{N_0 - N_V}{N_V}\right), \quad (1)$$

где  $N_0$  – число попыток выполнения задания, а  $N_V$  – число удачных попыток.

Измерение сложности заданий в логитах возможно только тогда, когда  $N_V \neq N_0$  и  $N_V \neq 0$ , т.е. задание хоть кто-то выполнил, но не все. Именно такие задания должны быть использованы при оценке уровня подготовленности студентов, поэтому только их мы рассматриваем в дальнейшем анализе.

В работе использованы следующие методы оценки результатов тестирования.

*Оценка по числу выполненных заданий.* Предполагается, что уровень подготовленности пропорционален числу успешно выполненных заданий. Коэффициент пропорциональности выбирается из следующих соображений: пусть  $D_{\max}$  и  $D_{\min}$  – соответственно максимальная и минимальная трудность заданий в тесте, выраженная в логитах,  $N$  – число заданий в тесте. Студент, не справившийся ни с одним заданием, имеет уровень  $D_{\min}$ . Студент, справившийся со всеми заданиями теста, имеет уровень  $D_{\max}$ . Тогда уровень подготовленности  $\theta$  студента, справившегося с  $M$  заданиями, можно вычислить по формуле

$$\hat{\theta} = D_{\min} + \frac{(D_{\max} - D_{\min}) \cdot M}{N}. \quad (2)$$

*Оценка методом максимального правдоподобия.* Пусть  $P(\theta, \delta_j)$  – вероятность выполнения студентом с уровнем подготовки  $\theta$  задания с уровнем трудности  $\delta_j$ . При расчетах могут использоваться формулы из модели Раша или модели Бирнбаума [3]. Наша задача подобрать такое значение  $\theta$ , чтобы получившийся результат тестирования  $i$ -го студента был максимально правдоподобным. Результаты выполнения отдельных заданий теста можно считать независимыми событиями. Тогда  $L(\theta)$  – вероятность появления полученного результата тестирования будет равна произведению вероятностей выполнения (или невыполнения заданий):

$$L(\theta) = \prod_j p_j, \quad (3)$$

где  $p_j = P(\theta, \delta_j)$ , если задание  $j$  было выполнено и  $p_j = 1 - P(\theta, \delta_j)$ , если студент не справился с  $j$ -м заданием. Суть метода максимального правдоподобия: подобрать такое значение  $\theta$ , при котором  $L(\theta)$  принимает максимальное значение. Так как допустимых значений  $\theta$  немного, искомое значение может быть найдено методом перебора возможных значений.

*Оценка методом скользящего окна.* При выполнении тестов с большим числом заданий нередко возникают ситуации, когда слабый студент случайно отвечает на сложный вопрос (угадывает ответ), а сильный студент, сосредоточив внимание на трудных вопросах, делает досадные ошибки или просто не успевает справиться с простыми заданиями. Для компенсации этих проблем предлагается модифицировать метод максимального правдоподобия: не учитывать ответы на трудные задания при оценке правдоподобия в диапазоне низких  $\theta$ , а при оценке в диапазоне высоких  $\theta$  не учитывать ответы на простые задания. Таким образом, при вычислении  $L(\theta)$  учитывается не весь диапазон вопросов, а только некий интервал, границы которого зависят от  $\theta$ .

Оценка уровня подготовленности студента по нескольким заданиям более достоверна, чем оценка по одному заданию. Поэтому будем считать её истинным уровнем подготовленности.

Для иллюстрации зависимости вероятности выполнения задания от уровня подготовленности студентов построим график. На горизонтальной оси укажем уровень подготовленности студентов, а на вертикальной – частоту удачного выполнения задания для данного уровня. Очевидно, что для корректных заданий должно наблюдаться монотонное возрастание. В противном случае желательно проверить данное задание на его корректность.

Методика апробировалась на банках тестовых заданий «Математика» (683 задания) и «Информатика» (738 заданий). Задания выполняли 830 и 798 человек соответственно. Результаты применения методики на банке тестовых заданий по информатике выявили: у 86% заданий наблюдается монотонная зависимость вероятности выполнения от уровня подготовленности, что свидетельствует о корректности этих заданий; у 9% – наблюдается отсутствие зависимости, скорее всего, подобные задания угадывались; у 1% – обратная монотонная зависимость, что может указывать на некорректность формулировки самого тестового задания; у 4% – немонотонная зависимость, появление которой требует дополнительного содержательного анализа задания.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что данная методика, является неплохим фильтром, выявляющим некорректные и подозри-

тельные задания [4]. Её применение позволяет повысить качество банков тестовых заданий, сделав их надежным инструментом управления качеством учебного процесса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусятников В. Н., Безруков А. И. Государственные образовательные стандарты и федеральный закон «О техническом регулировании» // Стандарты и качество. 2009. № 9. С. 44–45.
2. Каюкова И. В. Методика оценки и прогнозирования уровня формируемых компетенций // Вестн. Сарат. гос. соц.-экон. ун-та. 2012. № 4 (43). С. 148–151.
3. Каюкова И. В. Разработка математических методов и моделей анализа и прогнозирования качества обучения в вузе на основе компетентностного подхода : дис. ... канд. экон. наук. Волгоград, 2014.
4. Гусятников В. Н., Безруков А. И., Соколова Т. Н. Инструменты интеграции систем управления качеством в образовательный процесс // Интеграция образования. 2010. № 4. С. 16–19.

### **ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ «СПРОС–ПРЕДЛОЖЕНИЕ», УЧИТЫВАЮЩЕЙ ТРАНЗАКЦИОННЫЕ ИЗДЕРЖКИ**

**А. Е. Болотин**

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

E-mail: aebolotin@yandex.ru

Исследуется вопрос существования положения равновесия в модели «спрос – предложение», в которой учитываются транзакционные издержки, связанные с инфляцией и торговыми издержками. Функция спроса в рассматриваемой модели получена как решение задачи максимизации функции полезности при бюджетных ограничениях, задаваемых положительно однородной функцией, а функция предложения – как решение задачи максимизации прибыли на технологическом множестве, задаваемом сильно выпуклой функцией. В данной статье вектор равновесных цен рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения. С помощью методов теории накрывающих отображений получены достаточные условия существования вектора равновесных цен в исследуемой модели.

### **SUFFICIENT CONDITIONS EXISTENCE OF EQUILIBRIUM IN THE MODEL “DEMAND–SUPPLY”, TAKING INTO ACCOUNT TRANSACTION COSTS**

**A. E. Bolotin**

This paper is the studies of question of existence of equilibrium in the model “demand – supply”, which takes into account transaction costs associated with inflation and trading costs. The demand function in the model obtained as the solution of the problem of maximization of utility function under budget constraint, which is set to a positive homogeneous function, and the function of the supply is the solution to the problem of maximizing profits on technological variety, which is set to a strongly convex function. In this article, the vector of equilibrium

prices is considered a point of coincidence of mappings of supply and demand. The work uses methods of the theory of covering maps to obtain of sufficient conditions for the existence of a vector of equilibrium prices in the examined model.

Вопросу существования положения равновесия в модели «спрос – предложение» посвящено огромное количество работ. Однако до последнего времени не было математического аппарата, позволяющего получить достаточные условия существования вектора равновесных цен в случае, когда функции спроса и предложения не представлены в явном виде (известно лишь, что для каждого допустимого вектора цен вектор спроса и вектор предложения являются решениями некоторых задач на условный экстремум). В настоящей работе для получения достаточных условий существования положения равновесия применяются методы, основанные на теоремах о точках совпадения липшицева и накрывающего отображений. В качестве модели, на примере которой проводится анализ, выбрана модель «спрос – предложение» с транзакционными издержками.

Формализуем поставленную задачу. В изучаемой модели отображения спроса и предложения действуют из одного метрического пространства в другое, поэтому для получения основного результата используется подход, основанный на понятии  $\alpha$ -накрывающего отображения [1].

Пусть задано  $\alpha > 0$ . Отображение  $S : X \rightarrow Y$  называется  $\alpha$ -накрывающим, если

$$S(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x)), \forall r \geq 0, \forall x \in X.$$

Для получения достаточных условий существования положения равновесия в исследуемой модели будем применять следующий результат.

Теорема Милютина о возмущении. Пусть пространство  $X$  – полное метрическое пространство,  $Y$  – нормированное пространство, отображение  $S : X \rightarrow Y$  является непрерывным и  $\alpha$ -накрывающим. Тогда для любого отображения  $\widehat{A} : X \rightarrow Y$ , удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица  $\beta < \alpha$ , отображение  $S + \widehat{A}$  является  $(\alpha - \beta)$ -накрывающим.

Существование и устойчивость равновесия в модели «спрос–предложение». Пусть заданы  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Кроме того, заданы векторы  $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{n1})$ ,  $c_2 = (c_{12}, \dots, c_{n2}) \in \mathbb{R}_+^n$  и выполняются следующие условия:

1')  $\varphi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  является сильно выпуклой функцией, обозначим такие функции как  $V_c$ ;

2')  $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  является строго вогнутой функцией, обозначим такие функции как  $W_s$ ;

3') функция  $I : R_+^n \rightarrow R_+$  и является положительно однородной первой степени, обозначим такие функции как  $O_{1+}$ ;

4') выполняется неравенство  $c_{i1} < c_{i2}, \forall i = \overline{1, n}$ .

Под математической моделью рынка будем понимать набор

$$\sigma(\varphi, u, I, c_1, c_2) \in V_c \times W_s \times O_{1+} \times R_+^n \times R_+^n,$$

удовлетворяющий условиям 1')–4').

Набор параметров  $\sigma(\varphi, u, I)$  однозначно определяет функции предложения  $S(y) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  и спроса  $D(x) : R_+^n \rightarrow R_+^n$ . При этом если для заданного вектора цен  $p \in \Omega$ ,  $\Omega = [c_{11}; c_{12}] \times [c_{21}; c_{22}] \times \dots \times [c_{n1}; c_{n2}]$  существует  $\forall i = \overline{1, n}$ , такой что  $D_i(p) > S_i(p)$ , то на рынке возникает дефицит товаров, в противном случае когда  $D_i(p) < S_i(p)$ , возникает их переизбыток и покупательская способность падает. Таким образом, ситуацией, удовлетворяющей и потребителей, и производителей, является  $D_i(p) = S_i(p)$ .

*Определение.* Вектор  $p \in \Omega$  называется равновесным вектором цен в модели  $\sigma$ , если  $D_i(p) = S_i(p)$ .

Сформулируем основные результаты. Обозначим

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \frac{\max_{i=\overline{1, n}} c_{i2}}{\|\varphi'\|_C \|\varphi''\|_C} - \left\| \frac{\max_{i=\overline{1, n}} c_{i2}}{\|\varphi'\| \|\varphi''\|} \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}''_{jk} \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}''_{si} \varphi'_i \varphi'_j \right\|_C,$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \left\| \frac{1}{[p^T \tilde{U}'' p]} \left( \frac{U'_i}{p_i} T_{ij} + Q_i(y_j - I_j) \right) \right\|_C, \quad \bar{\gamma}(\sigma) = \rho_{R_+^n} \left( S \left( \frac{c_1 + c_2}{2} \right), D \left( \frac{c_1 + c_2}{2} \right) \right).$$

ТЕОРЕМА. Пусть модель  $\sigma$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $\bar{\alpha}(\sigma) > \bar{\beta}(\sigma)$ ;
- 2)  $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$ .

Тогда в исследуемой модели существует равновесный вектор цен  $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$  такой, что  $c_{i1} < p_i^* < c_{i2}, \forall i = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим функции предложения  $S(y) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  и спроса  $D(x) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  как решение экстремальных задач (1) и (2), соответственно удовлетворяющее заданной модели [2]:

$$\begin{cases} \langle p, y \rangle \rightarrow \max, \\ \varphi(y) \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(x) \rightarrow \max, \\ \langle p, x \rangle \leq I(p), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  – скалярное произведение, функция  $\varphi(y) : R_+^n \rightarrow R$  накладывает на производителя технические ограничения,  $u(x) : R_+^n \rightarrow R$  – функция полезности, которая характеризует степень предпочтительности для потребителя набора товаров, а  $I(p) : R_+^n \rightarrow R_+$  задает бюджетные ограничения потребителя.

ЛЕММА 1. Отображение  $S(y) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  является  $\alpha$ -накрывающим с константой накрывания :

$$\alpha \geq \frac{\max_{i=\overline{1,n}} c_{i2}}{\|\varphi'\|_C \|\varphi''\|_C} - \left\| \frac{\max_{i=\overline{1,n}} c_{i2}}{\|\varphi'\|} [\varphi'^T \tilde{\varphi}'' \varphi'] \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}''_{jk} \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}''_{si} \varphi'_i \varphi'_j \right\|_C,$$

$$\text{где } \varphi' = \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \dots \\ \varphi'_n \end{pmatrix}, \tilde{\varphi}'' = (\varphi'')^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi''_{11} & \dots & \varphi''_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi''_{n1} & \dots & \varphi''_{nn} \end{pmatrix}^{-1}, \quad \varphi''_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Доказательство

Выпишем функцию Лагранжа для задачи (1.1):

$$L(p, y, \lambda) = -\langle p, y \rangle + \lambda \varphi(y), \lambda \in R_+. \quad (1.1)$$

Необходимые условия существования точки экстремума задачи (1.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial L(p, y, \lambda)}{\partial y} = 0, \\ \varphi(y) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Введем отображение  $\Phi(p, y, \lambda) = \left( \frac{\partial L}{\partial y}(p, y, \lambda); \varphi(y) \right)$  такое, что  $\Phi : R_+^n \times R_+^n \times R_+ \rightarrow R \times R$ . Тогда (1.2) примет вид  $\Phi(p, y, \lambda) = 0$ , отсюда следует, что

$$\frac{\partial(y, \lambda)}{\partial p} = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial(y, \lambda)} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad (1.3)$$

$$\text{где } \frac{\partial \Phi}{\partial(y, \lambda)}(p, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_1} & \dots & \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_n} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_n} & \dots & \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_n \partial y_n} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} & 0 \end{pmatrix}$$

Для нахождения  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(y,\lambda)}\right)^{-1}$  необходимо решить матричное уравнение: 
$$\begin{pmatrix} \lambda\varphi'' & \varphi' \\ \varphi'^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ V_{n+1} \end{pmatrix} \text{ относительно } \begin{pmatrix} W \\ W_{n+1} \end{pmatrix}.$$

В результате получим:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(y,\lambda)}\right)^{-1} = \frac{1}{[\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}([\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']\tilde{\varphi}'' - \tilde{\varphi}''\varphi'\varphi'^T\tilde{\varphi}'') & \tilde{\varphi}''\varphi' \\ \varphi'^T\tilde{\varphi}'' & -\lambda \end{pmatrix}$$

Найдем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}(p,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Подставим полученные результаты в (1.3)

$$\frac{\partial(y,\lambda)}{\partial p} = \frac{-1}{\lambda[\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']} \begin{pmatrix} [\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']\tilde{\varphi}'' - \tilde{\varphi}''\varphi'\varphi'^T\tilde{\varphi}'' \\ \varphi'^T\tilde{\varphi}'' \end{pmatrix},$$

где  $\lambda = \frac{\|\varphi'\|}{\|p\|}$  исходя из (1.2)

$$\text{Отсюда следует, что } \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{-\|p\|}{\|\varphi'\|} \tilde{\varphi}'' + \frac{\|p\| \|\tilde{\varphi}''\varphi'\varphi'^T\tilde{\varphi}''}{\|\varphi'\|[\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']}.$$

Используя теорему Милютина о возмущении, докажем что  $\frac{\partial y}{\partial p}$  является накрывающим. Обозначим  $K = \frac{-\|p\|}{\|\varphi'\|} \tilde{\varphi}''$ ,  $P = \frac{\|p\| \|\tilde{\varphi}''\varphi'\varphi'^T\tilde{\varphi}''}{\|\varphi'\|[\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']}$ . Первоначально покажем, что  $K^{-1}(p)$  является липшицевым:  $\forall p \in \Omega : \|K^{-1}\| \leq \|p^{-1}\| \|\varphi'\|_C \|\varphi''\|_C \leq (\max_{i=1,n} c_{i2})^{-1} \|\varphi'\|_C \|\varphi''\|_C$ . Отсюда следует, что  $K(p)$  является накрывающим, с константой накрывания обратной константе Липшица:

$$\alpha_K \geq \frac{\max_{i=1,n} c_{i2}}{\|\varphi'\|_C \|\varphi''\|_C}.$$

Теперь оценим константу Липшица для  $P(p)$  [3]:

$$L_P \leq \left\| \frac{\max_{i=1,n} c_{i2}}{\|\varphi'\|[\varphi'^T\tilde{\varphi}''\varphi']} \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}''_{jk} \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}''_{si} \varphi'_i \varphi'_j \right\|_C.$$

Исходя из полученных оценок  $\alpha \geq \alpha_K - L_P$ , что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. При выполнении условий задачи (2.1) отображение  $D(y) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  является липшицевым, а константа Липшица имеет следующую оценку:

$$\beta \leq \left\| \frac{1}{[p^T \tilde{U}'' p]} \left( \frac{U'_i}{P_i} T_{ij} + Q_i (y_j - I'_j) \right) \right\|_C,$$

где  $T = [p^T \tilde{U}'' p] \tilde{U}'' - \tilde{U}'' p p^T \tilde{U}''$ ,  $Q = -\tilde{U}'' p$ ,

$$\tilde{U}'' = (U'')^{-1} = \begin{pmatrix} u''_{11} & \cdots & u''_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u''_{n1} & \cdots & u''_{nn} \end{pmatrix}^{-1}, \quad u''_{ij} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Доказательство аналогично Лемме 1.

Для рассмотренных отображений предложения  $S(y) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  и спроса  $D(x) : R_+^n \rightarrow R_+^n$  доказательство теоремы следует из Леммы 1 и Леммы 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
2. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5. № 1. P. 5–16.
3. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Мат. заметки. 2009. Т. 86, вып. 2. С. 163–169.

## ФАКТОРЫ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИЕ СКЛОННОСТЬ К СТРАХОВАНИЮ ЖИЗНИ

Э. Р. Валимухаметова

Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия

E-mail: eleonora\_val@mail.ru

Актуальной проблемой рынка страховых услуг в России является отсутствие культуры страхования. В статье рассматриваются причины и факторы, обуславливающие непопулярность страхования жизни среди россиян. Также на основе социологического опроса, проведенного в Уфе столице Республики Башкортостан, были выявлены факторы, влияющие на страхование своей жизни лицами в возрасте от 18 до 60 лет.

## FACTORS OF PREDISPOSITION TO LIFE INSURANCE

E. R. Valimukhametova

Absence of insurance culture is one of the main problems of insurance market in Russia. This article provides the description of factors, which make insurance products unpopular for Russians. An opinion poll, held in September in Ufa, the capital of Bashkortostan, gave the determinants of impact on popularity of life insurance among people aged 18–60 years.

Рассматривая жизнь как длительное состояние и практически не задумываясь о наступлении нежелательных событий и несчастных случаев, человек редко прибегает к услуге страхования своей жизни. Данный вид страхования не является популярным продуктом на российском рынке страховых услуг. По статистике в 2014 г. свою жизнь и жизнь своих детей застраховали порядка 5–7% российских граждан.

Что может служить сдерживающим фактором для распространения данной услуги в нашей стране? По мнению опрошенных граждан, основными причинами сложившейся ситуации являются следующие факторы:

- 1) Отсутствие необходимости в страховании жизни (исконно русское «авось»);
- 2) Высокая стоимость продукта;
- 3) Недоверие к страховым компаниям;
- 4) Недостаточная информация о таком виде страхования, как страхование жизни.

На основе имеющихся статистических данных можно сделать вывод о том, что культура страхования в России недостаточно развита, поэтому необходимо способствовать ее росту, для чего следует в первую очередь «заложить фундамент» понимания необходимости страхования жизни. В отличие от нашего государства рынок страхования в Америке и Европе является первичными и насыщенным. К примеру, в США и ряде западных стран почти у 90% населения имеются полисы страхования жизни.

В сентябре 2015 г. в столице Республики Башкортостан, городе Уфа, был проведен социологический опрос граждан в возрасте от 18 до 60 лет, посвященный проблеме страхования жизни. Выборка респондентов составила 100 человек – жителей Кировского и Ленинского района города Уфа. Данная территория была выбрана для исследования по причине наличия на ней большого числа страховых компаний, предлагающих в качестве одного из страховых продуктов страхование жизни.

На основе собранных данных была построена регрессионная модель, рассматривающая влияние ряда независимых факторов на бинарную зависимую переменную, принимающую два значения: ноль или еди-

ница, в случае отсутствия и наличия полиса страхования жизни соответственно.

В качестве независимых переменных были выбраны следующие показатели:

- 1) пол,
- 2) наличие высшего образования,
- 3) наличие личного автомобиля,
- 4) число иждивенцев,
- 5) среднемесячный доход в рублях.

Тесная взаимосвязь между факторами подтверждается значениями элементов корреляционной и ковариационной матриц, приведенных в табл. 1 и 2 соответственно.

Таблица 1

**Корреляционная матрица**

Переменная	X1	X2	X3	X4	X5
X1	1.000000	0.308958	0.124152	0.628102	-0.012955
X2	0.308958	1.000000	0.227127	0.693528	-0.143142
X3	0.124152	0.227127	1.000000	0.538991	-0.164021
X4	0.628102	0.693528	0.538991	1.000000	-0.140314
X5	-0.012955	-0.143142	-0.164021	-0.140314	1.000000

Таблица 2

**Ковариационная матрица**

Переменная	X1	X2	X3	X4	X5
X1	0.236939	0.074082	0.030204	1837.449	-0.004490
X2	0.074082	0.242653	0.055918	2053.163	-0.050204
X3	0.030204	0.055918	0.249796	1618.980	-0.058367
X4	1837.449	2053.163	1618.980	36118827	-600.4082
X5	-0.004490	-0.050204	-0.058367	-600.4082	0.506939

Также на основе значений элементов корреляционной матрицы сделан вывод об отсутствии строгой и нестрогой мультиколлинеарности, то есть отсутствии сильной корреляционной зависимости между факторами ( $r_{xixy} < 0.7$ ).

Теснота связи между зависимой переменной и каждым независимым фактором определяется на основе статистической значимости, выра-

жаемой значением  $t$ -статистики и стандартного отклонения, либо на основе значения вероятности отклонения нулевой гипотезы на конкретном уровне значимости. При этом в качестве нулевой гипотезы выдвигается предположение о равенстве коэффициентов при независимых переменных нулю и уровень значимости выбран на уровне 10%.

Результаты оценивания регрессионной модели приведены на рис. 1.

Dependent Variable: Y  
 Method: Least Squares  
 Date: 09/27/15 Time: 11:34  
 Sample: 1 70  
 Included observations: 70

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	0.007659	0.087044	0.087987	0.9302
X2	0.265795	0.097250	2.733125	0.0081
X3	0.203750	0.090535	2.250513	0.0278
X4	7.05E-06	3.93E-06	1.792792	0.0777
X5	0.112461	0.048565	2.315705	0.0237
R-squared	0.840864	Mean dependent var		0.242857
Adjusted R-squared	0.827686	S.D. dependent var		0.431906
S.E. of regression	0.326743	Akaike info criterion		0.669462
Sum squared resid	6.939451	Schwarz criterion		0.830068
Log likelihood	-18.43116	Hannan-Quinn criter.		0.733257
Durbin-Watson stat	2.034470			

Рис. 1. Результаты оценивания регрессионного уравнения с включением всех независимых факторов

Гендерный признак, включенный в модель как фактор  $x_1$ , оказался статистически незначимым. Потому регрессионное уравнение было переопределено без учета переменной пола (рис. 2).

На основе скорректированного на число независимых факторов значения коэффициента  $R^2$  и статистической значимости всех переменных делаем вывод о высоком качестве подгонки регрессионной модели под реальные данные.

Таким образом, на основе полученных оценок можно сделать ряд выводов.

1. Люди, имеющие высшее образование (или более одного диплома о высшем образовании), более склонны к страхованию своей жизни нежели люди без высшего образования, что может быть обусловлено более высоким уровнем финансовой и страховой грамотности.

Dependent Variable: Y  
 Method: Least Squares  
 Date: 09/27/15 Time: 11:35  
 Sample: 1 70  
 Included observations: 70

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X2	0.266877	0.095741	2.787493	0.0069
X3	0.203112	0.089563	2.267813	0.0266
X4	7.16E-06	3.68E-06	1.948506	0.0556
X5	0.112485	0.048197	2.333830	0.0227
R-squared	0.860800	Mean dependent var		0.242857
Adjusted R-squared	0.836291	S.D. dependent var		0.431906
S.E. of regression	0.324277	Akaike info criterion		0.641009
Sum squared resid	6.940278	Schwarz criterion		0.769495
Log likelihood	-18.43533	Hannan-Quinn criter.		0.692045
Durbin-Watson stat	2.033557			

Рис. 2. Результаты оценивания регрессионного уравнения с исключенным фактором полового признака респондента

2. Граждане, имеющие личный автомобиль, чаще прибегают к страхованию жизни, чем граждане без личного авто. Причиной сложившейся ситуации может служить наличие у водителей полиса КАСКО;

3. Число иждивенцев также положительно сказывается на склонности к страхованию жизни. Данная черта более характерна для лиц женского пола;

4. Среднемесячный доход также оказывает положительное влияние на склонность к приобретению продукта по страхованию жизни, что обусловлено немалой стоимостью страховых услуг.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А.* Эконометрика : учебник для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 311 с.
2. *Магнус Я. Р.* Эконометрика. Начальный курс : учебник. М. : Дело, 2000. 400 с.
3. Федеральный закон «Об организации страхового дела в РФ» № 4015-1 от 27 ноября 1992 г. (с изменениями и дополнениями), ст. 8.1. Справочно-правовая система «Консультант Плюс» [Электронный ресурс]. URL: <http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=148321> (дата обращения: 27.09.2015).

# АНАЛИЗ АКТУАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

**В. В. Волкова<sup>1</sup>, Ю. Н. Миронкина<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ульмский университет, Германия*

<sup>2</sup>*Высшая школа экономики, Москва, Россия*

E-mail: vvv-hse@mail.ru, YMironkina@hse.ru

Инвестиционный доход является одним из самых важных источников доходов крупных страховых компаний. Однако из-за высокой степени риска инвестиционной деятельности требования к качеству проводимой страховыми компаниями инвестиционной политики очень высоки. Целью исследования является изучение структуры инвестиционного портфеля российских страховых компаний и оценка вероятности банкротства страховой компании вследствие выбора неверной инвестиционной стратегии. В работе приведен анализ текущего состояния инвестиций страховщиков; на основе показателей, влияющих на работу страховых компаний в России, с учетом особенностей российской экономики и страхового рынка реализована стохастическая инвестиционная модель Уилки; сформулированы рекомендации относительно формирования инвестиционного портфеля страховой компании.

## ANALYSIS OF THE ACTUARIAL STOCHASTIC INVESTMENT MODELS

**V. V. Volkova, Yu. N. Mironkina**

Investment income is one of the most important source of income for an insurance company, but since the investment process implies handling serious risks, the investment policy of global insurance faces extremely high requirements. The objective of the study was to investigate the risk of 'ruin' and to evaluate the probability that an insurer will become insolvent through fitting the Wilkie stochastic investment model on the indicators influencing the performance of insurance companies in Russian Federation. The paper describes how these models can be applied taking into account the features of the Russian economy and the insurance market.

Доход от вложений средств страховых резервов является одним из важных источников дохода страховой компании, но по причине рискованности инвестиционного процесса стратегия должна составляться максимально тщательно и с использованием всей необходимой актуальной информации о состоянии экономики и о правилах размещения резервов, действующих в конкретной стране.

Инвестиционная модель Уилки, применяемая в данной работе, широко используется страховыми компаниями, консультантами и учеными-исследователями в Великобритании и в других странах для актуарных расчетов, моделирования инвестиционных рисков и принятия портфельных решений. В данной работе модель Уилки преобразована для анализа ежемесячных наблюдений по параметрам, характеризующим финансо-

вый рынок, банковский сектор и общую экономическую ситуацию в России.

Анализ финансовой отчетности российских страховых компаний показывает, что инвестиционную стратегию многих страховщиков можно назвать умеренной и консервативной, наиболее важной для них является собственная платежеспособность. Поэтому страховщики стремятся гарантировать получение некоторой целевой доходности, инвестируя в высоколиквидные активы с постоянной доходностью с минимальной степенью риска. К надежным инструментам относят банковские депозиты и долговые ценные бумаги, такие как векселя и облигации. Паи паевых инвестиционных фондов и акции считаются более рисковыми способами размещения средств.

Согласно исследованию, проведенному РА Эксперт, по данным 100 страховых компаний, суммарная рыночная доля которых составила порядка 80%, в среднем по рынку треть инвестиций страховых компаний приходится на банковские депозиты, четверть активов содержится в виде денежных средств и их эквивалентов. На акции и облигации приходится по 10% инвестиций соответственно [1]

На все разновидности вложений распространяются серьезные ограничения: к инвестированию принимаются только активы институтов, имеющих высокие рейтинги российских и международных кредитно-рейтинговых агентств. Ограничения устанавливают руководства и финансовые аналитики компаний в соответствии с законодательно установленными требованиями.

С 1970-х гг. проблема платежеспособности страховых компаний стала объектом многочисленных научно-исследовательских работ, так как пенсионные фонды и страховые компании начали инвестировать в обыкновенные акции в большем объеме, чем раньше. Две школы, британская (the British Solvency Working Party) и финская (the Finnish Working Party on Solvency), исследовали стохастический подход и разработали первые модели для прогнозирования вероятности банкротства страховых компаний, опираясь в первую очередь на анализ рисков.

Инвестиционная модель Уилки (1986) была представлена British Solvency Working Party для моделирования активов страховой компании, описана полностью первоначально в «A Stochastic Investment Model For Actuarial Use» [2] в 1986 г., а затем в «More On A Stochastic Asset Model For Actuarial Use» [3] в 1995 г. в расширенной форме.

Данная модель создавалась для комплексного анализа платежеспособности компании на основе долгосрочного прогноза поведения рыноч-

ных ставок и предположения о том, что инфляция является движущей силой ставок и других инвестиционных переменных. Модель состоит из четырех взаимосвязанных моделей инфляции цен, дивидендов по акциям, дивидендной доходности акций и долгосрочных процентных ставок. Позднее [3] Уилки ввел авторегрессионную модель с условной гетероскедастичностью для инфляции цен, добавил в качестве переменных инфляцию заработной платы, краткосрочные процентные ставки и показатели рынка недвижимости.

Методология инвестиционной модели Уилки опирается на теорию моделей временных рядов Дж. Бокса и Г. Дженкинса [4]. Включенные процессы, как правило, стационарные авторегрессионные модели (autoregressive) AR(1) или интегрированные авторегрессии порядка один (autoregressive integrated moving average) ARIMA(1,1,0). Изначально автор планировал реализовать VAR-модель, но из-за наличия множества незначимых параметров перешел к каскадной структуре, изображенной на рис. 1.

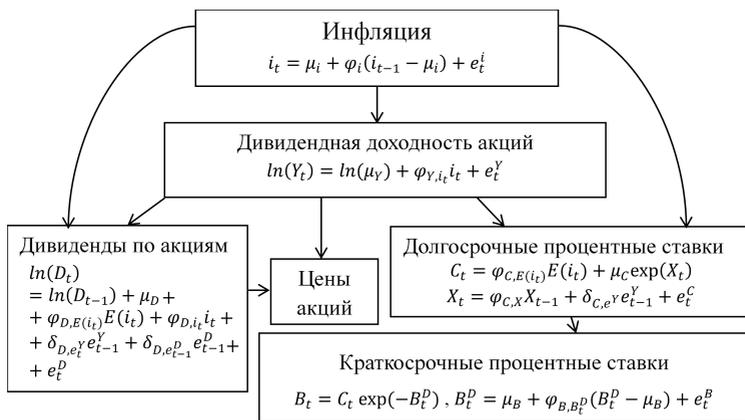


Рис. 1. Структура модели Уилки

В модели Уилки компания считается неплатежеспособной, если доход от страховых премий и инвестиций меньше, чем сумма, покрывающая страховые выплаты и расходы. Так, при предположении, что инвестиционные процессы не влияют на способность страховой компании отвечать по обязательствам перед страховщиками, вероятность банкротства варьировалась от 0,007 до 0,045. После включения в анализ заявленных

убытков вероятность выросла и варьировалась от 0,03 до 0,076 при низкой доле рискованных активов в портфеле страховой компании.

Построение модели на данных любой страны, кроме Великобритании, осложняется тем, что некоторые переменные из модели Уилки являются специфичными и не имеют аналогов в других странах. Например, в России нет аналогов консолей; общий индекс дивидендной доходности не рассчитывается ни государственными органами, ни агентствами.

С целью точного отображения ситуаций на российских рынках в данном исследовании модель была видоизменена с применением стратегии, использованной в работах американского актуария Луизы Фрэнсис [5].

Аналогично оригинальному исследованию инфляция потребительских цен была рассмотрена в качестве первичного импульса, вызывающего изменения на фондовом рынке, в банковской сфере и в макроэкономической политике. В силу необходимости анализа особенных зависимостей между показателями анализ взаимосвязи временных рядов осуществим с помощью многомерных моделей с передаточными функциями (transfer function).

В качестве меры доходности того или иного актива использовался показатель темпа роста, таким образом каждый показатель, за исключением инфляции и ожидаемой инфляции, был рассчитан по формуле

$$A_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}},$$

где  $A_t$  – итоговый временной ряд для моделирования,  $Y_t$  и  $Y_{t-1}$  – значения целевого показателя в момент  $t$  и  $t - 1$  соответственно.

Итоговая модель включила в себя два вспомогательных уравнения для моделирования инфляции и инфляционных ожиданий и пять основных уравнений, по результатам оценки и прогнозирования которых была проведена симуляция сценариев инвестирования средств страховых резервов и собственных средств гипотетической страховой компании.

Итоговая совокупная модель представлена моделью инфляции, описанной процессом SARIMA(1,0,0)(1,0,0)<sub>12</sub>, моделями с передаточными функциями для динамики темпа роста цены пая ПИФ, динамики темпа роста индекса ММВБ, динамики темпа роста индекса государственных облигаций, динамики темпа роста купонной доходности, динамики темпа роста средней ставки по депозитам. В качестве примера на рис. 2 представлены результаты построения модели доходности купонных облига-

ций вида:

$$CInc_t - \mu_{CInc} = \varphi_{CInc, i_t-1} i_{t-1} + \frac{1}{(1 - \varphi_{CInc,1} B - \varphi_{CInc,2} B^2)(1 - \varphi_{CInc,12} B^{12})} e_t^{CInc},$$

где  $CInc_t$  – динамика купонной доходности государственных купонных облигаций.

$CInc_t$	
$\mu_{CInc}$	1,01 (0,00)
$\varphi_{CInc, i_t-1}$	0,58 (0,07)
$\varphi_{CInc,1}$	-0,54 (0,00)
$\varphi_{CInc,2}$	-0,37 (0,00)
$\varphi_{CInc,12}$	0,74 (0,00)
Оценка качества	
MAPE	9,47%
MAE	0,095
AIC	-171,8
BIC	-156,6
Анализ остатков	
$\sigma_{e_t^{CInc}}$	0,132
K-S normality test	(Prob) 0,25
DF one-root test	(Prob) 0,000

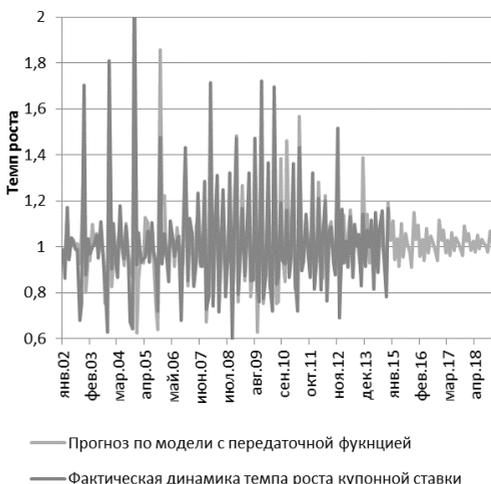


Рис. 2. Динамика темпа роста годовой ставки купонного дохода и прогноз по модели с передаточной функцией на период с января 2002 по январь 2019 г.

Результат построения модели на российских данных, как и ожидалось, подтвердил гипотезы о наличии взаимосвязи между рыночными показателями и инфляцией; кросс-корреляции и многомерные модели временных рядов отразили силу и направление связи между анализируемыми показателями рынков, такими как стоимость паев ПИФ, акций, доходность облигаций и банковских депозитов. Активы, получившие еще в начале работы высокую предварительную оценку риска, в динамике показали большую волатильность относительно менее доходных активов, характеризующихся и меньшей вариацией признака.

На основе построенных прогнозов была проведена симуляция разных сценариев инвестиционной деятельности страховщиков, сформулированных в рамках установленных Приказом 100н [6] и Указанием 3444-У [7] Банка России и Министерства финансов РФ ограничений на их качество и количество. Для сравнения двух правовых актов и оценки

возможного влияния новой версии на инвестиционные стратегии страховщиков также были составлены портфели, выполняющие требования текущего Указания 3444-У, но нарушающие Приказ 100н. Моделируемые сценарии представлены в таблице.

**Сценарии структуры инвестиционного портфеля страховой компании**

№ п/п	Паи ПИФ, $\phi_{DN}$ , %	Акции, $\phi_{MICEX}$ , %	Облигации, $\phi_{RGBI}$ , %	Купонные облигации, $\phi_{CInc}$ , %	Депозиты, $\phi_{Depo}$ , %	100н	3444-У
1	0	0	20	20	60	–	✓
2	10	20	30	15	25	–	✓
3	10	5	30	15	40	–	✓
4	10	5	20	10	55	✓	✓

Очевидно, что наиболее рисковый портфель сформируется при втором сценарии, в котором доли паев ПИФ и акций равны максимально разрешенным Указанием [7]. Наиболее безопасным для страховщика представляется первый сценарий, исключающий инвестирование в рисковые активы, максимально использующий банковские инструменты и облигации.

Расчет вероятности возникновения риска неплатежеспособности производился на основе ранее построенных для каждого ряда прогнозов и средних квадратических отклонений рядов. Результатом расчетов стали четыре таблицы, содержащие значения функции распределения темпов роста вложенных средств в каждый момент  $t$  прогнозируемого периода с апреля 2015 г. по январь 2019 г. включительно для каждого сценария в предположении модели Уилки, что ряды динамики темпов роста каждого из активов распределены нормально со средними значениями, равными значениям прогноза в каждый момент времени, и СКО фактических рядов динамики. В данном случае функция распределения интерпретируется с точки зрения вероятности получения определенного уровня дохода.

В качестве объекта исследования была выбрана компания ООО «Росгосстрах» – лидер российского страхового рынка, и ее финансовые результаты по страхованию иному, чем страхование жизни за 2014 г. [8]. В рамках модели сумма, инвестируемая в первом периоде прогноза – апреле 2015 г. – равна сумме страховых резервов и собственных средств и ежемесячно корректируется на величину инвестиционного

дохода (либо убытка), увеличивается на среднюю заработанную премию от страхования иного, чем страхование жизни и уменьшается на среднемесячную сумму выплат и расходов на ведение страховых операций по страхованию иному, чем страхование жизни.

Гипотезы, поставленные ранее, подтвердились: портфель без паев ПИФ и акций гарантирует рост дохода, в среднем доход увеличится более чем в 2,5 раза. Наиболее рискованный портфель в среднем дает четырехкратное увеличение изначальной суммы, но также и допускает 5%-ную вероятность его снижения.

Третий и четвертый сценарии имеют большую степень риска, чем первый, за счет присутствия в нем акций и паев ПИФ «Добрыня Никитич». Портфель третьего сценария в среднем приносит больший доход при приблизительно равной степени риска отрицательной динамики по сравнению с четвертым. Из расчетов следует, что изначальная величина суммы к инвестированию для компании, выбирающей относительно более рискованный состав портфеля, должна быть существенно выше, чем для более консервативных компаний. Тем не менее симуляция продемонстрировала, что для безопасного инвестирования собственных средств и средств страховых резервов не обязательно полностью исключать из портфеля акции и паи паевых инвестиционных фондов. Умеренная инвестиционная политика, включающая вложения в акции компаний и паи ПИФ в небольшом объеме, в среднем принесет дополнительно 40–80% к сумме страховых резервов и собственных средств к январю 2019 г.

Данная модель с необходимыми поправками изначальных значений резерва, собственных средств, выплат и премий может использоваться для решения практических задач по оценке суммы и инструментов инвестирования, гарантирующих заданную вероятность того, что страховая компания или пенсионный фонд сохранит стабильность и платежеспособность в течение определенного периода времени. Моделирование позволит вычислить целевые показатели для инвестиционной деятельности, такие как изначальная сумма резервов для инвестирования и доли активов в портфеле, гарантирующие доход от инвестиционной деятельности в долгосрочном периоде.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейтинговое агентство «Эксперт». Инвестиции российских страховых компаний в 2012–2013 гг.: где деньги? [Электронный ресурс]. URL: [http://raexpert.by/related\\_activities/researches/insurance](http://raexpert.by/related_activities/researches/insurance) (дата обращения: 25.09.2015).
2. *Wilkie A. D.* A Stochastic Investment Model for Actuarial Use // Transactions of the Faculty of Actuaries. 1986. № 39. P. 341–403.

3. *Wilkie A. D.* More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use // *British Actuarial Journal*. 1995. № 1. P. 777–964.

4. *Box G. E. P., Jenkins G. M., Reinsel G. C.* Time Series Analysis. L.: John Wiley and Sons Ltd, 2008. 400 p.

5. *Francis L. A.* Modelling Asset Variability in Assessing Insurer Solvency // *Casualty Actuarial Society Discussion Paper Program*. 1992. № 2. P. 585–656.

6. Приказ Минфина РФ от 2 июля 2012 г. № 100н «Об утверждении Порядка размещения страховщиками средств страховых резервов». Информационно-правовой портал «Гарант» [Электронный ресурс]. URL: <http://www.garant.ru/hotlaw/federal/412835/> (дата обращения: 26.09.2015).

7. Указание Банка России от 16 ноября 2014 г. № 3444-У «О порядке инвестирования средств страховых резервов и перечне разрешенных для инвестирования активов» // Информационно-правовой портал «Гарант» [Электронный ресурс]. URL: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70730020/#ixzz3ZqbAeJVa> (дата обращения: 21.09.2015).

8. Страхование в России. Итоги 2014 года: Кризис пока не достиг дна. Информационное агентство «Интерфакс-АФИ». Москва, 2015 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.finmarket.ru/insurance/?nt=1&id=3992448> (дата обращения: 23.09.2015).

## **ОБ ОЦЕНИВАНИИ РИСКА ПОТЕРИ ДОМИНАНТНОГО ПРИЗНАКА В АФФИННО-КВАДРАТИЧНОЙ МОДЕЛИ**

**И. Ю. Выгодчикова**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: [irinavigod@yandex.ru](mailto:irinavigod@yandex.ru), [vigodchikova@info.sgu.ru](mailto:vigodchikova@info.sgu.ru)

Приводится модель оценки силы доминантного признака с использованием задачи минимизации максимума аффинно-квадратичных функций. Проведено сопоставление с решением задачи минимизации максимума аффинных функций. Разработан алгоритм анализа роли доминантного признака. Выполнены вычислительные эксперименты.

## **ON ESTIMATION OF THE RISK OF LOSS THE DOMINANT ROLE IN THE AFFINE-QUADRATIC MODEL**

**I. Yu. Vygodchikova**

Provides a model for assessing of the dominant role in the system of two objects. Used the problem of minimizing the maximum of the affine-quadratic functions. Fulfilled the comparison with the solution of the problem of minimizing the maximum of affine functions. Is given the algorithm of analysis of the dominant role. Computational experiments are represented.

### **1. Критерии оценки**

Рассмотрим сетку  $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$  и значения уровней двух динамических рядов сопоставимых величин,  $y_{2,k} \geq y_{1,k}$ ,  $k \in \overline{0, N}$ ,  $N \geq 2$ . Пусть  $A = (a_0, a_1) \in R^2$ :  $p(A, t) = a_0 + a_1 t$ . Рассмотрим задачу минимизации

максимума аффинно-квадратичных функций [1]:

$$C(A) = \max_{k \in \overline{0, N}} \left| (p(A, t_k) - y_{1,k})(p(A, t_k) - y_{2,k}) \right| \rightarrow \min_{A \in R^2}, \quad (1)$$

и задачу минимизации максимума аффинных функций [2, 3]:

$$\rho(A) = \max_{k \in \overline{0, N}} \max\{y_{2,k} - p(A, t_k); p(A, t_k) - y_{1,k}\} \rightarrow \min_{A \in R^2}. \quad (2)$$

Обозначим  $C^* = \min_{A \in R^2} C(A)$ ,  $\rho^* = \min_{A \in R^2} \rho(A)$ .

## 2. О приложениях моделей (1)–(2)

**2.1.** Рассмотрим приложение задачи (1). Эта задача всегда имеет решение, иногда несколько, но обязательно конечное число. Обозначим  $y_k = y_{1,k} + y_{2,k}$ ,  $k = \overline{0, N}$ . Оценками величин  $y_{2,k}$  и  $y_{1,k}$  (с точки зрения задачи (1)) являются

$$y^+_k = \max\{p(A, t_k), y_k - p(A, t_k)\} \text{ и } y^-_k = \min\{p(A, t_k), y_k - p(A, t_k)\},$$

$$k = \overline{0, N},$$

соответственно, где  $C^* = C(A)$  ( $p(A, t)$  – результат аппроксимации на базе задачи (1),  $A$  – решение этой задачи).

Будем говорить, что показатель  $y_{2,k}$  *доминирует*  $y_{1,k}$ , если хотя бы для одного  $k$ ,  $y_{2,k} \geq 1.5y_{1,k}$  (то есть между этими показателями существенное различие) и тенденция к росту  $y_{2,k}$  усиливается (или тенденция к снижению ослабляется).

Подмножество  $(t_q, t_{q+w}) \subset T$  назовём *зоной ослабления доминантного признака*, если  $(p(A, t_q) - 0.5y_q)(p(A, t_{q+w}) - 0.5y_{q+w}) < 0$  и  $(p(A, t_q) - 0.5y_q)(p(A, t_{q+i}) - 0.5y_{q+i}) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, w$ . Подмножество  $(t_q, t_{q+w}) \subset T$  назовём *зоной усиления доминантного признака*, если  $(p(A, t_q) - 0.5y_q)(p(A, t_{q+w}) - 0.5y_{q+w}) > 0$  и  $(p(A, t_q) - 0.5y_q)(p(A, t_{q+i}) - 0.5y_{q+i}) \geq 0$  для  $i = 1, \dots, w$ .

Если  $p(A, t_k) > 0.5y_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  и  $a_1 > 0$ , или  $p(A, t_k) < 0.5y_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  и  $a_1 < 0$ , то за рассматриваемый период роль доминантного признака для показателя  $y_{2,k}$  над показателем  $y_{1,k}$  растёт. Вся сетка  $T$  является зоной усиления доминантного признака.

Если  $p(A, t_k) > 0.5y_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  и  $a_1 < 0$ , или  $p(A, t_k) < 0.5y_k$ ,  $k = \overline{0, N}$  и  $a_1 > 0$ , то за рассматриваемый период роль доминантного признака для показателя  $y_{2,k}$  над показателем  $y_{1,k}$  снижается. Вся сетка  $T$  является зоной ослабления доминантного признака.

**2.2.** Задача (2) позволяет найти минимальную оценку максимального из уклонений диапазонов значений показателя  $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ , от значений аппроксимирующей функции  $p(A, t_k)$ . В отличие от аналогичных исходных данных в задаче (1), в данном случае моделируется ряд диапазонов значений уровня одного динамического ряда, а не двух рядов.

В данном случае рост аппроксимирующей функции свидетельствует о росте обоих показателей и, в отличие от решения задачи (1), не позволяет судить о том, какой из этих показателей демонстрирует более сильный рост.

Показатель  $\rho^*$  служит индикатором риска, рост которого указывает на появление среди значений рассматриваемого показателя экстремально редких событий, которые при  $a_1 > 0$  приводят к усилению тенденции роста исходного показателя, а при  $a_1 < 0$  – к замедлению тенденции.

В некоторых случаях можно применять модели (1) и (2) одновременно (например, при кратковременном сотрудничестве фирм). В следующих примерах рассматривается сотрудничество двух фирм в первом и третьем периодах анализа – первый период составляет  $t_0$  месяцев, второй  $t_1 - t_0$  месяцев, третий  $t_2 - t_1$  месяцев. В первом и третьем периодах прибыль делится между фирмами поровну. Пусть  $y_{ki}$  – размер прибыли  $i$ -й фирмы за период  $(k + 1)$ .

**Пример 1.** Пусть  $T = \{1 < 5 < 6\}$ ,  $y_{01} = y_{02} = 1$ ,  $y_{11} = 5.5$ ,  $y_{12} = 6$ ,  $y_{21} = y_{22} = 5$ .

Решение задачи (2):  $(1.10, 0.80)$   $\rho^* = 0.9$ .

Решение задачи (1):  $(0.95, 0.80)$   $C^* = 0.57$ .

Несмотря на рост общей прибыли, ни одна из фирм не демонстрирует доминирующее значение этого показателя ( $T$  не является ни зоной ослабления, ни зоной усиления доминирующей роли показателя  $y_2$  в прибыли), поэтому слияние фирм целесообразно.

**Пример 2.** Пусть  $T = \{1 < 4 < 5\}$ ,  $y_{01} = y_{02} = 1$ ,  $y_{11} = 4$ ,  $y_{12} = 7$ ,  $y_{21} = y_{22} = 7$ .

Решения задачи (2) (их бесконечно много):

$$(5.5 - 4\alpha, \alpha), \alpha \in [1; 2], \rho^* = 1.5.$$

Решения задачи (1) (их два):  $(0.56, 1.5)$  и  $(-1.56, 1.5)$ ,  $C^* = 1.13$ .

В данном случае вторая фирма явно доминирует в прибыли первую, первое решение показывает усиление доминирующего признака второй фирмы, а второе решение – снижение влияния первой. Кроме того,  $T$  является зоной усиления доминирующей роли показателя  $y_2$  в прибыли. Несмотря на позитивную тенденцию в прибыли обеих фирм (задача (2)),

показатель риска  $\rho^*$  выше чем в прежнем примере, что также свидетельствует о скачках прибыли, вызванных второй фирмой. Поэтому слияние фирм нецелесообразно для второй фирмы.

### 3. Вычислительный эксперимент для модели (1)

В качестве применения можно рассмотреть оценку численности городского и сельского населения России [4, 5] 2005–2012 гг. (табл. 1).

Таблица 1

#### Исходные данные

Узел сетки (номер периода)	Фактическая численность населения, тыс. чел.		Оценка численности населения, тыс. чел.
	городского	сельского	
0	105182,1	38618,9	143801
1	104818,6	38418	143236,6
2	104731,7	38131	142862,7
3	104865,1	37882,4	142747,5
4	104915,5	37821,7	142737,2
5	105061,4	37772,1	142833,5
6	105421,2	37444,2	142865,4
7	105742	37314,4	143056,4

Для каждого из решений  $p_1(t) = 0,730724 + 0,001106t$  и  $p_1(t) = 0,2692760,001106t$  задачи (1) вычислены оценки долей городского и сельского населения ( $y^+_k$  и  $y^-_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ ), результаты показаны в табл. 2 (долевое распределение населения по городу и селу идентично для обеих аппроксимирующих функций). Рассматриваемый временной период является зоной усиления влияния городского населения в долевом распределении «численность городского населения – численность сельского населения».

В табл. 2 оценку численности городского населения ( $y_{2,k}$ ) дают величины  $y^+_k$ , а сельского населения ( $y_{1,k}$ ) величины  $y^-_k$ , определённые выше ( $k = \overline{0, N}$ ).

В результате решения задачи (1) для данных из табл. 1 получены аппроксимирующие полиномы,  $p((0.730724, 0.001106), t) = 0.730724 + 0.001106 t$  и  $p((0.269276, -0.001106), t) = 0.2692760.001106 t$  (коэффициенты указаны с точностью до 0,000001).

Относительные ошибки при оценке доли городского населения не превышают 0,1%, а при оценке доли сельского населения

Долевое распределение «город-село» для данных из табл. 1

$t$	Оценка $y_2$ (городское население) по модели	Оценка $y_1$ (сельское население) по модели	Фактическая доля городского населения, $y_2$	Фактическая доля сельского населения, $y_1$	Относитель- ная ошибка для $y_2$ (городское население)	Относитель- ная ошибка для $y_1$ (сельское население)
0	0,730723687	0,26927631	0,73144206	0,26855794	-0,0982%	0,2675%
1	0,731829998	0,26817	0,73178643	0,26821357	0,0060%	-0,0162%
2	0,732936309	0,26706369	0,73309338	0,26690662	-0,0214%	0,0588%
3	0,73404262	0,26595738	0,73461952	0,26538048	-0,0785%	0,2174%
4	0,735148932	0,26485107	0,73502563	0,26497437	0,0168%	-0,0465%
5	0,736255243	0,26374476	0,73555153	0,26444847	0,0957%	-0,2661%
6	0,737361554	0,26263845	0,73790575	0,26209425	-0,0737%	0,2076%
7	0,738467865	0,26153214	0,73916302	0,26083698	-0,0940%	0,2665%

не превышают 0,27%. Положительный коэффициент наклона первого решения свидетельствует об увеличении доли городского населения, а отрицательный коэффициент второго – о снижении доли сельского населения. В данном случае риск потери доминантного признака доли городского населения ничтожно мал, тенденция к увеличению доли городского населения весьма устойчива.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00175).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выгодчикова И. Ю. О среднегеометрическом приближении сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 11–15.
2. Выгодчикова И. Ю. О методе аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом // Вестн. СГТУ. Сер. : Математика и механика. 2013. Вып. 2 (70). С.7–12.
3. Awrejcewicz A. V., Krysko I. V., Papkova I. Y., Vygodchikova V. A. On the methods of critical load estimation of spherical circle axially symmetrical shells // Thin-Walled Structures. 2015. № 94. P. 293–301.
4. Демографический ежегодник России «ДЕМОСКОП Weekly». 2014 № 583–584. 27 января – 9 февраля [Электронный ресурс]. URL: <http://www.demoscope.ru/weekly/2014/0583/biblio04.php> (дата обращения: 12.09.2015).
5. Выгодчикова И. Ю. Алгоритм оценки параметров линейной множественной модели регрессии по минимаксному критерию // Прикладная информатика. 2015. Т. 10, № 4 (58). С. 105–116.

# ОЦЕНКА ДОХОДНОСТИ И РИСКА ОПЕРАЦИЙ С ДОЛГОВЫМИ ФИНАНСОВЫМИ ИНСТРУМЕНТАМИ

**И. Ю. Выгодчикова, С. К. Акимова, А. С. Андреева**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: vigodchikova@info.sgu.ru, sweetconstanta@gmail.com, andreeva2702@gmail.com

В работе рассмотрены приёмы оценивания рисков и доходности для облигаций и краткосрочных векселей, принятых к учёту. В вычислительных экспериментах приведены примеры расчёта и анализ влияния банковских ставок по учётным операциям и купонных ставок по облигациям на уровень эффективных ставок и дюрации погасительных платежей. Выполнен графический анализ тенденции изменения эффективных ставок для банка и векселедержателя при выполнении учётной операции, выполнено сопоставление показателей дюрации и эффективной ставки для различных режимов процентных выплат по облигациям.

## ESTIMATION OF PROFITABILITY AND RISK OPERATIONS WITH DEBT FINANCIAL INSTRUMENTS

**I. Yu. Vygodchikova, S. K. Akimova, A. S. Andreeva**

The article investigates methods of the risk evaluation and interest yield of bonds and bills, adopted by the accounting. The calculation examples and impact analysis of accounting bank rate operations, bond coupon rate to the level effective rate and extinctive duration payment are given in the experiments. Was performed graphical analysis of change in effective rates for the Bank and the holder when performing discounting operations with bills, was made the comparison of the duration and effective interest rates for various modes of interest payment on the bonds.

**1. Специфика оценки долговых финансовых инструментов.** В общем виде под финансовым инструментом понимается любой контракт (договор), по которому происходит одновременное увеличение финансовых активов одной стороны контракта и финансовых обязательств – другой. Если рассматривать только инструменты, доступные физическим лицам – индивидуальным гражданам, можно считать, что финансовые инструменты – это обращающиеся финансовые документы, с помощью которых осуществляются операции между физическим лицом и другим лицом (физическим или юридическим) на финансовом рынке. На практике это означает, что индивид не просто передал из рук в руки наличные деньги, а провёл сделку через официальных участников рынка (банки, платёжные системы и др.), зафиксировав её документарно.

Долговые финансовые инструменты характеризуют кредитные отношения между их покупателем и продавцом и обязывают должника погасить в предусмотренные сроки их номинальную цену и заплатить дополнительное вознаграждение в форме процента (если оно не входит

в состав погашаемой номинальной цены долгового финансового инструмента). Примерами долговых финансовых инструментов выступают векселя, облигации, депозитные сертификаты.

При оценке облигаций и векселей следует учитывать специфические особенности данных категорий, связанные, главным образом, с тем, что облигации являются эмиссионными ценными бумагами и уровень их надёжности зависит от уровня платёжеспособности эмитента [1]. Поэтому при выполнении учётной операции по краткосрочным векселям банк обычно назначает достаточно высокий коэффициент дисконтирования (учётную ставку в схеме простых процентов), тем самым страхуясь от риска нежелательных потерь (напр., [2, 3]).

**2. Оценка краткосрочных векселей.** Рассмотрим финансовую операцию со следующими параметрами:  $S^0(0)$  – размер вклада, то есть цена векселя,  $S(0)$  – сумма оплаты по векселю при банковской учётной операции,  $d$  – годовая учётная ставка,  $T$  – срок векселя в годах,  $S(T)$  – номинальная цена векселя,  $\tilde{T}$  – срок в годах от оформления учётной операции в банке до погашения векселя. Пусть  $k = 0$  обозначает момент начала операции. Для вычисления суммы платежа при учёте векселя банком используем формулу:

$$S(0) = S(T)(1 - \tilde{T} \cdot d). \quad (1)$$

Для вычисления эффективной ставки ( $r_{ef}$ ), для случаев без учёта в банке ( $r_{ef}^0$ ), а также для держателя векселя ( $r_{ef}^{yc}$ ) и банка ( $r_{ef}^{\delta}$ ) при учёте векселя в банке используем формулы:

$$r_{ef}^0 = \left( \frac{S(T)}{S^0(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1, r_{ef}^{yc} = \left( \frac{S(0)}{S^0(0)} \right)^{\frac{1}{T - \tilde{T}}} - 1, r_{ef}^{\delta} = \left( \frac{S(T)}{S(0)} \right)^{\frac{1}{\tilde{T}}} - 1. \quad (2)$$

**3. Оценка облигаций.** Рассмотрим финансовую операцию со следующими параметрами:  $S(0)$  цена облигации,  $g$  – купонная процентная ставка (англ. Coupon Rate), периодичность купонных платежей  $m$  раз в году,  $n$  – срок облигации в годах,  $S(mn)$  – номинальная цена. Пусть  $k = 0$  обозначает момент начала операции. Соответственно  $Y_1 = \dots = Y_{mn} = gS(mn)/m$  – купонные платежи по облигации. Для заданных условий погашения эффективная ставка находится из уравнения:

$$-S(0) + gS(mn)/m \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{(1+r_{ef})^{k/m}} + \frac{S(mn)}{(1+r_{ef})^n} = 0, \quad (3)$$

Формулу (3) можно представить в виде

$$-S(0) + \frac{gS(mn)((1+r_{ef})^n - 1)}{m((1+r_{ef})^{1/m} - 1)(1+r_{ef})^n} + \frac{S(nm)}{(1+r_{ef})^n} = 0. \quad (4)$$

Вычисления эффективной ставки по формулам (3), (4) при количестве периодов купонных выплат более двух может оказаться непростой задачей. Поэтому часто применяют встроенные функции и специальные возможности математических программ и электронных таблиц, к примеру, функцию ЧИСТВНХОХ Microsoft Office Excel, XIRR Libre Office Calc, функции подбора параметра и поиска решения в этих программах или аналогичные возможности математических программ.

Дюрация погасительных ежемесячных платежей составляет:

$$D_M = \frac{gS(mn)/m \sum_{k=1}^{mn} \frac{k/m}{(1+r_{ef})^{k/m}} + \frac{nS(nm)}{(1+r_{ef})^n}}{S(0)}. \quad (5)$$

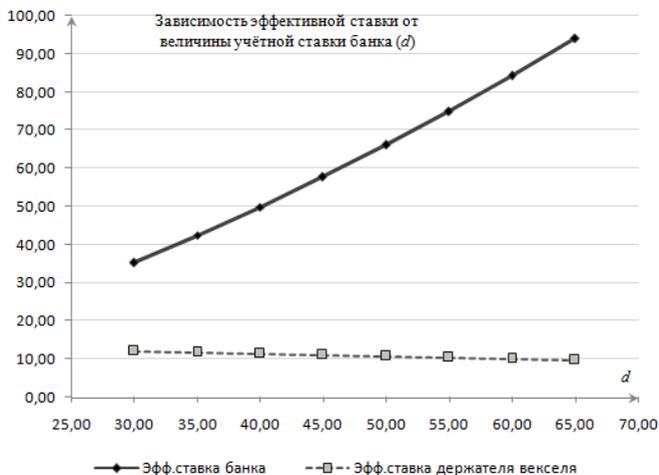
Дюрация показывает эквивалентный срок возврата денег по облигации, если бы вклад осуществлялся с использованием указанной (в формуле (5), эффективной) ставки, поэтому его увеличение является негативной для инвестора тенденцией.

Рассмотрим примеры применения формул (1)–(5).

**4. Пример оценки векселей.** Вексель куплен 15 января 2014 г. за 300 тыс. руб. Номинал векселя 340 тыс. руб. Погашение запланировано на 15 января 2015 г. Держатель векселя захотел получить деньги 25 декабря 2014 г. Банк одобрил операцию и решил совершить учётную операцию по годовой учётной ставке 45% ( $d$ ). Требуется проанализировать динамику эффективных ставок для держателя векселя и для банка.

Анализ эффективных ставок с использованием формул (1)–(2) проведён на рисунке ( $d$ , от 30 до 65%, с шагом 5%).

Нужно отметить, что с ростом учётной ставки банка его эффективная ставка быстро растёт, эффективная ставка держателя векселя снижается достаточно медленно. Это можно объяснить существенной разницей в сроках:  $T \gg T - \bar{T}$ , поэтому относительно небольшое снижение суммы (1) окажет значительно более сильный эффект для банка, ускорив рост эффективной ставки, нежели для держателя, который уже смирился с потерей доходности, не дождавшись окончания срока по векселю и обратившись в банк. Отметим также, что учётные операции банка являются часто более рисковыми, чем операции кредитования, поэтому и ставки высокие.



#### Эффективные ставки

**5. Пример оценки облигаций.** Рассмотрим облигации со сроком до погашения 2 года, номинальной цены 600, ценой покупки 500. Годовая ставка (купонная ставка) составляет для разных вариантов 8, 10 и 11%, проценты выплачиваются ежеквартально, ежемесячно или раз в год. Анализ эффективных ставок и дюраций с использованием формул (3)–(5) проведён в таблице.

#### Оценка облигаций

№ эксперимента	Годовая ставка, %	Выплата процентов	Эффективная ставка, %	Дюрация, в годах
1	8	Ежемесячно	19,55	1,8368
2	8	Ежеквартально	19,39	1,8523
3	8	Ежегодно	18,74	1,9192
4	10	Ежемесячно	22,18	1,7989
5	10	Ежеквартально	21,96	1,8182
6	10	Ежегодно	21,05	1,9009
7	11	Ежемесячно	23,52	1,7803
8	11	Ежеквартально	23,27	1,8015
9	11	Ежегодно	22,20	1,8920

С учащением купонных выплат по облигации растёт эффективная ставка для инвестора и снижается дюрация. Поскольку купонные ставки обычно не высоки (эффективные ставки по облигациям лишь немного выше эффективных ставок по банковскому депозиту), плавный рост ставок

и уращение купонных выплат приводит к плавному увеличению доходности и снижению инвестиционного риска.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю., Верецагина Л. С.* Применение модели Чессера в анализе кредитоспособности предприятий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 78–82.
2. *Выгодчикова И. Ю.* Приёмы оценки финансового риска // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 41–45.
3. *Четыркин Е. М.* Финансовые риски. М. : ДЕЛЮ, 2008. 176 с.

## **ОБ ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРАТКОСРОЧНОГО КРЕДИТА В МОДЕЛИ АННУИТЕТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ПЛАТЕЖЕЙ**

**И. Ю. Выгодчикова, К. В. Беличенко**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*  
E-mail: vigochikova@info.sgu.ru, irinavigod@yandex.ru, kir.belichenko@gmail.com

В работе проведён инструментарий оценки показателей внутренней нормы доходности (эффективной ставки) и дюрации для проектов кредитования в схемах аннуитетных и дифференцированных платежей. В вычислительных экспериментах приведены два варианта кредитования. Выполнен анализ погасительных платежей с точки зрения дюрации, проанализированы формулы финансовой математики, реализующие расчёт эффективной ставки для начисления сложных процентов несколько раз в году, сводящиеся к структуре актуарного правила оценки потоковых платежей, выполнено сопоставление с коммерческим правилом.

## **ON ASSESSING THE EFFECTIVENESS OF A SHORT TERM LOAN FOR THE MODEL OF ANNUITY AND DIFFERENTIATED PAYMENTS**

**I. Yu. Vygodchikova, K. V. Belichenko**

The paper presents tools for assessing indicators internal rate of return (effective rate) and duration in the crediting schemes in the annuity and differentiated models of debt repayment. In the computational experiments are given two options for lending. Made the analysis of formulas of financial mathematics that implement the calculation of the effective rates for compounding several times a year, which amounts to the structure of the actuarial valuation rules to a stream of payments, made the comparison with the commercial rule.

### **1. Анализ параметров кредитных операций**

Поскольку условия кредитования различны [1–3], заявленная годовая процентная ставка почти никогда не отражает реальную стоимость

кредита. Единой основой для сопоставления всех финансовых операций служит годовая ставка по сложным процентам, начисляемым ежегодно, получившая название «эффективной». Расчёт данной ставки для финансового потока сводится к составлению уравнения эквивалентности доходов и расходов, наращенных или дисконтированных к одному моменту времени с использованием математических формул сложных процентов, начисляемых раз в год по эффективной ставке. Для платежей, протекающих равномерно, вычисление эффективной ставки упрощается, как и для схемы начисления сложных процентов, несколько раз в год. В настоящее время в банковской практике наиболее популярны два способа погашения долга – аннуитетными (равными) и дифференцированными (уменьшающимися) платежами.

Рассмотрим кредитную операцию со следующими параметрами:  $S$  – размер кредита,  $g$  – годовая процентная ставка,  $n$  – срок кредита в годах, будем считать, что погашение процентов и части долга производится ежемесячно,  $Y_k$  – платежи по обслуживанию долга в конце месяца  $k$ . Пусть  $k = 0$  обозначает момент начала операции. Соответственно  $Y_k, \dots, Y_{12n}$  – погасительные платежи.

По аналогии с данной схемой будем проводить анализ погашения долга по полугодиям. Для вычислительных экспериментов столь сильное упрощение имеет смысл, поскольку идентичность полученных выводов показывает существенную роль всех параметров операции и целесообразность применения в финансовом анализе показателей эффективной ставки кредитной операции ( $r_{ef}$ ) и дюрации погасительных платежей ( $D_M$ ) [1, 3, 4].

## 2. Расчет эффективной ставки и дюрации погасительных платежей

Модель аннуитетных платежей предполагает одинаковые суммы возврата долга с учётом процентов [3, с. 40], в нашем случае имеем:

$$Y_k = Y = \text{const} = \frac{S \left( \frac{g}{12} \right) \left( 1 + \frac{g}{12} \right)^{12n}}{\left( 1 + \frac{g}{12} \right)^{12n} - 1}, \quad k = 1, \dots, 12n.$$

Дифференцированная схема может быть реализована, например, путём расчёта одинаковой суммы погасительного платежа по основному долгу за каждый  $k$ -й погасительный период и начисления процентов на непогашенный остаток долга за каждый период [3, с. 40].

Для заданных условий погашения (ежемесячно в рамках аннуитетной или дифференцированной схемы) эффективная ставка находится

из уравнения:

$$-S + \sum_{k=1}^{12n} \frac{Y_k}{(1+r_{ef})^{k/12}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{12n} \frac{Y_k}{(1+r_{ef})^{k/12}} = 0, \quad (1)$$

а дюрация погасительных ежемесячных платежей составляет:

$$D_M = \frac{\sum_{k=1}^{12n} \frac{k Y_k}{(1+r_{ef})^{k/12}}}{12S}.$$

В финансовой математике известны следующие правила вычисления остатка задолженности – актуарный и коммерческий метод [3, с. 20].

Формула коммерческого метода для ежемесячных погасительных платежей:

$$-S(1+gn) + Y_1 \left(1 + \frac{g}{12}(12n-1)\right) + \dots + Y_{12n} = \delta_k, \quad (2)$$

а формула актуарного метода для ежемесячных погасительных платежей:

$$-S \left(1 + \frac{g}{12}\right)^{12n} + Y_1 \left(1 + \frac{g}{12}\right)^{12n-1} + \dots + Y_{12n} = \delta_A. \quad (3)$$

Выясним, какой из этих методов реализован в рассмотренных выше схемах погашения кредита, и продолжим этот анализ для полугодовых погасительных операций.

### 3. Вычислительный эксперимент

**Пример 1.** Рассмотрим операцию предоставления кредита 360 000 р. на 18 месяцев под 24% годовых, возвращаемого ежемесячно (таблица, даты взяты условно, для расчётов эффективной ставки желательно учитывать количество дней в месяцах, если провести вычисления в рамках указанных дат, процесс можно считать рентой лишь условно, поскольку в разных месяцах число дней различно, и применение функции ЧИСТВНДОХ() MSExcel, которая ориентируется на расчёт эффективной ставки с использованием фактических дат погашения задолженности, даст более точный результат, чем применение функции ЭФФЕКТ(), которая ориентируется на равные промежутки между погасительными платежами).

Эффективная ставка приближённо составляет 26,82% и может быть найдена как из (1), так и по формуле  $r_{ef} = (1 + 0.02)^{12} - 1$  (при применении

**Погасительные платежи (слева дифференцированные, справа аннуитетные)**

Data	T	Debt	%	Y
10.01.14	0	360000		
10.02.14	1	340000	7200	27200
10.03.14	2	320000	6800	26800
10.04.14	3	300000	6400	26400
10.05.14	4	280000	6000	26000
10.06.14	5	260000	5600	25600
10.07.14	6	240000	5200	25200
10.08.14	7	220000	4800	24800
10.09.14	8	200000	4400	24400
10.10.14	9	180000	4000	24000
10.11.14	10	160000	3600	23600
10.12.14	11	140000	3200	23200
10.01.15	12	120000	2800	22800
10.02.15	13	100000	2400	22400
10.03.15	14	80000	2000	22000
10.04.15	15	60000	1600	21600
10.05.15	16	40000	1200	21200
10.06.15	17	20000	800	20800
10.07.15	18	0	400	20400

Data	T	Debt	%	Y
10.01.14	0	360000		
10.02.14	1	343187,2	7200	24012,76
10.03.14	2	326038,2	6863,745	24012,76
10.04.14	3	308546,2	6520,765	24012,76
10.05.14	4	290704,4	6170,925	24012,76
10.06.14	5	272505,7	5814,088	24012,76
10.07.14	6	253943,1	5450,115	24012,76
10.08.14	7	235009,2	5078,862	24012,76
10.09.14	8	215696,6	4700,184	24012,76
10.10.14	9	195997,8	4313,933	24012,76
10.11.14	10	175905	3919,956	24012,76
10.12.14	11	155410,3	3518,1	24012,76
10.01.15	12	134505,8	3108,207	24012,76
10.02.15	13	113183,2	2690,116	24012,76
10.03.15	14	91434,06	2263,663	24012,76
10.04.15	15	69249,99	1828,681	24012,76
10.05.15	16	46622,23	1385	24012,76
10.06.15	17	23541,92	932,4446	24012,76
10.07.15	18	0	470,8384	24012,76

финансовой функции ЧИСТВНДОХ() MSExcel нужно учитывать различие в количестве дней по месяцам, о чём говорилось выше).

Для коммерческого метода  $\delta_K > 0$ , а для актуарного метода  $\delta_A = 0$ .

Для аннуитетной схемы дюрация погасительных платежей составляет 0,75 лет, а для дифференцированной схемы 0,71 г.

**Пример 2.** По аналогии с предыдущим анализом рассмотрим операцию предоставления кредита на 1 год 100 000 р. под 24% годовых, возвращаемого по полугодиям. Погасительные платежи по аннуитетной схеме составляют 59 170 р., а по дифференцированной схеме (с учётом равных погасительных платежей по основному долгу), имеем 62 000 р. и 56 000 р. соответственно.

Эффективная ставка составляет 25,44% и может быть найдена по формуле  $r_{ef} = (1 + 0.12)^2 - 1$ . Для реализации коммерческого метода имеем (для обеих схем)  $\delta_K = 1440$ . Для актуарного метода (для обеих схем) имеем  $\delta_A = 0$ .

Для аннуитетной схемы дюрация составляет 0,736 лет, а для дифференцированной схемы – 0,723 г.

### **Выводы**

а. Обе рассмотренные модели кредитования эквивалентны с точки зрения эффективной ставки и выполнены в рамках актуарного правила,

б. С точки зрения дюрации погасительных платежей, для кредитора проект аннуитетного кредитования несёт более высокий риск.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю.* Приёмы оценки финансового риска // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 41–45.
2. *Выгодчикова И. Ю., Фадина Т. В., Вязьминская А. В.* О моделировании пенсионных процессов // Математическое моделирование в экономике и управлении рисками: сб. материалов III Междунар. молодёж. науч.-практ. конф. Саратов, 5–8 нояб. 2014 г. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. С.66–69.
3. *Выгодчикова И. Ю.* Основы финансовых вычислений: учеб. пособие. Саратов: Изд-во СГСЭУ, 2012. 108 с.
4. *Четыркин Е. М.* Финансовые риски: учебник. М.: ДЕЛЮ, 2008. 176 с.

## **О МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕНЕЖНЫХ НАКОПЛЕНИЙ ИНДИВИДА В РЕЖИМЕ МОНОТОННОЙ РЕНТЫ**

**И. Ю. Выгодчикова, С. А. Евстифеева**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: irinavigod@yandex.ru, esa\_15@mail.ru

В работе рассмотрены приёмы моделирования многоэтапных накопительных процессов с использованием предлагаемых вариантов банковских депозитов, личного страхования на дожитие с дальнейшими фиксированными выплатами и добровольного пенсионного страхования «Гранде». Приведены схемы накоплений для различных параметров ренты в период взносов. Получены математические формулы вычисления выплат и примеры их реализации. Проведён сравнительный анализ схем накоплений с использованием двух критериев аппроксимации.

## **ABOUT THE MODELING OF THE MONEY SAVINGS BASED AT THE SCHEME OF MONOTONE FINANCIAL FLOWS**

**I. Yu. Vygodchikova, S. A. Evstifeeva**

The paper considers modeling methods for cumulative multi-stage processes using the proposed variants of Bank deposits, personal insurance plan with a further fixed payout and voluntary pension insurance «Grande». Included schemes for various options of money savings during the period of assessment and the mathematical formulas for calculation of payments and examples of their implementation. Added comparative analysis of savings schemes using two criteria approximation.

## **1. Анализ накопительных схем в режиме «пенсионных накоплений» и личного страхования на дожитие**

В настоящее время особую популярность приобретают варианты денежных накоплений населения, аналогичные пенсионным программам, когда индивид несколько лет осуществляет регулярные денежные взносы, а затем определённый срок или пожизненно получает гарантированную денежную сумму и возможность участия в прибыли компании. Подобные схемы могут быть реализованы в форме банковского пополняемого депозита, предполагающего возможность периодического снятия денег с вклада без потери процентов (ограниченный срок, необходимость пролонгации договора), в форме договора страхования на дожитие, добровольного пенсионного страхования «Гранде» и пр.

Страховые компании предлагают схемы накопительного страхования жизни, когда индивид получает возможность участия в прибыли, такие варианты сочетают инвестиционные инструменты, причем самые консервативные (т.е. финансовые инструменты, гарантирующие минимальный риск потери капитала) и финансовые инструменты страхования жизни (напр., программа «Долго и счастливо» компании «ВТБ Страхование жизни»).

Если рассматривать банковский депозит, с учётом периодического перезаключения договора, можно воспользоваться вкладом Супер-Вклад (Экспресс-Волга Банк), в таком случае индивид самостоятельно должен оценить необходимый ему срок вклада, объём и периодичность внесения денег и последующего снятия. Повышение процентной ставки для индивида является позитивной тенденцией, чтобы не ошибиться, лучше использовать минимальную действующую ставку из предложений по данному вкладу за прошедшие 18 месяцев.

## **2. Вычисление параметров потока взносов и выплат для различных режимов взносов**

Рассмотрим накопительные схемы для различных режимов взносов и последующих выплат [1].

**2.1.** Выполним расчёт размера выплаты индивиду для схемы монотонных взносов и выплат в режиме пренумерандо (денежные суммы относятся к началу каждого периода) [2]. Пусть период взносов составляет  $n$  лет, а период выплат составляет  $m$  лет, и пусть периодичность взносов  $s$  раз в год, а периодичность выплат  $k$  раз в год.

Размер первого взноса обозначим через  $R$ , и каждый раз взнос изменяется на величину  $\beta$  ( $i$ -й взнос составляет  $R+(i-1)\beta$ ,  $i = \overline{1, ns}$ ), первую

выплату обозначим  $PP$ , она каждый раз изменяется на величину  $\gamma$ ,  $r$  – годовая номинальная ставка дисконтирования. Для отыскания выплат запишем уравнение эквивалентности приведённых к моменту изменения направления потока взносов и дисконтированных к этому же моменту времени выплат [1, 2]. С учётом принятых обозначений получаем:

$$\left( \frac{R((1+r/s)^{ns} - 1)}{(r/s)} + \frac{\beta((1+r/s)^{ns-1} - 1)}{(r/s)^2} + \frac{\beta((1+r/s)^{ns-1} - ns)}{(r/s)} \right) (1+r/s) = \frac{PP((1+r/k)^{mk} - 1)}{(r/k)(1+r/k)^{mk-1}} + \frac{\gamma((1+r/k)^{mk-1} - 1)}{(r/k)^2 \cdot (1+r/k)^{mk-1}} + \frac{\gamma((1+r/k)^{mk-1} - mk)}{(r/k)(1+r/k)^{mk-1}}. \quad (1)$$

## 2.2. Рассмотрим схему с $n$ -этапными взносами.

Пусть  $n$  лет ежемесячно в режиме пренумерандо поступают следующие взносы:  $R_1$  (1-й год)  $R_2$  (2-й год), ...,  $R_n$  ( $n$ -й год). Периодичность выплат также ежемесячно в режиме пренумерандо, выплаты постоянны ( $\gamma = 0$ ). Пусть  $r$  – номинальная годовая процентная ставка, проценты капитализируются ежемесячно ( $s = k = 12$ ). После простейшего преобразования (домножение обеих частей на  $r/12$ ), уравнение эквивалентности запишется в виде

$$R_1 \left( \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1 \right) \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{(12(n-1)+1)} + R_2 \left( \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1 \right) \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{(12(n-2)+1)} + \dots + R_n \left( \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1 \right) \left(1 + \frac{r}{12}\right) = \frac{PP \left( \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12m} - 1 \right)}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{(12m-1)}}. \quad (2)$$

**2.3. Произвольная схема взносов.** Если взносы поступают в начале каждого месяца ( $y_t$ ) и различаются между собой по размеру, для вычисления выплат  $PP$  используем формулу:

$$\sum_{t=0}^{12n-1} y_t \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{(12n-t)} = \frac{PP \left( \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12m} - 1 \right)}{\left(\frac{r}{12}\right) \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{(12m-1)}}. \quad (3)$$

## 3. Аппроксимация взносов

Обозначим через  $y_t$  размер взноса в начале  $t$ -го месяца. Используем линейную модель аппроксимации размера взноса  $R_t = R + \beta t$ ,  $t = 0, \dots, 12n - 1$ .

Применим метод наименьших квадратов (МНК) и минимаксный метод, основанный на решении задачи П. Л. Чебышёва для линейного случая [3].

Для оценки параметров модели по методу наименьших квадратов (и далее расчёта выплаты  $PP^{\text{МНК}}$ ), решаем задачу:

$$\sum_{t=0}^{12n-1} (y_t - (R^{\text{МНК}} + \beta^{\text{МНК}} t))^2 \rightarrow \min_{R^{\text{МНК}}, \beta^{\text{МНК}}}, \quad (i = \text{“МНК”}). \quad (4)$$

Оценка параметров по минимаксной модели Чебышёва предполагает решение следующей задачи:

$$\max_{t=0, \dots, 12n-1} |y_t - (R^{\text{ch}} + \beta^{\text{ch}} t)| \rightarrow \min, \quad (i = \text{“ch”}). \quad (5)$$

Для  $i = \text{“МНК”}$  и  $i = \text{“ch”}$  применим формулу (1), учитывая ежемесичный режим взносов и выплат. После преобразования получаем:

$$\begin{aligned} R^i \left( \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{12n} - 1 \right) + \frac{\beta^i \left( \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{(12n-1)} - 1 \right)}{\left( \frac{r}{12} \right)} + \beta^i \left( \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{(12n-1)} - 12n \right) = \\ = \frac{PP^i \left( \left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{12m} - 1 \right)}{\left( 1 + \frac{r}{12} \right)^{12m}}. \end{aligned}$$

#### 4. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим два режима платежей и произведём вычисления накопленных выплат (для следующих примеров  $r = 12\%$ , взносы осуществляются в начале каждого месяца в течение 3 лет, то есть 36 раз, а выплаты в начале каждого месяца в течение следующих 10 лет, 120 раз).

Расчёт параметров монотонной ренты произведём с использованием методов аппроксимации МНК (решение задачи (4)) и минимаксного метода (решение задачи (5)). Результаты расчётов приведены на рис. 1 и 2. Графики имеют разрыв, поскольку взносы в данном периоде прекращаются и начинают поступать фиксированные доходы.

Для примера (см. рис. 1) более точный результат применения метода наименьших квадратов для оценки параметров монотонной ренты обусловлен достаточно сильным ростом взносов к концу периода взносов,

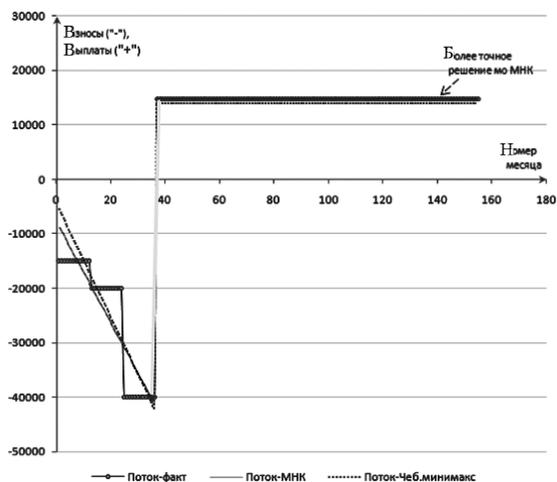


Рис. 1. Пример 1: вносы («-») и выплаты («+») для схемы (2)

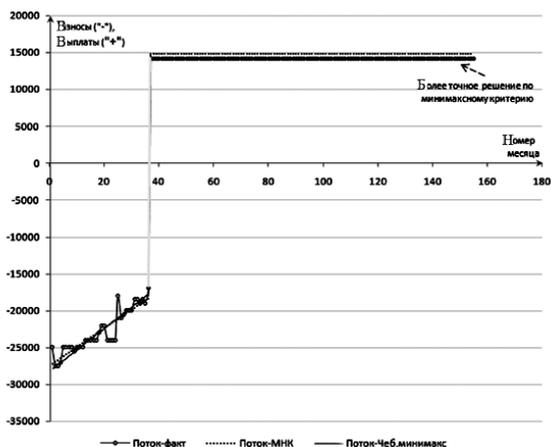


Рис. 2. Пример 2: вносы («-») и выплаты («+») для схемы (3)

что сделало событие, близкое к началу выплат, существенным, и повлекло за собой более низкий уровень возвратных платежей, с точки зрения минимаксного критерия.

В примере (см. рис. 2) наиболее существенные изменения согласуются с «экстремально редкими событиями» по базису ([1, 4]), поэтому более точным оказался метод, основанный на аппроксимации с использованием минимаксного критерия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю.* Об управлении пенсионными накоплениями с учётом риска // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2013. Т.13, вып. 2. С. 227–232.
2. *Выгодчикова И. Ю.* О минимаксном критерии качества эконометрической модели // Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов: материалы VI Междунар. науч.-практ. интернет-конф. Воронеж, Волгоград: Воронеж. гос. ун-т; Волгогр. гос. ун-т, 2015. С. 40–42.
3. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
4. *Нассим Н. Т.* Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. М.: ИД «Рэндом Хаус», 2007. 401 с.

## **О МОДЕЛИРОВАНИИ ДОЛЕВОЙ СТРУКТУРЫ ЗАТРАТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И МИНИМАКСНОГО КРИТЕРИЯ**

**И. Ю. Выгодчикова, А. А. Селиванова**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: irinavigod@yandex.ru, selivanovanuta@mail.ru

В статье представлена минимаксная модель оценки и оптимизации долевой структуры расходов экономического агента в режиме иерархического анализа. Приводится математическое обоснование решения задач с различными ограничениями. Рассматривается схема реализации модели для трёхуровневой структуры для полного бинарного дерева решений, а также вычислительный итерационный алгоритм и формулы, позволяющие произвести расчёты для данной схемы за один этап. В качестве примера рассмотрена модель рационализации расходов на товары для офиса.

## **ABOUT MODELLING OF STRUCTURE OF THE COSTS USING THE HIERARCHICAL MODEL AND MINIMAX CRITERIA**

**I. Yu. Vygodchikova, A. A. Selivanova**

The article considers a minimax model of evaluation and optimization the structure of cost's, using hierarchical analysis mode. A mathematical justification of the solution for problems with various restrictions is given. In the article also considers a realization scheme of the model for a full three-level structure of a binary decision tree. In the article presented an iterative algorithm and formulas to make calculations for this scheme in a single step. As an example, is built model of costs rationalization for office supplies.

1. *Основная модель одной ветви решения.* Экономическим агентом назовём участника экономических отношений, обладающего некоторым набором экономических ресурсов, имеющего сформированную систему предпочтений и вступающего в товарно-денежные отношения с целью приобретения необходимых, достаточно качественных товаров, отвечающих его запросам и удовлетворяющих бюджетному ограничению.

Основными экономическими агентами являются потребители, покупающие товары для удовлетворения своих потребностей, и фирмы-товаропроизводители.

*Целью* работы является проведение анализа расходов экономического агента с использованием математической задачи и иерархической модели и проведение вычислительного эксперимента для распределения расходов предпринимателя на покупку офисного оборудования.

Предложенный подход отличается от получения функций спроса на потребительские товары на основе оценки предпочтений в виде функции полезности и максимизации последней при бюджетном ограничении [1]. Особое внимание уделено анализу иерархии расходов [2].

Рассмотрим следующую минимаксную модель. Пусть  $\theta_i$  – доли расходов на  $i$ -ю категорию из  $n$  видов товарного набора. Весовые *оценки негативного характера*, отражающие опыт покупок, связанный, например, с проблемами качества товаров, обозначим  $V_i > 0, i = \overline{1, n}$ . Пусть  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R_+^n$ , где  $\theta_i$  – доля  $i$ -й затраты. Получаем математическую модель:

$$\Psi(\theta) = \max_{i=\overline{1, n}} V_i \theta_i \rightarrow \min_{\theta \in \left\{ \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in R_+^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\}} \quad (1)$$

Фактически на каждом уровне иерархии требуется снизить «вес» риска самой проблемной категории в структуре затрат.

Решением задачи (1) [2–4] является  $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$  с компонентами:

$$\theta_i^* = 1 / \left( V_i \sum_{i=1}^n V_i^{-1} \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Если задан общий объём расходов  $I^0$ , то оптимальные с точки зрения модели (1) расходы на каждую из  $n$  категорий  $I_i^*$  составят соответственно [1]:

$$I_i^* = I^0 \theta_i^*, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

2. *Модель расходов и иерархический процесс решения в бинарном полном дереве.* Рассмотрим иерархическую структуру расходов, соответствующую трёхуровневой модели полного бинарного дерева решений. Заданными являются следующие параметры:

- общий объём расходов на товары  $I_0$ ,
- параметры модели (1) ( $n = 2$  на каждой ветви решения по дереву иерархий):  
 $V_1^1, V_2^1$  – негативные оценки на первом уровне иерархии,  $V_{11}^2, V_{12}^2, V_{21}^2, V_{22}^2$  – негативные оценки на втором уровне,

$V_{111}^3, V_{112}^3, V_{121}^3, V_{122}^3, V_{211}^3, V_{212}^3, V_{221}^3, V_{222}^3$  – негативные оценки на третьем уровне иерархии.

В процессе анализа вычисляются:

$I_1^1, I_2^1$  – средства, затраченные на первом уровне иерархии,

$I_{11}^2, I_{12}^2, I_{21}^2, I_{22}^2$  – средства, затраченные на втором уровне.

Нужно определить объемы расходов на 8 товаров последнего уровня:

$I_{111}^3, I_{112}^3, I_{121}^3, I_{122}^3, I_{211}^3, I_{212}^3, I_{221}^3, I_{222}^3$  – объем средств, затраченных на третьем уровне иерархии, после чего для определения количества приобретаемых экземпляров каждого товара достаточно поделить объем расходов на цену.

Для применения формул (2) положим

$$v_0^1 = \frac{1}{V_1^1} + \frac{1}{V_2^1}, v_1^2 = \frac{1}{V_{11}^2} + \frac{1}{V_{12}^2}, v_2^2 = \frac{1}{V_{21}^2} + \frac{1}{V_{22}^2}, v_{11}^3 = \frac{1}{V_{111}^3} + \frac{1}{V_{112}^3},$$

$$v_{12}^3 = \frac{1}{V_{121}^3} + \frac{1}{V_{122}^3}, v_{21}^3 = \frac{1}{V_{211}^3} + \frac{1}{V_{212}^3}, v_{22}^3 = \frac{1}{V_{221}^3} + \frac{1}{V_{222}^3}.$$

На рис. 1 представлена блок-схема иерархической структуры расходов.

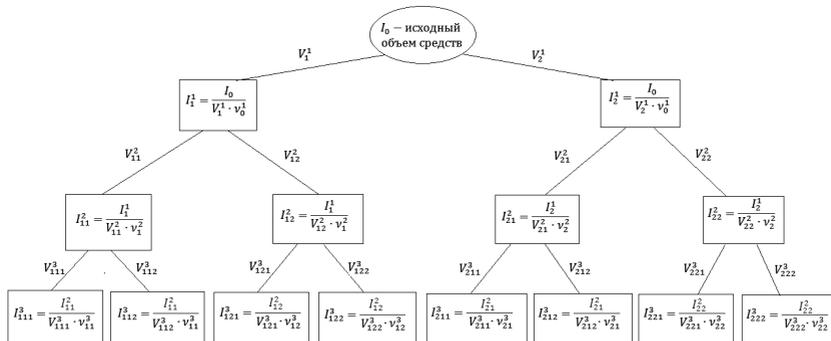


Рис. 1. Иерархическая структура расходов

Рассчитаем средства, затраченные на каждую из категорий последнего уровня:

$$I_{111}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_1^2 \cdot v_{11}^3 \cdot V_1^1 \cdot V_{11}^2 \cdot V_{111}^3}, I_{112}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_1^2 \cdot v_{11}^3 \cdot V_1^1 \cdot V_{11}^2 \cdot V_{112}^3}, \quad (3)$$

$$I_{121}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_1^2 \cdot v_{12}^3 \cdot V_1^1 \cdot V_{12}^2 \cdot V_{121}^3}, I_{122}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_1^2 \cdot v_{12}^3 \cdot V_1^1 \cdot V_{12}^2 \cdot V_{122}^3}, \quad (4)$$

$$I_{211}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_2^2 \cdot v_{21}^3 \cdot V_2^1 \cdot V_{21}^2 \cdot V_{211}^3}, I_{212}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_2^2 \cdot v_{21}^3 \cdot V_2^1 \cdot V_{21}^2 \cdot V_{212}^3}, \quad (5)$$

$$I_{221}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_2^2 \cdot v_{22}^3 \cdot V_2^1 \cdot V_{22}^2 \cdot V_{221}^3}, I_{222}^3 = \frac{I_0}{v_0^1 \cdot v_2^2 \cdot v_{22}^3 \cdot V_2^1 \cdot V_{22}^2 \cdot V_{222}^3}. \quad (6)$$

Используя формулы (3)–(6), находим значения искомых величин.

3. *Вычислительный эксперимент.* Пусть фирма расходует сумму  $I = 1000000$  на закупку мебели и офисного оборудования. На рис. 2 представлен вид иерархической структуры расходов фирмы.

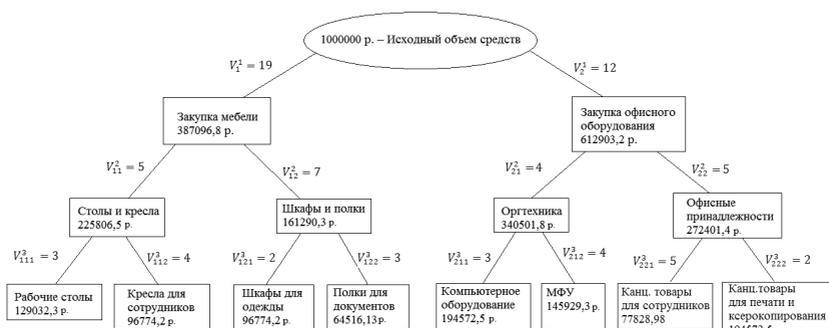


Рис. 2. Иерархическая структура на закупку офисных принадлежностей

Используя формулы (3)–(6), находим значения искомых величин. Результаты эксперимента представлены в таблице.

#### Распределение расходов на покупку принадлежностей для офиса

Товар	Обозначение	Расходы	Цена	Количество
Рабочие столы	$I_{111}^3$	129032,3	6850	18
Кресла для сотрудников	$I_{112}^3$	96774,2	5245	18
Шкафы для одежды	$I_{121}^3$	96774,2	5140	18
Полки для документов	$I_{122}^3$	64516,13	2150	30
Компьютерное оборудование	$I_{211}^3$	194572,5	17620	12
МФУ	$I_{212}^3$	145929,3	13850	10
Канцелярские товары для сотрудников	$I_{221}^3$	77828,98	1245	50
Канцелярские товары для печати и ксерокопирования	$I_{222}^3$	194572,5	643	302

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выгодчикова И. Ю.* О применении минимаксной модели для рационализации расходов потребителя // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2014. Т. 14, вып. 1, ч. 1. С. 96–100.
2. *Перепелица В. А., Тамбиева Д. С.* Системы с иерархической структурой управления. Разработка экономико-математических и инструментальных методов. М.: Финансы и статистика, 2009. 272 с.
3. *Выгодчикова И. Ю.* О минимаксном моделировании оценки риска финансового портфеля // Математическое моделирование в экономике и управлении рисками: материалы III Междунар. молодежной науч.-практ. конф. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2014. С. 63–66.
4. *Выгодчикова И. Ю.* О моделировании долевой структуры финансирования премиальных выплат с использованием минимаксного критерия качества // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 202–206.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

**Б. Р. Гареев**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия*

E-mail: b.r.gareev@mail.ru

Актуальной проблемой финансового управления являются искажения реальной финансовой ситуации в организациях данными бухгалтерского учета. Искажения возникают как следствие действия многих положений по бухгалтерскому учету и часто сводятся к вопросу капитализации и декапитализации расходов с помощью дополнительных расчетов. В статье рассмотрены вопросы моделирования финансовых показателей с помощью учетных корректировок с целью достижения их репрезентативности.

## MODELLING OF REPRESENTATIVENESS OF FINANCIAL PERFORMANCE

**B. R. Gareev**

An urgent problem of the financial management is a distortion of the real financial situation of the organizations in the accounting data. Distortions arise as a consequence of many actions in accounting and are often reduced to the question of capitalization and de-capitalization costs through additional calculations. The paper deals with the modeling of financial indicators with the help of accounting adjustments in order to achieve their representativeness.

Проблема репрезентативности финансовых показателей столь же стара, что и сам бухгалтерский учет и недоверие к нему. Например, известно, что древнеримский чиновник по финансам (квестор) и писатель Марк Порций Катон при покупке имения рекомендовал осматривать само имение, а не учетные книги. В XVII в. французским бухгалтером Жаком Савари были положены основы современной регламентации

бухгалтерского учета. С этого момента проблема усугубилась еще и унификацией учета.

В настоящее время проблемой искажения реальной финансовой ситуации в организациях данными бухгалтерского учета особенно озадачены авторы работ по финансовому менеджменту. Причиной может являться тот факт, что основным источником информации, на основе которой принимаются финансовые решения, по-прежнему остается финансовая отчетность. Считается, что баланс должен предназначен отражать статическое состояние предприятия – его платежеспособность, знание которого позволяют принимать разумные финансовые решения кредиторам предприятия. Отчет о прибылях и убытках отражает динамический показатель – финансовый результат за отчетный период, предназначенный удовлетворять информационные потребности инвесторов предприятия.

Вместе с тем, регламентированный бухгалтерский учет не всегда позволяет в финансовой отчетности отразить реальные платежеспособность и финансовый результат предприятия. Искажения возникают как следствие действия многих положений по бухгалтерскому учету. Анализ научных работ и норм учета позволил нам заключить, что основная проблема искажения бухгалтерских данных сводится к проблемам капитализации и декапитализации расходов и субъективному отношению к ним различных ученых и специалистов.

Например, согласно американским принципам ведения бухгалтерского учета списание расходов на НИОКР на финансовый результат должно производиться единовременно в момент их осуществления. Тем не менее результаты НИОКР могут служить в течение периода, превышающего год и даже десятки лет, и соответственно быть связанными с получением экономических выгод за ряд периодов. Поэтому, по мнению одной из групп ученых и специалистов в области использования данных бухгалтерского учета для целей финансового управления, подобные стратегические расходы должны быть капитализованы. Списание их величины на финансовый результат должно проводиться в течение всего срока их обращения методом амортизации.

Аналогичный порядок предусмотрен российскими ПБУ в отношении НИОКР, не давших положительного результата либо не законченных и не оформленных в установленном законодательством порядке. Проблемы капитализации и декапитализации также характерны для учета основных средств. Согласно п. 5 ПБУ 6/01 «Учет основных средств» основные средства стоимостью не более 40000 рублей за единицу могут отражаться в бухгалтерском учете и бухгалтерской отчетности в составе материально-

производственных запасов. При отпуске материально-производственных запасов в производство списание их стоимости производится одновременно в тот момент, когда был отпуск запасов.

Согласно п. 27 ПБУ 6/01 в составе затрат отчетного периода отражаются затраты на восстановление объекта основных средств (ремонт). Причем подобные затраты могут иметь срок обращения более года.

Особую популярность данным корректировкам придали американские специалисты Дж. Стерн и Б. Стюарт [1]. Они предложили около 154 корректировок и увязали их с расчетом интегрального финансового показателя EVA, построенного на основе модели остаточного дохода.

Нами предлагается унифицированный подход к корректировкам, который можно изложить в виде следующего принципа: капитализация расходов дискретного типа (стратегических инвестиций) с последующем распределением этих расходов по периодам, в которых от них ожидаются выгоды (амортизацией).

Представим принцип формализованно в виде следующей модели расчетов:

$$\Delta CI = \sum C_{Dis} - \sum A_{Dis}, \quad (1)$$

где  $\Delta CI$  – корректировка величины инвестированного капитала;

$\sum C_{Dis}$  – сумма капитализируемых дискретных затрат (величина стратегических инвестиций);

$\sum A_{Dis}$  – сумма накопленной амортизации, рассчитанная исходя из величины капитализированных дискретных затрат ( $\sum C_{Dis}$ ) и срока обращения стратегических инвестиций.

$$\Delta NOPAT = \Delta C \times (1 - T) = (C_{Dis} - A_{Dis}) \times (1 - T), \quad (2)$$

где  $\Delta NOPAT$  – корректировка величины чистой операционной прибыли после налогообложения;

$\Delta C$  – корректировка величины явных издержек;

$T$  – ставка налога на прибыль;

$C_{Dis}$  – капитализируемые дискретные затраты расчетного периода;

$A_{Dis}$  – сумма начисляемой в расчетном периоде амортизации, рассчитанная исходя из величины капитализированных дискретных затрат ( $\sum C_{Dis}$ ).

Проиллюстрируем представленные модели корректировок на условном примере. Предположим, что в первый год организация произвела расходы дискретного типа со сроком обращения 10 лет на сумму 100 млн руб., во второй год – со сроком обращения 5 лет на сумму 20 млн руб.,

в третий год – со сроком обращения 6 лет на сумму 120 млн руб. Сумма амортизации стратегических инвестиций рассчитывается линейным методом. Ставка налога на прибыль составляет 20%. В предшествующие и последующие годы расходов дискретного типа организация не осуществляла.

Расчет величины корректировок инвестированного капитала и чистой операционной прибыли после налогообложения за десять лет представлен в таблице.

**Расчет величины корректировок инвестированного капитала и чистой операционной прибыли после налогообложения за десять лет, млн руб.**

Годы	$C_{Dis}$	$\sum C_{Dis}$	$A_{Dis}$	$\sum A_{Dis}$	$\Delta CI$	$\Delta NOPAT$
1	100	100	10	10	90	72
2	20	120	14	24	96	4,8
3	120	240	34	58	182	68,8
4		240	34	92	148	-27,2
5		240	34	126	114	-27,2
6		240	34	160	80	-27,2
7		240	30	190	50	-24
8		240	30	220	20	-24
9		240	10	230	10	-8
10		240	10	240	0	-8
Итого	240	-	240	-	-	0

Из таблицы следует, что при расчете аналитических величин, характеризующих финансовое состояние и финансовый результат предприятия за первый год, величину инвестированного капитала следует увеличить на 90 млн руб., величину чистой операционной прибыли после налогообложения – на 72 млн руб., во второй год: величину инвестированного капитала – на 96 млн руб., величину чистой операционной прибыли после налогообложения – на 4,8 млн руб., в третий год: величину инвестированного капитала – на 182 млн руб., величину чистой операционной прибыли после налогообложения – на 68,8 млн руб. и т.д.

Подобная формализация позволяет обратить внимание на основное значение данных моделей для целей управления, которые выделяют исследователи в области управленческого учета, – нивелирование некоторых отрицательных побочных эффектов от использования финансовых

показателей в управлении затратами [2–5]. Как видно из расчетов, дискретные расходы вменяются в ответственность менеджеров только в той части, которая приходится на расчетный период. Остальная часть капитализированных расходов ложится на следующие периоды, в которых с ними также связано получение доходов. В конечном итоге такая методика в определенной степени позволяет «смягчать» побудительные стимулы контрольной системы, заставляющие менеджеров сокращать многие необходимые для долгосрочного развития предприятия стратегические расходы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stern J. M., Stewart G. B., Chew D. H.* The EVA Financial Management System // *J. of Appl. Corporate Finance*. 1995. № 2. P. 40–68.
2. *Гареев Б. Р.* Контроллинг на основе системы счетов бухгалтерского учета и принципов двойной записи // *Аудит и финансовый анализ*. 2010. № 5. С. 45–50.
3. *Друри К.* Управленческий учет для бизнес-решений: учебник. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2003. 479 с.
4. *Носов В. В.* Моделирование оптимальной структуры производства сельскохозяйственной организации в условиях погодного риска // *Вестн. Самар. гос. экон. ун-та*. 2010. № 1 (63). С. 57–64.
5. *Шигаев А. И.* Интеграция финансовых показателей эффективности деятельности в управленческой отчетности // *Аграрная наука, творчество, рост: материалы Междунар. науч.-практ. конф.: в 2 т.* Ставрополь: АГРУС Ставропол. гос. аграр. ун-та, 2014. Т. 1. С. 151–155.

### **РАЗРАБОТКА БИБЛИОТЕКИ ПОДПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ**

**В. С. Герасимов, Д. И. Бойцов**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*  
E-mail: wlad03131@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача разработки библиотеки подпрограмм для реализации алгоритмов формосохраняющего приближения.

### **ON THE DEVELOPMENT OF SOFTWARE FOR SOLVING THE PROBLEMS OF SHAPE-PRESERVING APPROXIMATION**

**V. S. Gerasimov, D. I. Boitsov**

In this paper we consider the problem for developing of software for implementation of algorithms of shape-preserving approximation.

Для решения задач принятия решений с дискретным временем и непрерывными состояниями успешно применяются новые методы формосохраняющего динамического программирования [1, 2]. Эти методы основаны на применении алгоритмов формосохраняющего приближения.

В настоящей работе рассматривается задача разработки библиотеки подпрограмм для реализации алгоритмов формосохраняющего приближения, предложенных в работах [3, 4]. В частности, нами был реализован следующий оператор. Пусть  $k, n \in \mathbb{N}, n \geq k + 2, z_j = j/n, j = 0, 1, \dots, n$ , определим линейный оператор  $\Lambda_{k,n}: C^k[0,1] \rightarrow C^k[0,1]$  по шагам слева направо следующим образом:

$$\Lambda_{k,n}f(x) = \sum \frac{D^l f(0)}{l!} x^l + \frac{nx^{k+1}}{(k+1)!} [D^k f(z_1) - D^k f(0)], x \in [0, z_1], \quad (1)$$

$$\Lambda_{k,n}f(x) = \sum \frac{D^l \Lambda_{k,n}f(z_j)}{l!} (x - z_j)^l + \frac{n(x - z_j)^{k+1}}{(k+1)!} [D^k f(z_{j+1}) - D^k f(z_j)], \quad (2)$$

$$x \in (z_j, z_{j+1}], j = 1, \dots, n - 1.$$

Заметим, что данный оператор имеет рекурсивный вид, так как в числителе выражения под знаком суммы происходит вычисление производной от самого оператора, только с другим аргументом. В формуле (1) такого нет. Можно заметить, что условием, отличающим две формулы друг от друга, является текущее значение  $x$ . Таким образом, в разрабатываемом алгоритме в его рекурсивной ветке будут происходить вычисления по формуле (2), а в нерекурсивной – по формуле (1), причем условием выхода из рекурсии является  $x \in [0, z_1]$ .

Входными данными разрабатываемого алгоритма являются: массив значений функции и ее производных в узлах сетки,  $k$  – целое число, означающее, что функция  $k$ -выпуклая,  $n$  – целое число, количество узлов сетки, а также  $x$ , для которого вычисляется значение результирующей функции. Выходными данными разрабатываемого алгоритма являются: многочлен, путем вычисления значения которого при некотором  $x$  получим приближенное значение  $f(x)$ .

Приведем шаги алгоритма.

1. Если  $x \in [0, z_1]$  то

а. вычислим значение первой части формулы (1)

1. для всех целых  $i \in [0, k]$  выполнить:

- возвести  $x$  в степень  $i$ , значение при этом – многочлен
  - умножить его на  $\frac{D^i f(0)}{i!}$
2. сложить полученные при этом многочлены
- б. вычислим значение второй части формулы (1)
- возвести  $x$  в степень  $k + 1$ , значение при этом – многочлен
  - умножить его на  $\frac{n}{(k+1)!} [D^k f(z_1) - D^k f(0)]$
- в. сложить два многочлена
- г. вернуть полученный многочлен
2. иначе, выполнить:
- а. найти  $z_k$
- б. вычислим значение первой части формулы (2)
1. для всех целых  $i \in [0, k]$  выполнять:
    - возвести  $x - z_j$  в степень  $i$ , значение при этом – многочлен
    - умножить его на  $\frac{D^i \Lambda_{k,n} f(z_j)}{i!}$
  2. сложить полученные многочлены
3. вычислим значение второй части формулы (2)
- возвести  $x - z_j$  в степень  $k + 1$ , значение при этом – многочлен
  - умножить его на  $\frac{n}{(k+1)!} [D^k f(z_{j+1}) - D^k f(z_j)]$
4. сложить два многочлена
5. вернуть полученный многочлен

Для разработки кода алгоритма необходимо было реализовать такие функции, как вычисление факториала, возведение двучлена в степень, получение производной от некоторой функции, функцию для вычисления значения многочлена в точке, функцию умножения многочлена на вещественное число, а также функцию для почленного сложения двух многочленов. На основе этих функций, реализованными на языке C++, был написан на нем же код основной функции для реализации алгоритма, производящего вычисления по формулам (1) и (2). Было проведено тестирование работы библиотеки подпрограмм на примерах.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00140).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Judd K. L. Numerical methods in economics. Cambridge: MIT Press, 1998.
2. Cai Y., Judd K. L. Shape-preserving dynamic programming // Math. Meth. Oper. Res. 2013. Vol. 77. P. 407–421.
3. Sidorov S. P. On the order of approximation by linear shape-preserving operators of finite rank // East Journal on Approximations. 2001. Vol. 7, № 1. P. 1–8.
4. Sidorov S. P. Estimates of linear relative  $n$ -widths in  $L_p[0,1]$  // Analysis in Theory and Applications. 2012. Vol. 28, № 1. P. 1–11.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ РИСКА (VaR) МОДЕЛЯМИ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТИ**

**И. Ю. Гераськина**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: gromovaiu@yandex.ru

В данной статье рассматриваются модели гетероскедастичности. Показаны достоинства и недостатки многомерных GARCH-моделей. Основное внимание уделено построению многомерной CCC-GARCH модели. Приводятся результаты исследования применения рассматриваемых моделей для оценки VaR.

## **CERTAIN LEVEL OF RISK (VaR) MODELS HETEROSCEDASTICITY**

**I. U. Gerascina**

This article discusses the model of heteroskedasticity . Advantages and disadvantages of multivariate GARCH-models. The focus is on building a multidimensional CCC-GARCH model. The results of the study examined the use of models to estimate VaR.

Современный рынок финансовых активов характеризуется повышенным уровнем волатильности финансовых инструментов. В этих условиях инвестиционные процессы становятся чрезмерно рискованными, и принятие эффективных инвестиционных решений является актуальной проблемой для инвесторов и трейдеров. Важной задачей по оценке финансовых рисков является прогнозирование изменения волатильности финансовых инструментов.

Прогнозирование волатильности финансовых инструментов играет важную роль при построении и расчетах математических моделей финансовой математики. Оно применяется в теории ценообразования опционов, используется при разработке прибыльных стратегий размещения портфелей ценных бумаг различного вида и типа. Кроме того, оценивание уровня будущей волатильности находит все большее приложение в определении предельного уровня риска (VaR), или размер возможных потерь для заданной вероятности. Эта мера сейчас широко распространена среди риск-менеджеров и легка для понимания руководством финансовых организаций. Целью данной работы является исследование применимости моделей волатильности по качеству вычисления ими оценок риска (VaR).

Классической моделью волатильности является GARCH-модель, предложенная в 1986 г. Т. Боллерслев, которая для модели GARCH(1,1)

запишется в виде

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (1)$$

причем должны выполняться условия:  $\omega > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $0 < \alpha + \beta < 1$  [1].

Позднее в работах Д. Нельсона, Л. Глостена, Д. Ранкла и др. были описаны различные модификации одномерных GARCH-модели. В настоящее время большой популярностью начинают пользоваться и многомерные MGARCH-модели. Опишем многомерную GARCH модель (MGARCH).

Пусть имеется  $N$  ( $N > 1$ ) различных акций. Обозначим  $r_{t,i} = \ln P_{t,i}/P_{t-1,i}$  доходность акций за день  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ,  $i = 1, \dots, N$ ), где  $P_{t,i}$ ,  $P_{t-1,i}$  – значение цены соответственно в день  $t$  и  $t-1$ . Тогда многомерная GARCH модель опишется следующими уравнениями:  $r_t = Cx_t + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t = E_t^{1/2}\vartheta_t$ , где  $C$  – матрица параметров,  $x_t$  – вектор независимых переменных, содержащих лаги,  $E_t^{1/2}$  – разложение Холецкого для  $E_t$ ,  $\vartheta_t$  – независимые одинаково распределенные случайные векторы с  $E(\vartheta_t) = 0$  и  $V(\vartheta_t) = 1$ . Третьим уравнением в MGARCH является представление условной матрицы ковариаций  $E_t$ . К настоящему времени разработано уже несколько видов MGARCH. С их описанием можно ознакомиться в [2].

Рассматривая достоинства и недостатки многомерных GARCH-моделей [3], мы остановимся на CCC-GARCH модели. Основным ее достоинством является относительно небольшое количество параметров, простота их оценки и интерпретации. Эта модель постоянных условных корреляций (CCC). В ней доходность каждого актива следует одномерному процессу GARCH, а условные корреляции между доходностями полагаются постоянными. При этом условная ковариация определяется как произведение постоянной корреляции на соответствующие (независимые) условные стандартные отклонения. Среди недостатков этой модели отмечается отсутствие связи между условными волатильностями разных активов и отсутствие асимметричных эффектов и статичность корреляций [4].

Для многомерной модели CCC-GARCH условная ковариационная матрица случайного вектора  $r_t$  представляется в виде  $\sum_t = D_t R D_t$ , где  $R = (\rho_{ij})$  – постоянная положительная корреляционная матрица доходности акций;  $D_t = \text{diag} \sigma_{t,ii}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – диагональная матрица, элементами кото-

рой являются условные стандартные отклонения доходностей акций, т.е.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1m} & \rho_{2m} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad D_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1,t}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{m,t}^2 \end{pmatrix}$$

Причем  $\sigma_{i,t}^2$  получается из GARCH-модели, описывающейся формулой (1). Процедура определения данной модели состоит из двух последовательных шагов:

- 1) с помощью одномерных GARCH-моделей находят элементы матрицы  $D_t$ ;
- 2) определяется корреляционная матрица  $R$  по следующим формулам [2]:

$$R = \rho_{ij}, \quad \rho_{ij} = \varphi_{ij} / \sqrt{\varphi_{ii}\varphi_{jj}}, \quad \varphi = \varphi_{ij}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T z_t z_t', \quad (2)$$

где случайные вектора  $z_t \in R^N$  определяются как скорректированные по риску отклонения значений фактических, либо прогнозных доходностей активов  $r_{t,i}$  от ожидаемых доходностей  $\mu_{t,i}$ :

$$z_{t,i} = (r_{t,i} - \mu_{t,i}) / \sigma_{t,ii} \quad (i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T). \quad (3)$$

В общем случае компоненты случайного вектора  $z_t = z_{t,i} \in R^N$  при сделанных предположениях являются условно гауссовскими случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей  $R$ .

Для обработки данных и проведения исследования были построены модели GARCH и CCC-GARCH в пакете MATLAB; использовались исторические данные открытия дневных цен акций Сбербанка, Газпрома и ПИК в период с 1 января по 31 декабря 2014 г. На основе данных о ценах для рассматриваемых акций были рассчитаны логарифмические доходности вида  $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$ , где  $P_t$  – цена открытия сделки в день  $t$ . Выбранные акции принадлежат одним из крупных компаний российского экономического рынка и являются представителями разных отраслей экономики: Сбербанк (SBER) – банковская, Газпром (GAZP) – газовая, ПИК (PIKK) – недвижимость. Для обеспечения возможности в дальнейшем

оценивать многомерные модели проверялось, чтобы цены всех выбранных акций были взяты в одни и те же дни торговли. Таким образом, доходность акций рассчитывалась для одного и того же периода. Описательные статистики рядов данных представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Описательные статистики**

Статистики	SBER	GAZP	PIKK
mean	-0,0026	0,0000	0,0040
med	-0,0018	0,0007	0,0021
std	0,0265	0,0179	0,0316
skewness	0,1406	-0,6850	0,3363
kurtosis	7,1355	9,1818	6,4076
max	0,1295	0,0793	0,1461
min	-0,0972	-0,1086	-0,1183

Коэффициент асимметрии (отличен от нуля) и коэффициент эксцесса (для нормального распределения должен равняться 3) свидетельствуют о том, что доходность не имеет нормального распределения. Коэффициенты асимметрии доходности для акций Сбербанка и ПИК равны соответственно 0,1406 и 0,3363, а коэффициент асимметрии доходности акции Газпрома составляет -0,6850. Таким образом, у доходности акций Газпрома более вероятно появление значений из левого хвоста распределения значений, а для Сбербанка и ПИК – из правого (у доходностей акций Газпрома кривая распределения островершинная, а у Сбербанка и ПИК – плосковершинная). При этом преобладает положительная асимметрия, что, как правило, не характерно для рядов финансовых доходностей. Отметим также, что распределения всех рассматриваемых акций имеют тяжелые хвосты: коэффициент эксцесса для каждой акции существенно превышает 0, что является одним из известных эмпирических фактов о распределениях финансовых доходностей.

В табл. 2 представлены оценки параметров методом максимального правдоподобия модели GARCH(1,1). Функция максимального правдоподобия составлена на основе соответствующей данной модели функции плотности распределения. В скобках даны значения среднеквадратичных ошибок оцениваемых коэффициентов, найденных методом Монте-Карло.

В табл. 3 приведены коэффициенты корреляции доходностей каждой акции с доходностями других акций в текущий момент времени. По-

## Оценки параметров модели GARCH (1,1)

Компания	$\omega$	$\alpha$	$\beta$
SBER	5,3431e-05 (0,5225e-05)	0,2688 (0,0051)	0,6734 (0,0110)
GAZP	1,9280e-04 (1,1047e-09)	0,3848 (0,0044)	1,0338e-06 (0,0196)
PIKK	3,4160e-04 (2,5099e-08)	0,2495 (0,0092)	0,4163 (0,0558)

ложительная корреляция доходностей различных акций за один и тот же период свидетельствует о прямой линейной корреляции между акциями, т.е., если доходность одной акции растет, то и доходность другой акции также будет расти, и наоборот. В нашем случае самая высокая связь наблюдается между акциями Сбербанка и Газпрома. Связь между другими парами очень слабая, так как коэффициент корреляции близок к 0.

Таблица 3

## Коэффициенты корреляции

Компания	SBER	GAZP	PIKK
SBER	1,00		
GAZP	0,67	1,00	
PIKK	0,17	0,11	1,00

Для тройки выбранных акций строится трехмерная CCC-GARCH модель. Табл. 4 содержит оценки параметров трехмерной GARCH-модели и их стандартные ошибки, найденные методом Монте-Карло.

Таблица 4

## Оценки параметров трехмерной CCC-GARCH-модели

$i$	$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$r_i$
1	5,3431e-05 (0,5225)	0,2688 (0,0051)	0,6734 (0,0110)	2,0722 (0,028)
2	1,9280e-04 (1,1047e-09)	0,3848 (0,0044)	3,6003e-06 (0,0196)	2,036 (0,0364)
3	3,4160e-04 (2,5099e-08)	0,2495 (0,0092)	0,4163 (0,0558)	3,9371 (0,0274)

Следующим шагом для обеих моделей рассчитываются значения VaR по формуле [5]  $\text{VaR}_{t+1} = F(\alpha)\sigma_{t+1}$ , где  $F(\alpha)$  – соответствующий кван-

тель предполагаемого распределения. Для оценки прогнозной силы моделей будем использовать временной период, разделённый на два временных интервала:

- оценочный интервал (150 дней) – первый интервал временного периода, на основе которого производится оценивание волатильности;
- тестовый интервал (99 дней) – второй интервал временного периода, для которого производится оценка VaR, он образуется после отсечения от периода оценочного интервала;

Для расчета оценок волатильности используется горизонт прогноза в 1 день. Для каждой из моделей был проведен бек-тестинг на 1%-, 5%- и 10%-ном уровнях значимости. В табл. 5 приведены основные показатели прогноза, где  $x$  – количество пробоев кривой VaR (рядом указаны допустимые значения количества пробоев,  $\alpha_0$  – эмпирическая частота пробоев, POF – значение статистики теста Купика.

Таблица 5

**Характеристики качества прогноза моделей**

Уровень значимости, %	Показатели	GARCH (1,1)			CCC-GARCH
		SBER	GAZP	PIKK	
1	$x[0 \div 4]$	3	4	3	3
	$\alpha$	0,02	0,03	0,02	0,02
	POF	1,17	2,89	1,17	1,17
5	$x[4 \div 11]$	1	10	5	10
	$\alpha$	0,07	0,07	0,05	0,07
	POF	0,8	0,8	0,99	0,8
10	$x[10 \div 19]$	16	14	7	14
	$\alpha$	0,11	0,1	0,03	0,1
	POF	0,07	0,07	5,8	0,07

Количество пробоев кривой VaR почти для всех случаев попадает в допустимый интервал, что удовлетворяет тесту Купика. Исключение составляет только акция PIKK на 10%-ном уровне значимости. Но, если рассмотреть значения POF на 1%-ном уровне значимости, то заметим, что ни одна из моделей не дает удовлетворительный прогноз VaR на заданном уровне. Согласно результатам, приведенным в табл. 5, для прогноза на 5%-ном и 10%-ном уровнях значимости обе модели (GARCH и CCC-GARCH) можно считать адекватными. Хотя многомерная модель является более предпочтительной в том плане, что она показала наилучшие результаты. Итак, обнаружено, что многомерная GARCH-модель дает более

точные данные для оценки VaR, чем одномерная GARCH-модель, причем с увеличением уровня значимости показатели улучшаются.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Росси Э.* Экономический ликбез : волатильность. Одномерные GARCH-модели // Квантиль. 2010. № 8. С. 44–57.
2. *Alexander J.* Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools. Princeton, Oxford : Princeton University Press, 2005. 538 p.
3. *Гераськина И. Ю., Гераськин А. С.* Исследование многомерных GARCH моделей // Современное общество, образование и наука : сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. (31 марта 2015 г.) : в 16 ч. Ч. 16. Тамбов : Изд-во ООО «ООО «Консалтинговая компания Юком», 2015. С. 26–28.
4. *Субботин А. В.* Управление инвестиционным портфелем на основе индикаторов рыночной волатильности : дис. ... канд. экон. наук. М., 2009. 194 с.
5. *Шерба А. В.* Сравнение моделей оценок VaR на интервалах прогнозирования разной срочности для акций российского фондового рынка // Прикладная эконометрика. 2011. № 4 (24). С. 58–70.

## ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

**И. А. Горина, А. Р. Файзлиев**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: Gorina\_Irina\_441@mail.ru

Данная работа посвящена изучению жадного алгоритма и его применению для решения задачи оптимального портфельного инвестирования. На основе полученных данных построен график эффективного фронта рассматриваемой модели (эффективный фронт Марковица).

## GREEDY ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMAL PORTFOLIO INVESTMENT

**I. A. Gorina, A. R. Faizliev**

This work is devoted to the study of the greedy algorithm and its application for the solution of the problem of optimal portfolio investment. Based on the data obtained to plot the curve of the effective front of the model (effective front Markovitz).

### Введение

Для любого  $q > 0$  и  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ , пусть  $\|x\|_q := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q}$  и  $\|x\|_0 = \lim_{q \rightarrow 0+} \|x\|_q$  (количество ненулевых элементов  $x$ ). Если  $q \geq 1$ , то  $\|x\|_q$  есть  $L_q$ -норма вектора  $x \in R^n$ . Пусть  $n$  есть общее количество

инвестиционных активов. Обозначим  $r_{it}$  как доходность актива  $i$  в момент времени  $t$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq t \leq m$ . Портфель определяется вектором весов,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ . Пусть  $\mu$  есть доходность, заданная инвестором [1].

Для простоты в рассматриваемой нами модели не будут учитываться транзакционные издержки. Будем считать, что

- короткие продажи допустимы, т. е. веса могут быть отрицательными;
- инвестор располагает одной единицей капитала, т. е.  $x^T 1_n = 1$ , где  $1_n$  обозначает вектор из  $R^n$ , в котором каждая компонента равна 1.

В задаче портфельного инвестирования (модель Марковица) цель инвестора состоит в том, чтобы найти портфель с минимальным риском среди имеющих заданную доходность, сумма квадратов отклонений доходности портфеля и единичного вектора, умноженного на доходность  $\mu$ , возвращает [1]:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|1_n \mu - Rx\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1. \quad (1)$$

Так как задача (1) – это задача выпуклой оптимизации, она может быть решена аналитически с помощью метода Лагранжа. В данной статье мы рассмотрим алгоритм для решения задачи (1) с ограничением на кардинальность, т.е. с ограничением на число активов, входящих в портфель. Задача имеет следующий вид [2]:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|1_n \mu - Rx\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1, \|x\|_0 \leq K, \quad (2)$$

где  $K$  – ограничение на число активов в портфеле с ненулевыми весами. Предполагается, что  $K$  существенно меньше  $n$ ,  $K \leq n$ .

## 1. Жадный алгоритм для минимизации в $L_2$ -норме с регуляризацией

Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  – индексное множество инвестиционных активов. Задача (1) есть частный случай (при  $\tau = 0$ ) следующей задачи [2]:

$$x^* = \arg \min_x \|1_n \mu - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1, \|x\|_0 \leq K, \quad (3)$$

где  $\tau$  – некоторый положительный параметр. Слагаемое  $\tau \|x\|_2^2$  позволяет использовать метод наименьших квадратов даже в случае мультиколлинеарности в матрице  $R$ . Жадный алгоритм для решения задачи (2) в  $L_2$ -норме на каждом шаге добавляет к портфелю актив, который ближе

всего  $k$  заданной доходности. Процесс продолжается до тех пор, пока не достигнуто количество элементов  $K$  [2].

Пусть  $M_k \subset N$  есть множество индексов, соответствующих  $k$  ненулевым элементам  $x$ . Пусть  $\tilde{R}_{M_k}$  – подматрица  $R$  с размерностью  $(m \times |M_k|)$ . Тогда задача (3) при  $x_i = 0$  for  $i \in N \setminus M_k$  может быть представлена как [2]:

$$\tilde{x}^* = \arg \min_{\tilde{x}} \|1_n \mu - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}\|_2^2 + \tau \|\tilde{x}\|_2^2, \quad (4)$$

где  $\tilde{x}^T 1_{|M_k|} = 1$ ,  $\tilde{x} \in R^{|M_k|}$ .

Обозначим  $f^T(M_k) := \|1_n \mu - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}^*\|_2^2 + \tau \|\tilde{x}^*\|_2^2$ .

Оптимальное решение задачи (4) может быть получено методом Лагранжа:

$$\tilde{x}_{M_k}^T = (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} + \tau E_k)^{-1} \cdot (\tilde{R}_{M_k}^T 1_n \mu - \lambda e_k), \quad (5)$$

где  $E_k$  – это  $(k \times k)$  – единичная матрица и

$$\lambda = \frac{1_K^T (\tilde{R}_{M_K}^T \tilde{R}_{M_K} + \tau E_K)^{-1} \tilde{R}_{M_K}^T 1_n \mu - 1}{1_K^T (\tilde{R}_{M_K}^T \tilde{R}_{M_K} + \tau E_K)^{-1} 1_K}.$$

Жадный алгоритм в  $L_2$ :

**begin**

Пусть  $M_0 = \emptyset$  и  $k = 1$ . Множество  $f^T(M_0)$  достаточно большое.

**while**  $k \leq K$  **do**

$\forall s \in N \setminus M_{k-1}$  вычислим  $\tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s\}}^T$ , используя (5).

Выберем  $s^* = \arg \min f^T(M_{k-1} \cup \{s\})$  и  $\tilde{x}_{M_k}^T = \tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s^*\}}^T$

$s \in N \setminus M_k - 1$

$M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$  и  $k = k + 1$ ,

$X_G^T = \tilde{x}_{M_K}^T$  и  $M_G^T = M_K$

Возвращаем  $X_G^T$  и  $M_G^T$

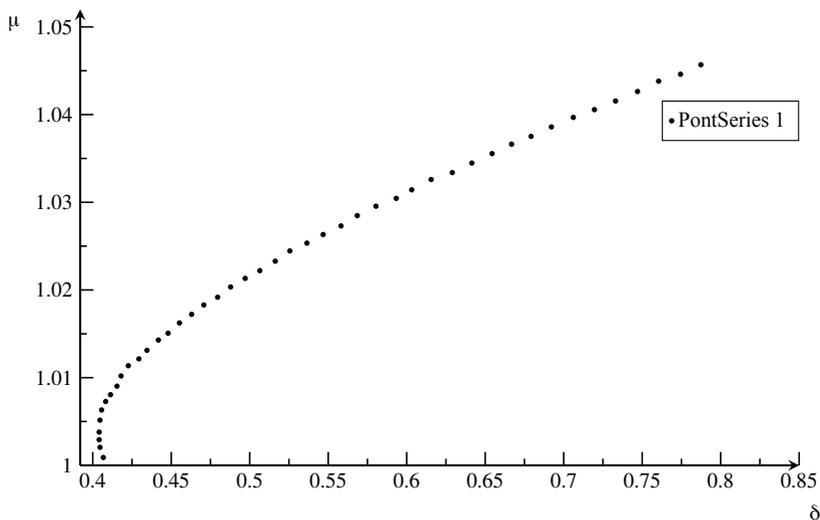
**end.**

## 2. Результаты

Для построения портфеля ценных бумаг с применением жадного алгоритма были использованы публично доступные данные, относящиеся к пяти главным рыночным индексам, позаимствованные с ресурса OR-Library. К этим рыночным индексам относятся Hang Seng (Гонконг), DAX 100 (Германия), FTSE 100 (Великобритания), S&P 100 (США) и Nikkei 225 (Япония) для 290 временных периодов каждый (недельные данные),

доступные на <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>. Для эмпирической части исследования был использован тестовый набор данных индекса Hang Seng (Гонконг).

На рисунке приведен эффективный фронт модели, полученный с использованием жадного алгоритма для кардинальности  $K=10$ , который был построен следующим образом. Изменяя уровень желаемой доходности  $\mu$  в данной задаче и многократно решая её, получим минимальное значение стандартного отклонения  $\delta$  портфеля для каждого значения  $\mu$ . Полученные портфели составляют эффективный набор портфелей. Отображая на графике соответствующие значения целевой функции, стандартные отклонения и доходности  $\mu$  из эффективного набора, получаем эффективный фронт Марковица в пространстве среднего значения-отклонения (mean-variance). На практике для определения риска чаще используется стандартное отклонение.



Эффективный фронт модели:  $\mu$  – заданная доходность,  $\delta$  – стандартное отклонение

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудов С. И. Оптимальное портфельное инвестирование: учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. 72 с.
2. Сидоров С. П., Захарова Е. А., Хомченко А. А., Гришина Н. П. Модели оптимального портфельного инвестирования: учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015.

# МНОГОМЕРНАЯ ОЦЕНКА ПРОЦЕССА ВОСПРОИЗВОДСТВА НАСЕЛЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Е. В. Горобец**

*Феодосийская финансово-экономическая академия, Россия*

E-mail: gorobets\_feo@mail.ru

Дана статистическая оценка процесса воспроизводства населения Республики Крым (РК) Российской Федерации по его составляющим: рождаемость, смертность, миграция. Проведен статистический анализ социально-демографического развития городских округов и муниципальных районов РК РФ.

## MULTIDEMENSIONAL ASSESMENT OF THE POPULATION REPRODUCTION PROCESS OF THE REPUBLIC CRIMEA OF RUSSIAN FEDERATION

**E. V. Gorobets**

The statistical assessment of the population reproduction process of the Autonomous Crimean Republic is provided on the bases of its components: berth rate, death rate, migration rate. The statistical analysis of the social-demographic development of the Republic Crimea administrative units is carried out.

**Введение.** Существенно влияет на демографическую ситуацию в целом в государстве неравномерность социально-экономического развития отдельных регионов. Именно поэтому существует необходимость разработки соответствующих методик для установления и оценки уровня диспропорций в развитии отдельных территорий, которые позволяли бы повысить достоверность сравнительного статистического анализа с целью установления и устранения причин неравномерного развития. Это даст возможность обосновать объемы государственного и муниципального финансирования региональных программ, которые направлены на преодоление кризисных явлений в экономике и обществе.

**Постановка задачи.** Депопуляционные процессы, происходящие в мире, требуют усиления внимания к таким факторам воспроизводства, как увеличение ожидаемой продолжительности жизни, улучшение состояния здоровья, рост уровня жизни, восстановление в обществе семейных, культурных и морально-этических ценностей. С помощью статистических методов появляется возможность не только количественно измерить влияние факторов на воспроизводство населения, но и дать им соответствующую качественную оценку.

**Результаты исследования.** Многомерная оценка составляющих воспроизводства населения муниципального образования начинается с изучения изменения численности наличного населения.

Значительные изменения численности населения Крыма обусловлены особыми факторами, связанными в первую очередь с событиями 1944–1956 гг., когда была проведена массовая депортация крымских татар, греков, армян, немцев, болгар. Так, в течение и после окончания Второй Мировой войны из Крыма было депортировано 191914 крымских татар (более 47 тыс. семей). На смену вывезенному населению в сентябре-октябре 1944 г. в Крым прибыло более 17 тыс. семей из Украины и России, однако до апреля 1946 г. крымскую землю покинуло 11381 семей. До 1 июня 1948 г. выехало 52,5% семей, прибывших с начала 1944 г. В 1990 г. была принята концепция государственной программы возвращения крымских татар в Крым, которая давала им право на переселение. С этого момента крымские татары получили официальное право жить на исторической родине и это стало фактором активизации миграционных процессов.

По данным Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Республике Крым (Крымстата), за период с 2001 по 2014 г. численность наличного населения Крыма уменьшилась на 73,4 тыс. человек (рис. 1).

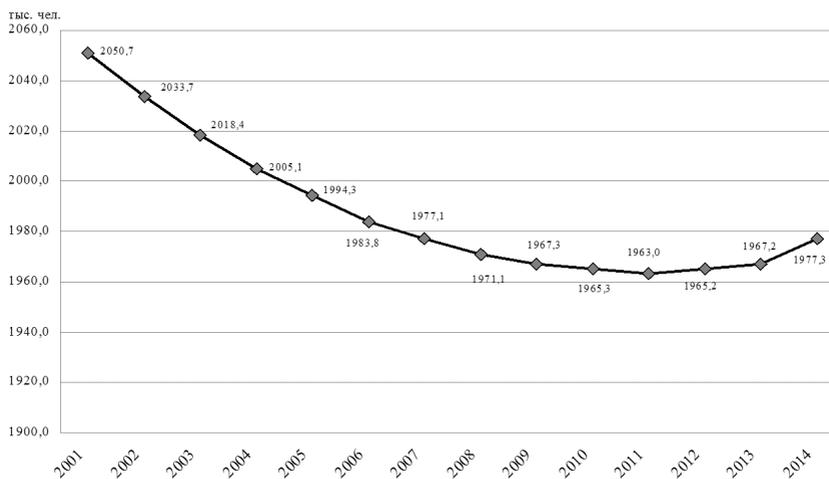


Рис. 1. Численность наличного населения Республики Крым в 2001–2014 гг. [1]

По результатам исследования установлено, что положительный естественный прирост и положительное сальдо миграции наблюдалось в Крыму в период с 1989–1991 гг. С 1992 г. и в настоящее время Республика Крым имеет отрицательный естественный прирост численности населения, т.е. смертность превышает рождаемость: в 2013 г. естественная убыль населения составляла 1,5%, в 2014 г. – 2,3%, а за январь – июль 2015 года – 3,5 человек на 1000 человек населения. Начиная с 2006 г. в Крыму установлена тенденция роста темпа естественной убыли населения по сравнению с предыдущими годами.

Естественный прирост (убыль) обуславливается двумя факторами – рождаемостью и смертностью. В 2013 г. отношение умерших к числу родившихся составляло 1,12, в 2014 г. это соотношение составляло 1,18, а за январь – июль 2015 г. – 1,28.

С 2000 г. сохраняется рост рождаемости в Крыму: за последние пять лет этот показатель увеличился на 0,6%, самое высокое значение зафиксировано в 2012 г. – 12,6%, или 24702 человек. Установлена тенденция превышения рождаемости в сельской местности над рождаемостью в городах, обратная ситуация была только в 1994 г. Интенсивность рождаемости в республике выросла, при этом установлено увеличение общего коэффициента рождаемости.

При исследовании смертности в Республике Крым установлено, что при общем росте смертности в течение 35-летнего периода остается без изменения структура умерших по возрастным группам. Также требует внимания увеличение смертности в Крыму с 2005 г. детей возрастом до 1 года. С целью выявления влияния факторов на динамику общих коэффициентов смертности мужского и женского населения республики проведен факторный анализ. При росте общего коэффициента смертности среди мужчин на 26% ее фактическое значение по причине повышения половозрастной смертности составляет 7%. Кроме того, общая смертность выросла на 18% из-за постарения возрастной структуры мужского населения. Для женщин соответствующие данные составили соответственно 17%, 22,6% и 95,5%. Размер влияния старения для женского населения значительно превышает показатели по мужчинам (558% и 69% соответственно). Это связано с тем, что смертность среди мужчин значительно выше по сравнению с женщинами, особенно в подростковом возрасте. Смертность в Республике Крым и сейчас превышает рождаемость, но при этом уменьшается количество умерших на 1000 человек населения.

Уменьшение уровня смертности влияет на увеличение средней ожидаемой продолжительности жизни при рождаемости. Этот показатель вырос в Крыму, при этом темпы роста продолжительности жизни мужчин опережают аналогичный показатель у женщин.

Механической составляющей воспроизводства населения является миграция. Начиная с 2004 г. в Республике Крым выявлено положительное значение миграции, а именно в 2011 г. механический прирост составил 3,6 тыс. чел., в 2012 г. – 4,4 тыс. чел., в 2013 г. прирост мигрантов составил 5,1 тыс. чел. Максимальный миграционный прирост за последние десятилетия установлен в 2014 году – превышение численности прибывших над численностью покинувших Республику Крым составило 16389 человек. За первое полугодие 2015 г. механический прирост составляет 9153 человека. Наибольшая миграционная активность наблюдается в Красноперекопском и Красногвардейском муниципальных районах, это можно пояснить значительным показателем безработицы и сезонным характером работы в них, наименьшее значение этого показателя выявлено в Керчи.

Сравнительная оценка демографической ситуации в регионе проводится путем построения обобщающего многомерного показателя на основе отклонений, стандартизированных вариационным размахом, группировкой множества индикаторов, который сформирован из 20 наиболее значимых показателей, характеризующих экономические и социальные аспекты процесса воспроизводства населения [2, с. 30]. Отбор показателей проводился по результатам корреляционного анализа между показателями, влияющими на уровень воспроизводства населения в Республике Крым. Были выбраны следующие факторы: общий прирост (убыль) населения, ‰; численность наличного населения тыс. чел.; доля городского и сельского населения в общей численности наличного населения; общий и суммарный коэффициенты рождаемости; количество рожденных девочек и мальчиков; ожидаемая продолжительность жизни при рождении мужчин; количество зарегистрированных браков и разводов на 1000 жителей; средний возраст населения; индексы инвестиций в основной капитал в жилищное строительство; индексы ввода в эксплуатацию жилья; обеспеченность жильем в среднем на одного человека; количество среднего медицинского персонала; демографическая нагрузка; коэффициент смертности на 1000 живорожденных; коэффициент смертности и выбросы вредных веществ в атмосферный воздух.

По результатам кластерного анализа по уровню демографической ситуации сформировано 5 групп, которые образуют однородные кластеры (таблица).

**Группировка административных единиц Республики Крым по уровню демографической ситуации в 2010–2014 гг.**

Группа	Среднее значение интегрального показателя демографической ситуации	Количество единиц наблюдения	Перечень административных единиц
Регионы с оптимальной демографической ситуацией	0,1671	5	Симферополь, Евпатория, Ялта, Керчь, Феодосия
Регионы со стабильной демографической ситуацией	-0,0617	4	Муниципальные районы: Бахчисарайский, Красногвардейский, Сакский, Симферопольский
Регионы с умеренной демографической ситуацией	-0,2282	6	Алушта; муниципальные районы: Белогорский, Кировский, Ленинский, Нижнегорский, Джанкойский
Регионы с предкризисной демографической ситуацией	-0,3537	8	Саки, Джанкой, Судак; муниципальные районы: Красноперекопский, Первомайский, Советский, Раздольненский, Черноморский
Регионы в состоянии демографического кризиса	-0,3802	2	Армянск, Красноперекопск

Изменение значений интегрального показателя демографической ситуации отражено на рис. 2.

Таким образом, региональная дифференциация показателей воспроизводства населения является объектом статистического изучения.

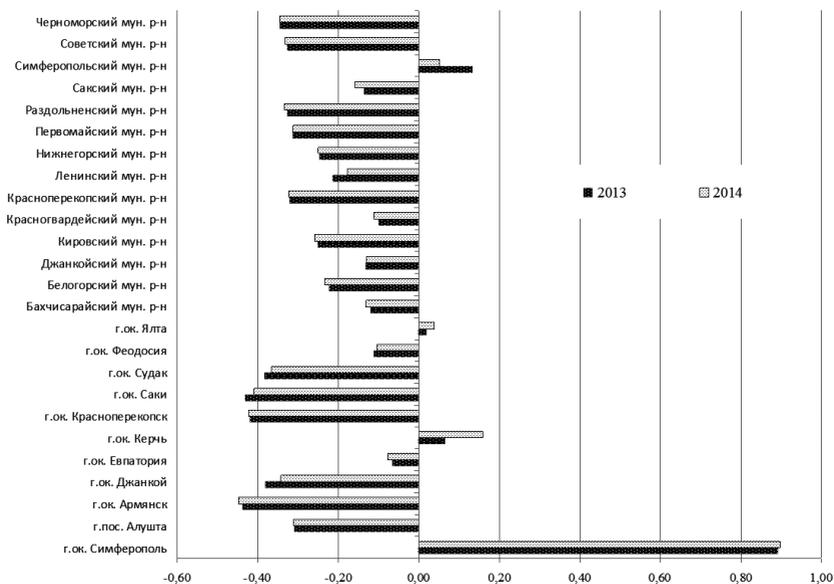


Рис. 2. Изменение значений интегрального показателя демографической ситуации по муниципальным единицам

Это обуславливает необходимость детализированной оценки особенностей демографического развития регионов. Такое исследование может быть использовано при разработке демографических прогнозов как отдельных регионов, так и государства в целом. Исследование особенностей и закономерностей территориального распределения населения, изучение изменений основных демографических показателей дает основание для анализа дифференциации в развитии регионов и ее влияния на общенациональные демографические тенденции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Республике Крым (Крымстата) [Электронный ресурс]. URL: <http://gosstat.crimea.ru> (дата обращения: 22.09.2015).
2. *Сріна А. М.* Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.

# **РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ОСНОВНЫХ ФИНАНСОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕДПРИЯТИЯ**

**А. А. Давыдова, Э. Э. Ситдикова**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия*

E-mail: anydavy7@bk.ru, elina-sitdikova@mail.ru

В процессе проведения данного исследования были выявлены наиболее актуальные операционные, маркетинговые и финансовые риски для компании ПАО «Уралкалий». Рассмотрен и апробирован алгоритм проведения прогнозирования методом регрессионного анализа. На основе прогнозных значений смоделированы три возможных сценария изменения показателей финансового положения компании в 2016 г. Предложены мероприятия по минимизации рисков и использованию наиболее благоприятного прогнозного сценария для компании.

## **THE REGRESSION ANALYSIS IN THE FORECASTING OF THE MAIN COMPANY'S FINANCIAL PARAMETERS**

**A. A. Davydova, E. E. Sitdikova**

In the process of this research we identified the most relevant operational, marketing and financial risks for OJSC "Uralkali". Considered and approved algorithm of prediction by regression analysis. On the basis of the forecast results are modeled three scenarios of the changed parameters of the financial situation of the company in 2016. Measures have been proposed to minimize the risks and to use of the most favorable predictive scenario for the company.

Важным элементом при определении финансового положения компании являются основные финансовые показатели и их прогнозные значения, построенные с учетом возможных финансовых рисков. На основе этих данных топ-менеджеры компаний определяют цели компании и формируют планы управления, а инвесторы и акционеры принимают решения об инвестировании в капитал и активы предприятия. Прогнозные значения позволяют выявить резервы роста компании и сдерживающие факторы, что обуславливает высокую значимость и актуальность изучения данного вопроса.

Объектом данного исследования является ведущая вертикально интегрированная компания по производству калия – ПАО «Уралкалий», предметом исследования – финансовые показатели компании.

Калийная отрасль является одной из наиболее стабильных ввиду дефицита калийных удобрений на мировом рынке и ограниченности запасов калийных руд в целом. Однако существует ряд рисков, которые возникают в процессе финансово-хозяйственной деятельности ПАО «Урал-

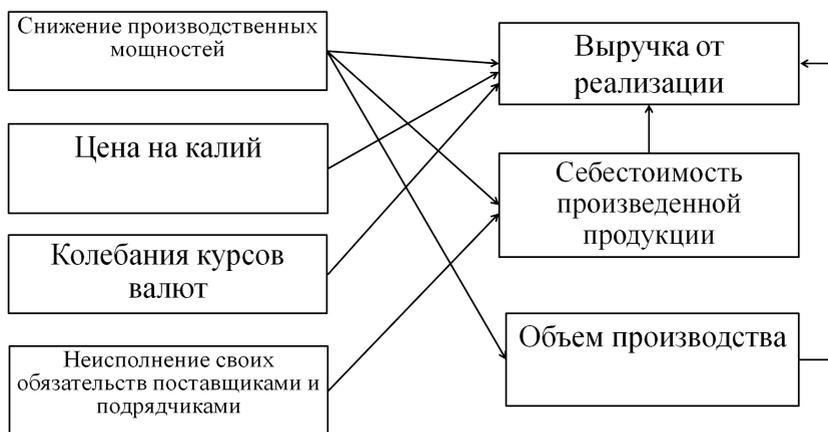
калий». Так, при помощи инструмента анализа внутренней и внешней среды нами были выявлены следующие наиболее значимые для компании риски: снижение производственных мощностей, неисполнение своих обязательств поставщиками и подрядчиками, колебания курсов валют, снижение цены на калий.

На основе идентифицированных рисков была выявлена причинно-следственная связь влияния факторов риска на основные ключевые показатели операционной деятельности. Это:

- выручка от реализации;
- себестоимость;
- объем производства.

При этом за базу был взят основной закон деятельности предприятия в условиях рыночной экономики – это максимизация прибыли. Наибольшую долю чистой прибыли предприятия составляет прибыль от реализации, т.е. выручка, которая зависит от объема производства, а также от себестоимости продукции. На формирование этих величин оказывают влияние различные факторы риска, которые могут привести к их отклонениям в отрицательную сторону, т.е. к потере прибыли [1–4].

Влияние факторов риска на основные финансовые показатели ПАО «Уралкалий» представлены на рисунке.



Зависимость экономических показателей от факторов риска

Именно эти наиболее актуальные факторы будут учитываться в качестве переменных в будущей модели зависимости основных экономических показателей от факторов хозяйственного риска [5–7].

Алгоритм финансового прогнозирования:

- 1) регрессионный анализ,
- 2) создание набора предположений о величинах значимых экзогенных факторов в будущем,
- 3) сценарный прогноз финансовых показателей ПАО «Уралкалий».

## 1. Регрессионный анализ

В целях дальнейшего определения конкретных значений прогнозируемых показателей нам необходимо составить уравнение множественной регрессии вида  $Y_i = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  для каждого прогнозируемого показателя: выручки, себестоимости, объема производства, где  $Y_i$  – зависимая переменная (прогнозируемый показатель),  $X_i$  – объясняющая переменная.

Для составления уравнения регрессии для выручки были использованы следующие данные за 6 лет: размер выручки, объем производственных мощностей, цена на калий, курс валюты. (табл. 1).

Таблица 1

Ряды наблюдений, необходимые для построения уравнения регрессии  $Y_1$  (выручка)

Год	$Y_1$ , млн \$	$X_1$ , млн тонн	$X_2$ , \$ за тонну	$X_3$ , руб.
2009	1065	7,7	330	30,2442
2010	1699	10,8	340	30,4769
2011	3496	11,5	351	32,1961
2012	3950	11,5	370	30,3727
2013	3323	13	268	32,7292
2014	2785	12,1	233	56,2584

При помощи статистических методов было получено уравнение множественной регрессии выручки следующего вида:  $Y_1 = -8851.16 + 578.57X_1 + 13.14X_2 + 28.41X_3$ , где  $Y_1$  – выручка, которая зависит от факторов  $X_1$  – производственные мощности,  $X_2$  – цена на калий,  $X_3$  – курс валюты.

Для выявления зависимости себестоимости продукции от объема производственных мощностей и размера дебиторской задолженности, непосредственно зависящей от риска невыполнения своих обязательств

поставщиками и подрядчиками, мы также воспользовались данными за последние 6 лет: это значение себестоимости, объем производственных мощностей и размер дебиторской задолженности (табл. 2).

Таблица 2

**Ряды наблюдений, необходимые для построения уравнения регрессии  $Y_2$  (себестоимость продукции)**

Год	$Y_2$ , млн \$	$X_1$ , млн тонн	$X_4$ , млн \$
2009	280	7,7	191,9
2010	390	10,8	235,1
2011	888	11,5	468,0
2012	991	11,5	560,9
2013	945	13	556,4
2014	752	12,1	481,1

На основании имеющегося ряда наблюдений было получено уравнение регрессии себестоимости следующего вида:  $Y_2 = -21.714.75X_1 + 1.88X_4$ .

Также и для будущего прогноза объема производства была выявлена зависимость, которая описывается уравнением парной регрессии с одним объясняющим фактором. Были использованы данные за 6 лет по объему производства и размеру производственных мощностей (табл. 3).

Таблица 3

**Ряды наблюдений, необходимые для построения уравнения регрессии  $Y_3$  (объем производства)**

Год	$Y_3$ , млн тонн	$X_1$ , млн тонн
2009	6,1	7,7
2010	10,2	10,8
2011	10,8	11,5
2012	9,1	11,5
2013	10	13
2014	12,1	12,1

На основании имеющегося ряда наблюдений было получено уравнение регрессии объема производства вида  $Y_3 = -0.4996 + 0.9204X_1$ .

**Следующий (второй) этап исследования** – это создание набора предположений о величинах значимых факторов в будущем.

Нами были сформированы 3 варианта значений каждого из этих трех факторов риска:

- величина фактора в нижней границе ожидаемого интервала значений (сценарий № 1);
- наиболее вероятное значение фактора в прогнозном периоде (сценарий № 2);
- значение фактора в верхней границе доверительного интервала (сценарий № 3).

При этом для прогноза курса доллара к рублю были изучены и применены как информация из официальных правительственных источников (Министерства экономического развития и торговли – МЭРТ, Министерства финансов), так и данные различных независимых экспертов и научно-исследовательских объединений.

**Третий этап исследования** – сценарный прогноз финансовых показателей ПАО «Уралкалий».

На основании ожидаемых сценарных значений факторов риска, выявленных на втором этапе исследования, был построен сценарный прогноз ключевых финансовых показателей ПАО «Уралкалий» на 2016 г.

При этом сценарий № 1 предусматривает пессимистический вариант развития событий, сценарий № 3 – оптимистический, сценарий № 2 является наиболее вероятным вариантом.

Оптимистический сценарий будет в том случае, если компания проведет мероприятия по минимизации рисков. Пессимистический вариант развития событий имеет место быть в том случае, когда компания не предпринимает действий по минимизации рисков.

Подставив предполагаемые значения факторов риска в уравнения регрессии, полученные на 1-м этапе, мы можем получить следующие показатели выручки, себестоимости и объема производства по трем сценариям (табл. 4).

Результаты данного сценарного прогноза свидетельствуют о достаточно высокой степени зависимости основных финансовых показателей ПАО «Уралкалий» от уровня значений изученных факторов.

Различные внутренние и внешние факторы: аварийные простои, ухудшение уровня инфраструктуры, ухудшение качества руды, снижение уровня мощности в связи с изменением технологий по причине предписаний регулирующих органов и прочие факторы могут снизить объемы производства продукции «Уралкалия». В 2014 г. в связи с аварией на Соликамске-2 произошло снижение производственных мощностей ПАО «Уралкалий». Для минимизации риска снижения производственных

Таблица 4

## Прогнозные значения финансовых показателей ПАО «Уралкалий» на 2016 год

Наименование показателя	Сценарий 1 (пессим.)	Сценарий 2 (наиб.вер.)	Сценарий 3 (оптим.)
Факторы риска			
Производственные мощности, млн тонн	10,2	11	11,6
Цена на калий, \$ за тонну	220	250	270
Курс валюты (отношение рубля к доллару), руб.	58,56	64,47	70,13
Дебиторская задолженность, млн \$	530	490	400
Основные финансовые показатели ПАО «Уралкалий»			
Выручка, млн \$	1 605	2 630	3 400
Себестоимость, млн \$	926	847	675
Объем производства, млн тонн	8,89	9,62	10,18

мощностей компании необходимо продолжать работу по расширению своих производственных мощностей и восполнению выбывших, использовать систему превентивных контролей, позволяющую своевременно выявить потенциальную угрозу устойчивости.

ПАО «Уралкалий» не может влиять на факторы, определяющие мировые цены на калий, поскольку стремление компаний-производителей достичь высокой загрузки мощностей при недостаточном уровне спроса может привести к избытку рыночного предложения хлористого калия и тем самым к снижению общемировых цен. Это может сказаться на снижении объемов выручки и привести к уменьшению прибыли.

В связи с этим руководству «Уралкалия» необходимо осуществлять мониторинг и поддержание всех ключевых рынков сбыта, применяя для этого аналитические методы оценки будущего уровня спроса на свою продукцию и пытаясь соответствовать ему.

Также компания считает, что она подвержена рискам неблагоприятного изменения валютных курсов. Отнесение наименьшей величины курса доллара США к рублю в оптимистический сценарий прогнозных значений ПАО «Уралкалий» объясняется тем, что значительная доля опе-

раций компании совершается в иностранной валюте, и именно приток экспортной выручки обуславливает высокие показатели финансовых результатов компании [8]. Но в то же время в результате валютных колебаний у компании могут увеличиться издержки за счет удорожания используемых материалов, ресурсов и услуг (например, транспортные услуги), осуществляемых в иностранной валюте США, могут привести к снижению чистой прибыли ПАО «Уралкалий».

Перечень поставщиков товаров и услуг «Уралкалия» включает в себя ряд ключевых контрагентов, взаимодействие с которыми носит стратегический характер для деятельности группы. Невыполнение такими поставщиками своих договорных обязательств может оказать негативное влияние на результаты деятельности «Уралкалия». Для минимизации данного вида риска ПАО «Уралкалий» необходимо обеспечить наличие альтернативных поставщиков по всем своим потребностям. Что касается поставщиков транспортных услуг, компания «Уралкалий» полностью обеспечена собственным вагонным парком и применяет методы логистической оптимизации при доставке продукции до конечного потребителя, которые постоянно совершенствуются.

Таким образом, прогнозирование основных финансовых показателей фирмы имеет важное значение для определения стратегии дальнейшего развития предприятия, мониторинга рисков компании, внешней среды и своевременного принятия мер по их минимизации и устранению [9].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бланк И. А.* Финансовый менеджмент: учеб. курс. Киев: Ника-Центр, Эльга, 2013. 528 с.
2. *Горбунов В. Л.* Бизнес-планирование с оценкой рисков и эффективности проектов: науч.-практ. пособие. М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2013. 248 с.
3. *Мартякова Е. В., Кочурова И. В.* Хозяйственные риски: оценка и прогнозирование». Донецк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2008. 220 с.
4. *Рубашкин Г. В.* Совершенствование методологии прогнозирования финансовых показателей промышленных предприятий: дис. ... канд. экон. наук. Н. Новгород, 2007. 174 с.
5. Центр раскрытия корпоративной информации. Годовые отчеты и бухгалтерские отчетности ПАО «Уралкалий» за 2009–2014 г. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.edisclosure.ru/portal/event.aspx?EventId=VsmPow5dD0CKsi6g6ky6GQ-B-B> (дата обращения: 24.09.2015).
6. Официальный сайт ПАО «Уралкалий» [Электронный ресурс]. URL: <http://www.uralkali.com/> (дата обращения: 22.09.2015).
7. Прогноз курса доллар-рубли на 15 лет. Прогноз от 24.02.2014 г. М: Агентство прогнозирования экономики [Электронный ресурс]. URL: <http://arecon.ru/> (дата обращения: 20.09.2015).
8. Официальный сайт Министерства финансов РФ [Электронный ресурс]. URL: <http://www.minfin.ru/ru/> (дата обращения: 20.09.2015).
9. Официальный сайт Министерства экономического развития и торговли РФ [Электронный ресурс]. URL: <http://economy.gov.ru/minec/main> (дата обращения: 29.09.2015).

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ИННОВАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РОССИЙСКОЙ ЭКОНОМИКИ

Е. А. Дерунова<sup>1</sup>, А. С. Семенов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

<sup>2</sup>*Высшая школа экономики, Москва, Россия*

E-mail: ea.derunova@yandex.ru

Решение проблемных вопросов экономического развития является драйвером роста и благосостояния стран. Экономическое развитие страны на всех уровнях управления зависит от конкурентных преимуществ промышленного комплекса, и прежде всего сырьевого сектора экономики. В статье приведены методические аспекты теории имитаций и инноваций в рамках эндогенной теории экономического роста для исследования динамики инновационного развития стран с развивающейся и переходной экономикой. В рамках теории обосновано, что для России оптимальной точкой экономического роста является высокотехнологичный сектор, находящийся на стадии инновационного развития. Разработаны модели в рамках теории эндогенного роста, которые являются многосекторным расширением модели Солоу с постоянной нормой сбережения. Главным механизмом, определяющим динамику роста, является переток инвестиций из одного сектора в другой. Изучение динамики модели проводится как аналитически, так и численным моделированием частных случаев, иллюстрирующих различные эффекты. В рамках данной модели показано, что высокие цены на природный ресурс могут стать причиной технологического отставания страны, и «голландская болезнь» может привести к отрицательному воздействию, как на объем выпуска, так и на рост технологической оснащенности экономики.

## MODELING OF INNOVATIVE-TECHNOLOGICAL DEVELOPMENT OF THE RUSSIAN ECONOMY

E. A. Derunova, A. S. Semenov

Addressing the issues of economic development is driving growth and welfare of countries. Economic development of the country at all levels of management depends on the competitive advantages of the industrial complex, and first of all the commodity sector of the economy. This article presents methodological aspects of the theory of imitation and innovation in the framework of endogenous economic growth theory to study the dynamics of innovative development of countries with developing and transitional economies. In the theory it is proved that for Russia the optimal point of economic growth is the high-tech sector that is at the stage of innovation development. The model developed in the framework of endogenous growth theory, which are multi-sector extension of the Solow model with constant saving rate. The main mechanism determining the dynamics of growth, is the flow of investment from one sector to another. The study of the dynamics of the model is carried out both analytically and by numerical simulation of the particular cases that illustrate a variety of effects. In this model, it is shown that the high price of a natural resource can cause the technological backwardness of the country, and the "Dutch disease" can result in a negative impact on both production volume and growth of technology in the economy.

Исследование закономерностей экономического развития, прогнозирование кризисов, изучение их сущностных и временных и географических особенностей относится к актуальным научным проблемам. В со-

временных рыночных условиях российские производители не могут эффективно конкурировать с компаниями как на мировом, так и на внутреннем рынках. Низкая конкурентоспособность промышленных предприятий России обостряется их нестабильным финансовым и организационно-экономическим положением. Повышение конкурентоспособности российских промышленных предприятий является неотъемлемым условием обеспечения и поддержания на необходимом уровне экономической устойчивости и инновационного развития экономики.

Одной из отправных точек теории роста является модель Солоу, увязывающая рост ВВП в экономике с величиной нормы сбережения, при предположении, что все сбережения переходят в инвестиции. В базовой модели отсутствует технологический прогресс, а экономика предполагается однородной, то есть состоящей из одного единственного сектора. Основным результатом модели является доказательство существования стационарного состояния роста, в которое стремится экономика. Темп роста в стационарном состоянии равен темпу естественного роста населения. Параметры экономики в стационарном состоянии зависят от нормы сбережения, производственной функции и темпа роста населения.

Модель Солоу является далеко не полной, и она не учитывает многие важные факторы. Критика модели основывается на том очевидном факте, что в мире не наблюдается равномерного схождения основных параметров экономики (ВВП на душу населения, капиталовооруженность) к общим среднемировым значениям, предсказываемым моделью. В реальности, скорее, имеет место «клубная сходимость», когда схождение наблюдается к различным значениям внутри разных групп стран (например, Евросоюз, «молодые индустриальные страны» Юго-Восточной Азии, нефтедобывающие арабские страны, Восточная Европа).

Кроме того, эмпирическая проверка модели Солоу показала, что экономический рост не может объясняться лишь ростом населения и капиталовооруженности, так как при регрессии роста экономики на рост труда и капитала выявляется дополнительная компонента, так называемый «остаток Солоу». Естественное объяснение «остатка Солоу» – наличие технологического прогресса, который влечет за собой дополнительный рост экономики.

Небольшая модификация модели Солоу позволяет ввести в экономику технический прогресс, растущий с постоянным темпом. В стационарном состоянии темп роста экономики становится равным сумме темпа роста населения и темпа технического прогресса. Это позволяет объяс-

нить различие в темпах роста между разными группами стран, поскольку интенсивность НИОКР в разных регионах мира существенно отличается.

Тем не менее модель Солоу с технологическим прогрессом не учитывает эндогенность технического прогресса и его зависимость от текущего уровня развития страны, то есть удаленности страны от технологической границы. Постоянный темп технического прогресса не может объяснить особенности развития многих стран, например, быстрый рост «новых индустриальных стран» в Юго-Восточной Азии, замедление темпов роста экономики Японии в 1990-х гг., серьезные экономические проблемы стран, проводивших политику импортозамещения [1]. Возможной гипотезой о причине всех вышеописанных явлений является предположение о непостоянном темпе технического прогресса в экономике и его частичной или полной эндогенности.

Еще одним возможным объяснением стабилизации технологического отставания и даже деиндустриализации в ряде стран являются искажения экономики, возникающие из-за увеличения интенсивности разработки исчерпаемого природного ресурса, например нефти или газа. Из-за более высокой рентабельности капитал начинает перетекать из наукоемких отраслей, обеспечивающих рост технологического уровня экономики в целом, в сектор добычи ресурса. Этот эффект может усугубляться тем, что в связи с ростом благосостояния населения, вызванного увеличением выручки от продажи природного ресурса, спрос на неторгуемый товар внутри страны увеличится, цены на него вырастут, и факторы производства будут перетекать также и в сектор неторгуемого товара. Эти два эффекта и представляют собой «голландскую болезнь», результатом которой становится угасание наукоемкого обрабатывающего сектора и усиление зависимости экономики от экзогенной цены на ресурсы [2].

Особенностью данной модели является эндогенность технического прогресса в обрабатывающем секторе. При решении задачи максимизации на период  $t$  константа  $A_t$  предполагается заданной. Однако поскольку в обрабатывающем секторе идет накопление знания и технологий, то  $A_t$  меняется со временем. Эволюция технологического уровня  $A_t$  имеет сложную структуру и зависит от экзогенных и эндогенных факторов.

Мировой экзогенный технологический прогресс задается следующим уравнением:

$$\bar{A}_{t+1} = \bar{A}_t(1 + g),$$

где  $g$  – постоянный темп мирового технологического прогресса. Определяющим фактором эффективности инвестиций в обрабатывающий сектор является уровень развитости страны  $a_t$ . Он может быть определен как от-

ношение технологического уровня страны к мировому технологическому уровню

$$a_t = \frac{A_t}{A_t}$$

По мере развития производства обрабатывающий сектор накапливает знания и технологии (потенциал развития)  $H_t$ . Потенциал развития, накопленный к концу периода  $t$ , равен

$$H_t = (\delta_H + (1 - \delta_H)C(a_t)\sigma_{M,t})H_{t-1}.$$

Первое слагаемое отвечает той части потенциала развития, которая осталась с предыдущего периода, а второе – знания и технологии, приобретенные и освоенные за период  $t$ . Здесь  $\delta_H$  ( $0 \leq \delta_H \leq 1$ ) – доля  $H$ , переходящая с предыдущего периода,  $C(a_t)$  – экзогенно заданная функция, соответствующая уровню образования в стране, а  $\sigma_{M,t} = \frac{K_{M,t}}{K_{V,t} + K_{R,t}}$  – доля капитала в обрабатывающем секторе во всем капитале в период  $t$  (считается, что единственным источником и потребителем технологического прогресса является обрабатывающий сектор). Начальное значение  $H_0$  задается экзогенно.

Имеющийся потенциал развития может быть затрачен как на заимствование и адаптацию новых зарубежных технологий (имитация), так и на проведение собственных НИОКР и их внедрение (инновации). Имитации и инновации вызывают рост технологического уровня  $A_{t+1}$  по сравнению с  $A_t$ . Новое значение  $A_{t+1}$  становится известным на начало периода  $t + 1$ . Динамика технологического уровня удовлетворяет уравнению [3]

$$A_{t+1} = \delta_A A_t + im(a_t)h_{1,t}\bar{A}_t + inn(a_t)h_{2,t}A_t.$$

Коэффициент  $\delta_A$  ( $0 \leq \delta_A \leq 1$ ) соответствует имитациям и инновациям, не выработавшим свой ресурс к предыдущему периоду. Слагаемое  $im(a_t)h_{1,t}\bar{A}_t$  соответствует имитационной, а  $inn(a_t)h_{2,t}A_t$  – инновационной составляющим технологического роста. Переменные  $h_{1,t}$ ,  $h_{2,t} = H_t - h_{1,t}$  соответствуют долям потенциала развития, затрачиваемым на имитации и инновации. Отличительной чертой данной модели обрабатывающего сектора является тот факт, что с ростом технологической вооруженности и уровня развитости страны имитации становятся менее эффективными для экономики, а инновации – более эффективными, то есть функция  $im(a)$  является убывающей, а  $inn(a)$  – возрастающей по  $a$ . Это свойство является основным в работе [1] и подтверждается эмпирическими данными,

согласно которым, по мере развития страны роль внутреннего НИОКР должна усиливаться [1].

Предполагается, что все страны, находящиеся на передовой технологической границе ( $a = 1$ ), имеют чисто инновационный тип развития, то есть  $im(1) = 0$ .

Еще одним естественным ограничением на технологический рост является тот факт, что никакая страна, в том числе и страна-лидер, находящаяся на инновационной стадии, не может «обогнать» мировой технологический прогресс, то есть существует добавочное ограничение

$$A_{t+1} \leq \bar{A}_{t+1} = (1 + g)\bar{A}_t$$

или 
$$a_{t+1} \leq 1.$$

Задача оптимального распределения потенциала развития выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= \delta_A A_t + im(a_t)\bar{A}_t h_{1,t} + inn(a_t)A_t h_{2,t} \rightarrow \max_{h_{1,t}, h_{2,t}} \\ s.t. \quad A_{t+1} &\leq \bar{A}_{t+1} \\ s.t. \quad h_{1,t} + h_{2,t} &= H_t \end{aligned}$$

Нужно отметить, что для решения данной задачи максимизации нужно найти в явном виде функцию  $A_{t+1}(H_t, A_t)$ , то есть решить задачу [4]:

$$\begin{aligned} A_{t+1}^* &= \delta_A A_t + im(a_t)\bar{A}_t h_{1,t} + inn(a_t)A_t h_{2,t} \rightarrow \max_{h_{1,t}, h_{2,t}} \\ s.t. \quad h_{1,t} + h_{2,t} &= H_t \end{aligned}$$

и найти  $A_{t+1}$  по формуле

$$A_{t+1}(H_t, A_t) = \min \{ \bar{A}_{t+1}, A_{t+1}^* \}.$$

Решение максимизационной задачи имеет вид [5]:

$$A_{t+1}^* = \delta A_t + im(a_t)\bar{A}_t H_t, \text{ если } im(a_t)\bar{A}_t \geq inn(a_t)A_t$$

$$A_{t+1}^* = \delta A_t + im(a_t)A_t H_t, \text{ если } im(a_t)\bar{A}_t < inn(a_t)A_t$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-06-00446 а).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polterovich V., Popov V.* Stages of Economic Development Policies and a New World Economic Order. MPRA Paper [Electronic resource]. URL: <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/20055/> (date of reading: 03.09.2015).

2. Young A. Growth without Scale Effects // J. of Polit. Economy. February 1998. № 106 (1). P. 41–63.

3. Derunova E., Semenov A. Study of the Problematic Issues of the Raw Material Orientation of the Economy: The Dutch Disease and its Influence on Innovative Development // World App. Scien. J. 2013. Vol. 25, № 9. P. 1295–1301.

4. Дерунова Е. А. К вопросу об эндогенном экономическом росте как условии и критерии модернизации // Изв. Саратов. гос. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 519–523.

5. Дерунова Е. А., Семенов А. С. Проблемные вопросы и парадоксы экономического роста в свете развития сырьевого сектора российской экономики // Инновационный вестник Регион. 2014. № 4. С. 16–21.

## **О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПО ДВУМ ПОКАЗАТЕЛЯМ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ**

**С. И. Дудов, Ю. А. Макеева**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: dudovsi@info.sgu.ru, julia12mak@yandex.ru

Для прогнозирования экономического процесса, характеризующегося двумя показателями, предлагается решение вспомогательной задачи полиномиального приближения. Показано, что она сводится к решению двух задач чебышевского приближения дискретно заданных функций алгебраическими полиномами, а также может быть сведена к задаче линейного программирования.

## **FORECASTING ECONOMIC PROCESS ON THE TWO INDICES ON THE BASIS OF POLYNOMIAL APPROXIMATION**

**S. I. Dudov, Yu. A. Makeeva**

To predict the economic process, characterized by the two indicators proposed for the solution of the auxiliary problem of polynomial approximation. It is shown that it is reduced to the solution of two problems of Chebyshev approximation with a discrete set of functions by algebraic polynomials and can be reduced to a linear programming problem.

Предположим, исторические данные о двух показателях экономического процесса (например, цены и объемы торгов на рынке ценных бумаг) заданы в виде значений вектор-функции  $f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in R^2$  для  $t$  на сетке  $T = \{t_i\}_{i=1, N}$ , где  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . Нас интересует прогноз показателей  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  для  $t = t_{N+1}$  при  $t_{N+1} > t_N$ .

С этой целью рассмотрим задачу

$$\varphi(A, B) \equiv \max_{i \in [1: N]} \{|f_1(t) - P_n(A, t)| + |f_2(t) - P_n(B, t)|\} \rightarrow \min_{A, B \in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ ,  $B = (b_0, b_1, \dots, b_n) \in R^{n+1}$ ,  $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  – алгебраический полином степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A$ .

Если

$$\varphi(A^*, B^*) = \min_{A, B \in R^{n+1}} \varphi(A, B),$$

то  $P_n(A^*, t_{N+1})$  предлагается взять в качестве прогнозного значения для  $f_1(t_{N+1})$ , а  $P_n(B^*, t_{N+1})$  соответственно для  $f_2(t_{N+2})$ .

Наша цель – показать, что одно из решений задачи (1) можно получить через решение двух задач чебышевского приближения алгебраическим полиномом [1], а также редуцировать ее к задаче линейного программирования.

Нетрудно видеть, что целевую функцию экстремальной задачи (1) можно преобразовать к виду

$$\varphi(A, B) = \max_{i \in [1:N]} \max \left\{ \begin{array}{l} |f_1(t) + f_2(t) - P_n(A + B, t)|, \\ |f_1(t) - f_2(t) - P_n(A - B, t)| \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Рассмотрим две задачи чебышевского приближения

$$\rho_1(A) \equiv \max_{i \in [1:N]} |f_1(t) + f_2(t) - P_n(A, t)| \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \quad (3)$$

$$\rho_2(A) \equiv \max_{i \in [1:N]} |f_1(t) - f_2(t) - P_n(A, t)| \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (4)$$

Каждая из них [1] имеет единственное решение.

Пусть

$$\rho_1 = (A_1^*) = \min_{A \in R^{n+1}} \rho_1(A), \rho_2(A_2^*) = \min_{A \in R^{n+1}} \rho_2(A). \quad (5)$$

Возьмем в качестве

$$A^* = (A_1^* + A_2^*)/2, B^* = (A_1^* - A_2^*)/2. \quad (6)$$

Из (2) и (3)–(5) следует, что для  $\varphi = \min_{A, B \in R^{n+1}} \varphi(A, B)$  выполняется

$$\varphi^* \geq \max\{\rho_1(A_1^*), \rho_2(A_2^*)\}. \quad (7)$$

А из (2), (5) и (6) вытекает

$$\varphi^*(A^*, B^*) = \max\{\rho_1(A_1^*), \rho_2(A_2^*)\}. \quad (8)$$

Из (7)–(8) следует, что  $(A^*, B^*)$  – одно из решений задачи (1).

Таким образом, для того, чтобы получить хотя бы одно решение задачи (1), достаточно решить две задачи чебышевского приближения (3) и (4).

Нетрудно также сделать следующий вывод. Если  $\rho_1(A_1^*) = \rho_2(A_2^*)$ , то решение задачи (1) является единственным. Если же, например,  $\rho_1(A_1^*) > \rho_2(A_2^*)$ , то вектор  $A_1^*$  определяется единственным образом через решение задачи (3). А вектор коэффициентов  $A_2^*$  можно взять произвольно из множества  $\{A : \rho_2(A) \leq \rho_1(A_1^*)\}$ . Такие пары  $(A_1^*, A_2^*)$  через соотношения (6) дают нам решения задачи (1). Теперь покажем, как задача (1) сводится к задаче линейного программирования.

Введем обозначения:  $x = (a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n) \in R^{2n+2}$ , для  $i = \overline{1, N}$ :  
 $C_i = (-1, -t_i^n, 0, \dots, 0) \in R^{2n+2}$ ,  $c_i = f_1(t_i) + f_2(t_i)C_{i+N} = (1, t_i, \dots, t_i^n, 0, \dots, 0) \in R^{2n+2}$ ,

$$c_{i+N} = -f_1(t_i) - f_2(t_i),$$

$$C_{i+2N} = (0, \dots, 0, -1, -t_i, \dots, -t_i^n) \in R^{2n+2}, c_{i+2N} = f_1(t_i) - f_2(t_i),$$

$$C_{i+3N} = (0, \dots, 0, 1, t_i, \dots, t_i^n) \in R^{2n+2}, c_{i+3N} = -f_1(t_i) + f_2(t_i).$$

Тогда задачу (1) можно записать в виде

$$\max_{i=[1:4N]} \{ \langle C_i, x \rangle + c_i \} \rightarrow \max_{x \in R^{2n+2}}. \quad (9)$$

Используя известный прием [2, с. 243], легко показать, что справедлива

**Теорема.** Задача (1) эквивалентна задаче линейного программирования

$$\begin{cases} x_{2n+3} \rightarrow \min, \\ x_{2n+3} - \langle C_i, x \rangle - c_i \geq 0, i = \overline{1, 4N} \end{cases} \quad (10)$$

При этом, если вектор  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2n+2}^*, x_{2n+3}^*) \in R^{2n+3}$  является одним из решений задачи (10), то вектор  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2n+2}^*) \in R^{2n+2}$  является решением задачи (9).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238 и № 13-01-00175).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
2. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1964. 346 с.

## **ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ КУРСОВ ВАЛЮТ**

**Ж. Е. Жуматаева, А. М. Арыкбай, О. Д. Мажитов**

*Филиал «Восход» МАИ, Байконур, Республика Казахстан*

E-mail: zhanat\_kyz@mail.ru

Данная статья посвящена применению нейросетевых технологий для прогнозирования курса валют. В настоящее время с учетом особого статуса города Байконур и постоянными колебаниями курсов российской и казахстанской национальных валют проблема прогнозирования курса валют является особо актуальной. Применение нейросетевых технологий в различных областях науки и техники имеет достаточно большие возможности и является важным вкладом в экономику и промышленность. В связи с этим в данной работе используются нейронные сети для прогнозирования.

## **APPLICATION OF NEURAL NETWORKS FOR THE PREDICTION OF CURRENCY EXCHANGE RATES**

**Zh. E. Zhumatayeva, A. M. Arykbay, O. D. Mazhitov**

This article describes the use of neural network techniques to predict exchange rates. At the present time, taking into account the special status of the city of Baikonur and constant fluctuations of Russian and Kazakh national currencies the problem of forecasting exchange rates is particularly relevant. The application of neural network technologies in various fields of science and technology has a big enough opportunity and an important contribution to the economy and industry. In this regard, in this paper uses a neural network to predict.

Ракетно-космический комплекс «Байконур», в состав которого входит одноимённый город, является ярким примером интеграционных процессов между Российской Федерацией и Республикой Казахстан (РК) в постсоветский период.

Город Байконур является административно-территориальной единицей Республики Казахстан, функционирующей в условиях аренды. На период аренды комплекса «Байконур» город Байконур в отношениях с Российской Федерацией наделяется статусом, соответствующим городу федерального значения Российской Федерации, с особым режимом безопасного функционирования объектов, предприятий и организаций, а также проживания граждан.

Байконур, став общим домом для граждан обоих суверенных государств, численность которых составляет порядка 73 тысяч человек, представляет собой и уникальный пример одновременного обращения двух национальных валют – рубль и тенге.

Так, в соответствии с Соглашением между РФ и РК о статусе г. Байконур от 23 декабря 1995 г. платежным средством на территории ком-

плекса «Байконур» являются национальные валюты Республики Казахстан и Российской Федерации. Все виды платежей между юридическими и физическими лицами на территории комплекса «Байконур» осуществляются в казахстанских тенге и (или) в российских рублях. При этом право выбора валюты принадлежит плательщику».

Рубль принят как основная расчётная валюта непосредственно в городе, тенге – на территории Кызылординской области Республики Казахстан, на которой расположен Байконур.

Надо отметить, что основная трудозанятость населения, в том числе и граждан РК, обеспечивается за счёт финансовых средств предприятий, входящих в государственную корпорацию «Роскосмос», и учреждений городской Администрации РФ, т.е. получающих доход в рублях.

При этом в последние годы заметно увеличилось количество коммерческих предприятий РК, поставляющих в город товары народного потребления и сельскохозяйственную продукцию, прослеживается рост количества учреждений РК (на примере выведенных из аренды 6 средних школ и 2 детских садов, планируемому к открытию нового родильного дома, отдела образования и т.п.), осуществляющих расчёты в тенге.

В свою очередь, банковская сфера Байконура представлена соответствующими учреждениями обоих государств, активно кредитующими городское население и предпринимателей.

Указанные обстоятельства обуславливают повышенную активность обменных пунктов и соответственно риски для жителей города и предпринимателей в случае резких колебаний курсов валют.

В частности, удешевление стоимости рубля к тенге на рубеже осенне-зимнего периода 2014 г., вызвало снижение покупательской способности населения, получающего доход в рублях. По данным «Народного банка» Республики Казахстан г. Байконур, в тот период резко увеличилось количество обращений на реструктуризацию кредитов, как от физических, так и юридических лиц, заключивших договора на поставку услуг в рублях и получивших на их реализацию займы в тенге [1].

И это только часть рисков, с которыми ежедневно сталкиваются байконурцы вследствие отсутствия просчитанной политики курсов валют.

Данная ситуация имела негативный резонанс в социальных сетях города Байконур, где пользователи делились между собой ценами на продукты в разных торговых точках города, обсуждали недобросовестных предпринимателей, завышающих цены.

Но здесь надо отметить, что и владельцы пунктов обменов валют, как сообщалось в социальных сетях, порой устанавливали завышенные обменные курсы.

В этой связи видится целесообразным и крайне актуальным прогнозирование курса валют с учетом факторов, оказывающих на него влияние.

В настоящее время, по оценкам специалистов, ожидается значительный технологический рост в области проектирования нейронных сетей. За последние годы открыто уже немало возможностей нейронных сетей, а работы в данной области становятся важным вкладом в промышленность, науку и технологии, имеют большое экономическое значение [2].

Поэтому крайне целесообразно было бы применение нейронных сетей для прогнозирования курсов валют.

Прогнозирование – важнейший элемент современных информационных технологий принятия решений в управлении, а также одна из самых востребованных, но при этом одна из самых сложных задач интеллектуального анализа данных.

Типовой алгоритм прогнозирования с использованием нейронных сетей включает следующие этапы:

- 1) отбор значащих факторов,
- 2) предобработка,
- 3) построение модели (выбор структуры сети, обучение и т.д.),
- 4) результат [2].

На первом этапе выделяется максимальное число из значащих, влияющих на прогноз, факторов. К факторам, влияющим на курс рубль/тенге, относятся мировые цены на нефть, санкции, принимаемые Западом в отношении России, политика Центрального банка РФ и Национального банка РК, проводимая в отношении поддержания курсов национальных валют своих стран, курсы доллара в обеих странах, время отпусков, человеческий фактор.

На втором этапе устраняются несущественные и не влияющие на прогноз данные. При необходимости также восстанавливается пропущенная информация, устраняются аномальные выбросы, убираются высокочастотные шумы. Из выборки, содержащей данных о курсе рубль/тенге будут устранены аномальные выбросы (резко отличающиеся от остальных), более тщательно проанализировано влияние факторов на курс валют.

На третьем этапе выбирается наиболее подходящая парадигма и структура нейронной сети, а также алгоритм и параметры ее обучения.

На последнем этапе осуществляется собственно прогнозирование, то есть осуществляются эксперименты по схеме, аналогичной той, при которой производилось обучение.

В качестве исходной выборки будет принята информация о курсах валют рубль, тенге и доллар США за один год (с 1 ноября 2014 г. по 1 ноября 2015 г.).

Исходными данными для экспериментов будут служить ежедневные изменения курса рубль/тенге, рубль/доллар США, тенге/доллар США.

Очевидно, что существуют ограничения и недостатки, связанные с использованием нейронных сетей для прогнозирования. Описывать их в данной работе не имеет смысла, поскольку они достаточно подробно приведены в специальной литературе, посвященной нейронным сетям [3]. Одновременно с этим нельзя будет полностью полагаться на данные, получаемые с помощью разрабатываемой системы прогнозирования, поскольку ежедневно в мире происходит много политических и экономических событий, учесть которые в системе невозможно. Однако применение системы прогнозирования на основе нейронных сетей довольно актуально и имеет перспективу развития.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Официальный сайт Народного банка Республики Казахстан [Электронный ресурс]. URL: <http://www.halykbank.kz> (дата обращения: 10.10.2015).
2. *Круг П. Г.* Нейронные сети и нейрокомпьютеры: учеб. пособие по курсу «Микропроцессоры». М.: Изд-во МЭИ, 2002. 176 с.
3. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации / пер. с польск. И. Д. Рудинского. М.: Финансы и статистика, 2002. 344 с.

## **СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЕТЕНТНОСТНЫХ КРИТЕРИЕВ РАБОТНИКОВ БАНКОВ**

**Э. С. Звягина, С. А. Смирнова**

*Саратовский социально-экономический институт (филиал)  
Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*  
E-mail: mtindova@mail.ru, mtindova@mail.ru

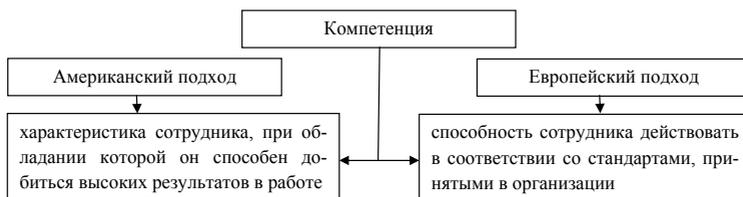
В работе на основе первичного анализа базы данных был определен «портрет» среднестатистического работника банка, выявлены основные требования к его подготовке. Проведен корреляционно-регрессионный анализ влияния различных компетентностных критериев на уровень заработной платы работников банков. На основе регрессионного анализа изучены отличия в профессиональных требованиях для руководящих должностей, а также отдельно изучены требования к работникам в банках с государственным участием.

## STATISTICAL RESEARCH OF THE COMPETENCE CRITERIA FOR EMPLOYEES OF BANKS

Je. S. Zvjagina, S. A. Smirnova

Annotation. In this paper, based on the initial analysis database has been defined a "portrait" of the average bank employee, identified the basic requirements for its preparation. Conducted correlation and regression analysis of the influence of various competency criteria on wages of employees of banks. On the basis of regression Ana Lisa studied the differences in the requirements for professional leadership positions, as well as separately investigated requirements for employees in banks with state participation.

Последнее время работодатели при наборе сотрудников постоянно повышают планку тех навыков, которыми должен обладать персонал данного банка, т.е. используют так называемый компетентностный подход. Имеется множество определений термина «компетенция» [1], обобщая которые можно выделить два подхода (рисунок).



Определение термина «компетенция»

Однако не все критерии способны реально повлиять на размер будущей заработной платы работника. Поэтому целью данной работы стала попытка проанализировать компетентностные критерии и выявить те из них, которые являются действительно необходимыми, а которые служат для «поддержания престижа» банка.

Немаловажным вопросом при изучении данной проблемы является наличие источников статистических данных [2]. Была составлена база данных на основе анализа рынка спроса работников различных специальностей для банков с государственным участием и частных банков в г. Саратове [3].

Анализ рынка показал, что основными требованиями, которые предъявляются к соискателям, являются [4]: образование, опыт работы, длительность рабочего дня (полный или частичная занятость), наличие сертификата, подтверждающего навыки владения персональным компьютером, коммуникативные навыки, занимаемая должность. В качестве

критерия влияния данных факторов нами была рассмотрена величина заработной платы.

При составлении базы данных в Excel данные переменные были описаны следующим образом:  $y$  – *Wage* (руб.);  $x_1$  – *Education*;  $x_2$  – *Experience*;  $x_3$  – *Working\_Day* (1 – полный день, 0 – частичная занятость);  $x_4$  – *Computer* (1 – есть, 0 – нет);  $x_5$  – *Communication*;  $x_6$  – *Position* (1 – управляющие, 0 – среднее звено).

База данных составила порядка 350 записей. Для проведения эконометрического анализа база данных была поделена на две части, большая из которых (70% основной входной информации) использовалась для построения моделей, меньшая – для их тестирования.

Проводя анализ базы данных в целом и строя для этого описательные статистики (табл. 1), можно отметить, что средний банковский работник имеет высшее образование, опыт его работы составляет 1 год, он работает полный рабочий день, свободно владеет компьютером и обладает навыками коммуникабельности.

Таблица 1

Описательная статистика в Gretl

Переменная	Среднее	Медиана	Минимум	Максимум	Ст. откл.	Вариация	Асимметрия	Экссесс
$y$	22796,3	20000,0	12000,0	54000,0	9980,6	0,437	1,819	2,639
$x_1$	0,66470	1,00000	0,000000	1,00000	0,7035	0,978	-0,058	-1,996
$x_2$	1,03676	0,50000	0,000000	6,00000	1,3308	1,283	1,489	2,355
$x_3$	0,76470	1,00000	0,000000	1,00000	0,4273	0,558	-1,248	-0,442
$x_4$	0,57352	1,00000	0,000000	1,00000	0,4982	0,868	-0,297	-1,911
$x_5$	0,79411	1,00000	0,000000	1,00000	0,4073	0,512	-1,454	0,116
$x_6$	0,13235	0,00000	0,000000	1,00000	0,3413	2,579	2,169	2,708

Кроме того, руководящая должность предполагает наличие специализированного высшего образования (экономического) [5].

Необходимо отметить, что заработная плата банковского работника со специальным высшем образованием (экономическим), с опытом работы около 6 лет, работающего полный рабочий день, обладающего коммуникативными навыками, свободно владеющего ПК, занимающего руководящую должность, будет составлять 54000 руб.

При проведении корреляционного анализа связи переменны было отмечено, что наиболее значимыми переменными, которыми определя-

ются уровень заработной платы, являются опыт работы и образование (табл. 2).

Отметим, что компьютерная грамотность и коммуникабельность не требуются для руководящих работников, о чём свидетельствуют отрицательные значения коэффициентов корреляции между  $x_6$  и  $x_4$ ,  $x_5$ .

Проведем регрессионный анализ и построим уравнение линейной регрессии:

$$\hat{y} = 9312,58 + 1726,47x_1 + 1282,42x_2 + 3691,17x_3 + 1674,61x_4 + 6625,22x_5 + 16783,5x_6; \quad R^2 = 0,71. \quad (1)$$

(3,14)      (0,93)      (1,73)      (1,72)      (0,98)      (3,24)

(6,34)

Таблица 2

#### Корреляционная матрица в Gretl

Показатели	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>
y	1,0000	0,361	0,363	-0,182	-0,130	0,292	0,523
x <sub>1</sub>		1,000	0,356	0,091	-0,206	0,432	0,659
x <sub>2</sub>			1,000	-0,197	-0,196	0,216	0,305
x <sub>3</sub>				1,000	-0,071	-0,014	0,024
x <sub>4</sub>					1,000	-0,015	0,177
x <sub>5</sub>						1,000	0,703
x <sub>6</sub>							1,0000

Критерий Фишера  $F_{(6;293)} = 15,78$  превышает табличное значение ( $F_{\text{табл}(0,05;6;293)} = 2,12$ ), что свидетельствует о значимости уравнения в целом. Значимым, как следует из уравнения (1), является свободный член и коэффициент регрессии перед переменными  $x_5$  и  $x_6$  на 10%-ном уровне, так как превышают  $t_{\text{табл}} = 2,59$ .

Также следует отметить, что наличие высшего образования увеличивает зарплату на 1726,47 руб.; увеличение опыта работы на 1 год увеличивает зарплату на 1282,42 руб.; наличие компьютерных сертификатов – на 1674,61 руб.; руководящая должность – на 16783,5 руб.

Учитывая тот факт, что одним из требований к руководящим должностям является наличие специального (экономического) образования, нами была построена модель, разделяющая образование на высшее и выс-

шее экономическое:

$$\hat{y} = 905,5 + 2795,9x_1 + 1209,15x_2 + 33379,62x_3 + 17604,52x_4 + 6632,47x_5 + 13452,7x_6. \quad (2)$$

(3,10)    (1,51)            (1,66)            (1,58)            (1,05)            (3,28)

(3,76)

В данной модели значимыми переменными являются занимаемая должность и коммуникативность, остальные – незначимые (по  $t$ -критерию Стьюдента). Проверяя по  $F$ -критерию Фишера гипотезу о значимости коэффициента детерминации, а значит о значимости модели в целом, можно увидеть, что модель значима и что она учитывает около 72% факторов  $R^2 = 0,72$ , которые определяют уровень заработной платы работников банковской сферы. Данное значение несущественно больше, чем в первой модели, и, согласно теории составления множественных регрессий, свидетельствует об отсутствии необходимости выделять экономическое образование в отдельную переменную [6, 7].

Если рассмотреть только банки с государственным участием, то модель будет иметь несколько другой вид:

$$\hat{y} = 5484,18 + 3557,1x_1 + 1211,2x_2 + 1824,54x_3 + 4127,21x_4 + 7600,42x_5 + 18513,0x_6; \quad R^2 = 0,80. \quad (3)$$

(2,31)    (2,38)            (2,83)            (1,09)            (3,13)            (4,77)

(9,5)

Критерий Фишера  $F_{(6;203)} = 35,71$  превышает табличное значение ( $F_{\text{табл}(0,05;6;203)} = 2,14$ ), что свидетельствует о значимости уравнения в целом. Значимым, как следует из уравнения (3), не является коэффициент регрессии перед переменной  $x_3$  на 10%-ном уровне, так как не превышают  $t_{\text{табл}} = 2,6$ .

Наличие высшего образования увеличивает зарплату на 3557,08 руб. (по сравнению с предыдущим 1726,47 руб., т.е. влияние образования на уровень зарплаты для банков с государственным участием в 2 раза сильнее); увеличение опыта работы на 1 г. увеличивает зарплату на 1211,2 руб.; наличие компьютерных сертификатов – на 4127,21 руб. (по сравнению с предыдущим значением 1674,61 руб., т.е. в банках с государственным участием компьютерная грамотность ценится в 2,4 раза больше); руководящая должность – на 18513 руб.

В качестве примера работы нашей модели оценим уровень зарплаты, на который может претендовать выпускник ССЭИ, имеющий высшее

экономическое образование, а также обладающий сертификатом, который подтверждает навыки владения ПК, и коммуникативными навыками, но не имеющий опыта работы.

Исходя из модели 1 и учитывая, что выпускник будет работать полный рабочий день, зарплата составит 23029,95 руб., при частичной занятости – 19338,78 руб. При работе модели 3, которая рассматривает только банки с государственным участием, этот уровень составит 17109,25 руб. при полной занятости и 15284,71 руб. при частичной.

В качестве заключения можно отметить, что сила влияния компетентностных критериев определяется формой собственности банков (государственной или частной), с учетом того, что влияние «специального» экономического образования несущественно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Носов В. И., Носов В. В.* Экономический механизм управления : учеб. пособие. Саратов, 2000. 80 с.
2. *Цытин А. П.* Качество официальных статистических материалов // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 1. С. 88–93.
3. *Тиндова М. Г.* Предварительная кластеризация многомерных объектов в интеллектуальном анализе данных // Вестн. Саратов. гос. соц.-эконом. ун-та. 2008. № 4. С. 137–138.
4. Саратов бизнес консалтинг [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sarbc.ru> (дата обращения: 11.09.2015).
5. *Носов В. В.* Организационно-экономический механизм устойчивого развития сельскохозяйственного производства (теория и практика). Саратов, 2005. 236 с.
6. *Тиндова М. Г.* Многомерный статистический анализ // Вестн. Саратов. гос. соц.-экон. ун-та. 2011. № 1. С. 98–101.
7. Статистические методы анализа социально-экономического развития административно-территориальных образований / В. А. Прокофьев, В. А. Динес, Н. Б. Телятников, В. В. Носов [и др.]. Саратов, 2008. 288 с.

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПЕРЕВОЗОК НЕСКОЛЬКИМИ ВИДАМИ ТРАНСПОРТА СВЕДЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ О ПОТОКЕ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ**

**А. Д. Иванова**

*Самарский государственный университет, Россия*

E-mail: [hudoj-nik@mail.ru](mailto:hudoj-nik@mail.ru)

В статье рассматривается задача организации перевозок на транспортной сети несколькими видами транспорта. Предполагается, что вид используемого транспорта может меняться в промежуточных узлах маршрута. Приводится метод ее решения, основанный на сведении к эквивалентной задаче о потоке минимальной стоимости на специальном образом построенном графе, названном вспомогательным. Описывается метод построения такого графа. Для отыскания потока минимальной стоимости предлагается использовать алгоритм Басакера–Гоуэна.

# **SOLVING THE PROBLEM OF TRANSPORT PLANNING IN SEVERAL TYPES OF TRANSPORT BY REDUCING TO MINIMAL-COST FLOW PROBLEM**

**A. D. Ivanova**

The article considers the problem of transport planning at a flow network in several types of transport. It is assumed that the type of transport used can be changed in transient vertices of a path. We present the method for its decision based on reduction to an equivalent in the form of minimum-cost flow problem at specially way modeling graph, called auxiliary. The article also describes the method of constructing this graph. It is suggested to use Busacker-Gowen algorithm in order to find a minimal-cost flow.

Задача планирования перевозок на транспортной сети несколькими видами транспорта предполагает возможность выбора транспорта для каждого маршрута перевозки товара от конкретного источника к определенному потребителю и его смены в процессе осуществления перевозки, а также учет связанных с этим издержек, что отличает её от известной в литературе трипланарной транспортной задачи [1]. Такая постановка задачи описывает реальную ситуацию, возникающую на производстве, когда из-за особенностей транспортной инфраструктуры невозможно (или невыгодно) доставить товар потребителю одним видом транспорта. Количество различных вариантов организации перевозок затрудняет получение оптимального плана эмпирическим путем или с помощью экспертных оценок. Это обуславливает необходимость применения математических моделей, методов и вычислительной техники для ее решения.

## **Постановка задачи**

Пусть имеется  $n$  продавцов однородного товара,  $m$  потребителей этого товара и  $K$  видов транспорта, с помощью которого товар доставляется от продавцов к потребителям. Запас  $i$ -го продавца равен  $a_i$ . Спрос  $j$ -го потребителя составляет  $b_j$ . Продавцы и потребители связаны транспортной сетью с промежуточными узлами  $l$ , в которых может происходить выбор и смена вида транспорта, используемого для перевозки, причем в каждом конкретном узле могут быть доступны не все виды транспорта. Так, на графе (рис. 1) из узла  $i = 2$  в узел  $l = 2$  можно переместиться только первым типом транспорта, а из узла  $l = 4$  в узел  $l = 5$  – только вторым. Здесь сплошными линиями обозначены коммуникации, на которых доступен первый тип транспорта, пунктирными – коммуникации, на которых доступен второй тип транспорта.

Для каждой дуги  $(h, q)$  и каждого вида транспорта  $k$  задан тариф  $c_{hqk}$  на перевозку товара по этой дуге транспортом  $k$ . Смена транспорта также

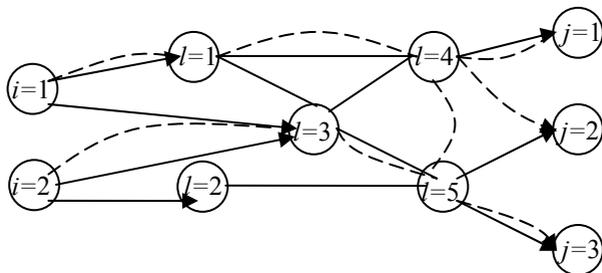


Рис. 1. Транспортная сеть с возможностью изменения вида транспорта:  $l$  – промежуточные пункты транспортной сети,  $i$  – продавцы,  $j$  – покупатели

связана с дополнительными затратами: для каждого узла  $l$  и каждой пары  $(k, p)$  видов транспорта обозначим эти затраты  $d_{lkp}$ .

Задача заключается в отыскании такого плана перевозок, который минимизирует суммарные затраты, обеспечивает спрос потребителей и баланс запасов и вывоза для продавцов.

### Построение вспомогательного графа

Для решения поставленной задачи сведем ее к задаче о потоке минимальной стоимости [2] на специальном образом построенном вспомогательном графе. Для каждого из  $K$  видов транспорта составим отдельный транспортный граф (рис. 2). Будем говорить, что граф для  $k$ -го

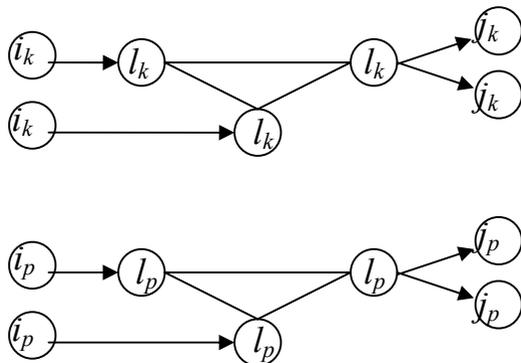


Рис. 2. Графы для двух видов транспорта

вида транспорта имеет уровень  $k$ . Для наглядности на рис. 2 показаны графы для двух типов транспорта  $k$  и  $p \neq k$ . В общем случае получим  $K$  таких графов, по количеству видов транспорта. Следует оговорить, что вершины  $l_k$  и  $l_p$ , так же как и вершины  $i_k$  и  $i_p$ ,  $j_k$  и  $j_p$ , географически являются одними и теми же пунктами, а разные графы отражают только возможность перевозки различными видами транспорта  $k$  и  $p$ .

Построим такие графы для каждого из  $K$  видов транспорта. Смена транспорта  $k$  на какой-либо другой вид транспорта  $p \neq k$  сопряжена с затратами  $d_{l_{kp}}$ . Для каждой вершин  $l$ , где возможна смена транспорта  $k$  на  $p$ , добавим дополнительную дугу, соединяющую эту вершину графа уровня  $k$  с аналогичной вершиной графа уровня  $p$ .

Таким образом, если общее количество промежуточных вершин транспортной сети в исходной задаче составляет  $L = L - m - n$ , то получим граф с  $K \cdot L$  вершинами, где  $K$  – количество различных видов транспорта. Далее присоединим к получившемуся графу  $n$  вершин, соответствующих продавцам  $i$ , и  $m$  вершин, соответствующих покупателям  $j$  (рис. 3). Тогда получаем граф, состоящий из  $(K \cdot L + m + n) = \bar{L}$  вершин.

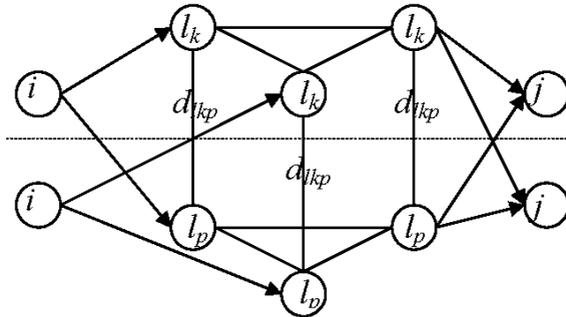


Рис. 3. Вспомогательный граф для двух видов транспорта

При этом следует отметить, что на пропускные способности дуг, которые ведут от продавцов к промежуточным вершинам, нужно наложить ограничения вида (1), которые означают, что нельзя вывести больше товара, чем есть у продавца.

$$\sum_{l=1}^{\bar{L}} x_{il} \leq a_i, \forall i \in I. \quad (1)$$

Аналогичные ограничения накладываются на те дуги, которые соединяют промежуточные пункты с потребителями. Так как задача строится на графе, необходимо ввести условие баланса: для промежуточных вершин сумма всех входящих в них потоков должна быть равна сумме выходящих из них потоков [3]. Но для продавцов и потребителей сохраняется условия полного насыщения спроса и вывоза всего объема товаров. Таким образом, условия задачи могут быть записаны в виде (2):

$$\sum_h x_{lh} - \sum_q x_{lq} = \begin{cases} a_i, l \in I, \\ 0, l \notin I, J, \quad l = \overline{1, l}, \\ b_j, l \in J, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{hq} \geq 0.$$

Ко всем продавцам искусственно присоединяется источник  $S$ , причем цены на транспортировку из источника к продавцам будут нулевыми, а пропускные способности дуг равны  $a_i$ . Аналогично вводится сток  $T$ , который соединён со всеми покупателями, транспортные тарифы здесь опять же равны нулю, а пропускные способности дуг равны  $b_j$ . Пропускные способности всех остальных дуг равны 0. Веса дуг для графов отдельных уровней равны транспортным тарифам  $c_{hqq}$ . Остальным дополнительным дугам придаются веса  $d_{lkp}$ , равные затратам на смену вида транспорта в узле. Исходная задача эквивалентна задаче о потоке минимальной стоимости заданной величины из фиктивного источника  $S$  в фиктивный сток  $T$  на построенном графе.

### Задача о потоке минимальной стоимости

Необходимо найти поток из источника  $S$  в сток  $T$ , имеющий заданную величину  $v$  и обладающий минимальной стоимостью. Тогда ограничения на пропускные способности будут иметь только дуги, которые идут от источника к продавцам и от покупателей к стоку, т.е. пропускные способности дуг из источника  $s$  к  $i$ -му продавцу равны его запасу  $a_i$ , а пропускная способность дуги от  $j$ -го потребителя к стоку  $t$  равна его спросу  $b_j$ . Для всех остальных дуг, соединяющих промежуточные вершины между собой и с продавцами и потребителями, пропускные способности будут бесконечны, как указано в формулах (3)–(5):

$$e_{si} = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$e_{jt} = b_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$e_{qh} = \infty, \quad q \neq s, \quad h \neq t. \quad (5)$$

Формально задача ставится следующим образом (формула 6):

$$\begin{aligned} & \sum_h \sum_q c_{hq} x_{hq} \rightarrow \min, \\ & \sum_h x_{hl} - \sum_q x_{lq} = \begin{cases} -v, l = s, \\ 0, l \neq s, t, \\ v, l = t, \end{cases} \quad l = \overline{1, L}, \\ & 0 \leq x_{hq} \leq hq. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом подразумевается, что величина  $v$  не превышает величины максимального потока, иначе задача не имеет решения [4]. Будем полагать величину потока равной

$$v = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j. \quad (7)$$

Задача планирования перевозок несколькими видами транспорта, приведенная к виду задачи о потоке минимальной стоимости, строится на графе (рис. 4).

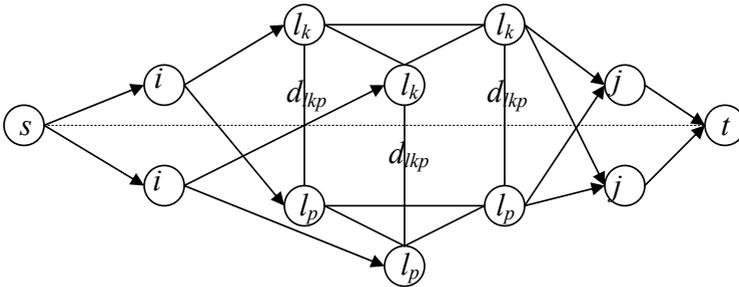


Рис. 4. Задача о потоке минимальной стоимости

### Заключение

Таким образом, в работе продемонстрирована возможность решения точными методами задачи планирования перевозок несколькими видами транспорта, и показан способ решения данной задачи – преобразование её к задаче о потоке заданной величины минимальной стоимости.

Эквивалентную задачу о потоке минимальной стоимости рекомендуется решать алгоритмом Басакера–Гоуэна.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириченко И. О., Рискин Г. Л.* Многоиндексные задачи линейного программирования (теория, методы, приложения). М.: Радио и связь, 1982. 240 с.
2. *Гончаров Е. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В.* Исследование операций. Примеры и задачи: учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2005. 78 с.
3. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 384 с.
4. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 277 с.

## **РАЗРАБОТКА БИБЛИОТЕКИ ПОДПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ЯЗЫКЕ R**

**А. А. Казеева, Д. И. Бойцов**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*  
E-mail: [kryptoenergon@gmail.com](mailto:kryptoenergon@gmail.com)

В данной работе описаны методы формосохраняющего динамического программирования и их реализация с помощью языка R.

## **ON THE DEVELOPMENT OF THE SOFTWARE FOR SOLVING THE PROBLEMS OF SHAPE-PRESERVING DYNAMIC PROGRAMMING USING R**

**A. A. Kazeeva, D. I. Boitsov**

In this paper we describe methods of shape-preserving dynamic programming and their implementation using the language R.

### **1. Итерация целевой функции и метод Ховарда**

Решение многих задач динамического программирования основано на уравнении Беллмана, имеющего вид

$$V(x_t) = \max_{y_t \in D(x_t)} (u(x_t, y_t) + \beta V(x_{t+1})),$$

где  $V(x_t)$  – функция выигрыша в момент  $0 \leq t \leq T$  состояния  $x_t$ , а значение состояния  $x_{t+1}$  в следующий момент времени вычисляется по закону:  $x_{t+1} = h(x_t, y_t)$ .  $D(x_t)$  есть допустимое множество всех управлений в состоянии  $x_t$ ,  $u(x_t, y_t)$  – функция полезности в момент  $t$ .

В простейшем случае решение задачи может быть выражено в следующем алгоритме:

- сделать предположение о функциональной форме функции выигрыша  $V_0(x_t)$ ;
- начать процесс итерации с функцией, используя уравнение Беллмана;
- если  $V_{i+1}(x_t) = V_i(x_t)$ , тогда неподвижная точка найдена и задача решена, в противном случае вернуться к шагу 2 и продолжать процесс.

Таким образом, решение уравнение Беллмана сводится к поиску неподвижной точки уравнения или оператора  $T$ :  $V_{i+1} = TV_i$ , где  $T$  – обобщение набора операций в уравнении Беллмана.

Теорема Банаха о неподвижной точке гарантирует существование и единственность решения для  $T$ , поэтому для решения уравнения достаточно итерировать  $T$  до тех пор, пока разность между  $V_{i+1}$  и  $V_i$  не станет достаточно малой.

Сформулируем алгоритм:

- выбираются узлы  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ;
- формулируется предположение для функциональной формы  $V_0(x)$ , выбирается критерий остановки алгоритма  $\varepsilon > 0$ ;
- для каждого  $x_l \in X, l = 1, \dots, N$ , вычислить

$$V_{i+1}(x_l) = \max_{x' \in X} u(y(x_l, x'), x_l) + \beta V_i(x');$$

- если  $|V_{i+1}(x) - V_i(x)| < \varepsilon$  переход к следующему шагу, иначе – вернуться к предыдущему шагу;
- вычислить финальное решение как  $y^*(x) = y(x, x')$  и  $V^*(x) = \frac{u(y^*(x), x)}{1 - \beta}$ .

Обычно предполагают, что функция полезности имеет вид  $u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$ , а  $k' = k^\alpha - c + (1 - \delta)k$ , где  $\alpha, \delta, \sigma, \beta$  есть некоторые параметры модели,  $k$  – величина некоторого капитала. Тогда уравнение Беллмана можно переписать в форме:

$$V(k) = \max_{(1-\delta)k \leq k' \leq k^\alpha + (1-\delta)k} \left( \frac{(k^\alpha + (1-\delta)k - k')^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \beta V(k') \right).$$

Далее определим начальную функцию  $V_0(k)$  в виде набора из  $N$  чисел, сопоставляемых  $k_l$ .

Для каждого  $l = 1, \dots, N$  вычисляем все допустимые значения функции выигрыша с помощью уравнения:

$$V_{l,h} = \frac{(k^\alpha + (1 - \delta)k_l - k'_h)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} + \beta V(k_h).$$

На потребление накладываются некоторые очевидные условия: объемы потребления должны быть положительными и меньше имеющихся средств (величин капитала). Для того чтобы  $k'$  могло удовлетворять условиям  $0 \leq k' \leq k^\alpha + (1 - \alpha)k$ ,  $h$  также должно лежать в определенных пределах.

Для реализации использовались следующие параметры:  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.95$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\sigma = 1.5$ , множество  $k_l$  состоит из 1000 точек, расположенных между  $(1 - \Delta_k)k^*$  и  $(1 + \Delta_k)k^*$ , где  $k^*$  – устойчивое состояние, а  $\Delta_k = 0.9$ .

Данный алгоритм был реализован в среде RStudio на языке R.

Характерной особенностью R является векторизация вычислений. Векторизация представляет собой один из способов выполнения параллельных вычислений, при котором программа определенным образом модифицируется для выполнения нескольких однотипных операций одновременно. Очевидно, что такой подход потенциально может привести к значительному ускорению однотипных вычислений над большими массивами данных. Примером векторизации вычислений является применение функции `apply`, `sapply`, `mapply`.

Однако для данного алгоритма (итерация функции выигрыша) время выполнения программы без использования векторизации составило 24.48 секунды, а с векторизацией – 32.50 секунды.

Также был реализован алгоритм итерации функции выигрыша с интерполяцией.

Задачу итерации целевой функции можно модифицировать следующим образом: уменьшить число точек параметров состояния ( $x$ ) и увеличить число точек, соответствующих управляющим переменным ( $y$ ). Тогда возможна ситуация, когда параметр состояния в следующий момент времени не попадает в полученную сетку. Значение функции выигрыша неизвестно в этой точке, и для аппроксимации значения функции применяют методы интерполяции.

Алгоритмы, основанные на итерации целевой функции, просты в реализации, однако есть и другие методы. Так, метод Ховарда итерирует функцию правил (policy function).

Для алгоритма Ховарда время выполнения программы без использования векторизации составило 11.07 секунды, а с векторизацией –

31.52 секунды. Как видно, векторизация позволила существенно ускорить работу алгоритма.

## 2. Параметрическое динамическое программирование

При решении задач динамического программирования часто применяют алгоритм, использующий аппроксимацию функции выигрыша элементами некоторого параметрического семейства функций.

Алгоритм с итерацией целевой функции для задач с конечным горизонтом включает использование либо спектральных методов приближения, либо методов конечных элементов [1]. Однако данный подход не лишен недостатков: для стабильной работы алгоритма требуется выпуклость целевой функции, что может не выполняться при использовании этого метода [2].

Приближение функции выигрыша с сохранением её формы позволяет улучшить поиск глобального минимума целевой функции, для чего, например, можно использовать аппроксимацию кубическими сплайнами [3]. В дальнейшем эта идея исследовалась в работах [4–7].

В ходе данной работы были реализованы метод, основанный на применении линейных комбинаций многочленов Чебышева, и формосохраняющие методы: многочлены Бернштейна, метод сплайн-аппроксимации.

Одной из сложностей при реализации всех трех алгоритмов был поиск функции, которая позволяет средствами языка R найти минимум функции одной переменной, начиная с некоторого значения этой переменной. Большинство методов поиска минимума функции в языке R применяется для функции нескольких переменных. Функция `optimize` позволяет находить минимум функции одной переменной в заданном интервале, но для корректной работы алгоритма интервал вычислялся на каждой итерации с учетом условия: поиск минимума начинается с  $x_1 = a + (1 - \varphi)(b - a)$ , где  $a$  – верхняя граница интервала,  $b$  – нижняя граница интервала.

Алгоритмы были реализованы в среде RStudio на языке R. Программа, реализующая метод сплайн-аппроксимации завершилась за 27,12 секунд [8].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №14-01-00140).*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cai Y.* Dynamic programming and its application in economics and finance. PhD thesis. Stanford: Stanford University, 2009.
2. *Cai Y., Judd K. L.* Shape-preserving dynamic programming // *Math. Meth. Oper. Res.* 2013. Vol. 77. P. 407–421.

3. *Schumaker L.* On shape-preserving quadratic spline interpolation // *SIAM J. Numer. Anal.* 1983. Vol. 20. P. 854–864.
4. *Judd K. L.* Numerical methods in economics. Cambridge: MIT Press, 1998.
5. *Cai Y., Judd K. L.* Stable and efficient computational methods for dynamic programming // *J. Eur. Econ. Assoc.* 2010. Vol. 8, №. 2–3. P. 626–634.
6. *Wang S. P., Judd K. L.* Solving a savings allocation problem by numerical dynamic programming with shape-preserving interpolation // *Comput. Oper. Res.* 2000. Vol. 27, №. 5. P. 399–408.
7. *Judd K. L., Solnick A.* Numerical dynamic programming with shape-preserving splines. Stanford: Hoover Institution, 1994.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.

## **СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ НА РЕГИОНАЛЬНОМ УРОВНЕ ДИВЕРГЕНЦИИ ИНТЕГРАЦИОННОЙ АКТИВНОСТИ РОССИЙСКИХ ХОЛДИНГОВЫХ СТРУКТУР**

**М. Г. Карелина**

*Магнитогорский государственный технический  
университет им. Г. И. Носова, Россия*  
E-mail: marjyshka@mail.ru

Статья посвящена статистическому анализу интеграционной активности российских холдинговых структур на региональном уровне. Изучение интеграционной активности в регионах России на основе статистических данных за 2004–2013 гг. позволило выявить возрастающую неоднородность интеграционной активности российских холдингов. Гипотеза о существенной дивергенции слияний и поглощений корпоративных структур в российских регионах была подтверждена высокими значениями коэффициента Джини, коэффициента Герфинделя и децильного коэффициента дифференциации. Полученные результаты имеют практическую значимость, так как они могут быть использованы для совершенствования существующих федеральных программ, направленных на сглаживание диспропорций в социально-экономическом развитии субъектов РФ.

## **STATISTICAL ANALYSIS OF DIVERGENCE INTEGRATION ACTIVITIES IN THE RUSSIAN REGIONS**

**M. G. Karelina**

This article is devoted to the research of integration activities in region of Russian Federation. Research in the field of structure and dynamics of integration activities among Russian Federation subjects according to the data during 2004–2013 years allowed us to reveal an increasing dissimilarity of the integration activities in Russian regions. The hypothesis about existence of divergence of the corporate structures' mergers and takeovers in Russian regions was confirmed by the high quantity of Genie's coefficient, Gerfindel's coefficient and differentiation decyl coefficient. Research results has a great practical value as they can be used for upgrading of the existing federal programs which are directed to flatten out disproportions in social and economical development of Russian Federation subjects.

В настоящее время в России после длительного перерыва вновь появился интерес федеральных и региональных органов власти к долгосрочному планированию экономического развития. Однако проблемы такого планирования, определения стратегических приоритетов экономической и социальной политики сопровождаются отсутствием действенных механизмов оценки интеграционной активности в российских регионах [1].

В силу особенностей экономического и политического становления Российской Федерации глобализация российской экономики приводит к диспропорциям в развитии ее регионов, что ведет к концентрации финансовых рычагов управления в ограниченном круге одних субъектов и его недостатку в других [2]. Примерно четверть всех регионов России имеет многопрофильную экономику, основным донором бюджета которых выступают крупные вертикально-интегрированные структуры. Таким образом, проблема исследования дифференциации межрегиональных различий социально-экономических показателей, в том числе и интеграционной активности, приобретает для России особую актуальность.

В табл. 1 представлены дескриптивные статистики [3] стоимостного объема регионального рынка слияний и поглощений за 2006–2013 гг. Данные табл. 1 показывают, что минимальное значение стоимостного объема регионального рынка M&A в 2013 г. составило 63 млн долл. США.

Таблица 1

**Дескриптивные статистики стоимостного объема регионального рынка слияний и поглощений по субъектам РФ, 2006–2013 гг.**

Показатель	Значение							
	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Минимальное значение $x_{min}$ , млн долл. США	63	98	85	18	43	75	61	63
Максимальное значение $x_{max}$ , млн долл. США	27651	71010	77154	42343	73618	68514	11811	12005
Среднее значение $\bar{x}$ , млн долл. США	1015	2098,9	1910,6	922,1	912,3	1269	1369	1320,5
Коэффициент вариации $v$ , %	343,1	426,48	347,9	383,23	354,87	311,5	399,2	398,78

Таким образом, интеграционная активность регионов России, рассчитываемая как стоимостный объем регионального рынка M&A, неоднородна. В Центральном ФО значение данного показателя в 2013 г.

составило 49594 млн долл. США, в Уральском федеральном округе – 3863 млн долл. США, а в Северо-Кавказском ФО только 28 млн долл. США. Высокая интеграционная активность в Центральном ФО обеспечивается стоимостным объемом рынка слияний и поглощений г. Москвы. Низкая интеграционная активность в Южном и Северо-Кавказском ФО связана в первую очередь с практически полным отсутствием интеграционной активности в таких субъектах, как Ставропольский край, Волгоградская и Ростовская области.

В целях статистического изучения на региональном уровне дивергенции слияний и поглощений была рассмотрена динамика изменения коэффициентов неравенства распределения интеграционной активности, рассчитанных по показателю «Стоимостный объем рынка М&А» для квинтильных (20-процентных) групп регионов за 2004–2013 гг. В пятую квинтильную группу (регионы-лидеры) вошли такие субъекты, как г. Москва, Московская область, г. Санкт-Петербург, Ямало-Ненецкий АО, Республика Татарстан, Челябинская обл. и др.

Представление о процессе концентрации интеграционной активности в субъектах РФ в целом дают данные табл. 2. В период 2004–2013 гг. относительно неизменной оставалась доля четвертой квинтильной группы. При этом наблюдалось уменьшение доли первой, второй и третьей квинтильных групп – с 5,71 до 5,46%, т.е. за исследуемые 10 лет она снизилась в 1,28 раза.

Таблица 2

**Доли квинтильных групп российских регионов в общем объеме стоимостного объема рынка слияний и поглощений, %**

Показатель	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Стоимостный объем рынка М&А, всего	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
В том числе по 20% группам регионов: первая (наименьшая М&А-активность)	1,08	0,96	0,86	0,39	0,49	1,32	0,53	1,34	0,60	0,62
вторая	1,68	2,65	2,76	1,85	1,70	2,05	1,95	2,85	2,08	2,02
третья	2,95	2,89	3,05	3,12	2,28	3,35	4,29	4,04	3,08	2,82
четвертая	5,43	5,18	5,27	4,88	4,95	4,78	5,05	5,15	4,18	4,11
пятая (наибольшая М&А-активность)	88,86	88,32	88,06	89,76	90,58	88,50	88,18	86,62	90,06	90,43

Наиболее значительно упала доля наименее интеграционно-активной первой квинтильной группы регионов – с 1,08 до 0,62%, т.е. она снизилась в 1,74 раза. В то же время возросла доля наиболее интеграционно-активной пятой квинтильной группы в 1,02 раза. Таким образом, данные табл. 2 показывают, что по сравнению с 2004 г. в 2013 г. ситуация в области распределения интеграционной активности по субъектам РФ изменилась в части увеличения интеграционной активности в пятой и уменьшения М&А-активности в первой квинтильной группе.

Наряду с показателем «доля квинтильной группы в общем объеме стоимостного объема рынка М&А» для анализа концентрации по группам регионов целесообразно использовать специальные коэффициенты, комплексно характеризующие рассматриваемое явление. К таким специальным показателям можно отнести «коэффициент концентрации (индекс Джини)» [4].

Согласно подходу В. А. Литвинова, индекс Джини, определяя степень отклонения фактически сложившегося распределения интеграционной активности от линии их возможного равномерного распределения, комплексно характеризуя процесс концентрации интеграционной деятельности по группам субъектов РФ, лишь косвенным образом отражает собственно концентрацию в узком смысле этого слова, т.е. стремление «стянуть» всю интеграционную активность в один регион [5].

Принимая во внимание сказанное, было предложено в исследовании региональной интеграционной активности при анализе концентрации использовать коэффициент концентрации Герфинделя [6]:

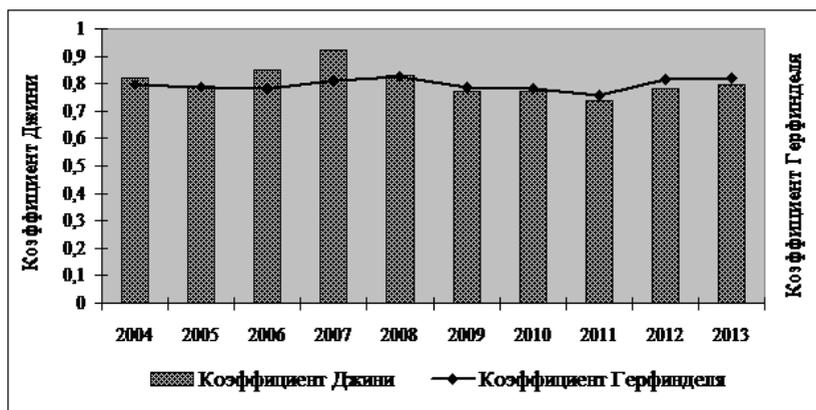
$$K = \sum_{i=1}^5 d_i^2,$$

где  $D_i$  – доля каждой группы регионов в общем объеме стоимостного объема рынка М&А.

Данный коэффициент изменяется от 0 до 1. В отличие от индекса Джини коэффициент Герфинделя является показателем «прямого действия» и индифферентен к линии теоретически возможного равномерного распределения. При заданном (неизменном) количестве групп повышение коэффициента Герфинделя в текущем периоде по сравнению с периодом, принятом за базу, прямо свидетельствует о повышении концентрации, т.е. все большем сосредоточении интеграционной деятельности в «руках» какой-либо одной группы регионов.

На протяжении всего анализируемого периода 2004–2013 гг. коэффициент Джини демонстрировал высокие значения, что свидетельствует

о неравномерности распределения интеграционной активности по субъектам РФ (рисунок).



Динамика значений коэффициента Джини и Герфинделя для интеграционной активности российских регионов в 2004–2013 гг.

Наибольшее значение коэффициента Джини приходится на 2007 г. ( $G_{2007} = 0,92$ ), наименьшее – на 2011 г. ( $G_{2011} = 0,74$ ). На протяжении 2004–2013 гг. значение коэффициента Герфинделя не опускалось ниже значения, равного  $K_{2005} = 0,76$ , что свидетельствует о высокой концентрации интеграционной активности российских холдингов. Кроме того, в 2013 г. наблюдается увеличение концентрации интеграционной активности на 1,92% по сравнению с 2012 г.

Индекс Джини и коэффициент Герфинделя, характеризующая концентрацию интеграционной активности холдинговых структур по субъектам РФ, опосредованно отражают и общую меру дифференциации M&A-активности российских регионов. Однако при этом не нужно смешивать концентрацию как сосредоточение чего-либо с дифференциацией как отличием (различием) частей целого. Под дифференциацией мы понимаем, прежде всего, отличие варьирующего признака (объем стоимостного регионального объема рынка M&A) как взвешенной величины в крайних группах. Следовательно, индекс Джини не может прямо использоваться для характеристики дифференциации интеграционной активности, а значит надо для ее изучения применять особые показатели, такие как квантильные коэффициенты дифференциации.

Децильный коэффициент дифференциации представляет собой отношение стоимостного регионального объема рынка слияний и поглощений, выше и ниже которых расположено по 10% соответственно наиболее и наименее интеграционно-активных регионов РФ. В результате было получено, что децильный коэффициент дифференциации, равный отношению 9-го и 1-го дециля, в 2013 г. увеличился на 1,16% по сравнению с 2012 г. и составил  $D_{2013} = 174$ , т.е. минимальный стоимостный объем рынка корпоративного контроля 10% наиболее интеграционно-активных субъектов превышает максимальный стоимостный объем рынка M&A наименее интеграционно-активных регионов РФ в 174 раза.

Таким образом, для экономики России характерна деформированная пространственная структура интеграционной активности холдинговых структур. Существующая как государственная, так и региональная политика в области развития интеграционной деятельности не оказывает достаточного влияния на сглаживание диспропорций в распределении направлений реализации интеграционных процессов. Все это свидетельствует о необходимости корректировки политики государства в области активизации интеграционной активности российских холдинговых структур в регионах РФ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поликарпова М. Г.* Экономико-статистический анализ инновационно-технологической и интеграционной активности в регионах России // Вопросы статистики. 2012. № 7. С. 45–52.
2. *Поликарпова М. Г.* Слияния и поглощения в российских регионах: проблемы измерения и опыт эмпирических исследований // Вопросы статистики. 2011. № 11. С. 58–64.
3. *Шмойлова Р. А., Минашкин В. Г.* Теория статистики. М.: Финансы и статистика, 2003. 656 с.
4. *Dorfman R.* A formula for the Gini coefficient // The Review of Economics and Statistics. 1979. № 1. P. 146–149.
5. *Литвинов В. А.* Концентрация и дифференциация денежных доходов по группам населения Российской Федерации // Эконом. журн. ВШЭ. 1999. № 2. С. 226–237.
6. *Елисеева И. И., Егорова И. И.* Статистика. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2004. 448 с.

# НЕЧЕТКАЯ КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ

**Р. М. Качалов<sup>1</sup>, Ю. А. Слепцова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup>*Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия*

E-mail: kachalov1ya@ya.ru, julia\_sleptsova@mail.ru

Разработана концептуальная модель системы управления производственным предприятием в условиях нечеткой информации при задании целевых показателей и проведении мероприятий, направленных на их достижение. Цель предприятия рассматривается как субъективный образ предполагаемого результата запланированных действий. Конкретизирован набор управленческих действий, которые позволяют максимально приблизиться к поставленным целям в существующих или прогнозируемых условиях. Уточнены роль и место функции контроля в системе управления предприятием.

## FUZZY CONCEPTUAL MODEL OF ENTERPRISE MANAGEMENT

**R. M. Kachalov, Yu. A. Sleptsova**

It is developed a conceptual model of the management system of industrial enterprise in the conditions of fuzzy information when setting targets and carrying out activities aimed at their achievement. The goal of the enterprise is considered as a subjective image of the intended result of planned activities. The set of managerial actions specifies that are much closer to the goals in the existing or forecast conditions. The role of control functions defines in the system management functions.

Для повышения качества управления производственным предприятием, деятельность которого, как правило, характеризуется нечеткими показателями, требуются новые методологические принципы исследования характеристик процедур управления риском. В данной работе представлена концептуальная модель управления производственным предприятием в условиях нечетко заданных целевых характеристик деятельности предприятия [1]. При построении модели предполагалось, что задание целей хозяйственной деятельности предшествует анализу феномена риска и включает формулирование общих целей развития предприятия и критериев, отражающих соответствие будущего состояния предприятия целям его развития [2, 3].

Традиционные модели риска, базирующиеся на теории вероятности, широко используются при оценке кредитных рисков, страховых рисков и риска операций с ценными бумагами на фондовых рынках и т.п. Реже применяется информационно-энтропийный подход для оценки экономических рисков производственных предприятий. В отличие от этого

предлагаемая концептуальная модель управления предприятием с учетом феномена риска основывается на применении теории нечетких множеств.

Цель хозяйственной деятельности производственного предприятия можно рассматривать как субъективный образ предполагаемого результата запланированных действий. При этом конкретизация набора стратегических задач – действий, мероприятий и т.д., которые позволяют достичь или максимально приблизиться к поставленным целям в существующих или прогнозируемых условиях, осуществляется на этапе планирования. Это обстоятельство обязывает употреблять термин «риск» не как синоним «опасности», а в более узком смысле, а именно как характеристику степени возможности отклонения от цели хозяйственной деятельности предприятия и ущерба, обусловленного этим отклонением [4].

Формализация задачи определения цели с использованием аппарата нечеткой логики будет выглядеть следующим образом: цель задается некоторым нечетким подмножеством  $\tilde{O}$  множества  $Y$ , где  $Y$  – это множество состояний предприятия ( $\tilde{O} \subseteq Y$ ).

Подмножество нежелательных состояний, характеризуемых отклонением от цели хозяйственной деятельности, представлено разностью множеств  $Y \setminus \tilde{O}$ . Это означает, что реализовались один или несколько факторов экономического риска (ФЭР), а введенные антирисковые управленческие воздействия не помогли скорректировать негативные последствия реализации факторов экономического риска.

Особенности процесса достижения конкретных значений целевых показателей или характеристик хозяйственной деятельности предприятия могут быть установлены с помощью системной экономической теории Г. Б. Клейнера. Так, системная экономическая теория выделяет по пространственно-временному признаку четыре типа систем: объектного, проектного, процессного и средового типа [1]. Согласно этой теории, производственное предприятие отнесено к социально-экономическим системам объектного типа. Разворачивая системную структуризацию экономического пространства на более низкий уровень, можно предположить, что предприятие как экономическая система, в свою очередь, содержит четыре подсистемы тех же четырех видов: объектного, проектного, процессного и средового. При этом в подсистему объектного типа естественно попадают материальные и нематериальные активы предприятия.

В подсистему процессного типа войдут реализуемые предприятием технологические или бизнес-процессы, которые характеризуются устойчивостью и многократным повторением. Подсистема процессного типа ограничена во времени и представляет собой деятельность, преобразую-

шую материальные, трудовые и информационные ресурсы в экономические результаты – продукцию и услуги.

Подсистему проектного типа образует совокупность реализуемых на предприятии проектов. Специфика проектной подсистемы предприятия состоит в том, что проекты ограничены физическим, виртуальным и правовым пространством предприятия, и каждый проект ограничен во времени, он должен завершаться достижением цели проекта или выполнением запланированного состава работ в заданные сроки.

Подсистемой средового типа можно считать сложившиеся в пределах предприятия социально-экономические и культурные условия, традиции и т.п. неформальные институты, а также федеральное и местное законодательство, регулирующее деятельность по производству и реализации профильной продукции предприятия или оказанию услуг, то есть все это представляет собой среду, в которой предприятие осуществляет свою деятельность, а сотрудники и подразделения взаимодействуют.

Исследуя характеристики подсистем предприятия, можно выделить признаки «активности» и «пассивности» [5], с точки зрения управления, которое осуществляется путем выполнения определенных управленческих действий. Пассивные подсистемы обладают более жесткой определенностью с точки зрения управления, в смысле отсутствия у них, как у управляемого объекта, собственных целей, возможности прогнозировать поведение управляющего органа и свободы выбора своего состояния. К таким подсистемам можно отнести объектную и средовую подсистемы. В активных подсистемах управляемые субъекты, или хотя бы один субъект, обладают некоторой свободой выбора своего состояния, могут обладать собственными интересами и предпочтениями, иначе их поведение можно было бы рассматривать как пассивное. К активным подсистемам можно отнести процессную и проектную подсистемы.

Процесс управления направлен на достижение по ходу хозяйственной деятельности предприятия заданных значений целевых показателей. Для этого, согласно системной экономической теории [1], на оси времени задаются контрольные точки, в которых должны быть достигнуты желательные промежуточные значения целевых показателей. Целевые показатели могут носить качественный и количественный характер. Например, в результате деятельности процессной подсистемы достижение определенных объемов реализации готовой продукции в натуральном и денежном выражении будут носить количественный характер, а завершение строительства нового цеха в рамках проектной подсистемы иметь качественный характер.

Множество всех возможных управленческих воздействий обозначим через  $X$ . Очевидно, что не все действия могут быть доступны в данный момент в силу различных причин: временные институциональные ограничения, неготовность предприятия и т.п. Эта ситуация в данном случае моделируется с помощью нечеткого подмножества  $\tilde{A}$  множества  $X$  ( $\tilde{A} \subseteq X$ ) как множество, удовлетворяющее ограничениям на управленческие воздействия. Состояние, в котором окажется предприятие в зависимости от выбранного действия, описывается нечетким отображением  $\tilde{a}: X \rightarrow Y$ .

Задача управления состоит в том, чтобы выбрать такое действие, которое удовлетворяло бы ограничениям  $\tilde{A}$ , а состояние предприятия в некоторый заданный момент времени описывалось бы элементом подмножества  $\tilde{O}$ . Это означает: установленное для этой контрольной точки значение целевого показателя достигнуто. Состояние предприятия, когда запланированные целевые показатели не были достигнуты, например, вследствие появления какого-либо ФЭР, можно описать элементом разности множеств  $Y \setminus \tilde{O}$ .

Результат, связан с управленческим воздействием нечетким отображением  $\tilde{a}: X \rightarrow Y$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{a}}(x, y)$ , где  $x \in \tilde{A}$ , а  $y \in Y$ . Для некоторого  $x \in \tilde{A}$  нечеткое множество  $\tilde{a}(x) \subseteq Y$  будет характеризовать степень достоверности того или иного результата, когда выбрано управленческое воздействие  $x$ , то есть функция принадлежности  $\mu_{\tilde{a}}(x, y)$  отражает степень достоверности реализации результата  $y$  при выборе действия  $x$ .

Информация об изменении состояния предприятия в результате введения некоторого управленческого воздействия должна быть доведена до сведения руководства предприятия (субъекта управления). Степень достоверности этой информации определяется качеством контрольных процедур. Контрольной процедурой в данном случае называется оценка текущего состояния предприятия в контрольной точке, например, в виде степени достижения цели или заданного значения контрольного показателя. Таким образом, с помощью некоторой контрольной процедуры  $k$  получаем канал обратной связи. Важно подчеркнуть, что контрольные действия должны быть также допустимыми, т.е. должно выполняться условие  $k \in \tilde{A}$ .

Информация о состоянии предприятия ( $y' \in Y$ ), связана с контрольной процедурой нечетким отображением  $\tilde{u}: X \rightarrow Y$  с функцией принадлежности  $\mu_{\tilde{u}}(k, y')$ , где  $k \in \tilde{A}$ , а  $y' \in Y$ . Для контрольной процедуры  $k \in \tilde{A}$  нечеткое множество  $\tilde{u}(k) \subseteq Y$  будет описывать степень достоверности ин-

формации о состоянии предприятия. Когда  $\delta\ddot{u}(k, y') = 1$ , достоверность информации будет полной, и с уверенностью можно утверждать, что  $y'$  – это состояние предприятия при выборе действия  $x$ . Если  $\mu\ddot{a}(x, y) = 1$ , то  $y' = y$ .

То есть в случае четкого отображения, достоверно известно, что при выборе действия  $x \in \hat{A}$ , состояние системы будет в определенный момент  $y \in Y$ , и с помощью контрольной процедуры  $k \in \hat{A}$ , информация о состоянии предприятия  $y \in Y$  станет известна руководству предприятия. Схематически это показано на рисунке.



Модель управления предприятием

Допустимые управленческие воздействия могут быть представлены как последовательно-параллельные соединения таких действий, как планирование, организация, распоряжение и координация. В своей работе Г. Б. Клейнер [1] ссылается на выделение этих действий А. Файолем [6], но у Файоля присутствовал и пятый тип действия – контроль. В предлагаемой нами модели присутствует в явном виде «контроль» – это аналог канала обратной связи от объекта управления (предприятия) к руководству предприятия как субъекту управления.

Таким образом, изложенная здесь концептуальная модель позволит в дальнейшем обосновать разделение управленческих задач между службами внутреннего контроля, внутреннего аудита и управления риском.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-06-05541).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнер Г. Б. Системная экономика как платформа развития современной экономической теории // Вопросы экономики. 2013. № 6. С. 4–28.
2. Клейнер Г. Б. Стратегия предприятия. М.: Дело, 2008. 568 с.

3. Новиков Д. А. Структура теории управления социально-экономическими системами // Управление большими системами. 2009. Вып. 24. С. 216–257.
4. Качалов Р. М. Управление экономическим риском: теоретические основы и приложения. СПб.: Нестор-История, 2012. 288 с.
5. Новиков Д. А., Петраков С. Н. Курс теории активных систем. М.: Синтез, 1999. 104 с.
6. Файоль А. Общее и промышленное управление. М.: Контроллинг, 1992. 111 с.

## **АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РИСКОВ ВЫРАЩИВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР ПРИ СТРАХОВАНИИ УРОЖАЯ В ПЕНЗЕНСКОЙ ОБЛАСТИ**

**А. Ю. Киндаев, А. В. Моисеев**

*Пензенский государственный технологический университет, Россия*

E-mail: ale-kindaev@yandex.ru, moigus@mail.ru

Актуальность статьи обусловлена необходимостью моделирования рисков выращивания сельскохозяйственных культур. В статье приведен сравнительный анализ результатов имитационного моделирования основных зерновых культур Пензенской области. Делаются выводы о необходимости изменения действующих «правил игры» на рынке агрострахования.

## **ANALYSIS OF SIMULATION RESULTS RISK OF GROWING CROPS ON CROP INSURANCE IN THE PENZA REGION**

**A. Yu. Kindayev, A. V. Moiseev**

The relevance of article caused by necessity of risk modeling you-rasimone crops. The article presents a comparative analysis of simulation results basic grains of the Penza region. Conclusions are made about the need to change the existing "rules of the game" in the market of agricultural insurance.

Выращивание сельскохозяйственных культур больше, чем любая другая отрасль сельскохозяйственного производства, подвержена воздействию природно-климатических условий. Это объясняется самим характером производственного процесса. Период производства, когда продукт труда предоставлен воздействию естественных процессов, здесь особенно продолжителен. В течение нескольких месяцев посеvy сельскохозяйственных культур полностью находятся под влиянием метеорологических и других природных факторов.

Страхование урожая сельскохозяйственных культур играет большую роль в становлении эффективной системы хозяйствования. Роль страхования в обеспечении продовольственной безопасности

России сложно переоценить, поскольку это мощный финансовый стабилизатор, позволяющий компенсировать убытки, возникающие вследствие наступления неблагоприятных событий техногенного и природного характера [1, 2].

Рассмотрим страхование с точки зрения страховой компании. Теоретической основой деятельности страховых компаний является закон больших чисел, который предполагает независимость случайных величин, характеризующих убытки. Но следует заметить, что при рассмотрении страхования в сельском хозяйстве имеет место коррелированность убытков при страховании в одном регионе, что ведет к увеличению тарифов для сохранения малой вероятности разорения страховой компании. Нормальный тариф имеет место быть только в тех компаниях, которые охватывают максимальное количество регионов России, а таких мало, и как результат слабая конкуренция по этим видам страхования.

Несмотря на рост страховых премий и как следствие рост числа страхователей, их общее число невелико. Отсюда возникает необходимость моделирования, чтобы иметь возможность просчитывать страховые риски с учетом расширения охвата страхового поля. За основу берется модель индивидуального риска в предположении охвата всего страхового поля. Ключевым предположением данной модели является независимость убытков между собой отдельно взятых страхователей. Однако, анализируя статистические данные, возникает большое сомнение в справедливости данного предположения и как следствие возникает необходимость моделирования системы случайных величин, зависимых между собой [3].

Моделирование рисков будем проводить на основе индивидуальной модели страхования. Будем считать, что если компания охватывает все страховое поле, то величина  $N$  является детерминированной [4, 5].

Рассмотрим формирование случайной величины  $X_i$ . Основываясь на методике, изложенной в Приказе Минсельхоза России от 14.03.2013 №133 «Об утверждении методик определения страховой стоимости и размера утраты (гибели) урожая сельскохозяйственной культуры и посадок многолетних насаждений, утраты (гибели) сельскохозяйственных животных», имеем

$$X_i = P \cdot D_i, \quad (1)$$

где  $D_i$  – величина недособранного урожая (т),  $P$  – цена зерновой культуры за 1 т. Величина  $D_i$  определяется следующим образом:

$$D_i = \begin{cases} 0, & \frac{Up_i - Uf_i}{Up_i} < 0,3 \\ Up_i - Uf_i, & \frac{Up_i - Uf_i}{Up_i} \geq 0,3, \end{cases} \quad (2)$$

где  $Up_i$  – плановый сбор по  $i$ -му договору страхования, который определяется как произведение посевной площади на среднюю урожайность за последние пять лет:

$$Up_i = Ym_i \cdot S, Ym_i = \frac{Y_{i,t-5} + Y_{i,t-4} + Y_{i,t-3} + Y_{i,t-2} + Y_{i,t-1}}{5}, \quad (3)$$

где  $t$  – текущий момент времени,  $Uf_i$  – фактический валовой сбор  $i$ -му договору страхования. Фактический сбор есть произведение урожайности  $Y_t$  на посевную площадь:  $Uf_i = Y_{i,t} \cdot S$ .

Рассмотрим формирование величины  $Z_i$ . Будем считать, что  $Z_i$  определяется как некоторая доля от страховой стоимости урожая, которая есть произведение цены на плановый сбор:

$$Z_i = \alpha \cdot (P \cdot Ym_i \cdot S), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – доля (ставка) страховой стоимости, зачисляемая в страховой фонд, единая для всех договоров страхования.

Урожайность  $Y_{i,t}$  формируется под воздействием многих факторов, ряд которых носит явно случайный характер (количество выпавших осадков, средняя дневная температура за время вегетации, суммарное количество тепла и др.), хотя не стоит отрицать и наличия детерминированных факторов (сортность, количество внесенных удобрений и др.). Таким образом, можно считать урожайность функцией, зависящей от двух групп факторов: детерминированных и стохастических:

$$Y_{i,t} = f(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}$  – набор детерминированных факторов, определяющих урожайность,  $\mathbf{B}$  – набор стохастических факторов, определяющих урожайность.

Значения набора  $\mathbf{A}$  контролируется страховой компанией, значения набора  $\mathbf{B}$  контролю не поддаются. Если рассматривать компактную территорию, на которой будут заключены договоры страхования, то значения наборов  $\mathbf{B}_i$  будут очень близки друг к другу для различных  $i$ .

Ясно, что риски страхования полностью определяются случайностью величин  $Y_{i,t}$ . Можно предположить, что величины  $Y_{i,t}$  в фиксированный момент времени будут иметь нормальный закон распределения

и коррелировать между собой. В классических моделях страхового риска величины  $X_i$  считаются независимыми. В нашем случае возникают большие сомнения по поводу возможности считать величины убытка по разным договорам страхования независимыми.

Рассмотрим эту методику применительно к работе страховой компании в Пензенской области, а также реализацию сформулированного выше алгоритма применительно к сельскому хозяйству, а именно выращиванию пшеницы яровой, и 27-мерную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Выполним генерацию 250 значений с использованием пакета MATLAB. На основе эмпирических данных об урожайности пшеницы яровой за период с 1980 по 2013 г. по районам Пензенской области была получена оценка корреляционной матрицы, которую возьмем за исходные данные [6, 7]. Используя данную матрицу, получим 250 возможных итогов урожайности следующего года. Далее рассчитаем результаты страхования такой сельскохозяйственной культуры, как пшеница яровая для различных значений ставки формирования страховых взносов. В таблице представлены результаты имитационного моделирования [6].

Из таблицы видно, что может наступить урожайный год, где уже при ставке в 1% сумма страховых взносов сможет «ответить» по всем возникшим обязательствам. Но может наступить совсем «неблагоприятный» год, когда ставка в 35% не может гарантировать выплаты по возникающим обязательствам. Сумма страховых взносов при ставке в 10% способна ответить по обязательствам в 80% случаев, а ставка в 35% обеспечивает 95% покрытие страховых выплат. Однако неучтенным остается тот факт, что территория Пензенской области относительно небольшая и районы области имеют небольшие природные различия относительно друг другу и, как следствие, урожайность в одном районе связана с урожайностью в другом. Таким образом, если год неурожайный в одном районе, то, скорее всего, он неурожайный и в другом. Рассмотрим возможность диверсификации рисков за счет страхования нескольких культур в одном регионе. Для этого, проведя аналогичные исследования относительно пшеницы яровой, получили, что страховой компании для обеспечения безубыточной работы для пшеницы озимой необходима ставка для формирования страховых взносов в размере 44%, по овсу – 35, по ржи – 47%. Такой расклад, естественно, не устраивает аграриев, так как получается, что им нужно отдать практически половину своего потенциального дохода страховой компании. Учитывая тот факт, что рентабельность выращива-

### Результаты имитационного моделирования для коррелируемых данных

Финансовый результат, млн руб.	Частота попадания в интервалы финансовых результатов при указанных процентных ставках при формировании страховых взносов, %				
	1	10	20	30	35
–485 и менее	0	0	0	0	0
от –485 до –448	2	0	0	0	0
от –448 до –411	1	1	0	0	0
от –411 до –374	0	2	0	0	0
от –374 до –337	1	0	1	0	0
от –337 до –300	3	0	2	0	0
от –300 до –263	2	2	0	1	0
от –263 до –226	7	4	0	2	2
от –226 до –189	5	0	2	0	1
от –189 до –152	6	7	4	0	0
от –152 до –115	8	6	2	2	0
от –115 до –78	12	7	5	4	2
от –78 до –41	13	10	6	3	4
от –41 до –4	43	10	7	5	3
от –4 до 33	147	15	10	5	5
от 33 до 70	0	81	10	8	5
от 70 до 107	0	105	17	9	9
от 107 до 144	0	0	184	10	8
от 144 до 181	0	0	0	20	10
от 181 до 218	0	0	0	181	20
от 218 до 255	0	0	0	0	181

ния зерновых в Пензенской области очень низкая, сельхозтоваропроизводителям абсолютно не выгодно прибегать к страховщикам.

Проанализируем отдельно каждую культуру с точки зрения аграриев. В результате моделирования рисков неурожая по пшенице озимой получилось, что в 5 районах из 27 наступает улучшение, т.е. с учетом страхования количество убыточных лет уменьшилось. В 3 районах финансовый результат улучшился после обращения к страховой компании. Причем стоит заметить, что эти изменения произошли с двумя районами из числа пяти районов с улучшением ситуации после страхования, а в третьем районе финансовый результат стал больше, несмотря на увеличение числа отрицательных вариантов наступления событий следующего года. По овсу ситуация похожая, количество убыточных лет уменьшилось

в 3 районах, в 4 районах их количество не изменилось. В 3 районах наблюдается увеличение финансового результата: в двух районах из числа 4 районов, где не изменилось число убыточных вариантов, и в одном из числа других районов, где страхование еще больше отягощает аграриев. Однако стоит заметить, что ни в одном из районов, где уменьшилось число возможным убыточных лет, не улучшился финансовый результат. По ржи результаты следующие: количество убыточных лет уменьшилось в 3 районах, в 3 районах их количество не изменилось. Только в одном районе наблюдается увеличение финансового результата, и он из числа других районов, где страхование еще больше отягощает аграриев. Из всего этого можно сделать вывод, что страхование сельскохозяйственных культур далеко не всегда способствует улучшению положения аграриев и даже в отдельных случаях еще больше отягощает их положение. Диверсифицировать риски страховой компании в одном регионе также не удастся в силу того, что Пензенская область относительно небольшая и находится примерно в одинаковых агроклиматических условиях, результаты по одной культуре похожи на результаты по другой.

Для улучшения ситуации на рынке агрострахования необходимо пересмотреть действующие принципы и подходы. Сложившаяся ситуация не устраивает как страховые компании, так и представителей агробизнеса. Дальнейший анализ ситуации будет направлен на изучения охвата нескольких областей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батова В. Н., Киндаев А. Ю. Проблемы обеспечения продовольственной безопасности АПК // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2014. Т. 1, № 2 (18). С. 131–136.
2. Левченко А. С. Пути преодоления экономического кризиса // Актуальные проблемы экономического развития: сб докл. Междунар. науч.-практ. конф. Белгород: Изд-во БГТУ, 2010. Ч. 1. 396 с.
3. Киндаев А. Ю. Моделирование процессов страхования в сельском хозяйстве // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2014. № 2 (10). С. 91–96.
4. Моисеев А. В. Сравнительный анализ моделей распознавания риска // Изв. высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2013. № 4 (28). С. 19–31.
5. Беклемышев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 335 с.
6. Моисеев А. В., Киндаев А. Ю. Моделирование страхования в сельском хозяйстве с учетом коррелированности результатов по региону // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2015. Т. 3, № 3 (25). С. 175–181.
7. Моисеев А. В., Киндаев А. Ю. Генерация многомерной случайной величины для моделирования страхования аграрных рисков // Математическое моделирование в экономике и управлении рисками: сб. материалов III Междунар. молодежной науч.-практ. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2014. С. 308–314.

# **МНОГОМЕРНАЯ ГРУППИРОВКА РЕГИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ИПОТЕЧНОГО ЖИЛИЩНОГО КРЕДИТОВАНИЯ МЕТОДАМИ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА**

**А. Ю. Кобзев**

*Самарский государственный экономический университет, Россия*

E-mail: kobzev.andrew@gmail.com

Статья посвящена анализу развития ипотечного жилищного кредитования в регионах. Представлено определение региональной системы ипотечного жилищного кредитования (СИЖК). На основе показателей банковской статистики сформирована система статистических показателей. В целях анализа дифференциации региональных СИЖК проведена кластеризация субъектов Российской Федерации за 2008–2014 гг. Результаты кластеризации представлены в табличном и графическом виде. Предложены направления применения полученной типологизации.

## **MULTIDIMENSIONAL GROUPING OF REGIONAL SYSTEMS OF MORTGAGE HOUSING CREDITING METHODS OF CLUSTER ANALYSIS**

**A. Yu. Kobzev**

The article is devoted to the analysis of development of mortgage housing crediting in the regions. The definition of regional system of mortgage housing crediting (SIIC). Based on the indicators of banking statistics the system of statistical indicators. In order to analyze the differentiation of regional SIGC clustering of subjects of the Russian Federation in 2008–2014 Results of clustering are presented in tabular and graphical form. The directions of application of the typology.

Проблема доступности жилья является одной из наиболее острых социальных проблем в России. Возможный путь ее решения – развитие ипотечного жилищного кредитования (ИЖК), при котором обязательства физического лица по кредиту, предоставляемому физическим лицам на общих принципах кредитования для покупки (строительства) жилого недвижимого имущества, обеспечены ипотекой (залогом недвижимости).

В настоящий момент ИЖК является одной из важнейших составляющих рынка кредитования физических лиц. По данным Банка России [1], задолженность населения Российской Федерации по ипотечным жилищным кредитам по состоянию на 01.08.2015 составляет 34,1% от общего размера задолженности по кредитам физических лиц (против 28,6% на 01.02.2015). Вместе с тем в разрезе регионов данный показатель варьируется от 7,1% (Чеченская Республика) до 45,6% (Чувашская Республика).

Как отмечается в Стратегии развития ипотечного жилищного кредитования в Российской Федерации до 2030 г. (далее – Стратегия) [2], развитие рынка ипотеки в предыдущие годы сопровождалось региональной дифференциацией рынка. В этой связи в целях реализации мероприятий Стратегии предусмотрено проведение кластеризации регионов по уровню развития рынка жилья и ипотечного жилищного кредитования [2].

Таким образом, в Стратегии рынки недвижимости и ИЖК рассматриваются как взаимосвязанные. Вместе с тем в процессе функционирования ИЖК участвуют более широкий список субъектов, среди которых основными являются: заемщики, кредитные организации, участники рынка жилой недвижимости, инвесторы, государство. В этой связи, на наш взгляд, в целях межрегионального анализа развития ИЖК целесообразно исследовать региональные системы ипотечного жилищного кредитования (далее – СИЖК), представляющие собой открытую систему, отражающую совокупность отношений, механизмов и связей, возникающих между ее элементами (субъектами) и обеспечивающих функционирование ипотечного кредитования на основе классических принципов кредита (возвратность, срочность, платность, обеспеченность, целевой характер) [3].

Решение задачи кластеризации региональных СИЖК возможно методами кластерного анализа, при помощи которых задача многомерной классификации решается при отсутствии обучающих выборок, т.е. априорной информации и распределения генеральной совокупности [4].

В качестве классификационных признаков нами предложен ряд показателей, характеризующих состояние СИЖК в регионах Российской Федерации (табл. 1). Указанные переменные могут служить индикаторами развития ИЖК в регионе, а также, по аналогии с микроуровнем, характеризуют региональный «ипотечный портфель» [3].

Классификация проведена на основании данных банковской статистики за 2008–2014 гг. по данным 80 регионов (из анализа исключены автономные округа, входящие в состав других субъектов, для исключения двойного счета, а также регионы Крымского федерального округа из-за отсутствия ретроспективных данных). На начальном этапе с помощью иерархических агломеративных методов кластерного анализа было определено количество формируемых кластеров. В качестве меры близости было выбрано евклидово пространство, правила объединения – метод Уорда, построенный на принципе минимизации дисперсии внутри кластеров. Для всех рассматриваемых периодов оптимальным является раз-

**Система показателей систем ипотечного жилищного кредитования  
в регионах Российской Федерации**

№	Обозначение	Наименование
1	Y11	Объем выданных ипотечных жилищных кредитов за год на душу населения, тыс.руб. /чел.
2	Y12	Объем задолженности по ипотечным жилищным кредитам на конец года, тыс.руб./чел.
3	Y13	Количество выданных ИЖК на 1000 чел. населения, шт./1000 чел.
4	X11	Средний размер ИЖК за год, тыс. руб
5	X121	Средневзвешенная процентная ставка по ИЖК в рублях, в %
6	X131	Средневзвешенный срок кредитования по ИЖК в рублях, в мес
7	X14	Доля просроченной задолженности в общем объеме задолженности по ИЖК на конец года, %
8	X15	Доля объема ИЖК в общем объеме кредитов, выданных физическим лицам региона за год, %
9	X16	Доля задолженности по ИЖК в общем объеме задолженности по кредитам физических лиц региона на конец года, %

биение совокупности на 3 кластера (дендрограммы для 2008 и 2014 гг. представлены на рис. 1).

Для их качественного описания и определения состава проведена классификация региональных СИЖК методом *k*-средних на 3 кластера, которые условно можно охарактеризовать как группы регионов с высоким, средним и низким уровнем развития СИЖК (табл. 2).

Очевидно, что распределение регионов по кластерам относительно стабильно (наибольшие изменения были отмечены в 2009 г., когда в результате финансового кризиса произошло значительное ухудшение показателей у «регионов-лидеров»). Расположение регионов на картограмме позволяет выявить наиболее «рисковые» субъекты для осуществления ИЖК по итогам 2014 г. (рис. 2).

График средних значений кластеров за 2014 г. (рис. 3) свидетельствует о том, что наилучшее разбиение совокупности происходит по индикаторам развития ИЖК в регионе (Y1-Y3), тем не менее информативность для кластеризации всех включенных переменных подтверждается результатами дисперсионного анализа. Аналогичное качество разбиения совокупности получены за весь анализируемый период.

Полученная типологизация регионов по показателям СИЖК может быть использована в целях мониторинга выполнения целевых показате-

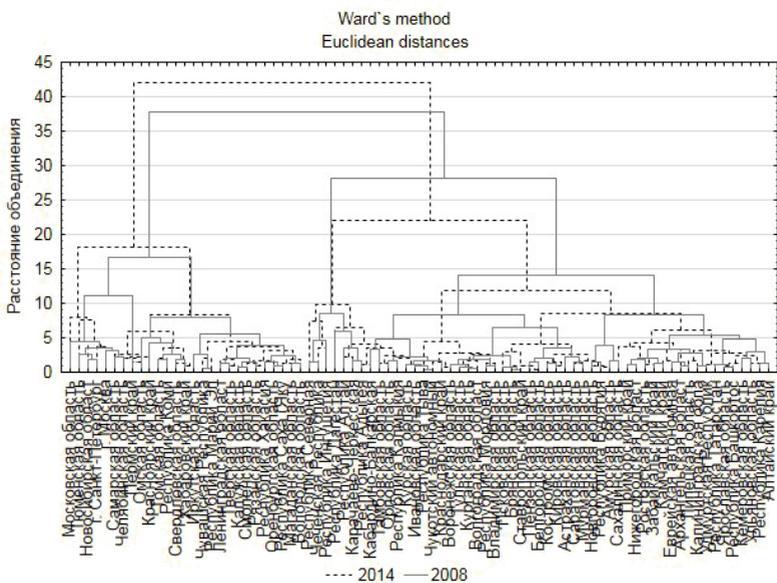


Рис. 1. Дендрограмма распределения региональных СИЖК за 2008 и 2014 гг.

Таблица 2

**Распределение региональных СИЖК по кластерам**

Регион	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	Регион	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Адыгея	н	н	н	с	н	н	с	Марий Эл	с	с	с	с	с	с	в
Алтай	н	н	с	н	н	н	н	Мордовия	с	н	н	с	с	с	с
Алтайский	с	в	с	с	с	с	с	Московская	в	с	в	в	в	в	в
Амурская	с	с	н	в	в	с	с	Мурманская	с	н	н	с	с	с	с
Архангельская	с	в	с	в	в	в	в	Нижегородская	с	с	н	с	с	с	с
Астраханская	с	н	н	с	с	с	с	Новгородская	с	н	с	с	с	с	с
Башкортостан	с	н	н	с	с	с	с	Новосибирская	в	с	в	в	в	в	в
Белгородская	с	н	н	с	с	с	с	Омская	в	с	с	в	с	с	с
Брянская	с	н	н	с	с	с	с	Оренбургская	с	с	с	с	с	с	с
Бурятия	с	н	н	с	с	с	с	Орловская	н	н	н	с	с	с	с
Владимирская	с	н	н	с	с	с	с	Пензенская	с	н	н	с	с	с	с
Волгоградская	с	с	н	с	с	с	с	Пермский	в	в	с	в	в	в	в

Окончание табл. 2

Регион	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	Регион	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Вологодская	с	в	с	в	в	в	в	Приморский	с	н	н	с	с	с	с
Воронежская	с	с	н	с	с	с	с	Псковская	с	н	н	с	с	с	с
г. Москва	в	с	в	в	в	в	в	Ростовская	с	н	н	с	с	с	с
г. Санкт-Петербург	в	с	в	в	в	в	в	Рязанская	с	с	с	в	с	с	в
Дагестан	н	н	н	н	н	н	н	Самарская	в	с	с	в	в	в	в
Еврейская АО	с	в	с	с	с	с	с	Саратовская	с	н	с	с	с	с	с
Забайкальский	с	с	с	с	с	с	с	Саха (Якутия)	с	с	с	в	в	в	в
Ивановская	с	н	н	с	с	с	с	Сахалинская	с	с	в	в	в	в	в
Ингушетия	н	н	н	н	н	н	н	Свердловская	в	с	с	в	в	в	с
Иркутская	в	в	в	в	в	в	в	Северная Осетия – Алания	н	н	н	н	н	н	н
Кабардино-Балкарская	н	н	н	н	н	н	н	Смоленская	с	в	с	в	в	в	в
Калининградская	с	с	н	н	с	с	с	Ставропольский	с	н	н	с	с	с	с
Калмыкия	н	н	н	с	с	с	с	Тамбовская	н	н	н	с	с	с	с
Калужская	с	в	с	в	в	в	в	Татарстан	с	н	с	в	в	в	в
Камчатский	с	с	с	в	в	в	в	Тверская	с	в	с	в	в	в	в
Карачаево-Черкесская	н	н	н	н	н	н	н	Томская	в	в	в	в	в	в	в
Карелия	с	в	с	в	в	в	в	Тульская	с	с	н	с	с	с	с
Кемеровская	с	с	н	с	с	с	с	Тыва	с	с	н	с	с	с	н
Кировская	с	н	с	с	с	с	в	Тюменская	в	в	в	в	в	в	в
Коми	в	в	с	в	в	в	в	Удмуртская	с	в	с	в	в	в	в
Костромская	с	н	н	с	с	с	с	Ульяновская	с	н	с	в	в	в	в
Краснодарский	с	с	н	с	с	с	с	Хабаровский	в	в	в	в	в	в	в
Красноярский	в	в	в	в	в	в	в	Хакасия	с	в	с	в	с	с	с
Курганская	с	в	с	с	с	с	с	Челябинская	в	в	с	в	в	в	с
Курская	н	н	н	с	с	с	с	Чеченская	н	н	н	н	н	н	н
Ленинградская	с	с	н	в	в	в	в	Чувашская	с	в	с	в	в	в	в
Липецкая	с	в	н	с	с	с	с	Чукотский АО	с	с	с	с	в	в	в
Магаданская	с	в	с	в	в	в	в	Ярославская	с	с	с	с	с	с	с



Рис. 2. Картограмма распределения региональных СИЖК в 2014 г.

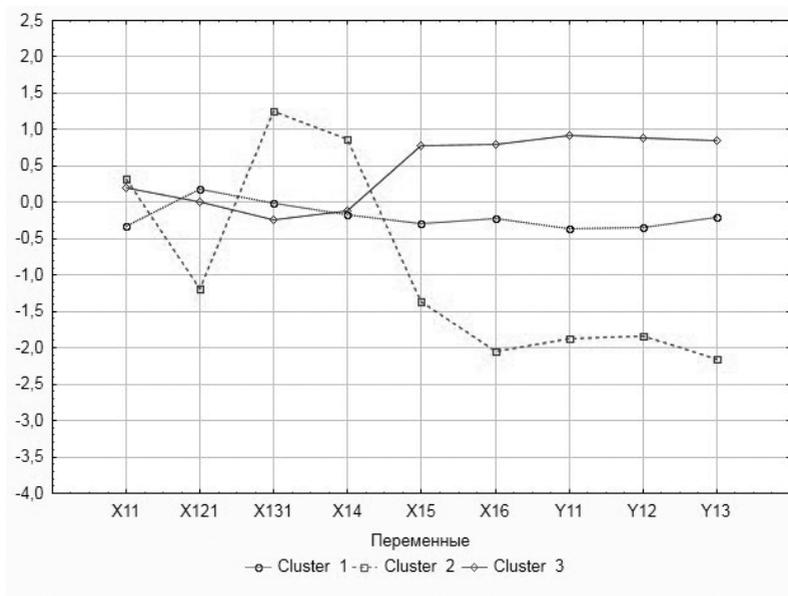


Рис. 3. График средних значений показателей выделенных кластеров в 2014 г.

лей Стратегии развития ипотечного жилищного кредитования в Российской Федерации до 2030 г. в различных регионах. Кроме того, результаты многомерной группировки могут быть учтены кредитными организациями для снижения рисков при определении параметров кредитной политики в тех или иных субъектах Российской Федерации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Показатели рынка жилищного (ипотечного жилищного) кредитования [Электронный ресурс]. URL: <http://www.cbr.ru/statistics/?PrId=ipoteka> (дата обращения: 25.09.2015).
2. Об утверждении Стратегии развития ипотечного жилищного кредитования в Российской Федерации до 2030 года: Распоряжение Правительства РФ от 19.07.2010 № 1201-р // Собрание законодательства РФ. 26.07.2010. № 30. ст. 4118. М., 2010.
3. Корнев В. М., Кобзев А. Ю. Особенности управления кредитным риском экстремально редких событий Понятие региональной системы ипотечного жилищного кредитования и формирование системы статистических показателей для ее характеристики // Экономические науки. 2014. № 10. С. 95–98.
4. Дубров А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л. И. Многомерные статистические методы. М.: Финансы и статистика, 2003. 352 с.

## О ПОСТРОЕНИИ ИНДЕКСА ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАСТРОЕНИЙ БЕЛОРУССКОЙ ЭКОНОМИКИ

**Е. В. Кондратович, Л. С. Гилевская, В. И. Малюгин**

*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*  
E-mail: kondratovichev@gmail.com, l.gilevskaya@gmail.com, Malugin@bsu.by

В работе представляются результаты построения индекса экономических настроений Республики Беларусь в соответствии с гармонизированной системой ОЭСР по данным конъюнктурных опросов нефинансовых организаций, проводимых Национальным банком Республики Беларусь. Результаты совместного анализа индекса экономических настроений и базового экономического индикатора в виде темпов роста реального ВВП дают основание говорить об опережающем характере построенного индекса о отношению к базовому индикатору.

## ON THE CONSTRUCTION OF ECONOMIC SENTIMENT INDICATOR OF BELARUSIAN ECONOMY

**E. V. Kondratovich, L. S. Gilevskaya, V. I. Malugin**

We present the results of constructing an Economic Sentiment Indicator for the Republic of Belarus in accordance with the OECD harmonized system based on surveys of non-financial organizations, conducted by the National Bank of the Republic of Belarus. The results of the joint analysis of the constructed Economic Sentiment Indicator and the basic indicator as real GDP growth give grounds for speak about a leading nature of developed indicator in relation to the basic economic indicator.

## 1. Проблема разработки опережающих экономических индикаторов

Проблемой разработки опережающих экономических индикаторов начали заниматься в первой половине XX века в контексте задачи анализа и обоснования экономических циклов [1–3]. В рамках традиционного подхода к решению данной задачи экономисты исследуют совместную динамику некоторого *сводного индекса опережающих индикаторов* и *базового экономического индикатора*. Наиболее общим показателем экономической активности, который целесообразно применять в качестве базового индикатора, является *реальный валовой внутренний продукт* (ВВП). На практике, однако, использование ВВП в качестве базового индикатора может быть сопряжено с методологическими особенностями формирования статистической информации о данном показателе.

В качестве опережающих экономических индикаторов во многих странах применяются *индексы экономических настроений* – ИЭН (*Economic Sentiment Indexes – ESI*), которые вычисляются по данным конъюнктурных опросов различных категорий участников экономических отношений и оказываются полезными для мониторинга текущей экономической ситуации и прогнозирования возможных изменений в краткосрочном периоде. Методологической основой для расчета *индексов экономических настроений* [4], а также некоторых других опережающих индикаторов служит методология, разработанная Статистическим департаментом Организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР). В соответствии с гармонизированной системой [5, 6] вопросы в анкетах, связанные с оценкой текущего положения в организациях-респондентах, основываются на сопоставлении фактических результатов с «нормальным» уровнем (приемлемым для экономических условий, сложившихся в период проведения обследования). Получаемая на основе конъюнктурных опросов информация носит качественный характер. Результаты обработки ответов представляются в виде простых и сводных индикаторов деловой активности. В качестве простых индикаторов используются балансы ответов (в процентах), определяемые разностью долей респондентов, отметивших «увеличение» и «уменьшение» анализируемого показателя по сравнению с предыдущим периодом, а также разностью долей респондентов, оценивших уровень показателя как «выше нормального» и «ниже нормального» в исследуемом периоде.

Целью данной работы является исследование возможности построения ИЭН для белорусской экономики в соответствии с гармонизированной системой ОСЭР по данным конъюнктурных опросов нефинансовых организаций, проводимых Национальным банком Республики Бе-

ларусь. Практическая реализация гармонизированной системы требует решение ряда проблем, обусловленных методологическими и статистическими особенностями формирования и анализа информации конъюнктурных исследований, включая: выбор подмножества вопросов для построения индикаторов; вычисление базового экономического индикатора (реального ВВП) на месячной основе; определение системы весовых коэффициентов, корректирующих выборочные оценки делового климата; статистическая обработка получаемых временных рядов (выделение сезонных, трендовых и циклических составляющих) с учетом особенностей экономических условий в рассматриваемый период времени.

## 2. Информационная база

Используемые статистические данные включают ответы руководителей предприятий четырех укрупненных видов экономической деятельности (промышленность, строительство, транспорт, торговля) за период с января 2009 по ноябрь 2014 г. (длина временных рядов  $T=47$ ). Ответы на вопросы отражают изменения экономической деятельности, имевшие место по сравнению с 3 предыдущими месяцами, а также ожидания предприятий в течение следующих 3 месяцев. В качестве базового экономического индикатора в данном исследовании используется темп прироста реального ВВП в постоянных ценах 2009 г. с месячной периодичностью, построенный на основе квартальных значений, на основе методологии, описанной в работе [7]. Общее число вопросов анкеты в рамках исследования равно 46. Из них экспертным путем отобрано  $q = 14$  вопросов в соответствии со следующим перечнем.

### *Промышленность:*

- 1) изменение физического объема контрактов на внутреннем рынке;
- 2) изменение физического объема контрактов на внешнем рынке;
- 3) изменение физического объема нереализованной продукции;
- 4) ожидание изменения объемов производства.

### *Строительство:*

- 1) изменение физического объема договоров подряда на внутреннем рынке;
- 2) изменение физического объема договоров подряда на внешнем рынке;
- 3) ожидание изменения численности занятых.

### *Торговля:*

- 1) изменение физического объема нереализованных свыше 3 месяцев товаров;

- 2) изменение физического объема товарооборота;
- 3) ожидание изменения объемов продаж.

*Транспорт:*

- 1) изменение физического объема договоров на перевозки, контрактов на внутреннем рынке;
- 2) изменение физического объема договоров на перевозки, контрактов на внешнем рынке;
- 3) изменение спроса на услуги предприятия;
- 4) ожидание изменения спроса на услуги предприятия.

### 3. Алгоритм построения индекса экономических настроений

Алгоритм построения индекса экономических настроений состоит из следующих основных этапов:

- подсчет балансов ответов (балансов);
- сезонная корректировка временных рядов балансов;
- выделение долгосрочного тренда и циклических компонент в сезонно скорректированных временных рядах балансов;
- вычисление индекса экономических настроений.

**Подсчет балансов ответов.** На основе полученных ответов рассчитываются балансы ответов  $\{X_{i,t}\} (i = \overline{1, q}, t = \overline{1, T})$  ( $q = 14, T = 47$ ) по формуле:

$$X_{i,t} = P_{i,t} - N_{i,t}, \quad (1)$$

где  $P_{i,t}$  – процент положительных ответов на  $i$ -й вопрос в момент времени  $t$ ,  $N_{i,t}$  – процент отрицательных ответов на  $i$ -й вопрос в момент времени  $t$ .

**Сезонная корректировка данных.** Для сезонной корректировки исходных временных рядов, а также базового показателя используется метод *TRAMO/SEATS* [8].

**Выделение долгосрочного тренда и циклических компонент** осуществляется с помощью двукратного применения фильтра Ходрика – Прескотта [9].

**Вычисление индекса экономических настроений.**

На первом этапе осуществляется нормировка балансов ответов  $\{X_{i,t}\} (i = \overline{1, q}, t = \overline{1, T})$  по формулам:

$$Y_{i,t} = \frac{X_{i,t} - \bar{X}_i}{S}, \quad (2)$$

$$\text{где } \bar{X}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{i,t}, S = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (X_{i,t} - \bar{X}_i)^2}.$$

Далее вычисляется средневзвешенная сумма нормированных балансов ответов по формуле

$$Z_t = \sum_{i=1}^{14} \omega_i Y_{i,t}, \sum_{i=1}^{14} \omega_i = 1, \quad (3)$$

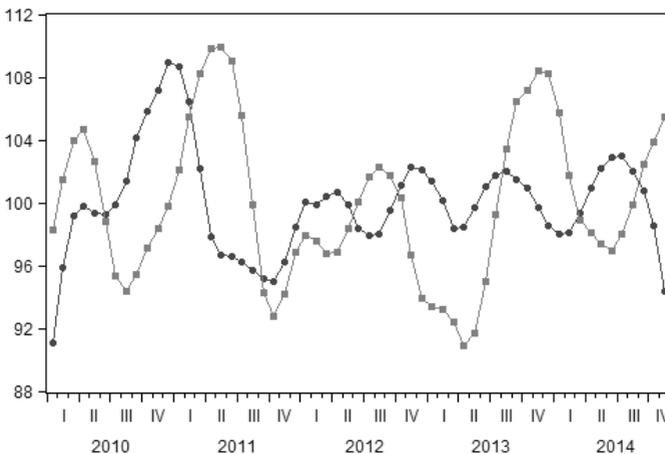
где  $\{\omega_i\}$  – весовые коэффициенты, в качестве которых выступают доли добавленной стоимости в ВВП для рассматриваемых видов экономической деятельности. На последнем шаге рассчитывается сам индекс экономических настроений  $ESI$ , посредством преобразования масштабирования значений  $\{Z_t\}$  по формулам:

$$ESI_t = \frac{Z_t - \bar{Z}}{S_z} \cdot 10 + 100, \quad (4)$$

где  $\bar{Z} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t, S = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Z_t - \bar{Z})^2}$ .

#### 4. Совместный анализ индекса экономических настроений и базового экономического индикатора

Приведем некоторые результаты анализа построенного индекса экономических настроений. На рисунке приводятся графики сезонно сглаженных временных рядов для индекса экономических настроений ( $ESI$ )



Анализ экономических циклов на основе индикаторов ESI и GDP:

● – ESI cycle, ■ – GDP cycle

и темпа прироста реального ВВП (*GDP*) после выделения трендовой составляющей. Ярко выражен циклический характер изменения базового индикатора *GDP* и построенного индекса экономических настроений (ИЭН). Совместный анализ поворотных точек для фаз «роста» и «спада» экономического цикла позволяет предположить опережающий характер построенного индикатора. В качестве иллюстрации опережающего характера построенного индекса экономических настроений в таблице приводятся результаты тестирования причинной зависимости по Грейнджеру [10] между совместно моделируемыми на основе модели VAR(2) переменными: темпом роста ВВП и построенным ИЭН. На основании таблицы можно сделать вывод о том, что нулевая гипотеза: «ИЭН не является причиной изменения темпов прироста ВВП» отклоняется (правая панель таблицы), а гипотеза «изменение темпов прироста ВВП не является причиной для изменения ИЭН» не отклоняется (левая панель таблицы).

#### Результаты теста причинности по Грейнджеру

Лag тестируемой модели	ВВП не является причиной для ИЭН		ИЭН не является причиной для ВВП	
	F-Statistic	Prob.	F-Statistic	Prob.
2	0.06295	0.9391	3.24571	0.0470

Таким образом, результаты статистического и графического анализа временных рядов *GDP* и *ESI* дают основания говорить о построенном индексе экономических настроений как об экономическом опережающем индикаторе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидов О. Различные индексы прогнозирования экономической активности в России // Квантиль. 2008. № 5. С. 83–102.
2. Diebold F. X. Measuring Business Cycles: A Modern Perspective // Review of Economics and Statistics. 1996. № 78. P. 67–77.
3. Малюгин В. И. Об использовании векторных авторегрессионных моделей с перекрывающимися состояниями для анализа и прогнозирования циклов экономической активности // Экономика. Моделирование. Прогнозирование. 2015. Вып. 9. С. 183–196.
4. Индекс экономического настроения (ИЭН ВШЭ) во II квартале 2015 г. М.: НИУ ВШЭ, 2015. 21 с.
5. OECD Composite Leading Indicators – a Tool for Short-term Analysis [Электронный ресурс]. URL: <http://www.oecd.org/std/li1.htm> (дата обращения: 12.09.2015).
6. Directorate-General for Economic and Financial Affairs. The joint harmonised EU programme of business and consumer surveys // European Commission. 2014. P. 49. Analysis [Electronic resource]. URL: [http://ec.europa.eu/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/index_en.htm) (date of reading: 15.09.2015).

7. Крук Д., Кориун А. Экономический цикл и опережающие индикаторы: методологические подходы и возможности использования в Беларуси. Минск: Исслед. центр ИПМ, 2010.

8. Eurostat ESS Guidelines on Seasonal Adjustment // Eurostat Methodologies and Working Papers, European Commission. 2009. [Electronic resource]. URL: [http://ec.europa.eu/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/index_en.htm) (date of reading: 16.09.2015).

9. Hodrick R., Prescott E. Postwar U. S. Business Cycles: an Empirical Investigation // Journal of Money and Banking. 1997. Vol. 29 (1). P. 1–16.

10. Granger C. Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods // Econometrica. 1969. № 37. P. 424–438.

## **РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ НА РЫНКЕ НЕДВИЖИМОСТИ**

**А. Д. Луньков**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: [alunkov@yandex.ru](mailto:alunkov@yandex.ru)

По данным за 2005–2013 гг. построена пространственная эконометрическая модель, объясняющая изменение цены квадратного метра жилой площади в регионах России.

### **SPATIAL PANEL DATA MODELS FOR REAL ESTATE**

**A. D. Lunkov**

According to data for the years 2005–2013 we consider spatial regression model which explain the change of average price of residential real estate in the Russian regions.

Специфика жилья как неперемещаемого товара длительного пользования вызывает особый интерес в задачах ценообразования. Наличие доступного жилья является одним из факторов, обеспечивающих стабильность в современном обществе. Выявление факторов, влияющих на стоимость жилья, является весьма актуальной задачей. Методики современных эконометрических исследования в значительной мере меняются. Безусловно, нельзя не учитывать местоположение объекта, цена которого интересует исследователя, и тот факт, что цены в связанных неким соседством единицах наблюдения изменяются вместе. Население становится более мобильным, что способствует перетоку жителей из одних регионов в другие и вносит новые зависимости в процесс ценообразования. В 21-м веке широко используются методы пространственной эконометрики, позволяющие использовать информацию о географическом положении единиц наблюдения, взаимосвязях между этими единицами. Весовые матрицы, используемые для описания характера и степени силы этих связей между объектами, позволяют

рассматривать самые разные виды взаимодействия между регионами: как определяемые географической близостью, так и иные, менее очевидные – связанные с торговыми, миграционными потоками. Чаще всего в качестве меры географической близости обычно рассматриваются величина, обратно пропорциональная расстоянию (например, по автомобильным дорогам), индикатор соседства или индикатор того факта, что общая граница больше некоторой пренебрежимо малой величины,

Ценообразование на рынке недвижимости – одно из основных, всегда актуальных приложений регрессионного анализа. В работах, связанных с анализом российских данных, пространственный аспект учитывается не слишком часто. В качестве примеров работ данной тематики, связанных с анализом рынка жилья, можно отметить [1]. Пространственно-эконометрические работы [2, 3] связаны с конвергенцией регионов.

Отметим, что большинство регрессионных моделей используют в качестве единицы наблюдения квартиру, выставленную тем или иным продавцом. Таким образом, в качестве зависимой переменной необходимо рассматривать цену квартиры или квадратного метра жилой площади. В качестве регрессоров принято использовать показатели качества жилья. Недавние работы в этой области, например [4], посвящены анализу транспортной доступности в городе-«миллионнике». Такие исследования для учета пространственного фактора широко используют и современную методику географического взвешивания, но классические пространственные регрессионные модели здесь неприменимы, так как квартира не является устойчивой во времени единицей наблюдения на рынке жилья. Квартиры в тот или иной момент появляются в списке предложений на продажу, период этот в среднем довольно непродолжителен. Квартиры могут выставляться на продажу и вновь, но рассчитывать на повторение этого процесса это сколь-нибудь часто нельзя.

Учитывать фактор времени можно лишь при рассмотрении региональных цен. Единицами наблюдения могут быть регионы (края, области, республики или же муниципальные образования), страны. Для таких объектов можно применять методику панельных данных.

В качестве переменных, объясняющих уровень цен, принято использовать показатели экономического развития, характеристики демографических процессов, уровня преступности.

Известны модели, объясняющие уровень цен на недвижимость в Лондоне, его самоуправляемых районах. Специфика моделей, построенных по английским данным, заключается в том, например, что

налоги, связанные с недвижимостью, могут варьироваться в различных административных единицах. Некоторые данные, относящиеся к системе образования, тоже видятся неприменимыми в российских реалиях.

Обычная практика – в качестве российских единиц наблюдения использовать регионы (края, области, республики). Возможно и включение автономных областей после разделения информации о них и информации о тех регионах, частью которых автономии являются. Таким образом, после рассмотрения данных, полученных на сайте Росстата, можно получить информацию о 68 округах. Исключены из выборки ввиду недостатка информации по некоторым показателям Астраханская, Мурманская, Курганская, Магаданская, Сахалинская области, Чукотский автономный округ, Тыва, Ингушетия, Кабардино-Балкария, Карачаево-Черкесия, Северная Осетия, Чечня. Административно-территориальная структура России за последние годы менялась, потому регионы, с которыми были связаны такие изменения, затруднительно использовать при анализе без уточняющих расчетов. Заметим, что в некоторых работах, например в [3], Россия делится на две части – условно азиатскую и европейскую, восточную и западную. Предполагается, что характер влияния восточных и западных регионов друг на друга и внутри группы меняется.

По данным Росстата построена эконометрическая модель, объясняющая зависимость цены квадратного метра жилой площади в регионах России от набора социально-экономических факторов. Рассматривался период с 2005 по 2013 гг. Безусловно, в общем случае в качестве зависимой переменной может быть взята и некоторая функция данной цены, например логарифм, или же прирост цены за год. В зависимой переменной также может учитываться инфляция.

Выбрана спецификация с фиксированным эффектом, выбор обоснован применением стандартного теста. Рассматривается классическая модель пространственного лага для панельных данных. Методика оценивания соответствует [5]:

$$y_t = \lambda W y_t + X_t \beta + a + v_t + \varepsilon_t.$$

Эффекты года не учитываются. Пространственная зависимость, относящаяся к ошибке или регрессорам, тоже не рассматривается.

Рассчитан тест Морана на наличие пространственной корреляции, связанной с зависимой переменной, для каждого года. Практически для каждого года автокорреляция значима.

Рассчитаны оценки индивидуальных эффектов. Наибольшие величины соответствуют, в частности, Москве, Санкт-Петербургу, Тюменской

области. Наименьшие значения связаны в основном с центральными и северо-западными областями.

Заметим, что знаки коэффициентов не противоречат естественным тенденциям (в частности, это касается отрицательного знака при коэффициенте, отвечающем за уровень преступности).

В качестве независимых переменных выбраны число тяжких преступлений на душу населения, доход населения, плотность населения.

Расчеты для двух видов весовых матриц не меняют общей тональности выводов (таблица).

**Результаты оценивания параметров регрессионной модели  
(для матрицы расстояний)**

Показатель	Оценка коэффициента	Стандартная ошибка	Z-статистика	P-значение
Income	0.831416	0.1983884	4.19	0.000
Density	150.1077	12.68321	11.84	0.000
Crime	-8.328427	2.996905	-2.78	0.005
W*price	0.8352178	0.0385083	21.69	0.000

Таким образом, ценообразование на рынке жилой недвижимости нельзя рассматривать в каждом регионе по отдельности. Для построения адекватных моделей необходимо учитывать пространственный фактор.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаш В. А., Балаш О. С., Харламов А. В. Эконометрический анализ геокодированных данных о ценах на жилую недвижимость. // Прикладная эконометрика. 2011. № 22 (2). С. 62–77.
2. Вакуленко Е. С. Ведет ли миграция населения к межрегиональной конвергенции в России? // Вестн. НГУЭУ. 2013. № 4. С. 239–264.
3. Демидова О. А. Пространственно-авторегрессионная модель для двух групп взаимосвязанных регионов (на примере восточной и западной части России) // Прикладная эконометрика. 2014. № 34 (2). С. 19–35.
4. Сидоровых А. С. Оценка влияния транспортной доступности на цены недвижимости // Прикладная эконометрика. 2015. № 37 (1). С. 55–67.
5. Elhorst J. P. Spatial Econometrics From Cross-Sectional Data to Spatial Panels. Berlin : Springer, 2014.

**ИНДИКАТОР НА ОСНОВЕ  
ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ЦЕН  
И ОБЪЕМА ТОРГОВ:  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ**

**А. В. Макаров, С. И. Дудов**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*  
E-mail: Alexander-Makarov93@yandex.ru, DudovSI@info.sgu.ru

Предлагается индикатор рынка ценных бумаг, основанный на решении вспомогательной задачи по полиномиальному приближению траектории цен и объемов торгов в двумерном пространстве. Приводятся и анализируются результаты тестирования прогнозных свойств индикатора на реальных данных.

**INDICATOR BASED ON APPROXIMATING  
A TRAJECTORY OF PRICES  
AND VOLUME OF TRADES:  
SIMULATION EXPERIMENTS**

**A. V. Makarov, S. I. Dudov**

Security market Indicator based on solving the auxiliary problem of polynomial approximation of prices and volume of trades' trajectory in two-dimensional space was considered. The results of testing the prognostic indicator properties on the real data were presented and analyzed.

Пусть функция  $f_1(t)$  отражает поведение цены актива, а функция  $f_2(t)$  выражает соответствующий объем торгов в моменты времени  $\{t_i\}_{i=1..p}$ :  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ . Обозначим через  $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$  – алгебраический полином степени  $n$  с вектором коэффициентов  $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ , а через  $P_m(B, t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_mt^m$  – полином степени  $m$  с вектором коэффициентов  $B = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m) \in R^{m+1}$ . Рассмотрим задачу

$$\rho(A, B) = \max_{t \in \{t_i\}_{i=1..p}} \max\{|f_1(t) - P_n(A, t)|, |f_2(t) - P_m(B, t)|\} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}, B \in R^{m+1}}. \quad (1)$$

Целевая функция  $\rho(A, B)$  экстремальной задачи (1) выражает максимальное отклонение траектории цен и объемов торгов  $F(t) = \{f_1(t), f_2(t)\}$  от полиномиальной траектории на системе узлов  $\{t_i\}_{i=1..p}$ .

Если пара  $(A^*, B^*) \in R^{n+m+2}$  является одним из решений задачи (1), то значения  $P_n(A^*, t_{p+1})$  и  $P_m(B^*, t_{p+1})$  можно предложить в качестве прогнозных значений цены и объема в момент времени  $t_{p+1} > t_p$ .

Важным обстоятельством при практическом решении задачи (1) является то, что она сводится к задаче линейного программирования [1].

В качестве значений индикатора, дающего прогнозные значения цены и объема торгов, соответственно берутся величины

$$C(n, m, p, t_{i+1}) = P_n(A_i, t_{i+1}), V(n, m, p, t_{i+1}) = P_m(B_i, t_{i+1}),$$

где  $(A_i, B_i) \in R^{n+1} \times R^{m+1}$  – одно из решений задачи (1) на сетке узлов  $\{t_{i-p}, t_{i-p+1}, \dots, t_i\}$ . При тестировании эти величины подсчитывались для  $i = p, p+1, \dots, N$ , где  $t_N$  – конечная точка отслеживания данных.

Прогнозные свойства индикатора оцениваем по величинам максимального отклонения от реальных данных, то есть по

$$C_{n,m,p} = \max_{i \in [p:N-1]} |f_1(t_{i+1}) - C(n, m, p, t_{i+1})|,$$

$$V_{n,m,p} = \max_{i \in [p:N-1]} |f_2(t_{i+1}) - V(n, m, p, t_{i+1})|.$$

Тестирование индикатора проводилось на примере курса цен и объемов торгов акций ОАО «Сбербанк» за период времени с 13.01.2014 по 28.03.2014. Вычислительные эксперименты проводились для параметров  $n$  и  $m$  в диапазоне от 2 до 5, для  $p = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ .

Проиллюстрируем работу индикатора для  $n=2, m=2, p=5$  (рис. 1–3).

Анализ результатов тестирования показал, что лучшие прогнозы индикатора, основанного на приближении тренда цен и объёма торгов, достигаются при увеличении степени  $n$  полинома  $P_n(A, t)$  и степени  $m$  полинома  $P_m(B, t)$ , при рассмотрении на достаточно малом количестве узлов (от 5 до 10 узловых точек). При  $n = 3, m = 4, p = 5$ , максимальное отклонение цены от исторических данных на всём пространстве узлов составило 9,84 рубля, или 12% от реальной цены акции, при этом средний процент отклонения цены от исторических данных составил 3%.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2781.2012.2) и РФФИ (проект № 12-07-00057).*

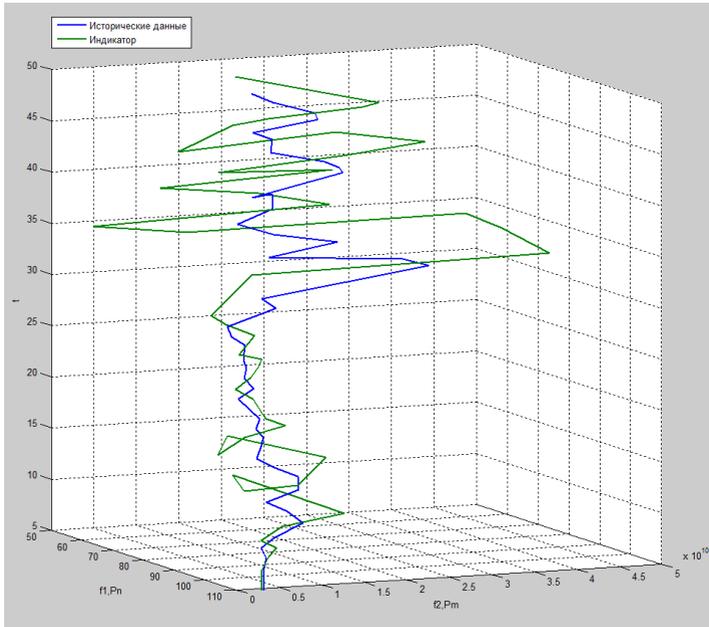


Рис. 1. График траектории цены и объёма торгов и индикатора  $(C(2,2,5,t), V(2,2,5,t))$

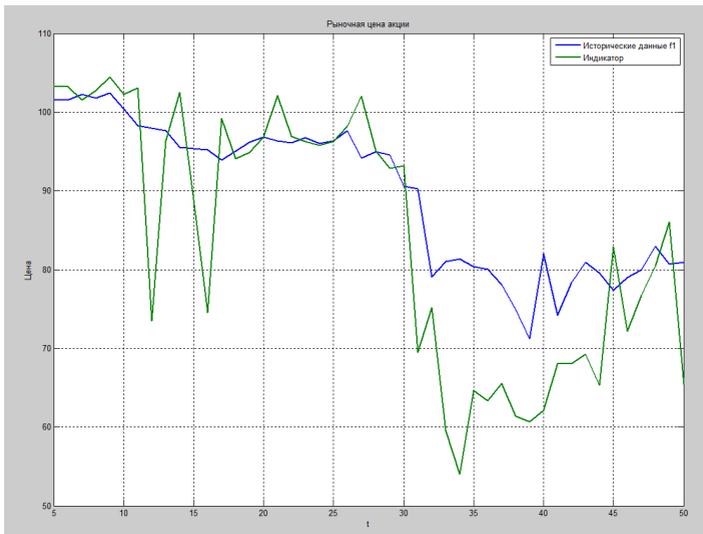


Рис. 2. График траектории цены и индикатора  $C(2,2,5,t)$

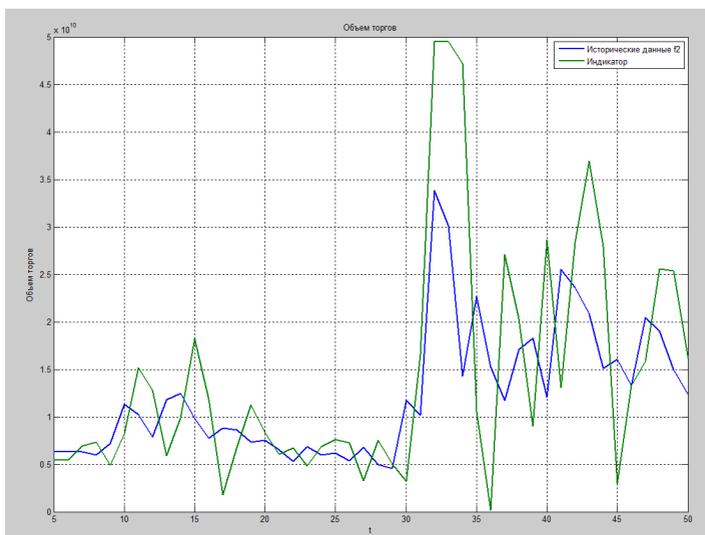


Рис. 3. График траектории объема торгов и индикатора  $V(2, 2, 5, t)$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров А. В., Дудов С. И. Разработка индикатора на основе приближения траектории цен и объема торгов // Математическое моделирование в экономике и управление рисками»: материалы III Междунар. молодежной науч.-практ. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. С. 55–61.

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ РЫНОЧНОЙ ДОЛИ СТРОИТЕЛЬНОЙ КОМПАНИИ

**В. М. Милешина**

*Саратовский социально-экономический институт (филиал)  
Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*

E-mail: mielieshina.varia@mail.ru

В работе исследуется временной ряд показателя рыночной доли строительной компании на наличие тенденции. Обосновывается целесообразность применения модели авторегрессии для прогнозирования ее рыночной доли.

## STATISTICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF MARKET SHARE BUILDING

**V. M. Mileshina**

This paper examining the time series of the index's market share in the construction of a trend. The expediency of application autoregression model to predict its market share.

Одним из показателей, характеризующих деятельность строительной организации, является коэффициент рыночной доли (рис. 1), который показывает долю, занимаемую на рынке [1]:

$$\text{КРД} = \frac{\text{ОП}}{\text{ООПР}}, \quad (1)$$

где ОП – объем продаж зданий;

ООПР – общий объем продаж зданий на рынке.

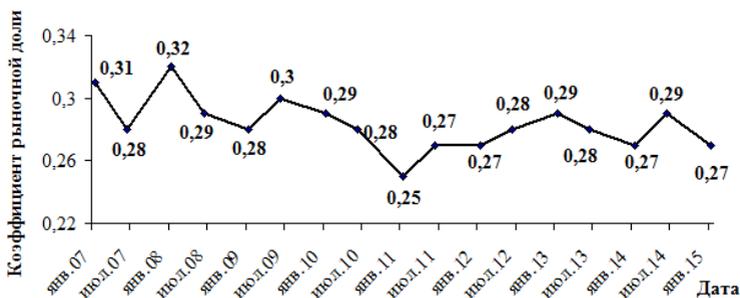


Рис. 1. Динамика коэффициента рыночной доли строительной компании

Для выявления наличия тенденции во временном ряде показателя используем автокорреляционную функцию [2], рассчитанную по уровням ряда (рис. 2, а) и их логарифмам (рис. 2, б), а также сравнение средних уровней ряда [3].

Для обеспечения статистической достоверности коэффициентов автокорреляции максимальный лаг (порядка коэффициента автокорреляции) не должен превышать 4:

$$\text{Величина лага} = \frac{n}{4}. \quad (2)$$

Низкие значения коэффициентов автокорреляции свидетельствуют о слабой зависимости текущих уровней ряда от непосредственно им предшествующих уровней, т.е. об отсутствии тенденции во временном ряде коэффициента рыночной доли.

Сравнение средних уровней ряда предполагает, что исходный временной ряд разбивается на две приблизительно равные части по числу членов ряда.

Проверим основную гипотезу о равенстве средних значений с использованием *t*-критерия Стьюдента, предварительно проверив гипотезу

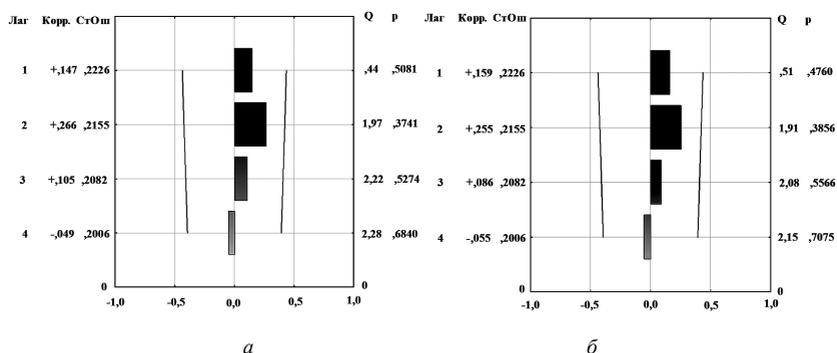


Рис. 2. Автокорреляционная функция временного ряда коэффициента рыночной доли: *a* – рассчитанные по уровням ряда; *б* – по их логарифмам

о равенстве (однородности) дисперсий обеих частей ряда с помощью *F*-критерия (табл. 1).

Таблица 1

Результаты сравнения двух дисперсий на основе ряда динамики коэффициента рыночной доли

Показатель	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	0,294	0,274
Дисперсия	0,00023	0,00015
Наблюдения	8	9
<i>df</i>	7	8
<i>F</i>	1,484	
<i>P(F &lt;= f)</i> одностороннее	0,295	
<i>F</i> критическое одностороннее	3,500	

Так как  $F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}}(0,05;7;8)$ , то с вероятностью 95% нет оснований отвергать нулевую гипотезу, выборочные дисперсии различаются незначимо и расхождение между ними есть величина случайная.

Проверку гипотезы о равенстве средних осуществим используя *t*-тест с одинаковыми дисперсиями (табл. 2).

Фактическое значение *t*-критерия не превышает его критическое значение, следовательно, расхождение между средними для данных групп не существенно.

Таблица 2

**Результаты сравнения двух средних двухвыборочным *t*-тестом с одинаковыми дисперсиями**

Показатель	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	0,294	0,274
Дисперсия	0,00023	0,00015
Наблюдения	8	9
Объединенная дисперсия	0,00019	
Гипотетическая разность средних	0	
<i>df</i>	15	
<i>t</i> -статистика	2,03	
$P(T \leq t)$ одностороннее	0,005	
<i>t</i> критическое одностороннее	1,753	
$P(T \leq t)$ двухстороннее	0,011	
<i>t</i> критическое двухстороннее	2,131	

Отсутствие тенденции во временном ряде рассматриваемого показателя приводит к тому, что в подобных случаях нельзя применять для описания тенденции аналитическое выравнивание [4, 5] и целесообразно применить модель авторегрессионного процесса первого порядка [6, 7].

Так как исследуемый ряд стационарный, его не нужно преобразовывать и для построения модели AR (1,0,0) задаем значение порядка авторегрессии  $p = 1$  и получим модель

$$\tilde{y}_t = 0,98852y_{t-1}; p\text{-level} = 0,0000. \quad (3)$$

В результате получаем табл. 3.

Таблица 3

**Прогнозные значения модели AR(1,0,0) коэффициента рыночной доли**

Дата	Прогноз	Нижний 95%	Верхний 95%	Стандартная ошибка
01.06.2015	0,27	0,13	0,41	0,08

Проведенное исследование позволило констатировать, что временной ряд коэффициента рыночной доли строительной компании является стационарным и для построения прогноза следует использовать модель авторегрессии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпина Ю. С., Цыпин А. П.* Статистические методы в изучении ипотечного жилищного кредитования России // Новый университет. Сер.: Экономика и право. 2012. № 6. С. 10–13.
2. *Носов В. В.* Экономическая устойчивость сельскохозяйственного производства. Саратов, 1999. 28 с.
3. *Цыпин А. П.* Методика статистического исследования исторических временных рядов макроэкономических показателей России // Формирование основных направлений развития современной статистики и эконометрики: Материалы I Междунар. науч. конф. Оренбург, 2013. С. 304–311.
4. *Прокофьев В. А.* Статистические методы анализа социально-экономического развития административно-территориальных образований. Саратов, 2008. 288 с.
5. *Носов В. В., Цыпин А. П.* Исследования показателей работы железнодорожного транспорта на основе исторических временных рядов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 81–84.
6. *Hill R. C., Griffiths W. E., Lim G. C.* Principles of econometrics. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2012. 758 p.
7. *Nosov V. V., Kotar O. K., Kosheleva M. M., Alajkina L. N., Novikova, N. A.* Assessing effectiveness of insurance premium subsidy in agricultural insurance // Ecology, Environment and Conservation. 2014. Vol. 20, № 4. P. 475–481.

### **МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНО-НАКОПИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПЕНСИОННОГО СТРАХОВАНИЯ: КРИТЕРИИ, ДОПУЩЕНИЯ, ФАКТОРЫ**

**С. С. Михайлова**

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,  
Улан-Удэ, Россия*

E-mail: ssmihailova@mail.ru

В данной статье изложены основные предположения для построения актуарной модели пенсионной системы, определены критерии к соотношению накопительного и распределительного методов финансирования. Исследована динамика коэффициента размещения при различных методах и формах пенсионного страхования. Определен общий вид модели распределительно-накопительного механизма пенсионного страхования.

### **MODEL THE DISTRIBUTION OF THE CUMULATIVE PENSION INSURANCE SYSTEM: CRITERIA, ASSUMPTIONS, FACTORS**

**S. S. Mikhaylova**

This article outlines the main assumptions for construction of actuarial models of the pension system, defined the criteria for the ratio of the cumulative distribution and financing methods. Investigated dynamics of the replacement rate in different methods and forms of pension insurance. Defines general view of the model distribution and accumulative mechanism of pension insurance.

Актuarные исследования по вопросам пенсионного обеспечения в постсоветской России начали развиваться лишь с начала 90-х гг. XX в. В основном это были актуарные разработки в области имущественного страхования и страхования жизни. Внимание, уделяемое в отечественной актуарной литературе пенсионным расчетам, значительно меньше.

Современные актуарные исследования пенсионной системы можно разделить на три группы:

- демографическое моделирование и прогнозирование, являющееся обязательным элементом актуарных расчетов в части построения таблиц смертности, таблиц выживания, расчета чистой цены страхования;
- актуарное обоснование параметров пенсионной системы, в том числе размера страховых взносов, пенсионного возраста, периода выплаты пенсий;
- оценка текущей и перспективной финансовой состоятельности пенсионной системы на основе составления актуарного баланса.

Реализация принципов пенсионной системы требует наличия долгосрочного прогноза состояния и развития пенсионной системы, в основе которой лежат макроэкономический и демографический прогнозы развития страны. Аналитическим инструментом долгосрочного моделирования пенсионной системы является актуарная модель.

Актuarная модель пенсионной системы представляет собой совокупность взаимосвязанных моделей, отражающих процесс формирования и расходования пенсионных средств. Актuarная модель позволяет определить состояние пенсионной системы в каждый период времени при заданных параметрах пенсионной системы, макроэкономической и демографической ситуации [1]. Наличие качественной актуарной модели является неотъемлемым условием разработки мер по совершенствованию национальной пенсионной системы.

Актuarное моделирование развития распределительно-накопительной системы пенсионного страхования требует учета соотношения и сбалансированности каждой его компоненты. Баланс распределительного элемента достигается на каждом отрезке времени путем регулирования ставок взносов на обязательное пенсионное страхование, размера пенсий, финансируемых за счет текущих взносов в пенсионную систему. Объективным условием устойчивости распределительной части пенсионного страхования является приемлемый уровень страховых взносов для работодателей, высокий уровень собираемости пенсионных взносов. Баланс накопительного элемента в долгосрочной перспективе

зависит от добросовестности и надежности страховщика, устойчивости и развитости финансовых рынков.

Соотношение доли пенсий, обеспечиваемых за счет распределительного и накопительного метода финансирования, зависит, в первую очередь, от половозрастной структуры населения: соотношения численности населения в трудоспособном возрасте и численности населения старше трудоспособного возраста, а также в долгосрочной перспективе от типа воспроизводства населения. При этом данное соотношение может изменяться во времени под воздействием демографических и социально-экономических процессов в обществе. Российская модель пенсионной системы подразумевает в перспективе сокращение распределительной и увеличение накопительной доли финансирования, что позволит преодолеть последствия ухудшения демографической ситуации в стране.

Представим основные предположения для построения актуарной модели, касающиеся развития основных показателей пенсионной системы в динамике. Для экономики, находящейся в стадии трансформации характерно изменение во времени основных параметров пенсионной системы. Стабилизация экономической ситуации, как правило, сопровождается стабилизацией размера взносов на пенсионное обеспечение. При этом существуют оптимальные уровни взносов на финансирование текущих пенсионных выплат в рамках распределительного метода финансирования пенсий и взносов в рамках накопительного метода финансирования пенсий (рис. 1).

В любом социально ориентированном государстве является обязательным наличие распределительного механизма, обеспечивающего минимальный уровень социальной гарантии для нетрудоспособных граждан независимо от их участия в процессе создания общественного продукта. Размер социальных гарантий и определяет ставку взносов на финансирование выплат текущим пенсионерам, который в долгосрочной перспективе стремится к некоторому фиксированному (оптимальному) уровню.

Размер взносов на финансирование накопительной пенсии должен устанавливаться на уровне, достаточном для обеспечения достойного уровня будущей пенсии и приемлемом для страхователя в текущий момент времени. В целом размер взносов на обязательное пенсионное страхование должен устанавливаться с учетом положений «кривой Лаффера», которая отображает зависимость между совокупным объемом поступления обязательных платежей и размером ставок по ним.

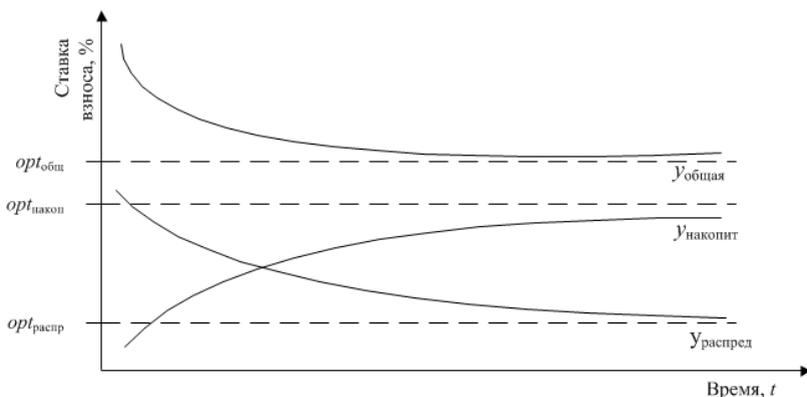


Рис. 1. Динамика размера взносов в распределительно-накопительном пенсионном страховании

Основным критерием эффективности функционирования пенсионной системы является соотношение размеров назначенной пенсии и утраченного трудового дохода, который принято называть коэффициентом замещения. Введение накопительного элемента в пенсионную систему существенно расширяет ее возможности по увеличению размера пенсионных выплат в перспективе, так как источником финансирования накопительной пенсии являются не только средства, накопленные на протяжении трудовой деятельности, но и инвестиционный доход, полученный от их размещения в финансовые инструменты (рис. 2).

Как показывает практика развитых стран, коэффициент замещения пенсией утраченного трудового заработка в рамках обязательного пенсионного страхования не превышает 100%. Инструментом увеличения размера пенсии является добровольное пенсионное страхование, в котором размер будущей пенсии определяется индивидуальными возможностями и предпочтениями застрахованного лица. Развитие добровольного пенсионного страхования также находится в прямой зависимости от социально-экономических процессов в стране (рис. 3).

Основным математическим условием накопительного пенсионного страхования является эквивалентность современной стоимости взносов и современной стоимости выплаченных пенсий. Для приведения потока платежей к современной стоимости применяется процедура дисконтирования каждого члена ренты. Также условием накопительного пенсион-

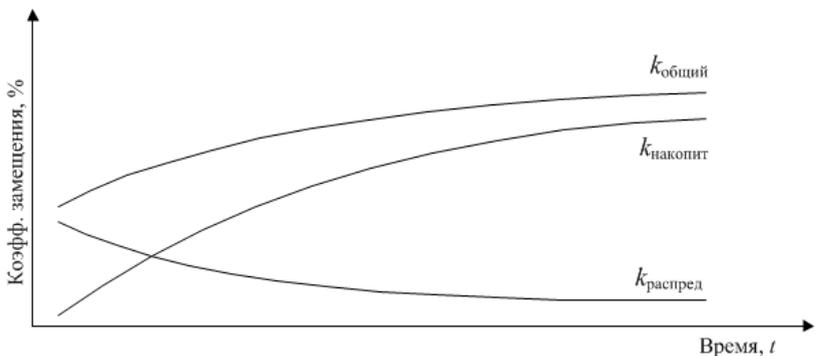


Рис. 2. Динамика коэффициента замещения трудовых доходов в распределительно-накопительном пенсионном страховании

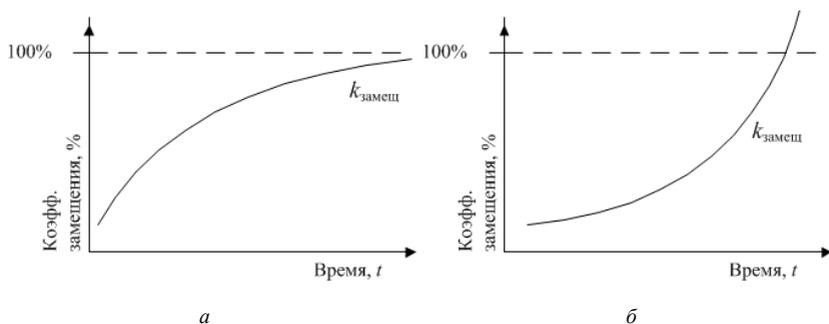


Рис. 3. Динамика коэффициента замещения трудовых доходов в пенсионном страховании: а – обязательном; б – добровольном

ного страхования является получение инвестиционного дохода, соответственно возникает потребность в начислении процентов на сумму поступивших взносов и полученного инвестиционного дохода в предыдущих периодах, то есть определении наращенной стоимости потока платежей. Для ее определения применяется формула наращения по сложным процентам. На рис. 4 представлен процесс пенсионного страхования.

Математическая модель накопительного пенсионного страхования имеет следующий вид:

$$A_P = A_R,$$

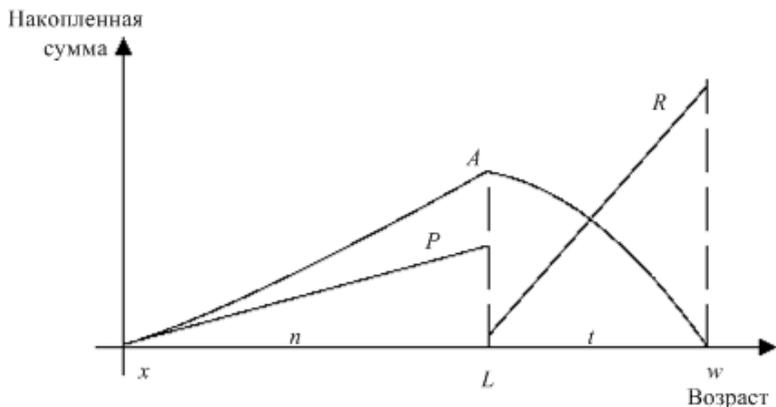


Рис. 4. Динамика накопления и выплаты пенсионных средств:  $A$  – пенсионные накопления;  $P$  – взносы на пенсионное страхование;  $R$  – пенсионные выплаты;  $x$  – возраст застрахованного на момент заключения договора страхования;  $L$  – возраст выхода на пенсию;  $w$  – возраст в момент окончания договора;  $n$  – срок накопления,  $n = L - x$ ;  $t$  – срок выплаты пенсии,  $t = w - L$

где  $A_P$  – современная стоимость взносов на пенсионное страхование,  $A_R$  – современная стоимость выплат пенсионных накоплений, то есть приведенная стоимость взносов на пенсионное страхование времени должна быть эквивалентна приведенной сумме пенсионных выплат в заданный момент времени, например, в момент заключения договора страхования. В условиях стабильной экономики предпочтительнее превышение периода уплаты взносов над периодом получения пенсии. Длительный период накопления пенсионных средств позволяет уменьшить размер текущего взноса при увеличении общего объема инвестиционного дохода (рис. 5).

Если условием выплаты пенсии при рисковом страховании является не только достижение пенсионного возраста, но и другие причины, например, наступление инвалидности, тогда для определения размера страховых взносов используются таблицы выживания. Таблицы выживания учитывают прекращение страхования по ряду причин. Основным условием построения таблиц выживания является независимость и взаимоисключаемость причин выживания. В пенсионном страховании учитываются следующие факторы:

- наступление смерти застрахованного лица;
- прекращение договора страхования;
- постоянная потеря трудоспособности (наступление инвалидности);

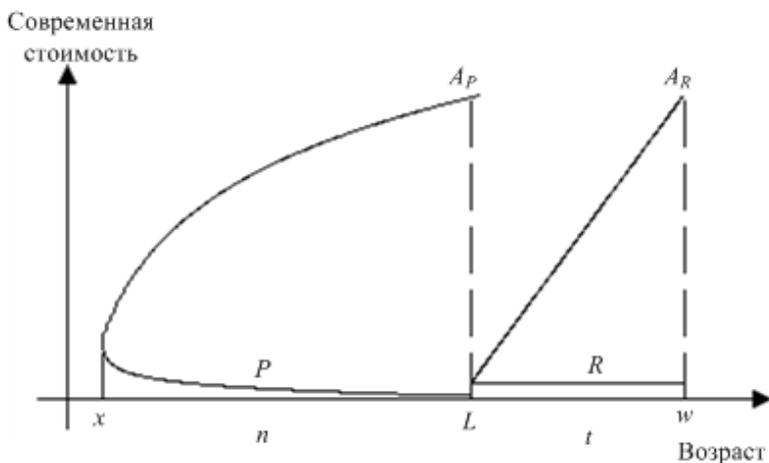


Рис. 5 Модель накопительного пенсионного страхования:  $A_P$  – современная стоимость взносов;  $A_R$  – современная стоимость выплаченных пенсий;  $P$  – периодические взносы на пенсионное страхование;  $R$  – периодические пенсионные выплаты;  $x$  – возраст застрахованного на момент заключения договора страхования;  $L$  – возраст выхода на пенсию;  $w$  – возраст в момент окончания договора;  $n$  – срок накопления,  $n = L - x$ ;  $t$  – срок выплаты пенсии,  $t = w - L$

– наступление пенсионного возраста [2, с. 6].

В общем виде математическая модель распределительно-накопительного пенсионного страхования представляет собой систему балансовых уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} I_t = E_t \\ A_P = A_R \end{cases},$$

где  $I_t$  – доходы распределительной составляющей пенсионной системы в момент времени  $t$  (сумма страховых взносов на выплату страховой части трудовой пенсии);  $E_t$  – расходы распределительной составляющей пенсионной системы в момент времени  $t$  (сумма выплат страховой части трудовой пенсии);  $A_P$  – современная стоимость взносов на накопительную часть трудовой пенсии,  $A_R$  – современная стоимость выплат накопительной части трудовой пенсии.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (НСШ-2781.2012.2) и РФФИ (проект № 12-07-00057).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ешеева И. Р.* Корреляционный анализ демографических показателей Республики Бурятия // *Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире.* 2014. Т. 1, № 6. С. 147–150.
2. *Сивагинский С. В.* Методы построения таблиц смертности. СПб., 2006. 36 с.

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**Д. Р. Мустафина**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия*

E-mail: shokoladka11-93@mail.ru

В статье рассматриваются подходы системной динамики, дискретно-событийного и агентного моделирования. Представлены преимущества метода имитационного моделирования и этапы построения моделей на его основе. Приведен краткий обзор и анализ метода имитационного моделирования под названием «метод Монте-Карло». Отмечается невозможность исследования экономических систем без построения моделей протекающих в них процессов. Развитие информационных технологий выводит процессы изучения систем на новый уровень. Метод имитационного моделирования является актуальным и востребованным на сегодняшний день, а значит, будет продолжаться развитие и совершенствование систем имитационного моделирования.

## SIMULATION MODELING OF ECONOMIC PROCESSES

**D. R. Mustafina**

The article examines the system dynamics approaches, discrete event and agent-based modeling. There are presented the advantages of simulation method and steps of constructing models which are based on it. A brief review and analysis of the simulation method called «Monte Carlo method» are adduced. There is noted the impossibility of research of economic systems without the construction of models of processes occurring in them. The development of information technologies brings the processes of learning systems to a new level. Simulation method is relevant and demanded today, and hence there will continue the development and improvement of simulation systems.

Модель – это новый объект, отражающий все главные особенности предмета, который изучается. Во всех сферах науки их исследуют под разными углами зрения. Один и тот же объект может иметь несколько моделей, в то время как их множество может отражаться в одной. Она необходима нам для того, чтобы была возможность что-то представить или описать. К примеру, при разработке нового двигателя самолета конструкторы должны проверить его процесс в сложных полетных условиях. Ведь осуществить такое в реальности – это подвергнуть опасности летчика-испытателя. Поэтому возможные условия полета можно симулировать на специальных стендах.

Отсюда следует, что моделирование – это безопасность и широкий диапазон условий. Любая модель, так или иначе, должна соответствовать объекту, причем она может быть схожа с ним по внешнему виду, структуре, поведению. Моделирование – это главный метод познания, который состоит из создания и исследования объектов. Его используют для получения полной информации об изучаемом процессе, которая необходима для оптимального решения поставленных задач. Но в то же время никакая модель не может заменить реального события. Только лишь при решении каких-то конкретных задач она может оказаться полезным, а иногда и единственным инструментарием исследования [1–9].

Моделирование – это:

- замена реального процесса его имитацией;
- построение модели реально существующих объектов или событий;
- исследование на созданном образце.

Из всего вышесказанного следует, что моделирование – это неотъемлемая часть любой целенаправленной деятельности.

Моделирование систем условно делится на 3 класса:

- 1) материальное;
- 2) абстрактное;
- 3) информационное [3, с. 83].

Естественные языки предназначены для создания отображающих информационных моделей. Формальные же позволяют строить внешние образцы. Этот процесс называется формализацией. Одним из самых распространенных формальных языков является математический – именно он позволяет сформулировать функциональность между величинами. Таким способом Ньютон осуществил формализацию гелиоцентрической системы мира, прежде открыв закон всемирного тяготения и закон механики и записав их в виде математических зависимостей.

Существует множество методов моделирования и изучения экономических процессов. Они как специфические, так и общенаучные. Общенаучные: синтез, анализ, индукция, дедукция, абстрагирование, аналогия, конкретизация [8]. Все они выявляют закономерности, существующие в устойчивых явлениях или процессах.

Методы специфические ориентированы на отражающие экономические процессы информационные явления, такие как:

- математические: детерминированное, стохастическое, имитационное, оптимизационное и сетевое моделирование, нечеткая математика, математический, системный, факторный, регрессионный и иные виды анализа;

– информационно-логические: графики и диаграммы, графы, визуальные и стандартизированные средства представления информационных потоков и бизнес-процессов.

Имитационное моделирование (от англ. *simulination*) – это распространенная разновидность аналогового моделирования, реализуемого с помощью набора математических инструментальных средств, специальных имитирующих компьютерных программ и технологий программирования, позволяющих посредством процессов-аналогов провести целенаправленное исследование структуры и функций реального сложного процесса в памяти компьютера в режиме имитации, выполнить оптимизацию некоторых его параметров.

Имитационное моделирование экономических процессов становится методом, который позволяет конструировать образцы, описывающие процессы таким образом, как будто бы они функционировали в действительности. Применяя их, есть возможность получить устойчивую и достоверную статистику. Исходя из этих данных, можно выбрать оптимальный путь развития организации.

Метод имитационного моделирования представляет собой способ исследования, при котором конкретная система будет заменяться той, которая имеет достаточную точность при описании реальной. С ней должны быть проведены эксперименты для того, чтобы получить достоверную информацию. Подобная процедура позволит постигнуть суть явления, не прибегая в таком случае к реальным изменениям объекта до необходимого времени.

Имитационное моделирование бизнес-процессов является частным случаем математического моделирования. Дело в том, что имеется класс объектов, для которых не были разработаны аналитические модели по разным причинам, либо же для них отсутствует система методов применения инновационного решения. В подобных случаях применяется имитационное моделирование экономических процессов [5, с. 12].

К нему прибегают в тех случаях, когда:

- дорого проводить эксперименты с реальным объектом;
- нельзя строить аналитическую модель по разным причинам;
- необходимо получить результат и оценить его «поведение» с учетом временных рамок.

Имитационное моделирование экономических процессов имеет несколько видов. Рассмотрим их более подробно.

Агентное моделирование представляет собой инновационное направление, которое широко применяется для того, чтобы исследо-

вать децентрализованные системы. Динамика их функционирования определяется не столько глобальными законами и правилами, сколько тем, что данные принципы становятся результатом индивидуальной деятельности членов данной группы.

Поэтому в данном случае цель и задачи моделей заключаются в получении представлений о данных основополагающих принципах, поведении выбранной системы. Но исходить нужно будет из предположений об индивидуальном, частном поведении ее отдельных объектов, а также их взаимоотношениях в системах.

Агентом становится особая сущность, которая обладает активностью и автономностью в поведении, способна принимать и применять решения в соответствии с набором конкретных правил, взаимодействовать с имеющимся окружением, а также самостоятельно изменять саму себя.

Дискретно-событийное моделирование является подходом к моделированию, который предлагает абстрагироваться от имеющихся событий, рассматривая ряд основных событий в системе. Речь идет об «ожидании», «обработке заказов», «движении с грузом», «разгрузке» и так далее. Подобное моделирование очень хорошо развито и обладает огромной сферой приложения – от логистики, а также системы обслуживания до производственных и транспортных систем. В целом метод идеально может подойти в любой ситуации; был основан Дж. Гордоном в середине двадцатого века.

Системная динамика – это имитационное моделирование экономических процессов, когда для изучаемого объекта будут строиться графики, диаграммы, расчеты, отражающие причинные связи и глобальные влияния одних критериев на другие в определенный промежуток времени. Далее созданная на их основе система имитируется на компьютере. Благодаря этому имеется реальная возможность осознать суть того, что происходит, и выявить имеющиеся связи, причины и следствия между явлениями и объектами. Системная динамика помогает построить модели развития городов, бизнес-процессов, систем производства, развития экологии, популяции, эпидемий и так далее.

К имитационным методам моделирования экономических процессов относится так называемый метод Монте-Карло.

Под методом Монте-Карло принято понимать один из способов статистического моделирования, который, в свою очередь, был основан на концепции «черного ящика» [6, с. 98].

Метод Монте-Карло задействуется в тех случаях, когда использование аналитической модели явления представляется затруднительным или совсем невозможным (к примеру, при решении задач теории массового обслуживания, исследования операций, сведенных к изучению случайных процессов и т.д.).

Применение данного способа статистического моделирования можно проиллюстрировать на примере из сферы теории очередей. Итак, предположим, что требуется выяснить, как долго и как часто необходимо ждать покупателям в очереди при определенной (изначально заданной) пропускной способности некоторого магазина. Данные вычисления, в первую очередь, необходимы для принятия решения о том, следует ли расширять магазин. Как известно, подход покупателей, как правило, носит случайный или неопределенный характер, следовательно, распределение так называемого времени подхода, то есть промежуток между каждыми двумя последовательными приходами покупателей, можно самостоятельно установить, исходя из имеющейся информации. С другой стороны, время обслуживания каждого покупателя также имеет случайный характер, следовательно, его распределение также можно обнаружить. Итак, перед нами два стохастических процесса, непосредственное взаимодействие которых и создает очередь.

Как показывает практика, используя в реальной жизни метод Монте-Карло, можно наугад много раз перебирать все возможности, при этом сохраняя одинаковые характеристики распределения. В результате получится искусственно воссоздать всю картину данного процесса. Затем, повторяя эту картину вновь, каждый раз изменяя условия, можно получить статистические данные, будто они были собраны в реальном времени.

Таким же образом можно вновь несколько раз воссоздавать искусственную картину работы практически любого магазина, применяя на практике метод Монте-Карло. Имитационное моделирование в этом случае будет повторять реальные данные. Получатся опять два вышеописанных стохастических процесса. Их попеременное взаимодействие в конечном результате снова выдаст «очередь» практически с такими же показателями, что и в реальной жизни.

Следовательно, метод Монте-Карло в науке состоит в искусственном моделировании посредством многократных повторений в случайных реализациях. Важно отметить, что так называемые единичные реализации иначе именуется статистическими испытаниями [7, с. 69].

Чтобы понять, что подразумевает под собой механизм случайного выбора, следует попросту воспользоваться самыми обычными игральными

ми костями. Однако на практике, как правило, применяются таблицы случайных чисел. Кроме того, на настоящий момент особой популярностью пользуются и специальные программы для компьютеров, которые среди специалистов именуется генераторами случайных чисел. На самом деле метод Монте-Карло достаточно прост, эффективен и удобен, что и обуславливает его повсеместное использование, как в экономике, так и в других точных науках.

Следует отметить, что в любой системе имитационных моделей можно найти какие-то недостатки с точки зрения применимости ее в конкретной ситуации. Кроме того, сфера информационных технологий бурно развивается, появляются новые подходы и методы решения актуальных задач, меняются механизмы взаимодействия пользователей с информационными системами.

Все это приводит к необходимости постоянного совершенствования систем имитационных моделей и применяемых в них решений [9, с. 17].

Среди возможных направлений совершенствования систем моделирования можно отметить:

- 1) создание проблемно-ориентированных систем моделирования в различных областях исследований;
- 2) наличие удобного и легко интерпретируемого графического интерфейса;
- 3) использование развитой анимации в реальном времени;
- 4) совершенствование инструментов для проведения расчетов;
- 5) применение интерактивного распределенного моделирования, разработки в области взаимодействия имитационной модели с интернетом и др.

Применение математического моделирования позволяет исследовать объекты, реальные эксперименты над которыми затруднены или невозможны (дорого, опасно для здоровья, однократные процессы, невозможные из-за физических или временных ограничений – находятся далеко, еще или уже не существуют и т.п.). Экономический эффект: затраты в среднем сокращаются в 10–100 раз.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гареев Б. Р.* Концепции исчисления финансового результата и модели бухгалтерского баланса // Аудит и финансовый анализ. 2011. № 2. С. 78–83.
2. *Гареев Б. Р.* Центры ответственности в финансовой структуре компании, их роль в системе бюджетирования // Вестн. Казан. гос. аграр. ун-та. 2008. Т. 3, № 2 (8). С. 35–39.
3. *Лычкина Н. Н.* Имитационное моделирование экономических процессов: учеб. пособие. М.: Инфра-М, 2012. 250 с.
4. *Носов В. В.* Концепция и содержание устойчивости сельскохозяйственного производства // Ученые записки Рос. гос. соц. ун-та. 2005. № 3. С. 105–113.

5. *Хохрина Г. Л.* Имитационное моделирование экономических процессов: курс лекций. Екатеринбург: ФГБОУ ВПО «Урал. гос. лесотех. ун-т», 2014. 43 с.
6. *Коровин А. М.* Анализ подходов и программного обеспечения для имитационного моделирования социальных и экономических систем // Вестн. ЮУрГУ. 2012. № 35. С. 98–100.
7. *Рванцов Ю. А.* Сравнительный анализ систем имитационного моделирования деловых процессов по критерию функциональной полноты // Вестн. ДГТУ. 2011. Т. 11, № 1 (52). С. 69–73.
8. *Толмачев М. Н., Носов В. В.* Энтропийные меры неравенства в исследовании концентрации сельскохозяйственного производства // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. 2010. № 7–9. С. 260–268.
9. *Чернышова Н. Н.* Имитационное моделирование бизнес-процессов: учеб.-метод. пособие Н. Новгород: НГУ им. Лобачевского, 2010. 28 с.

## **СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНЦЕПЦИЙ ВОДНОГО СЛЕДА В МИРОВОМ РАЗВИТИИ**

**И. Ф. Нуриманова, Е. Д. Копнова**

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва,  
Россия*

E-mail: inurimanova@hse.ru, ekopnova@hse.ru

На примере торговых потоков виртуальной воды стран Средиземноморья исследовалось взаимодействие показателей внешней торговли с точки зрения водного следа, в частности, экспорта и импорта сельскохозяйственных товаров на благосостояние стран. Использовалась методика статистического анализа эффективности концепции водного следа в мировом развитии посредством гравитационной модели внешней торговли виртуальной водой.

Информационной базой исследования являются данные по 11 странам Средиземноморья за 2004 и за 1996–2005 г. с сайтов Всемирного банка, Международного торгового центра, Водного следа, Йельского университета, а также из статьи A. Fracasso [1].

Базовая модель представляет собой линеаризованную версию фундаментальной гравитационной модели международной торговли. Предварительно страны были разбиты по кластерам на основе экономических и водных показателей, что отразилось на образовании стран-сообществ, различаемых по географическому признаку (наличие единой границы). Таким образом, использование гравитационной модели, учитывающей географическое положение, признано адекватным. Исходная гравитационная модель была изменена с учетом постранных характеристик каждой модели, в результате чего была обнаружена устойчивая взаимосвязь сальдо баланса с водообильностью стран. Страны, страдающие от дефицита и имеющие засушливый климат, были преимущественно экспортерами, а водообильные страны – импортерами сельскохозяйственной продукции.

## **STATISTICAL ANALYSIS OF WATER FOOTPRINT EFFICIENCY IN WORLD DEVELOPMENT**

**I. F. Nurimanova, Yu. D. Kopnova**

The authors have improved a method of statistical analysis of the water footprint efficiency in the global development through a gravity model of foreign trade in virtual water.

On the base of trade flows of virtual water of the Mediterranean countries were examined foreign trade indicators in terms of the water footprint, in particular export and import of agricultural commodities, on the welfare of the country.

The information for the study are the data on the 11 countries of the Mediterranean in 2004 and the year 1996–2005, which are publicly available on the websites of the World Bank, the International Trade Centre, the water footprint website, Yale University, and from a scientific article Fracasso.

The base model is a fundamental log-linearized version of the gravity model of international trade. Previously the country had been divided into clusters in accordance with economic and water proxies that is concluded in the formation of groups differentiated by geographical feature (the presence of a common border). Thus, the use of the gravity model, which takes into account the geographical position, considered adequate. The original gravity model has been modified to reflect country-specific characteristics of each model, resulting in a steady relationship was found with the country balance and abundance of water. Countries suffering from water shortage and arid climate have been mostly exporters, whereas watery countries have been primary importers of agricultural products.

Одним из важнейших показателей качества условий проживания на Земле является доступность пресной воды. Дефицит воды повергает экономику в состояние шока, воздействуя на производство, торговлю, систему здравоохранения и на другие социальные и экономические сферы. Недостаток воды также становится причиной жесткой конкуренции между странами при условии существования трансграничных водотоков и озер.

В 1997 г. британский ученый Аллан обратил внимание на тот факт, что Ближний Восток исчерпал практически все свои запасы воды еще в 1970-х гг. и не страдал от ее недостатка, поскольку он получил к ней доступ посредством торговли – произошло замещение выпуска водоемких товаров их импортом. Так Аллан обосновал свою ранее описанную концепцию «виртуальной воды».

В условиях глобализации фокус на международной торговле товарами – своевременный шаг для улучшения благосостояния и стран, нуждающихся в преодолении водного кризиса, и способных производить и экспортировать водоемкую продукцию без особого вреда для экосистем. Тем не менее внешняя торговля виртуальной водой остается малоизученной, а имеющиеся исследования имеют теоретическую направленность и применяют элементарные регрессии и индексные методы для оценивания эффективности концепций виртуальной водной торговли и водного следа. Впервые методика изучения виртуальных водных потоков при помощи гравитационной модели международной торговли была использована итальянским ученым А. Fracasso в 2014 г.

Новизна данной работы заключается в разработке более точного механизма оценивания водных потоков при помощи гравитационной модели внешней торговли. Впервые приспособленная к водным потокам гра-

витационная модель Fracasso имела существенные недостатки, и данное исследование не только критически рассматривает примененную ранее модель, но и предлагает методы устранения этих недостатков.

Таким образом, целью данной работы является статистический анализ эффективности использования концепций водного следа в мировом развитии.

В соответствии с целью исследования был сформирован следующий круг задач:

- оценить степень влияния детерминант мировой торговли виртуальной водой на внешнюю торговлю виртуальной водой;
- исследовать возможность использования методики анализа торговли виртуальной водой с использованием инструментария гравитационной модели и определить оптимальную методику анализа виртуальных водных потоков;

Ранее проведенные исследования [2, 3] свидетельствуют, что заметная интенсивность внешней торговли водоемкими товарами проявляется в странах Средиземноморья, поэтому государства Средиземноморского региона были выбраны в качестве объекта исследования. Средиземноморский регион, в частности, показывает существенную неустойчивость между водоснабжением и водопотреблением. Поэтому в качестве объясняемой переменной были использованы имеющиеся в открытом доступе данные – двусторонние потоки виртуальной воды по странам Средиземноморья за 2004 г.

В качестве переменной, определяющей спецификацию модели, выбрано расстояние между каждой парой стран, отсчитанное от наиболее важной торговой точки – столицы. Далее были выделены показатели экономической массы стран: ВВП и ВВП на душу населения. Экономика всех стран Средиземноморья имеет сильную зависимость от импорта, поэтому эта переменная была включена в модель не как значения чистого экспорта, а как двусторонний поток импорта всех товаров между любой из пар стран. Средний таможенный тариф, наличие единой валюты и границы позволяют охарактеризовать торговые отношения между странами. За переменную сохранности воды отвечает объем сохраненной голубой воды, рассчитанный Хукстра [4] по данным 1996–2005 гг. Также модель включает экономические индексы, связанные с сельским хозяйством: индексы урожайности, растениеводства и занятости в сельском хозяйстве, поскольку, как было отмечено ранее, забор воды на его нужды составляет в среднем 63% по региону.

При помощи самоорганизующихся карт Кохонена был проведен кластерный анализ детерминант водной торговли и водного следа, вследствие чего было доказано наличие взаимосвязи между экономическими показателями и водным следом и обнаружено, что классифицируемые страны оказываются в одной группе и по географическим признакам.

На следующем этапе была оценена линеаризованная модель гравитационной торговли:

$$VWT_{ij} = \alpha + \beta M_{ij} + \gamma D_{ij} + \delta T_{ij} + \varphi L_{ij} + \theta W_{ij} + \varepsilon_{ij},$$

где  $VWT_{ij}$  – двусторонний поток виртуальной водной торговли между странами  $i$  и  $j$ ;  $M_{ij}$  – служит переменной экономической массы стран;  $D_{ij}$  – отображает географическое расстояние между странами;  $T_{ij}$  – это включенные фиктивные переменные, характеризующие особенности торговли;  $L_{ij}$  – описывает экономические индексы, связанные с сельским хозяйством;  $W_{ij}$  – отвечает за переменную сохранности воды в каждой из стран. Все переменные в модели выражены в натуральных логарифмах, за исключением фиктивных переменных. Поскольку часть значений о таможенном тарифе между странами отсутствовала, то при логарифмировании пропускам вменялись нули.

Как и предполагалось в первоначальных предположениях, чем больше расстояние между странами, тем меньший обмен виртуальной водой происходит между ними, и наличие высоких таможенных тарифов сокращает объем импортируемой виртуальной воды. Увеличение импорта товаров и улучшение экономического благосостояния (ВВП, ВВП на душу населения) сопряжены с ростом импорта виртуальной водной торговли, то есть прослеживается взаимосвязь экономического благосостояния и экономии воды за счет торговли. Необходимо отметить, что увеличение доли занятых в сельском хозяйстве приводит к уменьшению импортируемой виртуальной воды, что может быть связано с ростом производства сельскохозяйственных товаров. Поскольку сельскохозяйственная продукция водоемкая, то необходимо проводить целесообразную политику, понимая аспекты занятости, благосостояние населения и объем водных ресурсов в государстве.

Полученная общая гравитационная модель значима (на уровне 0,01) и объясняет 76% вариации потоков виртуальной водной торговли. Тем не менее, остатки модели гетероскедастичны и не подчиняются нормальному закону распределения. Использование поправок Уайта не помогает справиться с гетероскедастичностью. Поэтому далее модель оценивалась отдельно для каждой страны. Практически все гравитационные модели по странам оказались значимыми, кроме моделей по данным Туниса

и Греции. Результаты моделей хорошо иллюстрируют зависимость международной торговли виртуальной водой от экономических показателей стран: ВВП, ВВП на душу населения, импорта. Как и в случае общей модели, чем выше уровень благосостояния стран, тем больше импортируется и меньше экспортируется объемов виртуальной воды. Чем больше импортируется из-за рубежа, тем больший наблюдается приток виртуальной воды, что свидетельствует о покупке водоемких товаров. При этом коэффициент при показателе единой валюты не был значимым ни в одной из регрессий с расстоянием, принимая существенное значение только в негравитационной модели Греции. Возможно, поэтому определение данного фактора в общей модели как значимого является неверным.

В гравитационных моделях внешней торговли виртуальной водой Албании и Кипра коэффициент при фиктивной переменной наличия общей границы значим и положителен, что свидетельствует о том, что интенсивность водного потока больше при наличии единой границы. Похожий вывод следует и из значимости коэффициента при показателе расстояния, при большом значении которого импорт со страной меньше, чем импорт с близлежащим государством.

Наличие высоких таможенных пошлин сокращало импорт и экспорт виртуальной воды. При изучении гравитационной модели страны, характеризующиеся зависимостью экономик от таможенного тарифа, также при кластерном анализе были объединены в группу с высокими значениями ВВП и значительным потреблением зеленого водного следа.

Рост экономического индекса, связанного с сельским хозяйством, увеличивает экспорт виртуальной воды и понижает импорт, что характерно для производства водоемкими товарами. При этом значимый коэффициент перед долей занятости снова говорит о необходимости строгого проведения согласованных мер водного менеджмента и государственной политики для оптимизации уровня безработицы и водозабора.

Все пострановые модели значимы и хорошо объясняют вариацию потоков виртуальной водной торговли. Остатки во всех моделях не автокоррелируют и являются гомоскедастичными, а также в 10 моделях из 11 они распределены в соответствии с нормальным законом на уровне значимости в 0,05.

Итак, проведя кластерный анализ и проанализировав разные типы гравитационных моделей, можем подвести следующие итоги. Географическое положение между странами оказывается важным при рассмотрении объемов национального потребления голубого и зеленого водного следа, и между водными потоками и экономическими показателями об-

наруживается зависимость. Все модели потоков внешней торговли виртуальной воды показали сильную зависимость с экономическими показателями. Чем эффективнее проводится водная политика в стране, тем выше экономическое благосостояние и меньше оказывает воздействие недостаток пресной воды.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fracasso A.* Determinants of virtual water flows in the Mediterranean. A gravity model of virtual water trade // SIS Working Paper. 2014. Vol. 10. P. 80–102.

2. *Roson R., Sartori M.* Climate Change, Tourism and Water Resources in the Mediterranean: a General Equilibrium Analysis // Intern. J. of Climate Change Strategies and Management. 2014. Vol. 6 (2). P. 212–228.

3. *Iglesias A., Garrote L., Diz A., Schlickerrieder J., Мартин-Сарраско F.* Re-thinking water policy priorities in the Mediterranean region in view of climate change // Environmental Science & Policy. 2011. Vol. 14 (7). P. 744–757.

4. *Hoekstra A., Chapagain A., Aldaya M., Mekonnen M.* The water footprint: assessment manual: Setting the global standard // UK Earthscan. 2011. Vol. 25. P. 485–514.

## ПОСТРОЕНИЕ COGARCH (CONTINUOUS GARCH) МОДЕЛИ

**В. А. Панов, А. Р. Маркова**

*Международная лаборатория стохастического анализа и его приложений  
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Москва,  
Россия*

E-mail: vpanov@hse.ru, anna.r.markova@gmail.com

В данной статье рассмотрена процедура построения модели волатильности COGARCH с непрерывным временем. Процедура построения модели описана как в общем случае, когда для построения модели используется любой процесс Леви, так и в частном случае составного процесса Пуассона.

## CONSTRUCTION OF THE COGARCH (CONTINUOUS GARCH) MODEL

**V. A. Panov, A. R. Markova**

The article considers the procedure of constructing COGARCH volatility models with continuous time based on the Levy processes. The article describes the procedure of constructing the model in the general case and in the case of compound Poisson process.

### Введение

Правильная оценка волатильности финансового актива является одной из важнейших и актуальных задач, связанных с анализом финансовых рынков и управлением рисками. Одной из самых популярных

моделей волатильности является хорошо зарекомендовавшая себя на практике дискретная модель GARCH, предложенная в независимых статьях Bollerslev [1] и Taylor [2] в 1986 г. Однако современный подход к анализу финансовых данных предполагает, что волатильность является непрерывным случайным процессом. Работы по созданию непрерывной модели волатильности, соответствующей модели GARCH, встречаются еще в 90-х гг. XX в.: Nelson [3], Drost & Werker [4]. В этих работах непрерывная модель волатильности имеет вид диффузионного процесса, к которому в пределе сходится модель GARCH. Недостатками первых непрерывных моделей являлось невыполнение некоторых важных эмпирических свойств финансовых инструментов, например, скачков волатильности. Учитывая это свойство, разумным представляется использование процессов Леви для анализа волатильности, предложенное в работе Kluppelberg, Lindner & Maller [5]. В данной статье рассматривается построение модели GARCH с непрерывным временем (COGARCH), основанной на одном из процессов Леви – составном процессе Пуассона.

### Описание модели COGARCH

Рассмотрим наиболее распространенную дискретную модель GARCH(1,1):

$$Y_n = \sigma_n \varepsilon_n, \sigma_n^2 = a + bY_{n-1}^2 + c\sigma_{n-1}^2, n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_n, n = 1, 2, \dots$ , – это независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения  $f_\varepsilon = N(0, 1)$ ,  $a > 0$ ,  $b, c \geq 0$  – параметры, которые требуется оценить.

Итеративно применяя формулу (1), как это показано в работе Iannase [6], видим, что:

$$\sigma_n^2 = \left( a \int_0^n \exp \left\{ - \sum_{j=0}^{\lfloor s \rfloor} \log(c + b\varepsilon_j^2) \right\} ds + \sigma_0^2 \right) \exp \left\{ \sum_{j=0}^n \log(c + b\varepsilon_j^2) \right\}.$$

Заменяя дискретное время  $n$  на непрерывное  $t$ , инновации  $\varepsilon_j$  – на приращения некоторого процесса Леви, получаем:

$$Y_t = \int_0^t \sigma_s dL_s, \sigma_t^2 = \left( a \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t}, \quad (2)$$

где  $X_t$  – это вспомогательный процесс, заданный следующим образом:

$$X_t = -t \log(c) - \sum_{0 < s \leq t} \log \left( 1 + \frac{b}{c} (\Delta L_s)^2 \right),$$

$$\Delta L_t = L_t - L_{t-}, L_t = \lim_{s \rightarrow t-} L_s.$$

Отметим, что процесс  $X_t$  является процессом Леви с тройкой Леви  $(\gamma_X, 0, \nu_X)$ .

### Построение модели COGARCH

Рассмотрим процедуру построения процесса  $Y_t$  по процессу Леви  $L_t$ :

$$L_t \rightarrow X_t \rightarrow \sigma_t^2 \rightarrow Y_t.$$

1.  $L_t \rightarrow X_t$ . Рассмотрим взаимосвязь меры Леви процессов  $L_t$  и  $X_t$ . В общем виде эта взаимосвязь задается формулой

$$\nu_X(R_+) = 0, \nu_X((-\infty, x)) = \nu_L \left( \left\{ y \in R : |y| \geq \sqrt{(e^x - 1) \frac{c}{b}} \right\} \right), x \geq 0.$$

Процесс  $X_t$  является процессом с ограниченной вариацией, так как  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu_X(dx) < \infty$ . Следовательно, его характеристическая функция допускает следующее представление:

$$\phi_{X_t}(u) = \exp \left\{ t \left( iu\tilde{\gamma}_X + \int_{R^-} (e^{iux} - 1) \nu_X(dx) \right) \right\},$$

где  $\tilde{\gamma}_X = \gamma_X - \int_{|x| \leq 1} |x| \nu_X(dx)$ .

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда  $c \in (0, 1)$ . Выбор такого ограничения на параметр  $c$  объясняется некоторыми специальными свойствами процесса  $\sigma_t^2$ , которые объясняются ниже. В этом случае процесс  $X_t$  является суммой положительного тренда  $-t \log(c)$  и прыжковой компоненты, представленной «минус-субординатором» (то есть невозрастающим процессом Леви).

2.  $X_t \rightarrow \sigma_t^2$ . Процесс  $\sigma_t^2$  является частным случаем обобщенного процесса Орнштейна–Уленбека, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения:

$$d\sigma_t^2 = a dt + \sigma_t^2 e^{X_t} d(\sigma_t^2)$$

или

$$d\sigma_t^2 = \left( a + \log(c) \sigma_t^2 \right) dt + \frac{b}{c} \sigma_t^2 d(S_t),$$

где процесс Леви  $S_t$  – это квадратичная вариация скачков процесса  $L_t$ , т.е.  $S_t = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta L_s)^2$ . Таким образом, процесс  $\sigma_t^2$  является марковским и его инвариантное распределение  $\pi$  совпадает с распределением экспоненциального функционала  $J_X = a \int_0^\infty e^{-X_t} dt$ . Подробное доказательство представлено в работе Iannace [6].

В работе Linder, Maller, Szimayer [7] показано, что такое инвариантное распределение существует ( $J_X < \infty$ ) тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty$ . В терминах тройки Леви это условие может быть записано как

$$\int_R \log\left(1 + \frac{b}{c}y^2\right)v_L(dl) < -\log(c).$$

3.  $\sigma_t^2 \rightarrow Y_t$ . Мы полагаем, что  $\sigma_0^2$  имеет распределение  $\pi$ , тогда  $\sigma_t^2$  – стационарный процесс, как и процесс  $Y_t$ , потому что

$$Y_t - Y_{t-} = \sigma_0(L_t - L_{t-}), \forall t \geq 0,$$

т.е. процессы  $L_t$  и  $Y_t$  имеют скачки в одни и те же моменты времени.

### Случай составного процесса Пуассона

Рассмотрим теперь процедуру построения процесса  $Y_t$  по процессу Леви на примере составного процесса Пуассона  $L_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$ , где  $N_t$  – количество скачков составного процесса Пуассона к моменту времени  $t$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения  $f_\xi(x)$ . В этом случае тройка Леви процесса  $L_t$  имеет вид  $(0, 0, v_L)$ , причем мера Леви  $v_L(B) = \lambda \Phi_\xi(B) = \lambda \int_B f_\xi(x) dx$  для любого борелевского подмножества  $B$  числовой прямой, а скачки процесса Леви  $L_t$  принимают вид

$$\Delta L_t = L_t - L_{t-} = I\{N_t - N_{t-} = 1\} \cdot \xi_t,$$

где  $\xi_t$  – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения  $f_\xi(\cdot)$ , причем  $\xi_t$  и  $\xi_s$  независимы для  $\forall t \neq s$ .

1.  $L_t \rightarrow X_t$ . Рассмотрим взаимосвязь меры Леви процессов  $L_t$  и  $X_t$ .

$$\begin{aligned} v_X(R_+) &= 0, \quad v_X((-\infty, x)) = \lambda \cdot \mathbf{P}\left\{|\xi| \geq \sqrt{(e^x - 1) \frac{c}{b}}\right\} = \\ &= \lambda \cdot \left(2 - \Phi_\xi\left(\sqrt{(e^x - 1) \frac{c}{b}}\right) - \Phi_\xi\left(-\sqrt{(e^x - 1) \frac{c}{b}}\right)\right). \end{aligned}$$

Вспомогательный процесс  $X_t$  тогда принимает вид

$$\begin{aligned} X_t &= -t \log(c) - \sum_{0 < s \leq t} \log\left(1 + \frac{b}{c} (I\{N_s - N_{s-} = 1\} \cdot \xi_s)^2\right) = \\ &= -t \log(c) - \sum_{k=1}^{N_t} \log\left(1 + \frac{b}{c} (\xi_k)^2\right). \end{aligned}$$

2.  $X_t \rightarrow \sigma_t^2$ . Мы полагаем, что  $\sigma_0^2 = a \int_0^\infty e^{-X_s} ds$  и, используя свойства составного процесса Пуассона, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \left( a \int_0^\infty \exp\left(-s \log(c) - \sum_{k=1}^{N_s} \log\left(1 + \frac{b}{c} (\xi_k)^2\right)\right) ds + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t} = \\ &= \left( a \sum_{k=1}^n \exp\left(-\log\left(1 + \frac{b}{c} (\xi_k)^2\right)\right) \int_{T_k}^{T_{k+1}} c^{-s} ds + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t} = \\ &= \left( a \sum_{k=1}^n \exp\left(-\log\left(1 + \frac{b}{c} (\xi_k)^2\right)\right) \left( -\frac{c^{-T_{k+1}} - c^{-T_k}}{\log(c)} \right) + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t}, \end{aligned}$$

где  $T_1, \dots, T_n$  – это моменты скачков составного процесса Пуассона  $L_t$  на интервале  $[0, t]$ , то есть  $T_{k+1} - T_k$  имеет распределение  $Exp(\lambda), N_k = k, \forall t \in [T_{k+1}, T_k]$ .

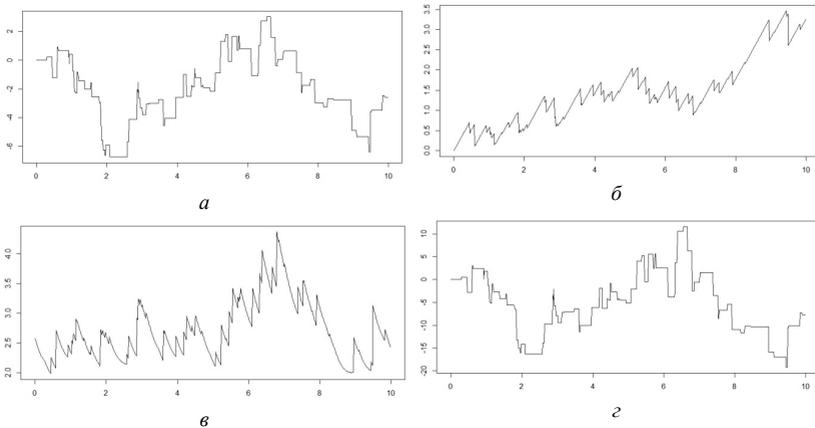
3.  $\sigma_t^2 \rightarrow Y_t$ . Процесс  $Y_t$  в нашем случае определяется следующим образом:

$$Y_t = \int_0^t \sigma_s dL_s = \sum_{k=1}^{N_t} \sigma_{T_k} (L_{T_k} - L_{T_k-}) = \sum_{k=1}^{N_t} \sigma_{T_k} \xi_{T_k}.$$

### Пример

Приведем пример построения модели COGARCH. Зафиксируем следующие параметры: интенсивность составного процесса Пуассона  $L_t$ :  $\lambda = 10$ ; параметры модели COGARCH:  $a = 0.2, b = 0.03, c = 0.2$ .

Тогда процессы  $L_t, X_t, \sigma_t$  и  $Y_t$  принимают вид, представленный на рисунке.



Траектории процессов: а –  $L_t$ , б –  $X_t$ , в –  $\sigma_t$ , г –  $Y_t$

## Заключение

Рассмотрение процедуры построения модели COGARCH является первым шагом для применения этой модели в управлении рисками. В дальнейшем авторами планируется рассмотреть применение метода моментов для оценки параметров модели COGARCH, изложенного в работах Bibbona, Negri [8] и Haug, Kluppelberg, Lindner, Zapp [9], что позволит использовать модель COGARCH для работы с реальными данными. Интересной задачей также представляется оценивание тройки Леви-процесса  $L_t$  по наблюдениям процесса  $Y_t$ , описывающегося моделью (2), с помощью процедуры, предложенной в статье Belomestny, Panov [10]. Рассмотрение этих задач позволит применять модель COGARCH для оценивания волатильности финансовых инструментов и управления инвестиционными рисками.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2015 г. (грант № 14-05-000).*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31. P. 307–327.
2. Taylor S. Modelling Financial Time Series // Wiley, Chichester. 1986. Vol. 5. P. 207–327.
3. Nelson D. B. ARCH models as diffusion approximations // Econometrics. 1990. Vol. 45. P. 7–38.
4. Drost F. C., Werker B. J. M. Closing the GARCH gap: Continuous time GARCH modeling // Econometrics. 1996. Vol. 74. P. 31–57.
5. Kluppelberg C., Lindner A., Maller R. A continuous time GARCH processes driven by a Levy process: Stationarity and second order behaviour // Appl. Probab. 2004. Vol. 41 (3). P. 601–622.
6. Iannace M. COGARCH processes: theory and asymptotics for the pseudo-maximum likelihood estimator/PhD thesis. Milano: University of Milano-Bicocca, 2014. 360 p.
7. Linder A., Maller G., Szimayer A. Levy integrals and the stationarity of generalized Ornstein-Uhlenbeck process // Stochastic Processes and their Applications. 2005. Vol. 115. P. 1701–1722.
8. Bibbona E., Negri I. Higher Moments and Prediction Based Estimation for the COGARCH(1,1) model. 2014 [Electronic resource]. Available at: <http://arxiv.org/abs/1401.7819> (accessed 10 October 2015).
9. Haug S., Kluppelberg C., Lindner A., Zapp M. Method of moment estimation in the COGARCH (1,1) model // Econom. 2007. Vol. 10. P. 320–341.
10. Belomestny D., Panov V. Statistical inference for generalized Ornstein-Uhlenbeck processes // Electronic Journal of Statistics. 2015. Vol. 9. P. 22.

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УЩЕРБА НЕЦЕЛЕВОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗЕМЕЛЬ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

**А. Л. Петросян, К. А. Жичкин, Л. Н. Жичкина**

*Самарская государственная сельскохозяйственная академия, Кинель, Россия*

E-mail: artem-petrosyan63@bk.ru, zskirill@mail.ru, zhichkina@mail.ru

В статье анализируются размеры нецелевого использования земель сельскохозяйственного назначения в Самарской области. Авторы предлагают для определения потенциальных размеров ущерба на уровне отдельного предприятия использовать существующую методику, а для муниципальных районов – расчет собственной разработки. В основе лежит распределение ущерба в соответствии с источниками возникновения, которые предлагается разделить на 3 группы. На основании этих данных был построен прогноз. По его результатам предполагается, что сумма ущерба во времени будет расти и достигнет в перспективе 2 млрд руб.

## **FORECASTING OF DAMAGES AGRICULTURAL LANDS' NON-TARGETED USE**

**A. L. Petrosjan, K. A. Zhichkin, L. N. Zhichkina**

The article analyzes the non-targeted use agricultural land's size in the Samara region. The authors propose to determine the potential extent of the damage at the level of individual enterprises to use existing techniques, and municipal areas – the calculation of its own design. It is based on the distribution of damage in accordance with the source of which is proposed to divide into 3 groups. Based on these data it was built prognosis. According to the results, it is assumed that the amount of damage over time will grow and will reach 2 billion rubles in the long term.

Основное богатство любой страны – земля, используемая для производства сельскохозяйственной продукции. В соответствии с Земельным кодексом РФ землями сельскохозяйственного назначения признаются земли, находящиеся за границами населенного пункта и предоставленные для нужд сельского хозяйства [1].

Для таких земель строго регламентируются возможные направления их использования. Это в основном различные направления производства сельскохозяйственной продукции и рыбоводства.

Однако бывают ситуации, когда на землях сельскохозяйственного назначения вынужденно осуществляют деятельность, не связанную с производством продуктов питания. К ним относятся: строительство и ремонт скважин, нефте- и газопроводов, дорог и объектов инфраструктуры, ликвидация разливов нефти и т.д. Все эти виды относят к нецелевому занятию земель сельскохозяйственного назначения,

которое приносит определенный ущерб собственникам, снижает валовой сбор продукции и пр. [2].

**Цель исследования** – совершенствование методики прогнозирования величины нецелевого использования земель сельскохозяйственного назначения.

**Задачи:** определить размеры нецелевого использования земель в условиях Самарской области; сформировать предложения по совершенствованию методики прогнозирования ущерба для оптимизации размеров потерь.

**Методы исследований.** В качестве объекта исследования выступают экономические отношения между участниками альтернативного использования земель сельскохозяйственного назначения и их собственниками. В ходе исследования применялись абстрактно-логический метод, ситуационный и системный анализ, экономико-статистические методы, метод экспертных оценок.

Для оценки ущерба от нецелевого использования земель сельскохозяйственного назначения предлагается использовать методику С. Н. Зудилина и К. А. Жичкина. Сумма ущерба на уровне конкретного предприятия представляет собой математическую функцию, отображающую зависимость от стоимости недополученной продукции, фактически понесенных затрат под урожай текущего года и затрат, необходимых для проведения биологической рекультивации для восстановления почвенного плодородия [3].

Преимущества этой методики состоят в следующем:

- большинство предприятий, осуществляющих нецелевое использование земель сельскохозяйственного назначения, работают на основании годовых бюджетов, что исключает досрочное возмещение ущерба собственнику земли. В лучшем случае, оплата осуществляется по принципу «год-в-год» или с задержкой [4]. Поэтому использование дисконтирования, занижающего сумму ущерба, не обосновано. Расчет должен вестись с учетом начисления сложных процентов на просроченные платежи;
- методика позволяет учесть в стоимости работ по рекультивации качество используемых земель (с учетом бонитета почвы).

Расчет размера убытков осуществляется путем начисления сложных процентов с суммы убытков, полученных за период восстановления нарушенного производства:

$$C_{об} = \sum (C_{\phi i} + C_{pi} + C_{yni}) \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t, \text{ руб.}$$

где  $C_{об}$  – размер убытков, причиненных собственникам земель временным занятием земельных участков, руб.;

$C_{\phi i}$  – фактические затраты, понесенные до временного занятия земель, руб.;

$C_{pi}$  – затраты на биологическую рекультивацию, руб.;

$C_{yni}$  – упущенная выгода, руб.;

$r$  – ставка рефинансирования Центрального банка РФ, %;

$t$  – продолжительность периода восстановления нарушенного производства, лет [5].

Эта формула применима для единичного случая ущерба.

Для учета величины общего ущерба на территории муниципального района или региона предлагается использовать следующую формулу:

$$S_i = S_{pi} + S_{ti} + S_{pli} + S_{Chi},$$

где  $S_i$  – общая сумма ущерба за  $i$ -й период;

$S_{pi}$  – сумма ущерба, относящаяся на  $i$ -й период, от нецелевого занятия земель сельскохозяйственного назначения прошлых лет;

$S_{ti}$  – сумма ущерба, относящаяся на  $i$ -й период, от нецелевого занятия земель сельскохозяйственного назначения текущего года;

$S_{pli}$  – сумма ущерба, относящаяся на  $i$ -й период, от нецелевого занятия земель сельскохозяйственного назначения при проведении плановых ремонтных работ;

$S_{Chi}$  – сумма ущерба, относящаяся на  $i$ -й период, от нецелевого занятия земель сельскохозяйственного назначения при проведении работ по ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций.

Следует пояснить, что все случаи занятия земель можно разбить на 3 группы:

- создание стационарных объектов длительного срока эксплуатации (скважины);
- плановые работы по ремонту, замене или ликвидации трубопроводов;
- работы, связанные с ликвидацией последствий техногенных аварий [6].

В рамках исследования была проведена работа по распределению работ в 2009–2013 гг. по муниципальным районам области. На основании этих данных был рассчитан ущерб, нанесенный землепользователям от нецелевого использования земель сельскохозяйственного назначения (табл. 1).

Как показывают данные расчета (см. табл. 1), с 2009 по 2013 г. ущерб от нецелевого использования земель сельскохозяйственного на-

Таблица 1

## Результаты расчета ущерба в 2009–2013 гг. на территории Самарской области

№ п/п	Показатель	Сумма ущерба, млн руб.					
		2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	Всего
1	Ущерб от занятия земель прошлых лет	34,5	52,3	64,4	39,2	73,8	264,3
2	Ущерб от занятия земель текущего года	0,9	2,5	7,9	10,4	13,0	34,7
3	Ущерб от нецелевого занятия земель при проведении плановых ремонтных работ	185,7	307,0	1 072,6	703,4	1 326,6	3 595,3
4	Ущерб от занятия земель при проведении работ по ликвидации последствий ЧС	8,4	36,7	27,5	37,9	85,1	195,6
	ИТОГО	229,5	398,6	1 172,4	791,0	1 498,5	4 090,0

значения составил более 4,0 млрд руб. Наибольшую долю в этой сумме занимает ущерб, проявляющийся при проведении плановых ремонтных работ (3595,3 млн руб.), что составляет 87,9%. Такая большая сумма ущерба объясняется большим ежегодным объемом проводимых работ. Кроме того, в сумму ущерба ежегодно включаются затраты на проведение биологической рекультивации, которые в 2013 г. в среднем составили 496 тыс.руб./га. Самая маленькая сумма ущерба приходится на строительство текущего года, которое включает фактически понесенные затраты под урожай текущего года и упущенную выгоду. Суммарно величина этих потерь составляет 32,6 тыс.руб./га.

Ущерб от нецелевого использования земель в прошлые периоды включает в себя упущенную выгоду от занятия площадей эксплуатационными и разведочными скважинами с учетом среднего срока их эксплуатации и затрат на биологическую рекультивацию скважин, исчерпавших свой потенциал [7]. В соответствии с экспертными оценками жизненный срок эксплуатационной скважины составляет десять лет, разведочной – два года (табл. 2).

На основании полученных данных был составлен прогноз с помощью пакета «Анализ данных» программного продукта MS Excel. По каждому виду ущерба были определены уравнения тренда, которые имеют следующий вид:

Таблица 2

**Количество действующих эксплуатационных и разведочных скважин  
в Самарской области**

Тип скважин	Год				
	2009	2010	2011	2012	2013
Эксплуатационные	21	15	14	13	27
Разведочные	202	218	254	318	471

Примечание. Рассчитано на основании данных Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Самарской области и ФГБУ «Самарский референтный центр Федеральной службы по ветеринарному и фитосанитарному надзору».

Ущерб от занятия земель прошлых лет	$y = 6,55x + 33,19$	$R^2 = 0,6916$
Ущерб от нецелевого занятия земель при проведении плановых ремонтных работ	$y = 267,82x - 84,4$	$R^2 = 0,7561$
Ущерб от занятия земель текущего года	$y = 3,21x - 2,69$	$R^2 = 0,9738$
Ущерб от занятия земель при проведении работ по ликвидации последствий ЧС	$y = 15,46x - 7,26$	$R^2 = 0,7469$

В результате составления прогноза были получены следующие данные на 2014 и 2015 гг. (табл. 3).

Таблица 3

**Прогноз формирования ущерба в 2014 и 2015 гг. от нецелевого использования земель  
сельскохозяйственного назначения в Самарской области**

№ п/п	Показатель	Сумма ущерба, млн руб.	
		2014 г.	2015 г.
1	Ущерб от занятия земель прошлых лет	72,49	79,04
2	Ущерб от занятия земель текущего года	16,57	19,78
3	Ущерб от нецелевого занятия земель при проведении плановых ремонтных работ	1522,52	1790,34
4	Ущерб от занятия земель при проведении работ по ликвидации последствий ЧС	85,5	100,96
	<b>ИТОГО</b>	<b>1697,08</b>	<b>1990,12</b>

Как видно из данных прогноза, при сохранении существующей тенденции (вероятность чего очень велика) сумма ущерба будет увеличиваться и в 2015 г. достигнет почти 2 млрд руб.

## Выводы

Ежегодно от 2,5 до 4,0 тыс. га сельскохозяйственных угодий занемается не по прямому назначению. Причем более 20% из этого количества выводится на длительный срок (более 10 лет). На разлив нефти приходится от 2,3 до 4,0% нецелевого использования. Для разработки прогноза предлагается использовать общую формулу, которая позволит с высокой степенью точности определить, сколько земель и какого вида будет выведено из производства, и к какому ущербу это приведет.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жичкин К. А. Информационное обеспечение кадастровой оценки земель сельскохозяйственного назначения // Изв. Самар. гос. с.-х. академии. 2013. № 2. С. 3–8.
2. Зудилин С. Н. Оценка параметров ущерба земель сельскохозяйственного назначения // 16-й Междунар. науч.-пром. форум «Великие реки 2014»: [труды конгресса]: в 3 т. Т. 1 / отв. ред. А. А. Лапшин. Н. Новгород: ННГАСУ, 2014. С. 389–391.
3. Зудилин С. Н. Оценка снижения качественных параметров земель сельскохозяйственного назначения при нецелевом использовании // Вестн. Ульян. гос. с.-х. академии. 2013. № 4 (24). С. 13–17.
4. Носов В. В. Концепция и содержание устойчивости сельскохозяйственного производства // Ученые записки РГСУ. 2005. № 3 (47). С. 105–113.
5. Зудилин С. Н. Расчет ущерба при несельскохозяйственном использовании земель // Управление земельно-имущественными отношениями: материалы IX Междунар. науч.-практ. конф. Пенза: ПГУАС, 2013. С. 38–43.
6. Жичкин К. А., Пенкин А. А., Гурьянов А. В., Жичкина Л. Н. Информационное обеспечение кадастровой оценки земель сельскохозяйственного назначения (на материалах Самарской области). Кинель: РИЦ СГСХА, 2015. 159 с.
7. Жичкин К. А. Нецелевое использование земель сельскохозяйственного назначения как источник ущерба в системе «муниципальный район–регион» // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 277–284.

## КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНОЙ МОБИЛЬНОСТИ В РЕСПУБЛИКЕ МОРДОВИЯ

Е. А. Пиглицева

*Мордовский государственный университет, Саранск, Россия*

E-mail: Piglitseva@ya.ru

Как известно, российские регионы значительно отличаются друг от друга по экономическим и социальным показателям. В таких условиях необходимы индивидуальные подходы к решению многих социальных задач, новые механизмы управления, позволяющие снизить социальную стратификацию и увеличить восходящую социальную мобильность в регионе. Экономическая действительность, сложившаяся в Республике Мордовия на сегодняшний день, также характеризуется значительной дифференциацией уровня жизни и социальной мобильности не только у отдельного человека, но и у целых районов. Этим обусловлена необходимость использования методов кластерного анализа при классификации районов Республики Мордовия по показателям социально-экономического развития. Исследуемые показатели оказывают влияние на формирование социальной мобильности населения, помогают построить научно обоснованные классификации, выявить внутренние связи между единицами наблюдаемой совокупности.

## CLUSTER ANALYSIS OF SOCIAL MOBILITY IN THE REPUBLIC OF MORDOVIA

E. A. Piglitseva

As is known, Russia's regions are significantly different from each other in economic and social indicators. In such circumstances, to have individual approaches to the solution of many social problems, new management tools that reduce social stratification and increase upward social mobility in the region. Economic reality prevailing in the Republic of Mordovia today, as characterized by considerable differentiation in living standards and social mobility is not only an individual, but also entire regions. This is due to the necessity of using cluster analysis methods for the classification of areas of the Republic of Mordovia in terms of socio-economic development. The test parameters affect the formation of social mobility and help build a science-based classification, to reveal the internal communication between the units of the observed population.

Экономическая действительность, сложившаяся в Мордовии на сегодняшний день, характеризуется значительной дифференциацией уровня жизни и социальной мобильности не только у отдельного человека, но и у целых районов. Существующие целевые программы социально-экономического развития отдельных районов Республики Мордовия пока не привели к существенному снижению разрыва между «богатыми» и «бедными». В связи с этим необходимо провести классификацию районов Республики Мордовия по некоторым показателям социально-экономического развития, оказывающим влияние на социальную мобильность населения. Необходимо выявить районы, которые по значениям факторных признаков могут быть объединены в одну группу для дальнейшего исследования. Эта задача может быть решена с помощью кластерного анализа.

Кластерный анализ – это совокупность методов, позволяющих классифицировать многомерные наблюдения, каждое из которых описывается целым набором исходных переменных [1]. Цель кластерного анализа – образование групп схожих между собой объектов, которые принято называть кластерами. В отличие от традиционных в статистике комбинационных группировок, кластерный анализ приводит к разбиению на группы с учетом всех группировочных признаков.

Необходимость использования методов кластерного анализа при классификации районов Республики Мордовия по показателям социально-экономического развития, оказывающим влияние на формирование социальной мобильности населения, обусловлена тем, что они помогают построить научно обоснованные классификации, выявить внутренние связи между единицами наблюдаемой совокупности. Кроме того, методы кластерного анализа могут использоваться с целью сжатия

информации, что является важным фактором в условиях постоянного увеличения и усложнения потоков статистических данных [2].

Используя ППП «Statistica», проведем кластеризацию районов Республики Мордовия по восьми классификационным признакам, оказывающим влияние на формирование социальной мобильности населения:

$X_1$  – среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций по городам и районам республики (руб.);

$X_2$  – уровень зарегистрированной безработицы;

$X_3$  – численность безработных, состоящих на учете в государственных учреждениях службы занятости, по районам республики (на конец года; чел.);

$X_4$  – средняя продолжительность регистрируемой безработицы (на конец года; месяцев);

$X_5$  – коэффициент напряженности на одну заявленную в государственные учреждения службы занятости вакансию (на конец года; чел.);

$X_6$  – численность населения в трудоспособном возрасте (мужчины 16–59, женщины 16–54), (чел.);

$X_7$  – миграционный прирост, убыль (–);

$X_8$  – естественный прирост, убыль (–).

Исходные данные для проведения кластерного анализа по районам Республики Мордовия приведены в табл. 1.

Дендрограмма, построенная на основе метода Уорда, приведена на рисунке.

Исходя из вида дендрограммы, можно сделать вывод о целесообразности разбиения совокупности объектов на три кластера. Основная часть районов принадлежит ко второму кластеру, сюда вошли 12 районов, в первом кластере оказалось семь районов и три района – в третьем кластере (табл. 2).

Полученные с помощью ППП «Statistica» средние значения классификационных признаков для каждого кластера позволяют охарактеризовать экономическое положение районов, попавших в данную группу (табл. 3).

В первый кластер вошли Zubovo-Полянский, Ковылкинский, Лямбирский, Ромодановский, Рузаевский, Торбеевский и Чамзинский районы.

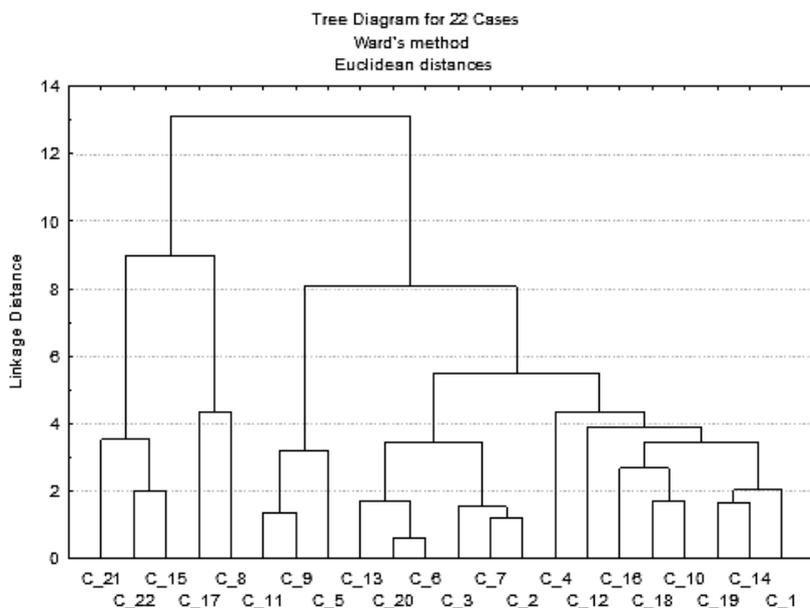
Совокупность объектов данного кластера характеризуется самым высоким уровнем среднемесячной заработной платы (16729,2 руб.) и самым низким уровнем безработицы (0,9%). Районы данного кластера являются наиболее привлекательными для постоянного места жительства,

**Исходные данные для проведения кластерного анализа  
по районам Республики Мордовия [3]**

Район	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
Ардатовский	14282,9	0,9	136	5,6	0,7	15526	-437	-10,1
Атюрьевский	13289	1,4	90	5,3	1	5625	-398	-10,4
Атяшевский	16043,5	1,3	148	5,5	0,9	10464	-313	-10,2
Большеберезниковский	13205,5	1,1	85	3,8	0,4	7037	-35	-15,3
Большеигнатовский	12382,5	1,6	82	4,7	1,6	4300	-81	-10,7
Дубенский	15884,1	1,1	81	5,8	0,9	6936	-124	-10,9
Ельниковский	13799,1	1,2	75	5,7	1	6308	-268	-9,5
Зубово-Полянский	15487,9	1,2	407	4,4	0,8	38081	-608	-4,7
Инсарский	13393,9	1,2	93	3,9	1,2	7400	-143	-7,7
Ичалковский	16210,6	1,1	116	5,6	0,5	11267	-71	-9,1
Кадошкинский	15907,5	1,3	63	3,4	1,1	4163	-106	-7,1
Ковылкинский	15763	1	231	6,9	0,8	24335	-333	-8,5
Кочкуровский	14350,3	0,9	50	5,7	1,1	6015	-29	-11,6
Краснослободский	15539,2	0,7	101	4,9	0,8	14063	-210	-9,4
Лямбирский	18654,2	0,5	71	6,5	0,6	20449	105	-3,9
Ромодановский	16727,7	0,9	96	5,4	0,7	11772	-96	-3,1
Рузаевский	21052,9	1,1	390	5,4	1,2	38646	-49	-3,4
Старошайговский	14471,7	1,1	81	4,9	0,3	7750	-248	-9,4
Темниковский	15079,7	0,9	90	4,6	0,7	8248	-272	-13,4
Теньгушевский	15606,1	1,1	76	6,1	0,9	6798	-188	-12,1
Торбеевский	20870,4	0,6	63	5,9	0,9	12101	-322	-6,3
Чамзинский	21030,7	0,7	115	5,5	0,3	18096	64	-4,1

о чем свидетельствует низкий среди кластеров размер и миграционная убыль – 155 человек.

Во второй кластер вошло наибольшее количество объектов. Сюда были включены Ардатовский, Атюрьевский, Атяшевский, Большеберезниковский, Дубенский, Ельниковский, Ичалковский, Кочкуровский,



Классификация объектов по методу Уорда

Таблица 2

**Распределение муниципальных районов Республики Мордовия на 3 кластера**

Кластер 1 (с высоким уровнем социальной мобильности)	Кластер 2 (со средним уровнем социальной мобильности)	Кластер 3 (с низким уровнем социальной мобильности)
Zubovo-Полянский Ковылкинский Лямбирский Ромодановский Рузаевский Торбеевский Чамзинский	Ардатовский Атюрьевский Атяшевский Большеберезниковский Дубенский Ельниковский Ичалковский Кочкуровский Краснослободский Старошайговский Темниковский Теньгушевский	Большеигнатовский Инсарский Кадошкинский

Распределения средних значений для каждого кластера

Признак	Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3
$X_{1cp}$	16729,2	15090,3	14968,0
$X_{2cp}$	0,9	1,1	1,1
$X_{3cp}$	77,9	133,8	202,7
$X_{4cp}$	5,4	5,3	4,6
$X_{5cp}$	0,9	0,9	0,6
$X_{6cp}$	10807,7	12295,0	18795,0
$X_{7cp}$	-155,0	-220,6	-238,0
$X_{8cp}$	-7,3	-9,7	-9,7

Краснослободский, Старошайговский, Темниковский, Теньгушевский районы.

Практически все показатели данного кластера находятся на среднем уровне. Так среднемесячная заработная плата во втором кластере составляет 15090,3 руб., что ниже, чем в первом кластере на 1638,9 руб., но выше по сравнению с третьим кластером на 122,3 руб. Уровень безработицы здесь составил 1,1% (аналогично третьему кластеру). По сравнению с первым кластером практически в два раза выше показатель средней продолжительности регистрируемой безработицы и на 40% выше показателя миграционной убыли.

К районам третьего кластера относятся три района: Большеигнатовский, Инсарский и Кадошкинский. Они характеризуются низким уровнем среднемесячной начисленной заработной платы (14968 руб.) и высокими значениями средней продолжительности регистрируемой безработицы и миграционной убыли.

Такие значения перечисленных факторов не могут не оказывать отрицательного воздействия на социальную мобильность населения. Совокупность перечисленных факторов делает эти районы непривлекательными для постоянного места жительства, о чем говорит высокое отрицательное значение коэффициента миграционной убыли.

В итоге проведенной работы можно сделать краткие выводы. Итак, кластерный анализ выявил три группы районов, характеризующихся определенными значениями факторов, оказывающих влияние на соци-

альную мобильность населения. Положение районов первого кластера на фоне двух последующих является более благоприятным. Второй кластер имеет менее всего крайне высоких и крайне низких значений исследуемых факторов. Третий кластер обладает достаточно тяжелым социально-экономическим положением, что отражается в высоком уровне безработицы, низком уровне среднемесячной начисленной заработной платы, высоким миграционным оттоком.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2781.2012.2) и РФФИ (проект 12-07-00057).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сажин Ю. В., Басова В. А., Катунь А. В. Многомерные статистические методы анализа экономических процессов: учеб. пособие. Саранск: Изд-во Морд. ун-та, 2008. 188 с.
2. Пасовец Ю. М. Предпочтения учащейся молодежи региона в рамках формирования ее социальной мобильности // Труд и социальные отношения. 2011. № 10. С. 52–59.
3. Официальный сайт Территориального органа Федеральной службы государственной статистики (Мордовиястат) [Электронный ресурс]. URL: <http://mrd.gks.ru> (дата обращения: 23.09.2015).

### **КОТИРОВКА ДОГОВОРА ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ НА БАЗЕ ЭКСЦЕДЕНТА УБЫТКА: «СТРУКТУРНЫЙ» МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНЫ**

**А. А. Правикова**

*АО «Согаз», Москва, Россия*  
E-mail: Pravikova.Ann@sogaz.ru

Данная статья подробно раскрывает один из методов расчета цены договора перестрахования на базе эксцедента убытка – структурный метод оценки. Метод заключается в построении графика-кривой, отображающей отношение размера перестраховочной премии за долю участия в риске к проценту участия от страховой суммы. В зависимости от предоставленного перестрахователем профиля рисков (список всех рисков в портфеле) данная кривая может показывать, насколько данный портфель подвержен убыткам. Во многих компаниях для уменьшения вероятности ошибок при определении премии кривые строятся на основании сбора данных за 40–50 лет.

### **THE QUOTATION OF REINSURANCE AGREEMENT ON EXCESS OF LOSS BASE: EXPOSURE METHOD**

**A. A. Pravikova**

This article reveals the details of one of the price calculation method for reinsurance agreement on Excess of Loss base – Exposure method. The method is based on building-up curve which determined as a ratio of the level of the reinsurance premium for share to the percentage of participation in the account. Depending on the risk profile (the list of all risks)

provided by Reinsured this curve may show how risky is your portfolio. In many companies to reduce the likelihood of errors in the premium calculation this curve is constructed on data have been gathered for 40–50 years.

Страховые компании для выравнивания и защиты своего портфеля, а также для улучшения результатов финансовой деятельности используют специфичный инструмент риск-менеджмента – перестрахование. Определение адекватной цены для такого важного инструмента управления риском, как перестрахование является важнейшей задачей любой страховой компании, так как если перестраховочный тариф окажется неоправданно заниженным, то риск будет трудно разместить на рынке, в противном случае, когда размер тарифа значительно выше среднерыночного, компания будет нести убытки.

Когда требуется разместить специальный риск, который не покрывается облигаторной программой (попадает в исключения по договору), либо единичный крупный риск (страховая сумма выше лимита облигатора), то заключается так называемый договор факультативного перестрахования и цена такого договора полностью зависит от ставки, которая используется при определении страховой премии («прямая ставка»). В свою очередь, прямую ставку устанавливают андеррайтеры страховой компании на основании действующих правил страхования, внутренней андеррайтерской политики либо иных установленных документов.

При факультативном размещении перестрахователь имеет право закладывать в тариф также и свою комиссию за ведение аккаунта, как правило, 5–10%, но в последнее время тенденция рынка перестрахования такова, что риски размещаются с применением только нетто-прямой ставки без дополнительных вычетов. В основном это связано с политикой прямого ценообразования в российских компаниях и сильными позициями продающих подразделений, которые лоббируют использование заниженных тарифов для удержания клиента, это, безусловно, отражается на правильности котировки не только для факультативов, но актуально и для облигаторных договоров.

Так, как же происходит котировка (установление цены) в договорах непропорционального облигаторного перестрахования? В облигаторном договоре цена не может зависеть от прямого тарифа каждого отдельного полиса страхования, так как облигаторный договор покрывает весь портфель компании по определенному виду, а это порядка 5000 полисов в год<sup>1</sup>. Ошибка при расчете цены за такой договор может гораздо сильнее ударить по финансовой устойчивости перестрахователя, ведь это самые

---

<sup>1</sup>На примере имущественного портфеля российской компании из TOP 10.

крупные фундаментальные договоры перестрахования для каждой компании, премия в которых может достигать 10 млн евро, а убытки порядка 200 млн евро (на примере российских компаний СПАО «Ингосстрах» и АО «Согаз»). Поэтому для удобства и точности определения расчет цены облигаторных договоров на базе эксцедента убытка ведется на основании математических методов, таких как метод экстраполяции, метод Парето и структурный метод, последний рассмотрим более подробно.

Основная идея структурного метода – распределение премии между перестраховщиком и перестрахователем в соответствии с определенной пропорцией. Чтобы грамотно составить эту пропорцию, необходима детальная информация по принимаемому портфелю, так называемый «risk profile»/ «профиль рисков», которые перестрахователь предоставляет потенциальному перестраховщику вместе с запросом на котировку.

Пример профиля рисков компании приведен в табл. 1.

Таблица 1

#### Профиль рисков

Страховая сумма в интервале, евро		Количество рисков	Агрегатная страховая сумма, евро	Средняя страховая сумма, евро	Подписанная премия на 100% риска, евро
от ...	... до				
0	1 000 000	4 547	1 531 837 709	336 890	639 000
1 000 001	2 000 000	388	670 234 478	1 727 408	320 000
2 000 001	3 000 000	165	466 662 620	2 828 258	230 000
3 000 001	4 000 000	70	228 167 802	3 259 540	140 453
4 000 001	5 000 000	48	216 282 128	4 505 878	100 723

В профиле рисков полисы группируются на несколько диапазонов по размеру страховой суммы, и по каждой группе приводятся данные о количестве рисков, агрегатной премии и средней страховой сумме. Каждый диапазон профиля для целей котировки рассматривается как «один усредненный риск», т.е. распределение премии проводится как по одному риску.

При работе с профилем перестраховщик должен составить некую пропорцию, по которой страховая премия распределяется так же, как:

- убытки, приходящиеся на приоритет,
- убытки, превышающие приоритет.

Когда будет известно распределение убытков, то на основании этих данных мы сможем распределить премию между участниками договора перестрахования.

Рассмотрим данный метод на примере.

Требуется прокотировать облигаторный договор со структурой XL по риску:

- 500 000 USD свыше 500 000 USD (предлагается доля в перестраховании 500 000 USD свыше приоритета перестрахователя 500 000 USD);
- лимит договора: 1 000 000 USD;
- ожидаемая оригинальная премия (EPI): 1 000 USD.

Прокотируем договор в зависимости от истории убытков (указывается в профиле или запрашивается дополнительно) (рис. 1).

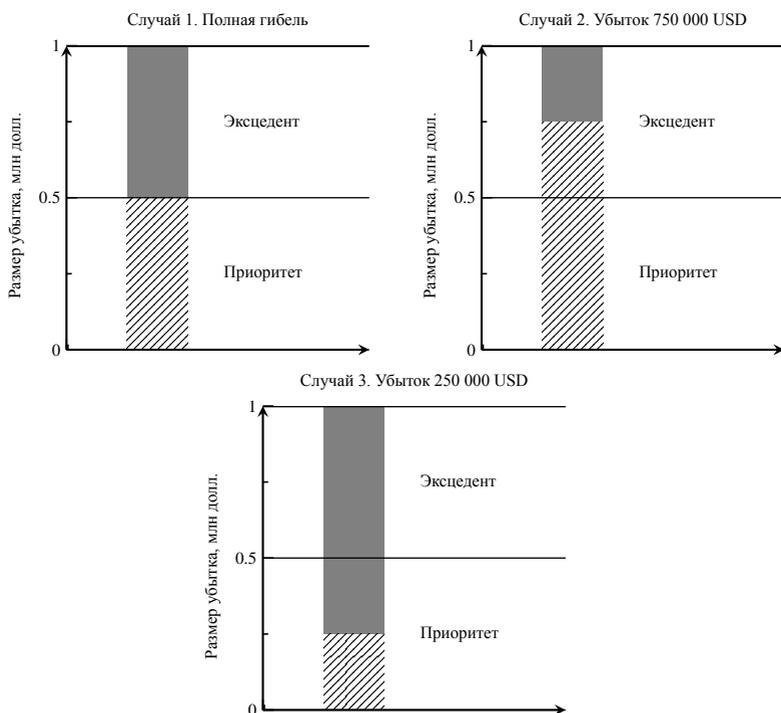


Рис. 1. Различные случаи распределения убытка

Объединяем случаи 1, 2, 3 для того, чтобы получить окончательную цену (рис. 2):

- доля перестраховщика – 750 000 USD;
- доля перестрахователя – 1 250 000 USD;
- премия перестраховщика:

$$\frac{750\,000}{(750\,000 + 1\,250\,000)} \times 100\% = 37,5\%,$$

Т.е.  $1\,000 \cdot 37,5\% = 375$  USD.

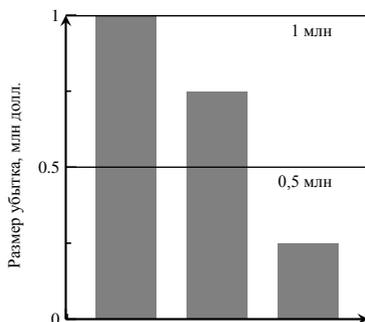


Рис. 2. Совмещенные случаи убытка

Проведем аналогичные расчеты для определения премии по доле перестрахователя (табл. 2):

Таблица 2

**Данные для построения кривой распределения убытков**

Приоритет	Экседент	Приоритет от страховой суммы (ось Y), %	Премия по доле перестрахователя (ось X), %
250 000	750 000	25	37,5
500 000	500 000	50	62,5
750 000	250 000	75	87,5

В нашем случае портфель имеет высокую степень риска и кривая помечена ниже как «High». Благодаря этого графику мы сможем определить при любом значении приоритета необходимую сумму премии в соответствии с рискованной составляющей портфеля, для этого нам надо отложить по оси X значение приоритета и провести линию до пересечения с нужной кривой – значение по оси Y и будет нашей искомой премией (возможный % понесенных убытков по доле перестраховщика) (рис. 3).

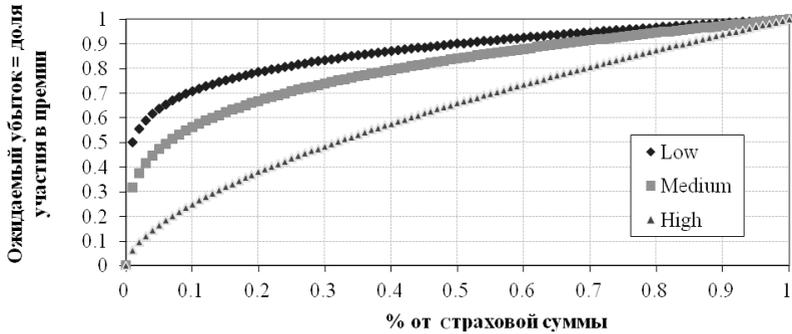


Рис. 3. Кривая распределения убытков

Можно построить различные кривые, основанные на «структурном» методе, но для иных портфелей – как для усредненного «Medium», так и для более сбалансированного и безубыточного «Low».

Приведенный пример является лишь эмпирическим отображением метода и не может быть использован для реальной оценки портфеля. В страховых компаниях используются кривые, построение которых ведется более 40 лет и степень точности определения цены очень высока (рис. 4).

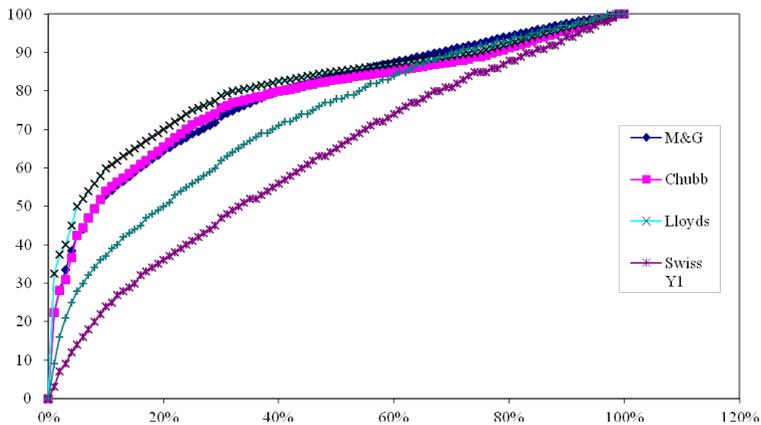


Рис. 4. Пример построения кривых в флагманах перестраховочного рынка – Chubb, Lloyd's, Swiss Re, M&G

При оценке входящего портфеля рисков и назначении перестраховочной премии в договорах ХоL (эксцедента убытка) практически невозможно просчитать со 100%-ной точностью цену за риск, так как ошибка может крыться в самих профилях, например, не учтена кумуляция по объектам, информация не соответствует покрытию «по риску» (риски ущерба имуществу и перерыва в производстве на одном и том же объекте рассматриваются отдельно, хотя по всем правилам страховая сумма по двум секциям должна быть суммирована), недостаточные оригинальные тарифы и т.д.

Безусловно, такие графики оказывают незаменимую помощь при принятии решения о входе в облигаторную программу, но нельзя слепо доверять математическим методам построения. Опытный перестраховщик всегда смотрит не на пересечение линий на графике, а учитывает все факторы в совокупности: убыточность по данному виду у других компаний, планируемые изменения в законодательстве по тарифной политике, авторитет первичных андеррайтеров перестрахователя и, конечно, свое личное, основанное на опыте, профессиональное мнение.

## **ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ г. УФА В ТРУДОСПОСОБНОМ ВОЗРАСТЕ ДО 2030 ГОДА**

**В. Б. Прудников, Н. К. Шамсутдинова**

*Бакирский государственный университет, Уфа, Россия,  
Институт социально-политических и правовых исследований  
Республики Башкортостан, Уфа, Россия*

E-mail: prudnikov.bgu@mail.ru, shamsutdinovank@gmail.com

Статья посвящена анализу результатов прогноза численности населения в трудоспособном возрасте г. Уфа когортно-компонентным методом на период 2030 г.

Основой для прогноза послужил базовый сценарий, который предусматривает сохранение параметров рождаемости и смертности (возрастных коэффициентов) на уровне 2014г. Авторы пришли к выводу, что вследствие значительного старения населения в г. Уфа доля населения в трудоспособном возрасте будет снижаться. Сохранение темпов миграции на текущем уровне не позволит полностью компенсировать данную тенденцию.

## **FORECAST OF THE NUMBER OF WORKING AGE POPULATION TO 2030**

**V. B. Prudnikov, N. K. Shamsutdinova**

The article is devoted to the analysis of the results of the forecast population of working age Ufa (to 2030) by using cohort-component method. Baseline scenario, which envisages the preservation of the basic parameters of fertility and mortality rates (age-specific) at the level

of 2014 formed the basis for the forecast. The authors concluded that the share of working-age population will decline in Ufa. Saving migration rates at the current level will not completely compensate for this trend.

В настоящее время многие крупные города Российской Федерации, в том числе г. Уфа, занимаются разработкой стратегий развития на долгосрочную перспективу (более 6 лет). Основанием является принятый 28 июня 2014 г. Федеральный закон РФ «О стратегическом планировании в Российской Федерации». Такие стратегии включают в себя планы по развитию экономики, социальной и городской инфраструктуры и др. Одной из основных ключевых характеристик и одним из условий экономического развития является трудовой потенциал, носителем которого выступают трудовые ресурсы. В свою очередь, основу трудовых ресурсов представляет население в трудоспособном возрасте. К данной категории в Российской Федерации и ее субъектах относят мужчин в возрасте от 15 до 59 исполнившихся лет и женщин в возрасте от 15 до 54 исполнившихся лет. В этой связи тенденции изменения численности населения в трудоспособном возрасте учитываются при разработке стратегий развития городов.

Возникает актуальная задача построения демографического прогноза численности населения в трудоспособном возрасте г. Уфа на среднесрочную перспективу. Классическим методом демографического прогнозирования является когортно-компонентный метод, или метод «перемещения возрастов» [1–3]. Ниже приведем краткое описание метода.

**Когортно-компонентный метод.** Основные уравнения демографического баланса, описывающие динамику численности (кроме начальной и последней возрастных когорт):

— без учета миграции:

$${}_n P_x(t+n) = {}_n P_{x-n}(t) - {}_n^{x-n} D(t, t+n), \quad (1)$$

— с учетом миграции:

$${}_n P_x(t+n) = {}_n P_{x-n}(t) - {}_n^{x-n} D(t, t+n) + {}_n^{x-n} \Delta M_x(t, t+n) - {}_n^{x-n} DM_x(t, t+n). \quad (2)$$

Для начальной когорты (родившихся)

— без учета миграции:

$$P_0(t+n) = B(t, t+n) - {}_n^0 D(t, t+n), \quad (3)$$

— с учетом миграции:

$$P_0(t+n) = B(t, t+n) - {}_n^0 D(t, t+n) + {}_n \Delta M_0(t, t+n) - {}_n DM_0(t, t+n). \quad (4)$$

Здесь  $n$  – шаг прогнозирования (равен ширине интервала возрастных групп);  $x$  – идентификатор возрастной когорты (начало интервала);  ${}_n P_x(t)$  – численность когорты в возрасте  $(x - n, x)$  в момент времени  $t$ ;  ${}_n P_x(t + n)$  – численность той же когорты в возрасте  $(x, x + n)$  в момент времени  $t + n$ ;  ${}_{n-n}^{x-n} D(t, t + n)$  – численность умерших из когорты  $(x - n, x)$  за период  $(t, t + n)$ ;  ${}_{n-n}^{x-n} \Delta M_x(t, t + n)$  – миграционный прирост (абсолютная численность) когорты  $(x - n, x)$  за период  $(t, t + n)$ ;  ${}_{n-n}^{x-n} DM_x(t, t + n)$  – численность умерших из числа мигрантов когорты  $(x - n, x)$  за период  $(t, t + n)$ ;  $P_0(t + n)$  – численность начальной когорты  $(0, n)$  на момент времени  $t + n$ ;  $B(t, t + n)$  – число родившихся за период времени  $(t, t + n)$ ;  ${}_n^0 D(t, t + n)$  – число умерших в начальной когорте за период  $(t, t + n)$ ;  ${}_n \Delta M_0(t, t + n)$  – миграционный прирост (абсолютная численность) когорты  $(0, n)$  за период  $(t, t + n)$ ;  ${}_n DM_0(t, t + n)$  – численность умерших из числа мигрантов когорты  $(0, n)$  за период  $(t, t + n)$ .

Прогнозирование осуществляется отдельно для мужского и женского населения. Для определения численности когорт (кроме начальной) и числа умерших применяются «коэффициенты передвижки» возрастов, рассчитываемые на основе возрастных коэффициентов смертности для рассматриваемого населения, мужчины и женщины отдельно.

Коэффициенты передвижки для всех когорт, кроме начальной и последней, рассчитываются как:

$$S(x - n) = L(x)/L(x - n), \quad (5)$$

где  $L(x)$  – численность мужчин (женщин) в стационарном населении таблиц ожидаемой продолжительности жизни для возрастной когорты  $(x, x + n)$ , при расчете коэффициентов передвижки для мужчин (женщин) соответственно.

Для начальной возрастной когорты коэффициент передвижки:

$$S(0) = L(n)/(n \cdot l_0), \quad (6)$$

где  $l_0$  – корень таблицы ожидаемой продолжительности жизни (среднедовое число рождений в стационарном населении).

Для последней возрастной когорты коэффициент передвижки будет иметь вид:

$$S(x_{\max}) = T(x_{\max})/T(x_{\max} - n), \quad (7)$$

где  $T(x)$  – численность мужчин (женщин) в стационарном населении таблиц ожидаемой продолжительности жизни в возрастах  $x$  лет и старше.

Коэффициент передвижки  $S(x_{\max})$  применяется для прогнозирования численности последней возрастной когорты. Все коэффициенты передвижки рассчитываются для каждого будущего прогнозного интервала на этапе разработки сценариев смертности.

Численность начальной когорты в возрасте  $(0, n)$  лет рассчитывается как число родившихся, с поправкой на детскую (младенческую) смертность. Численность новорожденных в периоде  $(t, t+n)$  для женщин возрастной группы  $(x-n, x)$  определяется как:

$$B_x(t, t+n) = {}_nF(x) \cdot n \cdot \overline{P^f}(x, t), \quad (8)$$

где  ${}_nF(x)$  – оценка возрастной коэффициент рождаемости для женщин возрастной группы  $(x-n, x)$ ;  $\overline{P^f}(x, t)$  – средняя ожидаемая численность женщин данной возрастной группы.

Суммирование по всем детородным интервалам позволяет получить прогноз общего числа рождений в периоде  $(t, t+n)$  –  $B(t, t+n)$ . Распределение общего числа родившихся на мальчиков и девочек производится пропорционально коэффициенту соотношения полов,  $\delta$ .

**Цель, исходные данные, сценарий и результаты прогнозирования.** В качестве практической цели исследования определим построение описанным методом прогноза до 2030 г. численности населения г. Уфа (в трудоспособных возрастах и в возрастах, старше трудоспособного), с учетом и без учета миграции, в пятилетних возрастных интервалах. Рассмотрим базовый сценарий прогнозирования: демографические показатели (возрастные коэффициенты смертности и рождаемости, а также абсолютные величины миграционного прироста) останутся на уровне 2014 г.

Использованы следующие исходные данные по населению г. Уфа (источник – информация Башкортостанстата):

- половозрастная структура населения («все население», мужчины и женщины отдельно) по г. Уфа на 1 января 2015г.;
- возрастные коэффициенты рождаемости и смертности в расчете на 100 тыс. чел. по г. Уфа – расчеты авторов на основе данных Башкортостанстата за 2014 г.;
- данные абсолютного миграционного прироста по г. Уфа – расчеты авторов на основе данных Башкортостанстата за 2014 г.

В табл. 1–4 приведены численности населения в трудоспособном возрасте, а также в возрастах, старше трудоспособного, в варианте с учетом и без учета миграции.

Таблица 1

**Возрастные коэффициенты смертности населения г. Уфа, 2014 г.  
(в расчете на 100 тыс. чел.)**

Возрастная группа	Мужчины	Женщины	Возраст	Мужчины	Женщины
До 1 года	892,6	631,9	40–44 года	918,1	258,6
1–4 года	32,7	10,7	45–49 лет	1036,2	419,1
5–9 лет	31,7	25,5	50–54 года	1587,8	530,0
10–14 лет	24,8	13,0	55–59 лет	2122,9	782,0
15–19 лет	55,3	41,0	60–64 года	3138,8	1028,3
20–24 года	129,3	41,0	65–69 лет	4343,9	1581,0
25–29 лет	273,5	73,1	70–74 года	6088,4	2529,5
30–34 лет	535,6	162,9	75–79 лет	8581,0	4481,1
35–39 лет	792,1	233,8	80 и старше	15421,6	11558,3

Таблица 2

**Возрастные коэффициенты рождаемости г. Уфа, 2014 г.  
(в расчете на 100 тыс. чел.)**

Возрастная группа	Возрастные коэффициенты рождаемости
15–19 лет	11,1
20–24 года	56,9
25–29 лет	121,1
30–34 года	96,8
35–39 лет	47,8
40–44 года	10,4
45–49 лет	0,6

Таблица 3

**Прогнозирование численности населения г. Уфа, без учета миграции**

Показатель	2005	2010	2015	2020	2025	2030
Численность населения г. Уфа в трудоспособных возрастах, чел.	695	671	695	653	630	634
Численность населения г. Уфа старше трудоспособного возраста, чел.	192	207	235	260	273	276
Коэффициент демографической нагрузки лицами старше трудоспособного возраста (на 1000 чел. трудоспособного населения)	276	308	338	398	433	435

**Прогнозирование численности населения г. Уфа, с учетом миграции**

Показатель	2005	2010	2015	2020	2025	2030
Численность населения г. Уфа в трудоспособных возрастах, чел.	695	671	695	669	662	684
Численность населения г. Уфа в трудоспособных возрастах, чел.	192	207	235	259	269	269
Коэффициент демографической нагрузки пожилыми (на 1000 чел. трудоспособного населения)	276	308	338	387	406	394

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) прогноз численности трудоспособного населения г. Уфа до 2030 г. показывает отрицательную динамику численности вследствие значительного старения населения. При этом коэффициент демографической нагрузки пожилыми растет, что будет оказывать влияние на экономику города уже в среднесрочной перспективе;

2) сохранение темпов миграции на текущем уровне хотя и не позволяет полностью компенсировать данную тенденцию, однако смягчает ее влияние на экономику.

Полученные результаты будут использоваться при разработке сценариев и прогнозов социально-экономического развития г. Уфа.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Федеральный закон Российской Федерации «О стратегическом планировании в Российской Федерации» от 28 июня 2014 г. № 172-ФЗ // Рос. газ. Федеральный выпуск. 2014. № 6418.
2. Денисенко М. В., Калмыкова Н. М. Демография: учеб. пособие. М.: Инфра-М, 2009. 432 с.
3. Борисов В. А. Демография: учебник для вузов. М.: ИД «Notabene», 2002. 272 с.

**О РАСЧЕТЕ СТРАХОВЫХ ТАРИФОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕХАНИЗМА ФРАНШИЗЫ И ЛИМИТА ВЫПЛАТ**

**А. А. Пчелинцева**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*

E-mail: pchelinseva\_anna@outlook.com

Данная работа посвящена изучению методов управления страховыми тарифами при использовании механизма условной и безусловной франшизы и лимита выплат в единичном страховом событии. Произведены расчеты и проанализированы полученные результаты тарифных ставок при различных механизмах расчетов в математическом пакете Matlab.

## ON THE CALCULATION OF INSURANCE RATES USING FRANCHISE AND PAYOUT LIMITS

A. A. Pchelinceva

This work is devoted to the study of management practices insurance rates by using the mechanism of conditional and unconditional deductible and limit payments to a single insurance event. Calculations and analyzes the results of tariff rates for different mechanisms of calculations in mathematical package Matlab.

Уровень страховых тарифов является важнейшим нормативным показателем, определяющим размер страховой премии в принятых условиях страхования. Формирование страховых тарифов определяется как ставка страховой премии с единицы страховой суммы с учётом объёма страхования и характера страхового риска. Различают нетто-премию и брутто-премию. Нетто-премия представляет собой часть страховой премии, которая предназначена для формирования страхового фонда, используемого для текущих страховых выплат и создания страховых резервов. Брутто-премия образована нетто-премией, дополненной расходами страховщика, а также составляющей премии на формирование плановой прибыли. Соответственно видам страховых премий выделяют два вида страховых тарифов. Нетто-ставка – основная часть страховых тарифов, предназначенная для формирования ресурсов страховых органов на выплату страхового возмещения и страховых сумм. Брутто-ставка – тарифная ставка платежей по страхованию, исчисляется как сумма нетто-ставки и надбавки для возмещения расходов по проведению страховых операций.

Франшиза – предусмотренное условиями страхования освобождение страховщика от возмещения убытков страхователя, не превышающих заданной величины. Франшиза бывает условной и безусловной. Безусловная франшиза – это часть убытка, не подлежащая возмещению и вычитаемая при расчете страхового возмещения, подлежащего выплате из общей суммы возмещения. В случае с условной франшизой, пока сумма ущерба находится в пределах суммы франшизы, страхового возмещения не будет, но если сумма ущерба превышает сумму франшизы, то выплачиваться будет вся сумма ущерба без вычета франшизы. Франшиза может быть выражена как пропорциональная доля (в процентах от страховой суммы либо убытка) либо как абсолютная величина (в денежном выражении). Размер франшизы и её тип устанавливаются договором или правилами страхования.

Лимит выплаты – максимальный размер страховой выплаты по одному страховому случаю или по некоторой совокупности объектов и рис-

ков. Лимит выплаты указывается в договоре страхования либо устанавливается законом.

Использование механизма франшизы предполагает [1]:

- финансово-экономический интерес страхователя в предотвращении мелких страховых ущербов (за счет снижения страховой платы);
- устранение необходимости оформления множества мелких страховых событий, загружающих персонал страховой компании, при сравнительно незначительной доле этой группы событий в общем объеме страховых выплат.

Использование ограничения (лимита) на страховые выплаты позволяет:

- в каждом страховом событии ограничить уровень страхового риска, удерживаемого страховщиком, путем устранения из страхового процесса нечастых страховых событий;
- существенно снизить плату за предоставляемые страховые услуги ценой закрепления за страхователем весьма значительных ущербов, возникающих с достаточно малой вероятностью.

На основе модели аккумуляции страховых выплат была выведена формула для расчета функции распределения совокупных страховых выплат по группе застрахованных объектов с учетом механизма франшизы и лимита выплат:

$$R_W(y) = p_0 h(y) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k G_W^{(k)}(y), \quad (1)$$

где  $h(y)$  – функция Хевисайда;

$p_k$  – вероятность наступления  $k$  страховых событий на единичном (годовом) интервале времени ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ );

$G_W^{(k)}(y)$  – функция распределения совокупных страховых выплат при наступлении  $k$  страховых событий в группе застрахованных объектов.

В силу независимости страховых случаев в застрахованных объектах и однородности группы застрахованных объектов функции распределения  $G_W^{(k)}(y)$  вычисляются последовательным выполнением операции свертывания:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_W^{(1)}(y) = G_W(y); \\ G_W^{(v+1)}(y) = \int_0^y G_W^{(v)}(y-z) dG_W(z), \\ (v = 1, 2, \dots, k-1). \end{array} \right. \quad (2)$$

В качестве функции распределения величины страховых выплат  $G_W(y)$  в зависимости от рассматриваемого механизма расчета были взяты следующие функции [2]:

1) без учета франшизы:

$$F_W(y) = \frac{1}{\beta \bar{\alpha}(\alpha)} \int_0^y t^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dt; \quad (3)$$

– с учетом безусловной франшизы:

$$G_W(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ F_W(y + fr), & \text{если } y \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

3) с учетом безусловной франшизы и лимита выплат:

$$G_W L(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ F_W(y + fr), & \text{если } 0 \leq y \leq LIMW, \\ 1, & \text{если } y > LIMW. \end{cases} \quad (5)$$

4) с учетом условной франшизы и лимита выплат:

$$G_W U(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ F_W(fr), & \text{если } 0 \leq y < fru, \\ F_W(y), & \text{если } fru \leq y < LIMW, \\ 1, & \text{если } y \geq LIMW. \end{cases} \quad (6)$$

Нетто-премия  $\bar{y} = \bar{y}(\bar{P}; fr; Y_{\max})$  найдена как корень уравнения:

$$R_W(y|fr, Y_{\max}) = \bar{P}, \quad (7)$$

где  $fr$  – значение франшизы.

$Y_{\max}$  – лимит выплаты;

$\bar{P}$  – заданная надежность,

Нетто-тариф рассчитывается по формуле

$$Trn(fr, Y_{\max}) = \frac{\bar{y}(\bar{P}; fr; Y_{\max})}{S_{\Sigma}} 100\%, \quad (8)$$

где  $S_{\Sigma}$  – суммарная страховая ответственность застрахованных объектов;

Брутто-тариф вычисляется следующим образом:

$$Trbr(fr, Y_{\max}) = \frac{Trn(fr, Y_{\max})}{1 - f}, \quad (9)$$

где  $f$  – страховая нагрузка.

В программной среде Matlab были построены графики функции  $\gamma$ -распределений (рис. 1–3): нижняя линия на всех графиках – функция страхового ущерба в единичном страховом событии, на рис. 1 графике построена функция распределения страховых выплат с учетом безусловной франшизы, на рис. 2 – функция  $\gamma$ -распределения с учетом безусловной франшизы и лимита выплат и на рис. 3 – с учетом условной франшизы и лимита выплат. В соответствии с рассчитанными значениями можно сделать выводы: страхование с использованием механизма франшизы позволяет уменьшить нетто-тариф, введение ограничений на удерживаемый риск (безусловная или условная франшиза и лимит выплаты) также приводит к уменьшению страхового тарифа. Однако ожидаемое страховое возмещение со стороны страховщика в случае с безусловной франшизой сокращается значительно, чем в случае с условной.

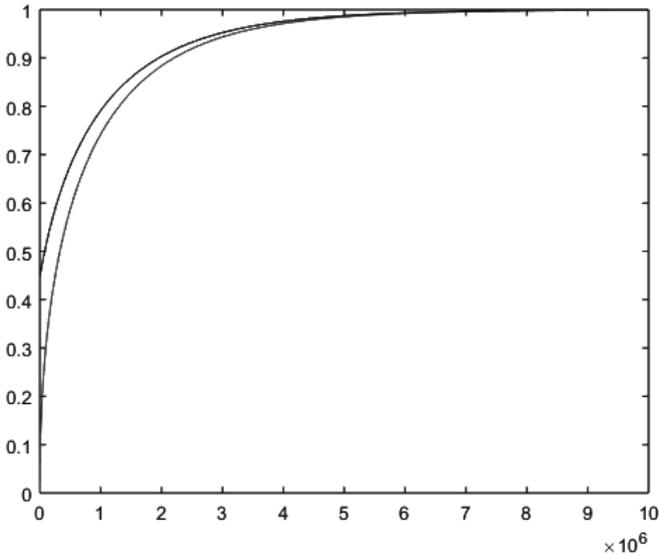


Рис. 1. Верхняя линия – функция  $u$  – распределения с учетом франшизы

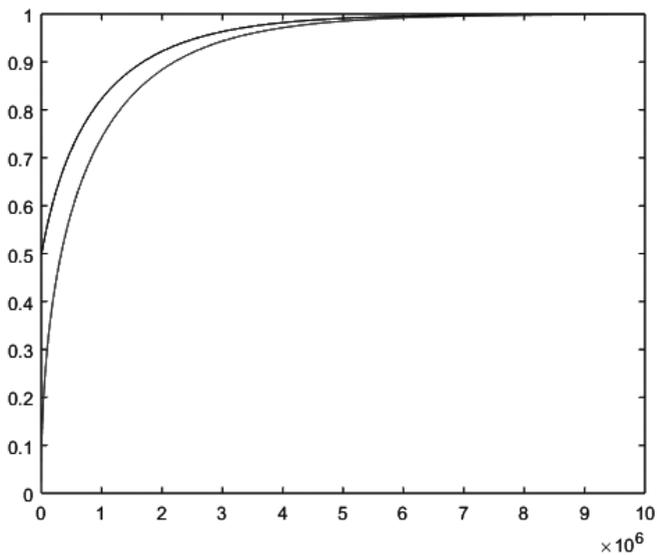


Рис. 2. Верхняя линия – функция  $y$  – распределения с учетом безусловной франшизы и лимита выплаты

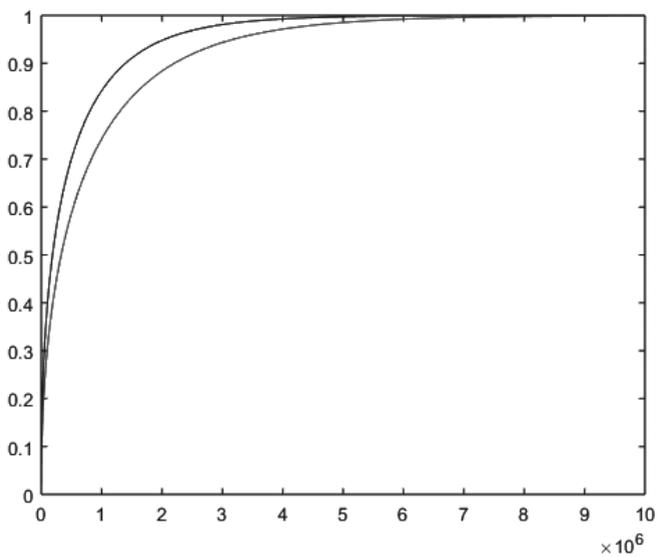


Рис. 3. Верхняя линия – функция  $y$  – распределения с учетом условной франшизы и лимита выплаты

В настоящей работе рассмотрен метод получения совокупной нетто-премии, нетто- и брутто-ставки страхового тарифа при использовании механизма условной и безусловной франшизы и лимита выплат в единичном страховом событии согласно рекомендациям, изложенным в [3]. Кроме того, был создан ПП для решения поставленной задачи с помощью средств математического пакета Matlab. Разработанный ПП протестирован на данных, проведен анализ полученных результатов работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юлдашев Р. Т.* Введение в продажу страхования, или как научиться продавать надежду. М.: Анкил, 1999. 124 с.
2. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. 47 с.
3. *Иванов С. С., Голубев С. Д., Чёрная Л. А., Шарафутдинова Н. Е.* Теория и практика рискового страхования. М.: РОСНО; Анкил, 2007. С. 86 – 89.

## ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ВОЗРАСТА НА УРОВЕНЬ СЧАСТЬЯ В РОССИИ И СТРАНАХ ЕВРОПЫ

**Л. А. Родионова**

*Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Москва, Россия  
E-mail: lrodionova@hse.ru*

В работе рассмотрены методы эконометрического инструментария для моделирования влияния возраста на уровень счастья в России и европейских странах. В работе использовались данные European Social Survey по 29 странам за 2012 г. На основе логит-моделей упорядоченного выбора для уровня счастья были получены оценки U-образной зависимости от возраста для каждой анализируемой страны и проведен сравнительный анализ. Методами кластерного анализа все страны были разделены на несколько групп, в которых эффект возраста существенно различается. Россия была отнесена к кластеру стран, где в старшей возрастной группе (старше 60 лет) уровень счастья снижается.

## ECONOMETRIC MODELING ASPECTS OF THE AGE IMPACT ON HAPPINESS IN RUSSIA AND EUROPE

**L. A. Rodionova**

The methods of econometric tools to modeling the age effect on happiness in Russia and European countries were examined. The European Social Survey data for 29 countries for 2012 were used. On the basis of the ordered logistic regression U-relation of age and happiness were obtained for each analyzed countries and the comparative analysis was conducted. By using cluster analysis all countries were divided into several groups, in which the age effect varies greatly. Russia was in a cluster of countries where the level of happiness continues to decline for the older age group (over 60 years).

Уровень счастья населения страны является одним из важных показателей социальной стабильности общества, качества жизни в стране. Настоящее исследование посвящено анализу возрастных особенностей в оценке уровня счастья. Для сравнения России и европейских стран были использованы данные ESS [1] за 2012 г. В опросе приняли участие 29 стран (53860 наблюдений). Вопросы анкеты содержали два ключевых вопроса для изучения представленной исследовательской проблемы: «Удовлетворены ли Вы жизнью в целом?» и «Счастливы ли Вы?» с 11 вариантами ответов (0 – «совершенно неудовлетворен»/«полностью несчастлив», 10 – «полностью удовлетворен»/ «полностью счастлив»). Россия занимает 26-е место по уровню счастья среди стран, принявших участие в исследовании. Среднее значение удовлетворенности жизнью в России составило 5.79 балла по шкале от 0 до 10, среднее значение уровня счастья – 6.22. Среднее значение уровня удовлетворенности и счастья по всем странам – 6.76 и 7.11 соответственно.

Последнюю строчку в этом рейтинге занимает Болгария со средним значением уровня удовлетворенности 4.34 и уровня счастья 5.27, а лидером является Дания со средними значениями 8.57 и 8.38 соответственно. Похожая картина наблюдается и предыдущих волнах ESS. Отметим, что респонденты воспринимают вопросы об удовлетворенности жизнью и о счастье как схожие, о чем свидетельствуют высокие значения коэффициентов корреляции между переменными «удовлетворенность жизнью» и «уровень счастья», построенные на основе ответов респондентов на соответствующие вопросы. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена составил 0.714 на 1%-ном уровне значимости.

Современные исследования влияния возраста на уровень счастья в целом показывают, что зависимость удовлетворенности жизнью (уровня счастья) от возраста существует [2–4] и чаще всего встречается U-образная форма: в молодых годах уровень субъективного благополучия является высоким, затем снижается, достигает минимального значения в среднем возрасте («кризис среднего возраста»), а после начинает расти в старших возрастах [5–7].

Рассматривая усредненные значения уровня счастья и уровня удовлетворенности жизнью по всем странам, участвующим в опросе ESS в 2012 г. (29 стран, 54673 респондента в возрасте 15–103 года), в среднем действительно можно наблюдать U-образный эффект, представленный на рис. 1.

При рассмотрении каждой страны в отдельности можно выявить характерные возрастные особенности для респондентов из разных госу-

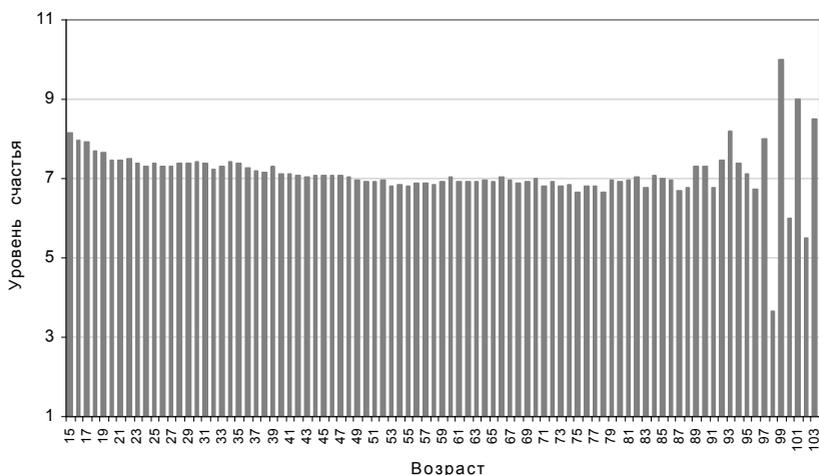


Рис. 1. Форма зависимости уровня счастья от возраста в 2012 г. (29 стран)

дарств. Анализ средних значений уровня счастья и уровня удовлетворенности жизнью по каждой возрастной группе в отдельно взятой стране показал, что форма исследуемой зависимости существенно различается в странах Европы. Однако некоторые страны похожи между собой и можно условно выделить несколько групп стран, внутри которых наблюдается схожая форма взаимосвязи возраста и уровня счастья. К *первой* группе были отнесены страны, имеющие высокие значения удовлетворенности жизнью (счастья) и практически не зависящие от возраста: Бельгия, Дания, Израиль, Исландия, Нидерланды, Норвегия, Финляндия, Швейцария и Швеция. В отдельных странах возможен даже некоторый рост во второй половине жизни (как, например, в Исландии и Норвегии). Отметим, что в 2014 г., по данным рейтинга Global AgeWatch Index [8] по качеству жизни пожилых людей старше 60 лет, Норвегия, Швеция и Швейцария оказались первыми в рейтинге среди 96 государств. Ко *второй* группе можно отнести такие страны, для которых в среднем до 40 лет уровень удовлетворенности жизнью снижается, после чего начинается небольшой рост и при этом средний показатель счастья всегда выше 6 баллов. Проявляется эффект так называемого «кризиса среднего возраста». Это Великобритания, Германия, Ирландия, Кипр, Испания, Франция. Форма зависимости для стран из этой группы имеет так называемый U-образный вид. Все остальные 15 стран условно были отнесены к *третьей* группе. Для

большинства из них характерен более низкий средний уровень удовлетворенности жизнью, но главной особенностью является снижение уровня счастья в течение большей части жизни (примерно до 60 и более лет). Страной с монотонным снижением удовлетворенности жизнью (счастья) среди прочих является Болгария, где самый низкий средний уровень счастья. Россия также была отнесена в третью группу, поскольку средний уровень удовлетворенности жизнью равен 5.79, уровень счастья – 6.22 и наблюдается снижение удовлетворенности жизнью до 60 лет. Лишь после 65–70 лет наблюдается небольшой рост.

Для оценки влияния возраста на уровень счастья были оценены логит-модели упорядоченного выбора для каждой страны, входящий в опрос ESS (29 стран). В большинстве стран коэффициенты при переменных возраста имеют ожидаемый знак – положительный при квадрате возраста, что свидетельствует о наличии предполагаемой параболической формы. Однако результаты также показали, что в 8 из 29 стран коэффициенты при переменных возраста оказались незначимы. Одной из причин статистической незначимости коэффициентов может быть неверная спецификация модели, когда вводится предположение о квадратичной зависимости уровня счастья от возраста либо в этих странах действительно все люди счастливы независимо от возраста и можно предположить, что для ряда стран (Бельгии, Швейцарии, Кипра, Дании, Финляндии, Израиля, Италии, Швеции) предположение об U-образной форме зависимости уровня счастья от возраста не выполняется. В этих странах уровень счастья не зависит от возраста, так как средние значения уровня счастья по возрастным группам различаются незначительно.

На втором этапе полученные оценки коэффициентов при переменных возраста, квадрата возраста и среднего уровня счастья использовались для разбиения стран на группы. Результаты кластерного анализа методом *k*-средних и иерархическим методом показали, что все страны были разделены на 3 группы: 1-й кластер – Исландия, Нидерланды, Норвегия, 2-й кластер – Великобритания, Германия, Ирландия, Испания, Польша, Словакия, Франция, 3-й кластер – Албания, Венгрия, Косово, Литва, Португалия, Россия, Словения, Украина, Чехия, Эстония. Болгария ввиду низкого среднего уровня счастья выделилась в отдельный кластер. Полученные результаты подтверждают предположения, сделанные в начале статьи, о характере влияния возраста на уровень счастья по группам стран. Далее на основе оценок параметров логит-моделей упорядоченного выбора для уровня счастья были рассчитаны вероятности ис-

ходов для каждой группы стран. На рис. 2 представлены вероятности исхода  $P$  (уровень счастья = 10) в зависимости от возраста для различных анализируемых стран.

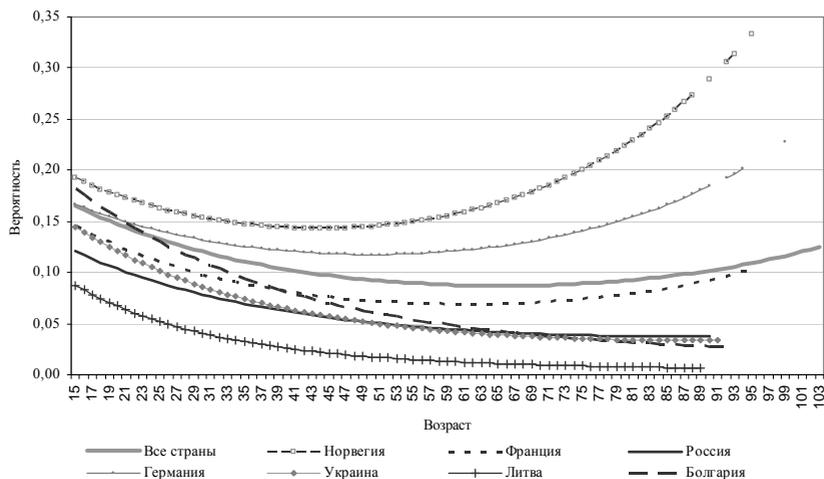


Рис. 2. Вероятности исхода  $P$  (уровень счастья=10) логит-модели упорядоченного выбора уровня счастья в зависимости от возраста по некоторым странам

Результаты показывают, что для первой группы стран, характеризующейся высоким средним уровнем счастья – 8.6, и в которых уровень счастья практически не меняется с возрастом, наблюдается, что вероятность исхода  $P$  (уровень счастья = 10) с возрастом либо не меняется (Нидерланды) либо плавно возрастает к старшим возрастам, как в Исландии и Норвегии. Из второй группы были выборочно рассмотрены: Германия и Франция, причем можно заметить, что в Германии уровень счастья выше, чем во Франции и влияние возраста стремится к эффекту в первом кластере, однако в Германии средние значения ниже, чем в первой группе. Вторая группа характеризуется средним уровнем счастья – 7.36, что несколько ниже, чем в первом кластере, а форма зависимости от возраста имеет ярко выраженную U-образную форму. В третьей группе анализировались Россия и страны бывшего Советского Союза: Украина, Литва и Эстония. В третьем кластере средний уровень счастья равен 6.42 – это еще ниже, чем в первом и втором кластере, вероятность исхода  $P$  (уровень счастья = 10) ниже среднего значения по всем странам, к старшим возрастам вероятность заметно снижается. Самую низкую

вероятность для рассматриваемого исхода демонстрирует Литва во всех возрастах. Отдельно была проанализирована Болгария, имеющая самый низкий средний уровень счастья, равный 5.27, причем вероятность исхода  $P$  (уровень счастья = 10) в младших возрастных группах очень высокая – практически совпадает с вероятностями для стран из 1-го кластера, а далее к старшим возрастным группам наблюдается резкое снижение.

Отдельно выделим Россию. На фоне стран бывшего Советского Союза Россия занимает не самое последнее место, однако влияние возраста имеет негативную тенденцию. Учитывая проблему демографического «старения» населения, низкие значения уровня счастья респондентов в возрасте от 60 лет и старше является важным индикатором качества жизни населения предпенсионного и пенсионного возраста в нашей стране, что можно связать со слабой социальной защищенностью людей старшего возраста в России и падением уровня их доходов после выхода на пенсию.

Таким образом, во всех исследуемых странах наблюдается снижение уровня счастья примерно к 40 годам, а после 40 лет уровень счастья существенно различается по странам: в 1-м кластере – уровень счастья начинает быстро возрастать к старшим возрастным группам, во 2-м кластере – рост уровня счастья начинается только после 60 лет, а в 3-м кластере – уровень счастья продолжает плавно снижаться после 40 лет.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ESS – European Social Survey [Электронный ресурс]. URL: <http://www.europeansocialsurvey.org> (дата обращения: 29.09.2015).
2. Argyle M. The psychology of happiness. 2nd ed. L.: Routledge, 2001.
3. Diener E., Suh E. M., Lucas R. E., Smith H. L. Subjective well-being: three decades of progress // Psychol. Bull. 1999. Vol. 125 (2). P. 276–302.
4. Myers D. M. The pursuit of happiness. N.Y.: Morrow, 1992.
5. Clark A. E., Oswald A. J. Unhappiness and unemployment // Econom. J. 1994. Vol. 104. P. 648–659.
6. Frey B. S., Stutzer A. Happiness and economics. Princeton: Princeton University Press, 2002.
7. Booth A. L., Ours J. C. Job satisfaction and family happiness: the part-timework puzzle // Economic Journal. 2008. Vol. 118 (526). P. 877–899.
8. Global AgeWatch Index 2014 (HelpAge International) [Электронный ресурс]. URL: <http://www.helpage.org/global-agematch/population-ageing-data/global-rankings-map/> (дата обращения: 20.06.2015).

# **ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ НА УРОВЕНЬ ЦЕН НА ЖИЛЬЕ В г. ОРЕНБУРГЕ НА ОСНОВЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИ ВЗВЕШЕННОЙ РЕГРЕССИИ**

**А. К. Салиева**

*Оренбургский государственный университет, Россия*

E-mail: salieva@list.ru

В статье рассматривается эконометрическое моделирование пространственных данных. Изменение уровня цен на вторичном рынке жилья анализируется при помощи метода географически взвешенной регрессии.

## **ECONOMETRIC MODELING OF INFLUENCE OF FACTORS ON THE LEVEL OF PRICES FOR HOUSING IN ORENBURG BASED ON GEOGRAPHICAL WEIGHTED REGRESSION**

**A. K. Salieva**

The article discusses the econometric modeling of spatial data. Changes in the level of prices in the secondary housing market is analyzed by the method of geographically weighted regression.

Рынок жилой недвижимости г. Оренбурга на протяжении последних лет характеризуется динамичным развитием. Однако сложившаяся политическая обстановка и возникшие экономические проблемы оказывают существенное негативное влияние на спрос и предложение на рынке жилья.

Современный рынок недвижимости Оренбургской области можно условно разделить на такие сегменты, как коммерческая недвижимость и жилая недвижимость, при этом наибольшую долю занимают операции с жильем.

Для рынка жилой недвижимости г. Оренбурга характерен разброс цен на квартиры и комнаты, зависящий от многих факторов, таких как: местоположение, состояние, этаж, инфраструктура, бытовые удобства, спрос.

Поэтому представляет интерес выявление и измерение факторов, оказывающих решающее воздействие на процесс формирования стоимости жилья.

Использование в качестве источника первичной информации объявления о продажах, интернет-ресурса «Из рук в руки» в апреле 2015 г., позволила нам сформировать следующие переменные:

$y_i$  – цена однокомнатной квартиры на вторичном рынке жилья г. Оренбурга, тыс. руб.;

$x_{i1}$  – общая площадь квартиры, м<sup>2</sup>;

$x_{i2}$  – площадь кухни, м<sup>2</sup>;

$d_{i1}$  – фиктивная переменная, характеризующая влияние наличия (отсутствия) лоджии на формирование ее цены:

$$d_{i1} = \begin{cases} 1, & \text{наличие в квартире лоджии} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} ;$$

$d_{i2}$  – фиктивная переменная, характеризующая влияние наличия (отсутствия) ремонта в квартире на формирование ее цены:

$$d_{i2} = \begin{cases} 1, & \text{наличие в квартире ремонта} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} ;$$

$d_{i3}$  – фиктивная переменная, отражающая «престижность» расположения квартиры в многоэтажном доме. Квартиры, находящиеся в интервале от 0,3 до 0,7, будем кодировать 1, а квартиры «крайних» этажей будут кодироваться 0 [1].

$$d_{i3} = \begin{cases} 1, & \text{если ПРЕСТИЖНОСТЬ} \notin [0,3;0,7] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} .$$

Обозначим переменные, характеризующие положение объекта в пространстве:

$north_i$  – количественная переменная, обозначающая широту, на которой расположен  $i$ -й объект;

$east_i$  – количественная переменная, обозначающая долготу, на которой расположен  $i$ -й объект.

С учетом мультиколлинеарности факторов нами была построена географически взвешенная регрессия (ГВР) [2; 3] при помощи ППП GWR4 с целью выявить влияние факторов на формирование цены 1 м<sup>2</sup> жилья. В качестве метода вычисления весовых коэффициентов был выбран метод адаптивных ядер. Подход, в котором веса строятся с учетом непрерывного изменения расстояния между исследуемыми объектами, называют ядерным. Наиболее часто применяют ядра Гаусса. Поиском соседей (квартир) за 5 итераций найдено оптимальное значение ширины полосы пропускания – 40. Использование дискретного подхода

при определении весов учитывает территориальную неоднородность, но влияние соседей, попавших в полосу пропуска, считается одинаковым.

Представим результаты оценивания модели ГВР в табл. 1.

Описательная статистика по каждому локальному коэффициенту показала, что в среднем квартиры с лоджией при прочих равных условиях стоят на 230, 52 тыс. руб. дороже. Вместе с тем, для одних квартир наличие лоджии увеличивает стоимость квартиры на 191,29 тыс. руб. (минимальное значение), для других квартир — на 280,92 тыс. руб. (максимальное значение). Наличие ремонта повышает цену в среднем на 206,61 тыс. руб. Интересной особенностью рынка жилья г. Оренбурга в рассматриваемый период является влияние переменной «престижность расположения»: в среднем квартиры на «средних» этажах стоят дешевле. Так, расположение квартир на «средних» этажах снижает цену в среднем на 45,16 тыс. руб.

Таблица 1

Описательная статистика по каждому локальному коэффициенту

Показатель	Среднее	Минимальное значение	Максимальное значение	Квантили		
				0,25	0,50	0,75
Свободный член	-121,98	-188,52	-70,09	-146,55	-126,62	-101,80
$x_{i1}$	48,84	47,92	50,70	48,70	50,22	50,59
$x_{i2}$	2,78	-5,15	15,25	-4,60	3,51	7,31
$d_{i1}$	230,52	191,29	280,92	213,30	242,16	259,23
$d_{i2}$	206,61	191,59	226,32	205,92	212,06	215,04
$d_{i2}$	-45,16	-54,46	-29,19	-52,90	-45,55	-41,45

Проверку гипотезы об отсутствии пространственной вариации коэффициентов модели ГВР можно выполнить на основе данных о разности значений выбранного информационного критерия для исходной модели и модели, в которой проверяемый коэффициент полагается не варьирующим в пространстве. В качестве критерия выступает скорректированный для малых выборок критерий Акаике (табл. 2). Отметим, что для интерпретации полученных результатов необходимо учесть, что положительные значения говорят об отсутствии пространственной вариации коэффициента; значения разности в диапазоне  $[-2; 2]$  рассматриваются как несущественные, и в этом случае говорят о «слабой поддержке».

Значения разности исходной модели и критерия Акаике

Переменная	Разность информационных критериев
$x_{i1}$	-3,570
$x_{i2}$	-4,662
$d_{i1}$	-2,561
$d_{i2}$	0,437
$d_{i3}$	0,710

Проверка гипотезы об отсутствии пространственной вариации коэффициентов географически взвешенной регрессии позволяет сделать вывод, что переменные  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$  и  $d_{i1}$  можно рассматривать как варьирующие в пространстве, так как значения разностей информационных критериев отрицательны. Отметим, что для этих коэффициентов значения разности не входят в диапазон слабой поддержки – факторы можно рассматривать в качестве локальных переменных.

Для большей наглядности представим графическое расположение квартир по ценовой категории на вторичном рынке жилья в г. Оренбурге (рисунок), где маркировкой меньшего размера отмечены квартиры стоимостью до 2000 тыс. руб., среднего размера – до 3000 тыс. руб., маркировкой большего диаметра отмечены местоположения квартир, стоимостью более 3000 тыс. руб.

Северо-восточный район города является самым «дорогим» на рынке вторичного жилья, что объясняется возведением в данной зоне комплекса кирпичных многоэтажных домов. Кроме того, возведение новых домов, а также развитие инфраструктуры в микрорайоне «Малая земля» обусловили рост цен в западной части города. Районы «23-й, 24-й, 25-й микрорайон» также характеризуются как «престижные», включают квартиры в панельных домах 1980-х гг. постройки, что объясняет сложившуюся стоимость жилой недвижимости. Цены на окраинах города не имеют четкого выделения: так, встречаются и квартиры стоимостью ниже 1700 тыс. руб., и стоимостью около 2500 тыс. руб. Интересной является особенность расположения относительно недорогих квартир в центре. Кроме того, отметим невысокую стоимость жилья в южной части города.

На следующем этапе аналогично были построены модели географически взвешенной регрессии для однокомнатных, двухкомнатных и трех-



## Оценка среднего для каждого локального коэффициента

Свободный член	Однокомнатные	Двухкомнатные	Трехкомнатные
		-121,98	-290,75
$x_{i1}$	48,84	42,28	48,64
$x_{i2}$	2,78	13,90	46,58
$d_{i1}$	230,52	–	–
$d_{i2}$	–	660,10	–
$d_{i3}$	–	93,69	–
$R^2$	0,934	0,691	0,848

Таким образом, эконометрическое моделирование при помощи метода географически взвешенной регрессии на примере вторичного рынка жилой недвижимости г. Оренбурга позволило выявить, что для жителей города географическое местоположение является существенным критерием при покупке квартиры. Кроме того, на стоимость однокомнатных квартир оказывает влияние общая площадь квартиры, площадь кухни и наличие лоджии. Тогда как при покупке двухкомнатной квартиры, помимо перечисленных выше факторов, на спрос влияют наличие ремонта и «престижность» расположения квартиры относительно этажности дома.

Проведенный анализ позволил сделать вывод, что оценки модели, учитывающей локальные особенности, подтверждают важность учета пространственной структуры данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салиева А. К. Эконометрическое моделирование цен на вторичном рынке жилья крупных городов ПФО // Международная студенческая олимпиада по статистике: сб. науч. тр. М.: МЭСИ, 2015.
2. Балаиш В. А. Особенности построения географически взвешенной регрессии для моделирования рынка недвижимости // Вестн. Саратов. гос. соц.-экон. ун-та. 2008. № 5. С. 125–127.
3. Харламов А. В. Исследование динамики цен на жилую недвижимость методом географически взвешенной регрессии // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 25–29.
4. Цыпина Ю. С., Цыпин А. П. Статистические методы в изучении ипотечного жилищного кредитования России // Новый университет. Сер.: Экономика и право. 2012. № 6. С. 10–13.

**СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
ШКОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ  
И СТРАН-ЧЛЕНОВ ОРГАНИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО  
СОТРУДНИЧЕСТВА И РАЗВИТИЯ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ ПРОЕКТА PISA**

**К. А. Серых<sup>1</sup>, В. В. Сульженко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Франкфуртский университет им. Иоганна Вольфганга Гёте,  
Франкфурт-на-Майне, Германия*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет, Россия*  
E-mail: sulzhenkovv@gmail.com, kirill.serykh@gmail.com

Данная работа посвящена исследованию низких результатов школьников России по сравнению с другими странами-членами ОЭСР в программе PISA с 2000 по 2012 г. Для оценки зависимостей результатов школьников от различных факторов в работе используется метод многоуровневого моделирования (Multilevel Modelling Approach).

**A COMPARISON OF THE EFFECTIVENESS  
OF RUSSIAN SCHOOL EDUCATION  
AND OECD COUNTRIES  
USING THE DATA OF THE PISA PROJECT**

**K. A. Serykh, V. V. Sulzhenko**

Current paper is devoted to investigation of Russian PISA low results from 2000 till 2012. The main aim of the paper is to estimate PISA results of Russia and other countries – participants of PISA using multilevel modelling approach.

Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся PISA (Programme for International Student Assessment), осуществляемая Организацией экономического сотрудничества и развития, позволяет провести мониторинг «человеческого капитала» страны, который является одним из основных показателей экономического развития государства. Кроме того, с её помощью можно выяснить уровень качества образования в школах и сравнить изменения, происходящие в системах образования в разных странах.

Начиная с 2000 г. данное исследование проводится трехлетними циклами и охватывает три основных направления – «математическая грамотность», «грамотность чтения» и «естественнонаучная грамотность». Результат тестирования ранжируется в пределах от 0 до 1000 баллов. Помимо этого, школьникам задаются вопросы, касающиеся их семьи, окружающих учителей и одноклассников, склонности к тому или иному виду обучения, а также дополнительно собирается информация о шко-

ле (размер, уровень образования учителей, оснащённость компьютерами и т.п.) [1–4].

Среди экономистов зачастую распространён взгляд на школы как на предприятия со своей собственной производственной функцией. Школы потребляют различные ресурсы и производят гетерогенную продукцию, которая в общем может быть представлена на повышение уровня образования.

Типичная постановка такого анализа имеет следующий вид [5–9]:

$$O_{it} = f(F_i^{(t)}, A_i, P_i^{(t)}, S_i^{(t)}) + u_{it}, \quad (1.1)$$

где  $O_{it}$  – показатели ученика в момент времени  $t$ ,  $F_i^{(t)}$  – вклад семьи в момент времени  $t$ ,  $A_i$  – индивидуальные способности ученика,  $P_i^{(t)}$  – вклад одноклассников в момент времени  $t$ ,  $S_i^{(t)}$  – вклад школы в момент времени  $t$ ,  $u_{it}$  – ошибка наблюдений.

Данные для эконометрического оценивания доступны на официальном сайте программы. Структура данных имеет следующий вид: это ответы на вопросы анкет, которые давались при тестировании самим школьникам, их родителям и представителям школ. С помощью специально написанного скрипта на языке LUA данные были перекодированы из сжатого формата в формат, распознаваемый эконометрическими программами. Далее были выбраны переменные, которые повторялись из года в год, и для них были сопоставлены кодировки и размерности.

Так как данные имеют пропущенные наблюдения, связанные с незаполнением того или иного вопроса в анкете, что потенциально приводит к смещению в полученных оценках и большим стандартным ошибкам, перед исследователями встал вопрос заполнения пропусков данных. В связи с этим было выявлено семь методов заполнения пропущенных данных, для которых были проведены симуляции Монте-Карло при вводе пропусков с помощью биномиального пробита. Правильность использования того или иного метода была оценена по трем критериям – смещения, стандартные ошибки и смещения в оценках стандартных ошибок. В результате в работе использовался метод заполнения, основанный на полных наблюдениях, когда пропуски не заполняются. Несмотря на высокие стандартные ошибки, он дает самые несмещенные оценки [10–16].

В исследовании рассмотрены все существующие 5 раундов исследования PISA для его постоянных участников – 30 стран, включая Россию. Используя метод многоуровневого моделирования, построены соответ-

ствующие системы регрессий для каждого из трех предметов:

$$O_{ijk}^t = \pi_{0jk}^t + \sum_{p=1}^P \pi_{pjk}^t X_{pjk}^t + e_{ijk}^t, \quad (1.2)$$

$$\pi_{pjk}^t = \beta_{p0k}^t + \sum_{q=1}^{Q_P} \beta_{pqk}^t V_{qjk}^t + v_{pjk}^t, \quad (1.3)$$

$$\beta_{pqk}^t = \xi_{pq0}^t + \sum_{s=1}^{S_{PQ}} \xi_{pqs}^t W_{sk}^t + \delta_{pqk}^t, \quad (1.4)$$

$$\xi_{pqs}^t = \mu_{pqs}^0 + \sum_{l=1}^{L_{PQS}} \mu_{pqs}^l Z_k^l + \omega_{ijs}^t. \quad (1.5)$$

Метод многоуровневого моделирования как нельзя лучше подходит данному исследованию, так как первоначальная постановка модели не учитывает составной характер ошибки наблюдений, состоящий из ошибок для разных уровней (в нашем случае это студент/школа/-год/страна) [17–20].

Для правильной оценки имеющихся данных использовался аддитивный подход, состоящий в следующем:

1) первоначально строится базовая модель, которая позволяет разложить дисперсию между четырьмя вышеупомянутыми уровнями без добавления объясняющих переменных;

2) следующая модель предполагает добавление объясняющих переменных на уровне студента. Предполагается, что эффект объясняющих переменных может быть разным среди школ, что может повлиять на коэффициенты наклона;

3) третья модель добавляет объясняющие переменные на уровне школ.

Так как переменные, непосредственно относящиеся к странам (ВВП на душу населения, уровень образовательных расходов и т.п.) и к периодам времени не включены в модель, то годовые и страновые эффекты можно рассматривать как фиксированные [21, 22].

Регрессии строились по 4 наборам данных:

- все страны, все периоды;
- страны-соседи, все периоды;

- страны-лидеры, все периоды;
- все страны, 2012 г. (с использованием дополнительных переменных).

К итогам работы можно отнести следующие выводы:

- сильная диверсификация результатов в зависимости от населенности пункта, в котором находится школа (для России в сравнении с остальными странами);
- меньший вклад уровня образования и благосостояния родителей по сравнению со странами-лидерами;
- дети, не рождённые в России, справляются с тестом хуже, чем дети, рождённые в России, но для России разница несколько меньше, чем для остальных стран;
- наличие книг дома, места для учебы, интернета, рождение матери и отца в стране тестирования даёт незначительную прибавку к результату (1 балл и менее);
- чем больше размер школы, тем лучше дети пишут тест;
- государственные школы готовят к тестированию лучше;
- размер класса негативно влияет на результат.

Принимая участие в данной программе с самого начала её основания, Россия показывала негативную динамику в результатах по всем дисциплинам, в связи с этим сравнение результатов России с результатами стран – постоянными участниками исследования представляет особый интерес. Эти страны имеют отличные от российской системы образования и показали отличные от России результаты, что позволит произвести более глубокий анализ неудач в этом тестировании.

Данная работа посвящена выяснению причин низких результатов России в этом проекте в сравнении с другими странами. Цель работы – основываясь на данных, предоставляемых ОЭСР, построить регрессии, выявляющие зависимость результатов по каждому из трех предметов от выбранных факторов и проинтерпретировать полученные результаты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Acemoglu D., Kremer M., Mian A.* Incentives in markets, firms and governments, Discussion paper. L., 2003. 200 p.
2. *Agasisti T., Cordero-Ferrera J. M.* Educational disparities across regions : A multilevel analysis for Italy and Spain // *J. of Policy Modeling.* 2013. Vol. 35 (6). P. 1079–1102.
3. *Amini C., Commander S.* Educational Scores : How Does Russia Fare? IZA Discussion Papers 6033, Institute for the Study of Labor (IZA). 2011. Available at: [http://www.iza.org/en/webcontent/index\\_html](http://www.iza.org/en/webcontent/index_html) (accepted 22 September 2015).

4. *Black S. E., Devereux P. J., Salvanes K. G.* Why the apple doesn't fall far: understanding the intergenerational transmission of human capital, Working Paper 10066, NBER, 2003. Available at: <http://www.nber.org/papers/w10066> (accepted 21 September 2015).
5. *Bratti M., Checchi D.* Re-testing PISA Students One Year Later: On School Value Added Estimation Using OECD-PISA, IZA Discussion Papers 7722, Institute for the Study of Labor (IZA), 2013. Available at: [http://www.iza.org/en/webcontent/index\\_html](http://www.iza.org/en/webcontent/index_html) (accepted 20 September 2015).
6. *Fertig M.* Educational Production, Endogenous Peer Group: Formation and Class Composition – Evidence From the PISA 2000 Study, IZA Discussion, 2002. 714 p. Available at: [http://www.iza.org/en/webcontent/index\\_html](http://www.iza.org/en/webcontent/index_html) (accepted 20 September 2015).
7. *Glewwe P., Ilias N., Kremer M.* Teacher incentives, Working Paper 9671, NBER, 2003. Available at: <http://www.nber.org/papers/w10066> (accepted 19 September 2015).
8. *Glomm G., Ravikumar B.* Public vs. private investment in human capital: endogenous growth and income inequality // *J. of Polit. Econ.* 1992. Vol. 100 (4). P. 1019–1045.
9. *Hanushek E. A., Kain J. F., Markman J. M., Rivkin S. G.* Does Peer Ability Affect Student Achievement? Discussion paper. 2001. Available at: <http://fr.slideshare.net/tallison85/inclusion-pros-and-cons> (accepted 19 September 2015).
10. *Hanushek E.* Publicly provided education // *Handbook of Public Economics.* 2002. Vol. 4. P. 45–68.
11. *Hanushek E.* The Evidence on Class Size. Occasional Paper. L., 1998. 220 p.
12. *Hox J. J.* Multilevel Analysis: Techniques and Applications // *Quant. Method. Ser.* 2002. № 5. P. 95–120.
13. *Bertschy K., Cattaneo A., Stefan C. W.* What happened to the PISA 2000 participants five years later? // *Economics of Education Working Paper Series 0013.* Zurich, 2008. 360 p.
14. *Kremer M., Muralidharan K., Chaudhury N.* Teacher absence in India: a snapshot. Discussion paper. 2004 [Electronic source]. Available at: <http://siteresources.worldbank.org> (accepted 20 September 2015).
15. *Lazear E. P.* Educational Production // *Quart. J. of Econ.* 2001. Vol. CXVI, iss. 3. P. 117–202.
16. *Little R. J. A., Rubin D. B.* Statistical Analysis with Missing Data. L.: Wiley, 1987. 1016 p.
17. *Oreopoulos P., Page M. E., Stevens A. H.* Does human capital transfer from parent to child? The intergenerational effects of compulsory schooling, Working Paper 10164, NBER, 2003. Available at: <http://www.nber.org/papers/w10066> (accepted 19 September 2015).
18. *Prokic-Breuer Tijana, Dronkers Jaap V.* The high performance of Dutch and Flemish 15-year-old native pupils: Explaining country differences in math scores between highly stratified educational systems. Research Memorandum 039. Maastricht, 2012. 612 p.
19. *Rangvid B. Sch.,* Educational Peer Effects: Quantile Regression Evidence from Denmark with PISA 2000 data, discussion paper, 2003. [Electronic source]. Available at: [http://www.iza.org/en/webcontent/index\\_html](http://www.iza.org/en/webcontent/index_html) (accepted 20 September 2015).
20. *Steele F.* Materials for Online Multilevel Modelling Course. Bristol, 2008. 528 p.
21. *Szmaragd C., Leckie G.* Practical Centre for Multilevel Modelling. Bristol: University of Bristol, 2012. 416 p.
22. *Winston G. C., Zimmerman D. J.* Peer effects in higher education. Working Paper 9501. NBER. 2003. Available at: <http://www.nber.org/papers/w10066> (accepted 22 September 2015).

# **МНОГОМЕРНЫЕ ПРОБИТ-МОДЕЛИ КАК ИНСТРУМЕНТ ОЦЕНКИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ РИСКОВ В ДОБРОВОЛЬНОМ МЕДИЦИНСКОМ СТРАХОВАНИИ**

**Т. Г. Сиявская, А. А. Трегубова**

*Ростовский государственный экономический университет (РИНХ), Россия*

E-mail: sin-ta@yandex.ru, alexandra\_a\_t@mail.ru

Многомерные пробит-модели (*multivariate probit*) представляют собой современный эконометрический инструментарий, позволяющий оценивать зависимости для произвольного числа взаимосвязанных зависимых двоичных переменных. Они могут использоваться для оценки риска в медицинском страховании тогда, когда входящие в страховое покрытие заболевания могут возникать у застрахованного лица одновременно или в различных комбинациях. Традиционно используемые в таких случаях актуарные методы, основанные на расчете долей заболевших каждым типом болезни среди застрахованных, не учитывают возможных зависимостей между возникновением заболеваний. В работе проведена оценка многомерной пробит-модели для заболеваний легких, сердца и позвоночника. Для расчетов использованы данные 22-й волны Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения НИУ-ВШЭ (RLMS-HSE) за 2013 г.

## **STATISTIC EVALUATION OF DEPENDENT RISKS IN HEALTH INSURANCE: MULTIVARIATE PROBIT MODELS APPLICATION**

**T. G. Sinyavskaya, A. A. Tregubova**

Multivariate probit models are the contemporary econometrical models, which allow us to evaluate relationships for any number of related dependent binary variables. They could be used for evaluation of risk in health insurance, when insured's diseases can occur simultaneously or in various combinations. Traditional actuarial methods based on calculation of proportion of insured with each disease among insured individuals don't take into account possible dependencies between diseases occurrence. This paper presents model estimation results for a diseases of lungs, heart and spine. Individual RLMS-HSE Round 22 (2013) data is used for model estimation.

Методы, традиционно применяемые для оценки рисков в добровольном медицинском страховании, не учитывают возможных взаимосвязей между рисками, то есть возможности одновременного возникновения у застрахованного одного или нескольких заболеваний, включенных в страховое покрытие. Такие методы, как модель нескольких состояний [1], система учета влияния категориальных рейтинговых факторов на величину страхового тарифа [2], подход к формированию поправочных коэффициентов на базе эконометрических моделей, таких как модель логистической регрессии [3], позволяют оценить влияние различных факторов на возникновение отдельных заболеваний, но не их комбинаций. Для решения данной задачи [4] было предложено применить многомерные пробит-модели. Возможность практического использова-

ния данного класса моделей для оценки зависимых рисков была показана в работе [5] на примере автострахования. Аналогия между автострахованием и добровольным медицинским страхованием (ДМС) заключается во взаимосвязи рисков и возможной реализации нескольких рисков при наступлении страхового случая. В связи с этим была исследована возможность применения многомерных пробит-моделей для оценки рисков ДМС.

Для этого были оценены модели зависимости наличия у индивида заболеваний сердца, легких и позвоночника от ряда факторов. В работе [5] использовали для моделирования данные собственной статистики страховых компаний, однако в современных российских условиях такая статистика не является доступной для исследования. Поэтому моделирование было проведено на данных 22-й волны Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения НИУ-ВШЭ (RLMS-HSE) за 2013 г., содержащего необходимые для оценки рисков данные. Итоговый объем сформированной выборки составил 10 102 индивида в возрасте от 18 лет до 69 лет включительно (это связано со стандартными условиями добровольного медицинского страхования, согласно которым возраст страхования обычно находится в границах от 18 до 69 лет, реже – до 74 лет).

Был проведен анализ заболеваемости респондентов болезнями сердца, легких и позвоночника. Такой выбор обусловлен тем, что возникновение одного из этих заболеваний может сопровождаться наличием других, либо одно из них может приводить к возникновению других (например, ишемическая болезнь сердца может иметь следствием хроническую легочную недостаточность). Более того, эти группы заболеваний могут иметь схожие симптомы, что осложняет диагностику и лечение, создавая иногда прецеденты ошибочной диагностики, что может приводить к непредвиденному росту расходов страховой компании.

Предварительный анализ данных показал, что доля страдающих заболеваниями легких колеблется в пределах 2–3% в младших возрастных группах и достигает 10–12% – в старших, причем как среди мужчин, так и среди женщин. В отношении заболеваний сердца имеются более значительные гендерные различия: после 50 лет среди женщин отмечается более резкий по сравнению с мужчинами рост доли имеющих заболевания сердца (так, в группе 55–59 лет заболеваниями сердца страдает 21% женщин и только 15% мужчин, после 60 лет разница становится еще более заметной – 33,4% против 25,3% соответственно). Также в старших возрастных группах у женщин чаще встречаются заболевания позвоноч-

ника (из общего числа женщин в возрасте 55–59 лет, имеющих такие заболевания, 28% против 25% среди мужчин, в возрасте 60–69 лет – 30,5% женщин против 22,4% мужчин).

Для оценки факторов риска заболеваемости индивидов одновременно несколькими заболеваниями была построена трехмерная пробит-модель с тремя бинарными зависимыми переменными:

(1) «У респондента есть заболевания сердца», принимающая значение равное 1 в случае наличия заболевания и равное 0 в случае его отсутствия;

(2) «У респондента есть заболевания легких, бронхов», принимающая значение равное 1 в случае наличия заболевания и равное 0 в случае его отсутствия;

(3) «У респондента есть заболевания позвоночника», принимающая значение равное 1 в случае наличия заболевания и равное 0 в случае его отсутствия.

Оценка параметров многомерной пробит-модели проведена на основе метода имитационного максимального правдоподобия (англ. *simulated maximum likelihood*, SML) [6, 7]<sup>1</sup>.

В качестве независимых были использованы следующие переменные, часть из которых была дополнительно сконструирована: пол; уровень образования (сформированы четыре группы); статус занятости; наличие детей у респондента; тип населенного пункта; назначена ли инвалидность и получает ли индивид пенсию; возрастная и доходная группы (квинтильные группы по доходу индивида), а также самооценка здоровья индивидов (субъективная оценка здоровья). Результаты оценки параметров модели представлены в табл. 1.

На наличие болезней сердца и позвоночника значимое влияние оказывает тип поселения. С большей вероятностью будут страдать заболеваниями сердца респонденты, проживающие в поселках городского типа (ПГТ) и в сельской местности, а заболеваниями позвоночника – респонденты, проживающие в городе и в сельской местности, по сравнению с проживающими в областных центрах.

Работающие индивиды имеют меньшие шансы страдать заболеваниями сердца. С меньшей вероятностью будут иметь болезни легких индивиды с детьми, а также получающие пенсию. Объяснимо, что все три группы заболеваний более распространены у респондентов старших

---

<sup>1</sup>Для расчетов использовался пакет STATA (11-я версия), команда *mvprobit* (Cappellari and Jenkins, 2003).

## Результаты оценивания многомерной пробит-модели

Переменная	Есть заболевания (1) сердца		Есть заболевания (2) легких		Есть заболевания (3) позвоночника	
	Коэффициент регрессии	Стандартная ошибка	Коэффициент регрессии	Стандартная ошибка	Коэффициент регрессии	Стандартная ошибка
Пол (женский)						
Мужской	-0,0533	0,0415	0,0101	0,0443	0,0251	0,0347
Тип поселения (областной центр)						
Город	-0,0371	0,0493	-0,0543	0,0528	-0,1823***	0,0411
ПГТ	0,3073***	0,0756	-0,0072	0,0883	0,0927	0,0653
Село	0,0977**	0,0495	0,0342	0,0531	-0,1024**	0,0419
Уровень образования (высшее и послевузовское)						
Неполное среднее (до 9 классов)	-0,1103	0,0697	0,0409	0,0749	-0,0645	0,0590
Среднее (9–11 классов)	-0,0820	0,0533	0,0306	0,0578	-0,0645	0,0441
Среднее профессиональное	-0,0433	0,0551	0,0413	0,0601	-0,0281	0,0457
Статус занятости (неработающий)						
Работающий	-0,1876***	0,0545	0,0790	0,0595	-0,0129	0,0471
Наличие детей (нет)						
Есть дети	0,0137	0,0634	-0,1681***	0,0628	0,0559	0,0515
Получает пенсию (нет)						
Получает пенсию	0,0310	0,0699	-0,1339*	0,0796	0,0625	0,0606
Назначена инвалидность (нет)						
Назначена инвалидность	0,4831***	0,0660	0,2508***	0,0773	0,0945	0,0642
Возрастная группа (18–24 года)						
25–29 лет	-0,0483	0,1131	0,1008	0,1104	-0,0472	0,0874
30–34 лет	-0,1509	0,1247	0,0637	0,1203	-0,0889	0,0938
35–39 лет	-0,1050	0,1202	0,2484**	0,1147	0,0203	0,0921

Переменная	Есть заболевания (1) сердца		Есть заболевания (2) легких		Есть заболевания (3) позвоночника	
	Коэффициент регрессии	Стандартная ошибка	Коэффициент регрессии	Стандартная ошибка	Коэффициент регрессии	Стандартная ошибка
40–44 лет	–0,0246	0,1172	0,1489	0,1181	0,1542*	0,0908
45–49 лет	0,2380**	0,1134	0,3610***	0,1156	0,2601***	0,0920
50–54 лет	0,2689**	0,1101	0,2891**	0,1140	0,3577***	0,0892
55–59 лет	0,4366***	0,1134	0,4784***	0,1182	0,4419***	0,0934
60–69 лет	0,6455***	0,1176	0,5545***	0,1256	0,3629***	0,0986
Самооценка состояния здоровья (плохое или очень плохое)						
Хорошее или очень хорошее	–1,5128***	0,0749	–1,0039***	0,0787	–1,0544***	0,0622
Среднее	–0,7017***	0,0525	–0,3789***	0,0611	–0,4053***	0,0514
Квинтили по доходу индивида (I)						
II	–0,0559	0,0649	–0,1863***	0,0708	0,0565	0,0569
III	–0,0871	0,0691	–0,0831	0,0724	0,0653	0,0593
IV	–0,0343	0,0779	–0,2045**	0,0822	0,0455	0,0650
V	–0,0654	0,0821	–0,0583	0,0827	0,1325**	0,0667
Константа	–0,5813***	0,1075	–1,1543***	0,1151	–0,6943***	0,0917
Коэффициент корреляции терминов ошибок						
$\widehat{p}_{21}$	0,0802***					
$\widehat{p}_{31}$	0,1215***					
$\widehat{p}_{32}$	0,0952***					
–2LL	–8798,1146					
хи-квадрат	2389,66					
Тест отношения правдоподобия	$H_0 : p_{21} p_{31} = p_{32} = 0$ $\chi^2(3) = 50,1122$ , $p$ -value = 0,0000					
Число наблюдений	10 102					

Примечание. \*\*\*, \*\*, \* – значим на уровне значимости 1, 5 и 10% соответственно; в скобках указаны эталонные категории.

возрастных групп (старше 45 лет). Однако повышенный риск иметь заболевания легких оказался также присущ индивидам в возрасте 35–39 лет.

Индивиды, находящиеся на инвалидности, с большей вероятностью будут страдать заболеваниями сердца и легких. И напротив, хорошая самооценка здоровья оказывает отрицательное влияние на шансы иметь исследуемые заболевания. Однако здесь возможна обратная ситуация, например, «респондент имеет заболевание (1), что повышает его шансы быть на инвалидности и снижает шансы характеризовать свое здоровье как хорошее».

Выявлено, что значимое влияние на наличие заболевания легких оказывают доходы индивида. По сравнению с наиболее низкодоходной группой шансы иметь заболевания легких будут ниже для респондентов, отнесенных ко второй и четвертой квинтильной доходной группе. При этом индивиды из самой высокодоходной группы вероятнее будут иметь заболевания позвоночника.

Далее были оценены прогнозные значения вероятностей наступления заболеваний (табл. 2). Средние маргинальные эффекты позволили оценить вероятность наступления каждого отдельного заболевания, а средние прогнозные значения совместной вероятности – вероятности того, что у индивида (1) диагностированы все три заболевания и (2) ни одно из них не диагностировано.

Таблица 2

**Прогноз по результатам оценивания многомерной пробит-модели**

№	Прогноз	Заболевание	Средняя вероятность
1	Частная вероятность наступления одного заболевания	(1) сердца (2) легких (3) позвоночника	0,11255 0,06375 0,15853
2	Совместная вероятность наступления заболеваний	(1) ни одно заболевание не наступит (2) все три заболевания наступят	0,72993 0,00651

Таким образом, в среднем вероятность того, что у индивида будут одновременно обнаружены все три заболевания, составила 0,65%, тогда как оценка вероятности того, что индивид не будет страдать ни одним из рассматриваемых заболеваний, составила около 73%. Важно отметить, что оценка вероятности возникновения одновременно трех заболеваний через произведение долей болеющих, то есть стандартным для актуар-

ных расчетов способом, значительно отличается от полученной в табл. 2 (произведение вероятностей равно 0,114%).

Адекватная оценка вероятности наступления страхового случая – главная задача актуарных расчетов. В российских условиях ее решение осложняется отсутствием достоверных релевантных статистических данных, поэтому основные направления исследований в данной области направлены на получение оценок, максимально отражающих действительность, полученных на основе доступной информации. Проведенные расчеты показали, что современные многомерные пробит-модели (*multivariate probit*) являются эффективным инструментом для достижения данной цели. Важной особенностью, расширяющей потенциал использования моделей данного типа для целей расчета и корректировки страховых тарифов, является отсутствие ограничений на число уравнений в модели. В данной работе была проведена оценка трехмерной модели, однако при наличии большого числа наблюдений, доступных при использовании данных общероссийских опросов, количество уравнений теоретически может быть любым, что позволяет включить в модель все заболевания и состояния, входящие в покрытие полиса ДМС.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания № 2014/176 (код проекта 2245).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dash A., Grimshaw D. Dread Disease Cover. An Actuarial Perspective. Presented to Staple Inn Actuarial Society. L., 1990. 200 p.
2. Жуалкин М. Ю. Разработка системы тарификации при наличии категориальных рейтинговых факторов // Страховое дело. 2005. № 3. С. 39–49.
3. Синявская Т. Г., Трегубова А. А. Подходы к оценке тарифов в страховании жизни индивидов с повышенным риском (на примере курения) // Страховое дело. 2011. № 5 (220). С. 27–33.
4. Valdez E. A., Frees, E. W. Longitudinal modeling of Singapore motor insurance. University of New South Wales and the University of Wisconsin-Madison, Working Paper, 28 December 2005. [Electronic resource]. Available at: <http://www.docs.fce.unsw.edu.au/actuarial/research/papers/2006/Valdez-Frees-2005.pdf> (accepted 29 September 2015).
5. Young G., Valdez E. A., Kohn R. Multivariate probit models for conditional claim-types. 2006. [Electronic resource]. Available at: <http://www.actuaries.org/afir/colloguia/stockholm/young.pdf> (accepted 25 September 2015).
6. Cappellari L., Jenkins S. P. Multivariate probit regression using simulated maximum likelihood 2003 // The Stata Journal. 2003, № 3. P. 278–294. [Electronic resource]. Available at: <http://www.stata-journal.com/sjpdf.html?articlenum=st0101> (accepted 27 September 2015).
7. Cappellari L., Jenkins S. P. Calculation of multivariate normal probabilities by simulation, with applications to maximum simulated likelihood estimation. IZA Discussion Paper № 2112. May. Bonn, Germany, 2006. [Electronic resource]. Available at: [repec.iza.org/dp2112.pdf](http://repec.iza.org/dp2112.pdf) (accepted 28 September 2015).

# ЭФФЕКТИВНОСТЬ И РИСК В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ АГЕНТОВ

Н. Г. Солдатова, С. А. Рогова

*Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, Россия*

E-mail: solnata@pochta.ru, sveta.rogova2013@yandex.ru

Рассматривается процесс принятия решений в бескоалиционной модели взаимодействия двух агентов при неопределенности. Исследуется случай, когда о множестве неопределенностей известны лишь границы изменений, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют. Вводится понятие сильно гарантированного по эффективности и риску равновесия. Учитывается возможность различных представлений агентов о желаемых результатах. Приводится пример.

## EFFICIENCY AND RISK IN THE MATHEMATICAL MODEL OF INTERACTION OF THE TWO AGENTS

N. G. Soldatova, S. A. Rogova

The process of decision making in the noncooperative model of interaction between the two agents under uncertainty is considered. There are only the limits of change that are known about uncertainty. The notion of strongly guaranteed equilibrium (for efficiency and risk) is introduced. The possibility of different views of the agents on the desired outcomes is considered. The example is given.

Рассмотрим упорядоченную четверку:

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (1)$$

В (1) каждый  $i$ -й агент выбирает свое действие  $x_i \in X_i \subset \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2$ ); в результате складывается ситуация  $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$ ; независимо от их действий в (1) реализуется неопределенность  $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$ . О множестве  $Y$  известны лишь границы изменений, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют по тем или иным причинам (из-за непредсказуемой «реализации»  $y \in Y$  названа Еленой Сергеевной Вентцель [1] «дурной» неопределенностью).

На «содержательном уровне» цель каждого  $i$ -го агента состоит в выборе и использовании такого «своего» действия  $x_i$ , чтобы «их» оценки эффективности  $f_i(x, y)$  стали возможно больше, а риски – возможно меньше.

Приведем определение: «Риск – это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемых значений». Отметим, что именно такому понятию риска отвечают общепринятые многочисленные микроэкономические риски из [2, с. 40–50]. Для определения риска в данной работе

используются значения функции сожаления по Нихансу–Сэвиджу, фигурирующей в предложенном ими принципе минимаксного сожаления в 1948 г. и 1951 г. соответственно [3, 4].

Вид функции сожаления может варьироваться в зависимости от специфики задачи. Поскольку понятие «желаемое» можно трактовать по-разному, то, во-первых, оно может осуществляться исходя только из возможностей конкретного агента, а, во-вторых, каждый из агентов может *предполагать*, что действия партнера по конфликту соответствуют его интересам. В конфликте (1), например, для первого агента возможны два вида функций сожаления (в зависимости от представления первым агентом понятия «желаемые значения»):

$$\Phi_1^{(1)}(x, y) = \max_{z_1 \in X_1} f_1(z_1, x_2, y) - f_1(x, y), \Phi_1^{(1,2)}(x, y) = \max_{z \in X} f_1(z, y) - f_1(x, y), \quad (2)$$

аналогично для второго

$$\Phi_2^{(1)}(x, y) = \max_{z_2 \in X_2} f_2(x_1, z_2, y) - f_2(x, y), \Phi_2^{(1,2)}(x, y) = \max_{z \in X} f_2(z, y) - f_2(x, y). \quad (3)$$

Далее именно эти функции сожаления привлекаем для оценки риска в (1).

В настоящей работе считаем, что каждый  $i$ -й ( $i = 1, 2$ ) агент стремится увеличить свою эффективность – значение  $f_i(x, y)$  и одновременно уменьшить риск – значение  $\Phi_i(x, y)$ , при этом нужно учитывать реализацию  $\forall y \in Y$ . Для этого сопоставим модели конфликта (1) кортеж

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y^X, \{F_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

где качество функционирования  $i$ -го участника конфликта оценивается двухмерным вектором  $F_i(x, y) = (f_i(x, y), \Phi_i(x, y))$ . Здесь  $f_i(x, y)$ ,  $X$ ,  $Y$  – те же, что в (1), а функция сожаления  $\Phi_i(x, y)$  – по одной из (1) и (2). Знак «минус» специально выбран перед  $\Phi_i$ , чтобы  $i$ -й агент стремился к *увеличению* сразу *обоих* компонент  $F_i(x, y)$ , что эквивалентно увеличению  $f_i(x, y)$  и одновременно уменьшению  $\Phi_i(x, y)$ . Далее используем двухкомпонентные векторы  $f = (f_1, f_2)$  и  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ .

*Определение.* Набор  $(x^g, f^g, \Phi^g) = (x^g, f_1^g, f_2^g, \Phi_1^g, \Phi_2^g) \in X \times \mathbf{R}^4$  назовем *сильно гарантированным по эффективности и риску равновесием* (1), если:

1) существуют четыре непрерывные на  $X$  скалярные функции  $f_i[x]$ ,  $\Phi_i[x]$  такие, что

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y} f_i(x, y) &= f_i[x], \\ \max_{y \in Y} \Phi_i(x, y) &= \Phi_i[x] \quad (i = 1, 2); \end{aligned} \quad (4)$$

2) для вспомогательного «конфликта гарантий»

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{\phi_i(x_1, x_2) = f_i[x] - \Phi_i[x]\}_{i=1,2} \rangle \quad (5)$$

существует ситуация равновесия по Нэшу  $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in X$ :

$$\max_{x_1 \in X_1} \varphi_1[x_1, x_2^e] = \varphi_1[x^e], \quad \max_{x_2 \in X_2} \varphi_2[x_1^e, x_2] = \varphi_2[x^e] \quad (6)$$

(множество  $\{x^e\}$  обозначаем  $X^e$ );

3) ситуация  $x^e \in X^e$  максимальна по Слейтеру в двухкритериальной задаче

$$\Gamma^e = \langle X^e, \{\phi_i[x]\}_{i=1,2} \rangle,$$

то есть для каждой стратегии  $x \in X$  найдется свой номер  $j(x) = j \in \{1, 2\}$  такой, что  $\phi_j[x] \leq \phi_j[x^e]$ ;

4) векторы  $f^g = (f_1^g, f_2^g)$ ,  $\Phi^g = (\Phi_1^g, \Phi_2^g)$ , где  $f_i^g = f_i[x^g]$ ,  $\Phi_i^g = \Phi_i[x^g]$  ( $i = 1, 2$ ).

Причины выбора  $(x^g, f[x^g], \Phi[x^g])$  в качестве сильно гарантированного по эффективности и риску равновесия в рассматриваемой модели состоят в следующем.

*Во-первых*, исходя из (4), для каждой ситуации  $x \in X$

$$f_i[x] \leq f_i(x, y) \forall y \in Y, \Phi_i[x] \geq \Phi_i(x, y) \forall y \in Y (i = 1, 2),$$

то есть применение ситуации  $x \in X$  ограничивает эффективность  $f_i(x, y)$  снизу (при  $\forall y \in Y$ ), а риски  $\Phi_i(x, y)$  – сверху соответственно гарантированной эффективностью  $f_i[x]$  и гарантированным риском  $\Phi_i[x]$ . Из этих гарантий в результате (6) отбираются равновесные по Нэшу (устойчивые к отклонениям отдельных игроков) и уже из полученных выбирается «самое большое» – максимальное по Слейтеру по отношению к другим равновесным по Нэшу ситуациям.

*Во-вторых*, в (5) использована свертка критериев  $\phi_i[x] = f_i[x] - \Phi_i[x]$ . Согласно (6), например, для первого игрока будет

$$\max_{x_1 \in X_1} (f_1[x_1, x_2^e] - \Phi_1[x_1, x_2^e]) = f_1[x^e] - \Phi_1[x^e],$$

что является достаточным условием максимума по Парето  $x_1^e \in X_1$  в двухкритериальной задаче  $\langle X_1, \{f_1[x_1, x_2^e], -\Phi_1[x_1, x_2^e]\} \rangle$ , т.е. при любых  $x_1 \in X_1$  несовместна система неравенств

$$f_1[x_1, x_2^e] \leq f_1[x_1^e, x_2^e], \Phi_1[x_1, x_2^e] \geq \Phi_1[x_1^e, x_2^e],$$

из которых хотя бы одно строгое. Это означает, что при увеличении эффективности (по сравнению с  $f_1[x^e]$ ) автоматически увеличится риск, а при уменьшении риска (по отношению к  $\Phi_1[x^e]$ ) уменьшается эффективность. А цель каждого участника конфликта увеличить гарантированную эффективность и одновременно уменьшить гарантированный риск.

Рассмотрим пример.

Пусть в (1)

$$f_i(x, y) = -x_i^2 + \left(\frac{2}{3} - x_j - y\right) x_i \quad (i = 1, 2; i \neq j), \quad (7)$$

$$X = X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) | x_i \in [0; 1/3]\}, \quad (8)$$

$$Y = \{y | 0 \leq y \leq 1/3\}.$$

Здесь  $x_i$  можно интерпретировать как количество товара, поставляемого на рынок сбыта одного и того же товара  $i$ -м участником конфликта, их производственные возможности ограничены в (8), причем затраты на производство  $x_i$  единиц оцениваются величиной  $\frac{1}{3}x_i$  для обоих продавцов, импорт поставляет такой же товар на сумму, а цена на товар определяется следующим образом:  $p_i = 1 - (x_1 + x_2 + y)$ . Таким образом, (7) можно рассматривать как доход (разность между прибылью и затратами)  $i$ -го участника конфликта.

Согласно (2)–(5) при  $i, j = 1, 2$  и  $i \neq j$  будет

$$f_i[x] = -x_i^2 + \left(\frac{1}{3} - x_j\right) x_i,$$

$$\Phi_i^{(1)}[x] = \max \left\{ \left( x_i + \frac{1}{2}x_j - \frac{1}{6} \right)^2, \left( x_i + \frac{1}{2}x_j - \frac{1}{3} \right)^2 \right\},$$

$$\Phi_i^{(1,2)}[x] = \max \left\{ x_i^2 + \left( x_j - \frac{1}{3} \right) x_i + \frac{1}{36}, x_i^2 + \left( x_j - \frac{2}{3} \right) x_i + \frac{1}{9} \right\},$$

$$\varphi_i^{(1)}[x] = \max \left\{ -2x_i^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - x_j \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{3} - x_j \right) x_i, -2x_i^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} - x_j \right)^2 + (1 - 2x_j) x_i \right\},$$

$$\varphi_i^{(1,2)}[x] = \max \left\{ -2x_i^2 + 2 \left( \frac{1}{3} - x_j \right) x_i - \frac{1}{36}, -2x_i^2 + (1 - 2x_j) x_i - \frac{1}{9} \right\}.$$

Введем четыре вида моделей для (5), именно (знак  $\vee$  означает «или»)  $\Gamma_2^{(j)}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), где

$$-\Phi = -(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}) \vee -(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1,2)}) \vee -(\Phi_1^{(1,2)}, \Phi_2^{(1)}) \vee -(\Phi_1^{(1,2)}, \Phi_2^{(1,2)}),$$

То есть  $\Gamma_2^{(j)}$  различаются только приведенными видами функций сожаления из (2), (3).

Во всех четырех случаях гарантирующая ситуация

$$x^g = (x_1^g, x_2^g) = \left( \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right),$$

одна и та же, так же, как гарантированные эффективности  $f_i[x^g] = 0$  ( $i = 1, 2$ ) и гарантированные риски  $\Phi_i^{(1)}[x^g] = \frac{1}{144}$ ,  $\Phi_i^{(1,2)}[x^g] = \frac{1}{18}$  ( $i = 1, 2$ ).

Отсюда видно, что надежды на помощь партнера по конфликту достаточно призрачны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М.: Знание, 1976. 63 с.
2. *Цветкова Е. В., Арлюкова И. О.* Риски в экономической деятельности. СПб.: ИВЭСЭП, 2002. 64 с.
3. *Niehans J.* Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen // Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik. 1948. Vol. 84, № 5. P. 433–456.
4. *Savage L. Y.* The theory of statistical decision // J. Amer. Stat. Association. 1951. № 46. P. 55–67.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ХАРАКТЕРИСТИК РЫНКА ТРУДА И ВВП

**Т. И. Солодка**

*Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов, Россия*  
E-mail: solti2005@yandex.ru

На основе полуэмпирической теории рынка труда и известного закона Оукена получено аналитическое выражение взаимосвязи ВВП и характеристик рынка труда. Проведено математическое моделирование ВВП от макроэкономических параметров рынка.

## MATHEMATICAL MODELING OF INTERRELATION OF LABOR MARKET CHARACTERISTICS AND GDP

**T. I. Solodkaya**

A new analytical expression of GDP relationship and labor market characteristics is suggested. The expression is based on semi-empirical theory of the labor market and the well known Ouken's law. The mathematical modeling of GDP on macroeconomic parameters was carried out.

Рынок труда имеет огромное значение во всей макроэкономической теории. Он играет двоякую роль в макроэкономике. Во-первых, это важнейший отраслевой рынок, от которого зависит выпуск других отраслей.

Во-вторых, занятость и безработица являются определяющими факторами, которые влияют на инфляцию, экономический рост и на макроэкономику в целом.

В работах [1–3] построена полуэмпирическая теория равновесного состояния рынка труда, позволяющая рассчитывать значения равновесных зарплат и занятости в отраслях, секторах или всей экономики по некоторым измеряемым параметрам рынка – средней заработной плате, числу занятых, максимальной заработной плате.

Одним из основных результатов теории было аналитическое выражение для функции безработицы:

$$U = \frac{(\alpha + \beta) \cdot (W - W_e)}{P} + U_n, \quad (1)$$

где  $U$ ,  $U_n$  – фактический и естественный уровень безработицы;  $W$ ,  $W_e$  – средняя и равновесная заработной платы;  $P$  – индекс цен в экономике,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры теории.

В настоящей работе на основе количественной теории рынка труда [1–2] и эмпирического закона Оукена исследована связь между главным макроэкономическим показателем ВВП и характеристиками рынка труда.

Математическая запись закона Оукена имеет вид

$$\frac{Q - Q_P}{Q_P} = -\gamma(U - U_n), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – коэффициент Оукена ( $\gamma > 1$ ), показывающий, на сколько процентов сокращается фактический объем выпуска  $Q$  по сравнению с потенциальным  $Q_P$ , если фактический уровень безработицы увеличивается на один процентный пункт. Таким образом,  $\gamma$  – это коэффициент чувствительности отклонения фактического ВВП от потенциального к изменению уровня циклической безработицы.

Закон Оукена можно рассматривать как линейное алгебраическое уравнение для неизвестной функции ВВП  $Q(U)$ . Его решение имеет вид

$$Q(U) = Q_P[1 - \gamma(U - U_n)] = Q_P[1 - \gamma U_k]. \quad (3)$$

С ростом циклической безработицы  $U_k = U - U_n$  совокупный выпуск должен уменьшаться, поскольку падает количество занятых в производстве ВВП, что и подтверждается формулой (3). Зависимость ВВП от безработицы в соответствии с выражением (3) показана на рис. 1.

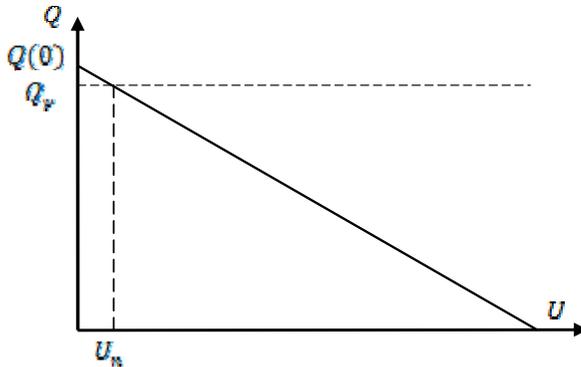


Рис. 1. Зависимость реального ВВП от безработицы

Подставляя в (3) выражение для функции безработицы (1), получим функцию ВВП от переменных средней заработной платы  $W$  и уровня цен  $P$  в экономике, а также ее зависимость от параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $W_e$ ,  $Q_P$ ,  $U_n$ .

$$Q = Q_P \left[ 1 - \gamma \frac{(\alpha + \beta) \cdot (W - W_e)}{P} \right]. \quad (4)$$

Исследование функции (4) показывает, что ВВП  $Q$  пропорционален потенциальному выпуску  $Q_P$  и растет вместе с ним. Это понятно: потенциальный выпуск характеризует производственные ресурсы экономики, поэтому совокупный выпуск растет с их увеличением. Характерно, что из формулы исчезла явная зависимость от  $U_n$ . Это означает, что потенциальный выпуск достижим при любом уровне естественной безработицы.

Зависимость выпуска от номинальной заработной платы  $Q(W)$  показана на рис.2.

В гипотетической точке  $W = 0$  совокупный выпуск  $Q(0)$  равен

$$Q(0) = Q_P \left[ 1 + \gamma \frac{(\alpha + \beta) \cdot W_e}{P} \right] > Q_P.$$

В точке  $W = W_e$  циклическая безработица отсутствует,  $U = U_n$  и выпуск равен потенциальному выпуску:  $Q = Q_P$ .

С ростом номинальной заработной платы  $W$  выпуск уменьшается, то есть функция  $Q(W)$  является убывающей во всем диапазоне изменения

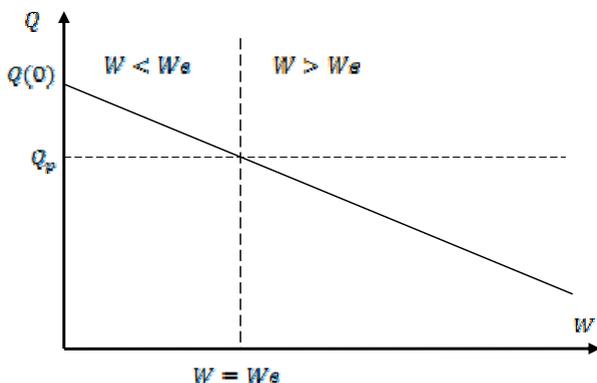


Рис. 2. Зависимость реального ВВП от номинальной заработной платы

$W$ , поскольку производная

$$\frac{\partial Q}{\partial W} = -\frac{\gamma Q_P(\alpha + \beta)}{P} < 0.$$

отрицательна при всех значениях  $W$ .

При постоянном уровне цен  $P$  зависимость выпуска от реальной заработной платы  $Q(W/P)$  повторяет поведение функции  $Q(W)$ .

Количественная теория безработицы (1) и использование эмпирического закона Оукена (2) позволили изучить зависимость ВВП от номинальной и реальной заработной платы. Эта зависимость не является очевидной и поэтому тривиальной.

Например, когда реальная зарплата  $W/P$  превышает свое равновесное значение  $W_e/P$  и продолжает расти, ВВП уменьшается. Почему это происходит? Рост реальной заработной платы увеличивает покупательную способность населения, в результате чего растет совокупный спрос  $Q^D$ , а следовательно, должен увеличиваться ВВП  $Q$ . Но одновременно растет и безработица  $U(W/P)$ . Поэтому в итоге, как видно из (4), совокупный выпуск убывает при росте  $(W/P)$ .

На рынке труда могут происходить процессы, которые сдвигают кривые спроса и предложения рабочей силы. Например, при открытии новых производств прямая спроса на труд сдвигается вверх, в результате чего равновесный уровень зарплаты  $W_e/P$  увеличивается.

В экономике произойдут изменения, описываемые функцией  $Q(W_e)$ , производная которой

$$\frac{\partial Q}{\partial W_e} = \frac{\gamma Q_P(\alpha + \beta)}{P} > 0.$$

Таким образом, повышение деловой активности, когда открываются новые фирмы, возрастают инвестиции, в результате чего растет  $W_e$ , ведет к увеличению ВВП.

Исследуем зависимость  $Q(P)$ . Она будет различной в зависимости от значения номинальной заработной платы по отношению к ее равновесной величине. Это связано с тем, что производная

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{\gamma Q_P(\alpha + \beta)(W - W_e)}{P^2}$$

имеет разный знак в экономиках, где уровень номинальной зарплаты выше его равновесного значения (состояние рецессии) и где ниже (стадия подъема в экономическом цикле).

Производная положительна в экономике с уровнем номинальной зарплаты выше равновесной  $W > W_e$ , что соответствует возрастающей функции  $Q(P)$  (нижняя кривая на рис.3) и отрицательна в экономике с  $W < W_e$ , что соответствует убывающей функции  $Q(P)$  (верхняя кривая на рис. 3).

Поскольку

$$\lim_{P \rightarrow \infty} Q(P) = Q_p,$$

то обе зависимости имеют горизонтальную асимптоту, к которой одна функция приближается сверху, а другая снизу с ростом уровня цен  $P$  (см. рис. 3).

В экономике, находящейся на стадии подъема экономического цикла и характеризующейся низким уровнем безработицы  $U < U_n$ , когда  $W < W_e$ , уменьшение инфляции помогает достичь более высоких, чем потенциальный ВВП  $Q_p$  значений выпуска. Это верхняя ветвь на рис. 3.

В экономике, находящейся на стадии рецессии экономического цикла, наличие высокой безработицы  $U > U_n$  не позволяет ВВП достичь своего потенциального значения  $Q_p$  ни при каких конечных значениях индекса цен  $P$  (нижняя ветвь на рис.3). Это инфляционная экономика, где экономический рост достигается только за счет повышения уровня цен  $P$ . В этой ситуации надо снижать безработицу (открывая новые рабочие места), что позволит увеличить ВВП без дальнейшего роста индекса цен.

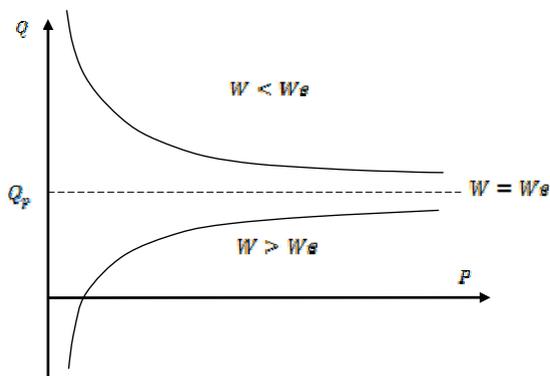


Рис. 3. Зависимость реального ВВП от индекса цен

Наконец, в экономике, где имеется равновесие на рынке труда, то есть  $W = W_e$  и безработица равна своему естественному уровню  $U = U_n$ , валовой внутренний продукт равен своему потенциальному значению  $Q = Q_P$  независимо от уровня цен. Так ведет себя совокупный выпуск  $Q$  в классической теории, где предполагается, что цены  $P$  и номинальные зарплаты  $W$  являются настолько гибкими, что равновесие на рынке труда, нарушенное внешними силами, тут же восстанавливается. В такой экономике рост зависит не от индекса цен  $P$ , а от мобилизации дополнительных ресурсов, которые позволяют повысить значение потенциального выпуска  $Q_P$ .

Проведенное моделирование указывает на конструктивный характер полупырической теории взаимосвязи ВВП с характеристиками рынка труда на основе закона Оукена и возможности ее использования для анализа и прогнозирования.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-2781.2012.2) и РФФИ (проект № 12-07-00057).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодкая Т. И., Юрьева Л. А. Отраслевой рынок труда в России: математическая модель и экономическая интерпретация // *Фундаментальные и прикладные исследования кооперативного сектора экономики*. 2008. № 2. С. 119–128.
2. Солодкая Т. И., Юрьева Л. А. Математическое моделирование и анализ равновесных характеристик рынка труда пищевой промышленности России // *Труды КГАУ*. 2008. Вып. 4 (13). С. 11–16.
3. Солодкая Т. И. Математическое моделирование в макроэкономике. Саратов, 2015. 320 с.

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РЕСПУБЛИКИ ДАГЕСТАН**

**Р. Х. Тагиев, Н. З. Магомедова**

*Дагестанский государственный технический университет, Махачкала, Россия*

E-mail: tagievRX@yandex.ru, magomedova1996@mail.ru

Приводятся результаты демографического прогнозирования развития народонаселения самого южного региона России – Республики Дагестан. Согласно заключениям прогноза уровень естественного прироста дагестанского населения даже при благоприятных экономических тенденциях развития республики в среднесрочной и долгосрочной перспективе не будет значительным. Результаты прогноза могут быть использованы при научном обосновании главных направлений демографической политики и стратегии социально-экономического развития Дагестана.

## **PREDICTION OF THE DEMOGRAPHIC DEVELOPMENT OF REPUBLIC DAGESTAN**

**R. H. Tagiyev, N. Z. Magomedova**

The results of demographic forecasting population development of the southernmost region of Russia-the Republic of Dagestan. According to the forecast rate of natural increase of the population of Dagestan even under favorable economic trends development in the medium and long term will not be significant. Results prediction can be used in scientific substantiation of main areas of population policy and socio-economic development strategy.

Демографические исследования Республики Дагестан часто строятся на сравнении с более общими, но, вместе с тем, не менее детализированными в информационно-статистическом плане показателями по стране в целом. Такого рода сопоставления позволяют решить различные научные задачи, в частности общественно-географического и этнополитического порядка.

Одна из таких задач – сравнительный анализ и прогноз воспроизводства этнических дагестанцев и всего многонационального сообщества Российской Федерации. Опираясь на фундаментальные методологические принципы социального прогнозирования, разрабатывался прогноз демографического развития Дагестана, методическим базисом которого явилось сопоставительное обобщение инерционного и целевого подходов к прогнозированию.

В первом случае анализировались наблюдаемые тенденции рождаемости, смертности и внешней миграции до 2010 г. включительно. Затем определялась совокупность возможных сценариев продолжения каждого из этих трех процессов до 2025 и 2050 гг.

Во втором случае рассматривалась совокупность тех же самых изменений, возможных при заданных нами конкретных целях. Для России такой целью явилось сохранение постоянной численности населения в условиях ее нынешнего стремительного падения, а для Дагестана – сохранение существующих темпов увеличения численности населения.

В логическом плане инерционный прогноз служит первым этапом исследования, на основе которого определяется целый «веер» вероятных, т.е. возможных с точки зрения реальных тенденций, траекторий демографического развития рассматриваемых территорий.

Ключевой задачей этого этапа исследования явилось установление двух наиболее вероятных тенденций с предельно низкими (пессимистическими) и предельно высокими (оптимистическими) значениями.

Итогом же целевого прогнозирования служит установление наиболее вероятного (среднего) сценария демографического развития территории. Определение такого сценария возможно лишь после совмещения данных инерционного и целевого прогнозов.

Рождаемость в России снижалась на протяжении всего XX в. В середине 1960-х гг. она впервые опустилась ниже уровня простого возобновления поколений (2,11–2,15 ребенка на одну женщину за весь ее репродуктивный период) и продолжала падать. С 1959 по 1993 г. суммарный коэффициент рождаемости сократился в стране почти вдвое – с 2,63 до 1,37. В последующие 90-е гг. эта тенденция заметно усилилась. В 1999 г. данный показатель упал до 1,16 ребенка на одну российскую женщину. Такие изменения в целом соответствуют тенденциям, которые в ушедшем веке были свойственны большинству других индустриально развитых стран мира [1, 2].

Иная картина наблюдалась в Дагестане, где рождаемость на протяжении XX в. медленно росла вплоть до начала 60-х гг., достигнув в 1959 г. своего максимума (5,1 рождений на одну женщину за весь ее репродуктивный период). С середины 60-х гг. рождаемость в республике стала снижаться и, надо сказать, довольно резко. Если в 1960 г. суммарный коэффициент рождаемости составлял 4,86, в 1979 г. – 3,62, в 1989 г. – 3,17, то к 2000 г. он достиг порогового для естественного воспроизводства показателя – 2,12.

Пессимистический сценарий для Дагестана, на наш взгляд, может опираться на среднее значение показателя рождаемости по России за 2010 г. – 1,21 рождений на одну женщину, что почти на одно рождение меньше, чем было в том же году в Дагестане (2,12). Предельно высокий (оптимистический) сценарий для России в целом, напротив, допускает

долговременный подъем рождаемости, в результате которого ее уровень к 2050 г. достигнет 2,15 рождений на одну женщину, что обеспечит минимальный естественный прирост. Для Дагестана оптимистический сценарий будет связан с увеличением суммарного коэффициента рождаемости не менее чем на единицу (с 2,12 до 3,17 рождений на одну женщину). При этом мы имеем ввиду возможность возврата к тому показателю, который был характерен для республики накануне перестройки.

Прогнозные гипотезы изменений суммарного коэффициента рождаемости представлены в табл. 1.

*Таблица 1*

**Коэффициенты суммарной рождаемости в России и Дагестане в 2010 г. и предельные прогнозные сценарии до 2050 г.**

Год	Прогнозные сценарии			
	Предельно низкий (пессимистический)		Предельно высокий (оптимистический)	
	РФ	РД	РФ	РД
2010	1,21	2,12	1,21	2,12
2025	0,95	1,95	1,93	2,8
2050	0,95	1,21	2,15	3,10

Динамика смертности в России сильно отличается от аналогичной динамики, сложившейся в большинстве промышленно развитых стран. Характерное для последних лет непрерывное снижение смертности на протяжении всего XX в. в России приостановилось в 1960-е гг. С тех пор показатель уровня смертности в стране вырос примерно вдвое – с 7,5‰ в 1959 г. до 14,7‰ в 2000 г. По данным за 2010 г., уровень смертности в России составил 14,3 умерших на 1000 чел. населения страны за год. Для сравнения: самый низкий общий показатель смертности в ОАЭ, Катаре, Кувейте (примерно 2‰ в год), где чрезвычайно молодое население, очень высокий удельный вес в населении трудовых мигрантов, высокий уровень здравоохранения и предельно низкий уровень потребления алкоголя. А самый большой показатель (более 25‰ в год) – в африканских Свазиленде, Ботсване, Лесото, т.е. в странах с очень низким уровнем жизни и сильно криминализованной системой государственной власти. Смертность среди российских мужчин в трудоспособном возрасте в 10 раз выше средневропейского показателя, а женщин – примерно в четыре раза.

В Дагестане снижение смертности прекратилось к 1990 г., когда ее уровень составил 6,4‰. С тех пор он имел незначительное возрастание, достигнув в 2000 г. 7,6 смертей на 1000 жителей. Однако за последнее десятилетие показатель общей смертности в Дагестане снизился, достигнув уровня 6,0 умерших на 1000 населения [3, 4].

Пессимистический сценарий для Дагестана, по нашему мнению, может быть связан с движением показателя ожидаемой продолжительности жизни людей к тому состоянию, которое было характерно для населения России в период трех десятилетий, предшествующих перестройке. При этом речь идет о сокращении ожидаемой продолжительности жизни дагестанского населения примерно на три года: с 71 г. в 2010 г. до 68 лет в 2050 г.

Напротив, предельно высокий сценарий предусматривает переход к росту продолжительности жизни. В соответствии с оптимистическим сценарием развития гендерный разрыв в продолжительности жизни населения Дагестана следует ожидать в диапазоне не более чем 6–7 лет. Пессимистический сценарий развития допускает увеличение разрыва в продолжительности жизни женщин и мужчин по России до начала нынешнего столетия – примерно 13 лет.

Прогнозные гипотезы изменений продолжительности жизни мужчин и женщин представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Прогнозные сценарии продолжительности жизни в России и Дагестане до 2050 г.**

Год	Прогнозные сценарии							
	Мужчины				Женщины			
	Предельно низкий		Предельно высокий		Предельно низкий		Предельно высокий	
	РФ	РД	РФ	РД	РФ	РД	РФ	РД
2010	59,0	66,0	59,0	66,0	72,2	75,0	72,2	75,0
2025	57,0	64,0	68,1	72,1	71,5	73,5	79,0	80,0
2050	57,0	59,0	74,5	76,0	71,5	72,2	84,5	85,0

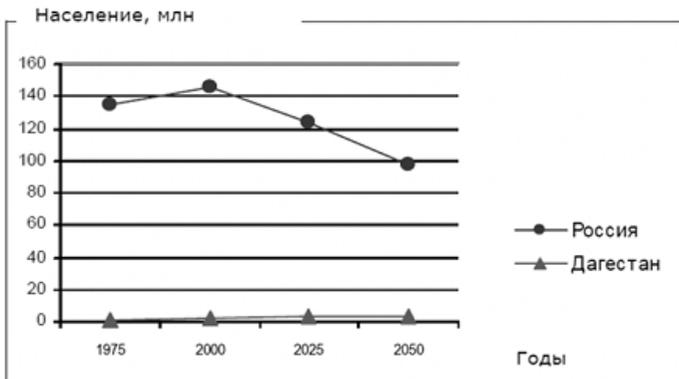
Согласно расчетам при принятых гипотезах численность населения России в начале 2050 г. с вероятностью 95% будет находиться в вилке 71 (пессимистический сценарий) и 127 млн (оптимистический сценарий) человек, а население Дагестана соответственно 3,2 и 4,4 млн человек (табл. 3).

Таблица 3

**Прогнозные оценки численности населения России и Дагестана до 2050 г., млн чел.**

Год	Медианное значение прогноза		80%-ный доверительный интервал		95%-ный доверительный интервал	
	РФ	РД	РФ	РД	РФ	РД
2010	144	3,1	144	3,1	144	3,1
2025	124	3,2	118–130	3,0–3,5	111–137	2,9–3,9
2050	98	3,8	86–111	3,6–4,0	71–127	3,2–4,4

При уменьшении доверительной вероятности до 80%, то есть при некотором снижении надежности прогноза, сужается и вилка возможных значений: по России – от 86 до 111 млн и Дагестану – от 3,6 до 4,0 млн человек.



Прогнозные оценки изменения численности населения России и Дагестана

Медианное значение прогнозной численности населения России и Дагестана к началу 2050 г. по всей серии инерционных и целевых прогнозов составит, соответственно, 98 и 3,8 млн человек [3, 4].

Таким образом, к середине текущего столетия прогнозируется возрастание численности населения Дагестана до 3,8 млн человек, т.е. примерно на 70% по сравнению с 2000 г. Население республики составит около 4% численности всего населения страны. Количество же прожи-

вающих в России в целом за прогнозный период сократится до 98 млн человек или уменьшится почти на 1/3 (см. рисунок).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слука Н. А.* Геодемографические феномены глобальных городов. Смоленск: Ойкумена, 2009. 317 с.
2. *Эльдаров Э. М.* Естественное воспроизводство населения России и Дагестана // Региональные аспекты социальной политики. 2005. Вып. 7. С.105–114.
3. *Слука Н. А.* Движение населения в глобальных городских регионах // Балтийский регион. 2010. № 4 (6). С. 17–28.
4. Сайт Федеральной службы государственной статистики РФ [Электронный ресурс]. URL: [www.gks.ru](http://www.gks.ru) (дата обращения: 10.10.2015).

## НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ В ИПОТЕЧНОМ КРЕДИТОВАНИИ

**М. Г. Тиндова**

*Саратовский социально-экономический институт (филиал)  
Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*

E-mail: [mtindova@mail.ru](mailto:mtindova@mail.ru)

Целью работы является разработка модели определения страхового тарифа на основе теории нечётких множеств. Общая задача определения итогового страхового тарифа в работе представлена как иерархическая модель с последующей нечёткой кластеризацией. В качестве лингвистических переменных модели использовались эндогенные и экзогенные переменные процесса определения программы страхования и страхового тарифа, выявленные с помощью многофакторного регрессионного анализа. В качестве обучающих выборок – экспертные нечеткие базы знаний типа Мамдани. В качестве иллюстрации работы нечёткой иерархической модели с последующей нечёткой кластеризацией показан процесс определения страхового тарифа и итоговой программы страхования для конкретного ипотечного кредита.

## FUZZY MODEL OF INSURANCE IN MORTGAGE LENDING

**M. G. Tindova**

The aim of this work is to develop a model definition of the insurance tariff on the basis of the theory of fuzzy sets. The general problem of determining the outcome of the insurance rate in the work is presented as a hierarchical model, followed by fuzzy clustering. As linguistic variables of the model the author used the endogenous and exogenous variables of the process of definition of the insurance program and the insurance rate identified by multivariate regression analysis. As training samples he used expert fuzzy knowledge bases of Mamdani type. The process of determining the insurance rate and the resulting programmes of insurance for the specific mortgage loan is shown as an illustration of the operation of the constructed fuzzy system.

Ипотечный кредит – это особая форма кредита, связанная с предоставлением ссуд под залог недвижимого имущества, а ипотечное страхование призвано защитить ипотечных кредиторов от риска понести убытки в связи с неисполнением заемщиком его обязательств и невозможностью полного возмещения его задолженности за счет продажи заложенного имущества.

Чаще всего наличие ипотечного страхования позволяет увеличить сумму выдаваемого кредита на покупку жилья за счет снижения суммы первоначального взноса, которую клиент, покупающий жилье, должен внести наличными в качестве предоплаты. Другой задачей ипотечного страхования является рост притока капитала на рынок жилищного ипотечного кредитования за счёт повышения интереса институциональных инвесторов к приобретению кредитов, обеспеченных ипотекой путем снижения рисков.

Традиционно задача ценообразования страхового тарифа в страховании рисков ипотечного кредитования решается методами множественной оптимизации, применение которых на практике часто сопряжено с трудностями и решение осуществляется численными методами с достаточно большими погрешностями.

Поэтому целью нашей работы является разработка модели определения страхового тарифа на основе теории нечётких множеств, которая позволила бы снизить ошибки вычислений, а также принимать обоснованные решения в условиях неполноты и субъективности информации.

Рассмотрим задачу выбора программы ипотечного страхования как задачу кластеризации (mod-1), с предварительным моделированием выбора процентной ставки (mod-2). Таким образом, получаем модель на основе нечётких иерархических структур с последующей нечёткой кластеризацией, которую можно представить следующей схемой:

$$\underbrace{y_3(x_1, x_2, x_3) \mapsto y_2(y_3, x_1, x_2, x_3)}_{\text{mod 2}} \mapsto \underbrace{y_1(y_2, y_3, x_1, x_2, x_3)}_{\text{mod 1}} \mapsto \begin{cases} \text{кластер 1} \\ \text{кластер 2} \\ \text{кластер 3} \end{cases} ,$$

где  $y_1$  – программа страхования,  $y_2$  – процентная ставка,  $y_3$  – риски,  $x_1$  – размер ипотечного кредита,  $x_2$  – срок кредита,  $x_3$  – процент первоначального взноса.

Для описания общих экзогенных переменных введём лингвистические переменные  $L_1$  – размер ипотечного кредита;  $L_2$  – срок ипотечного

кредита;  $L_3$  – процент первоначального взноса. Для описания эндогенной переменной mod-1 введём лингвистическую переменную  $L_4$  – программа страхования; для эндогенной переменной mod-2 – лингвистическую переменную  $L_5$  – процентная ставка, а также переменную  $L_6$  – риски.

Каждая лингвистическая переменная  $L$  характеризуется набором  $L = (T, U, G, M)$ , где  $T$  – терм-множество;  $U$  – область определения лингвистической переменной;  $G$  – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества  $T$ ;  $M$  – семантическая процедура позволяющая формировать новые нечёткие множества [1].

В частности, переменная  $L_1$  – размер ипотечного кредита – характеризуется терминами  $T_1 = \{\text{«низкий»}, \text{«средний»}, \text{«высокий»}\}$ ; определяется на множестве  $X_1 = [3, 12]$ . Аналитически функции принадлежности термов лингвистической переменной  $L_1$  выражаются следующим образом:

$$\mu_{T1} = \begin{cases} 1, t \leq 2 \\ \frac{4-t}{2}, 2 \leq t \leq 4 \\ 0, t \geq 4 \end{cases}; \mu_{T2} = \begin{cases} 0, t \leq 3 \\ \frac{t-3}{3}, 3 \leq t \leq 6 \\ \frac{9-t}{3}, 6 \leq t \leq 9 \\ 0, t \geq 9 \end{cases}; \mu_{T3} = \begin{cases} 0, t \leq 8 \\ \frac{t-8}{4}, 8 \leq t \leq 12 \\ 1, t \geq 12 \end{cases}$$

Аналогичным образом определяются и остальные лингвистические переменные наших нечётких систем.

Переменная  $L_2$  – срок ипотечного кредита – характеризуется терминами  $T_2 = \{\text{«низкий»}, \text{«средний»}, \text{«высокий»}\}$ ; определяется на множестве  $X_2 = [5, 15]$ .

Для переменной  $L_3$  – процент первоначального взноса – терминами станут  $T_3 = \{\text{«низкий»}, \text{«средний»}, \text{«высокий»}\}$ ; определяется на множестве  $X_3 = [15, 50]$ .

Различные программы страхования характеризуются различными поправочными коэффициентами, которые, с одной стороны, служатощрением для надёжных заёмщиков, а с другой – уменьшают риски банка невозврата кредита. В программе страхования № 1 итоговый страховой коэффициент определяется путём снижения на 2%; в программе № 2 он остаётся без изменения и в программе № 3 к итоговому страховому коэффициенту добавляется половина ставки рефинансирования, которая с 15 июня 2015 г. составляет 8,25%.

В качестве процентной ставки при ипотечном страховании обычно рассматривается половина ставки по самому ипотечному кредиту [2]. Поэтому для определения термов переменной  $L_5$  мы рассмотрели средние

за год ставки по ипотечным кредитам в различных банках. В результате, термами переменной  $L_5$  стали  $T_5 = \{\text{«низкая»}, \text{«средняя»}, \text{«высокая»}\}$ , которые были определены на множестве  $X_5 = [1, 8]$ .

Все риски, связанные с процессом ипотечного страхования, могут быть поделены на систематические, которые связаны с экономической ситуацией в стране и мире в целом, и несистематические, связанные с конкретным заёмщиком, объектом ипотеки и т.п. С целью построения нечёткой модели в нашей работе все риски были объединены посредством линейной комбинации с использованием МНК-оценивания [3]:

$$\text{риск} = 5,637 + 0,063\alpha_1 + 0,937\alpha_2 + 1,701\alpha_3 + 5,347\alpha_4 + 6,359\alpha_5 + \\ + 7,831\beta_1 + 12,623\beta_2 + 9,452\beta_3 + \varepsilon,$$

где к группе « $\alpha$ » относятся систематические риски:  $\alpha_1$  – риск несовершенства законодательной базы;  $\alpha_2$  – риск изменения законодательства;  $\alpha_3$  – риск роста безработицы;  $\alpha_4$  – риск изменения процентных ставок;  $\alpha_5$  – риск изменения курса валют; к группе « $\beta$ » – несистематические риски:  $\beta_1$  – риск банкротства заёмщика;  $\beta_2$  – риск потери стоимости объекта недвижимости;  $\beta_3$  – метод ипотечного кредита. Таким образом, в качестве термов лингвистической переменной  $L_6$  – риски – были выбраны  $T_6 = \{\text{«низкие»}, \text{«средние»}, \text{«высокие»}\}$ , которые были определены на множестве  $X_6 = [5, 50]$ .

Для моделирования влияющих факторов использовались экспертные нечеткие базы знаний типа Мамдани [1].

Существует два способа создания иерархических нечетких систем [4]. Исходя из задач моделирования в нашей работе был использован способ, состоящий в выполнении нечеткого вывода для промежуточных переменных с последующей передачей четких значений этих переменных в нечеткие системы следующего уровня иерархии.

Общая задача кластеризации состоит в разбиении объектов из  $X$  на несколько подмножеств (кластеров). Отличием нечеткой кластеризации является возможность одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью включения [5]. Для реализации процесса нечёткой кластеризации в нашей модели был использован нечеткий c-means алгоритма системы Mathlab 7.04.

Для иллюстрации работы всей модели определения страховой программы рассмотрим пример страхования ипотечного кредита на сумму 3 млн руб., под 14,5% годовых, на 10 лет, при условии, что первоначальный взнос составил 30% от стоимости квартиры.

Таким образом, для  $L_1$  имеем  $t = 3$ ; для  $L_2 - t = 10$ ;  $L_3 - t = 30$ . Тогда на первом шаге определяем значение переменной  $L_6$ . Для этого находим степень вхождения  $t$  в каждое из нечетких подмножеств переменной:

$$L_1 = \begin{cases} \mu_1 = 1/2; \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 3/4; \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \quad L_3 = \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 2/3. \\ \mu_3 = 0 \end{cases}$$

Так как все переменные имеют одинаковое влияние на результат, находим средние:  $\mu_1 = \frac{1}{6}$ ;  $\mu_2 = \frac{17}{36}$ ;  $\mu_3 = 0$ .

Используя правила базы знаний, находим модификацию нечетких подмножеств методом «произведений» (метод Ларсена), используя значения истинности левой части каждого правила в качестве множителя для модификации нечеткого множества, указанного в его правой части [1]. На следующем шаге нечеткая система обобщает результаты действия всех правил вывода, т.е. производит суперпозицию полученных нечетких

множеств методом «центра тяжести» [1]:  $r = \frac{5 \cdot \frac{1}{6} + 20 \cdot \frac{17}{36} + 50 \cdot 0}{\frac{1}{6} + \frac{17}{36} + 0} = \frac{370}{23} \approx$

$\approx 16\%$ . Таким образом, общие риски составляют 16%.

На следующем шаге иерархической модели необходимо определить процентную ставку страхования. Используя полученные результаты, име-

$$\text{ем: } L_6(t = 16) = \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 11/15. \\ \mu_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Тогда средние значения равны: } \mu_1 = \frac{1}{8}; \mu_2 =$$

$\frac{43}{80}$ ;  $\mu_3 = 0$ , а суперпозиция нечетких множеств методом «центра тяже-

сти»:  $v = \frac{1 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{42}{80} + 8 \cdot 0}{\frac{1}{8} + \frac{42}{80} + 0} = \frac{178}{52} \approx 3,42\%$ . Другими словами, коэффици-

ент ипотечного страхования составляет 3,42%.

Конечным шагом работы модели является определение программы страхования, т.е. определение кластера, к которому будет отнесён объект ипотечного страхования.

Используя чёткую кластеризацию, на основе которой происходит выбор программы страхования в настоящее время, наш объект будет отнесён ко второму кластеру. Таким образом, итоговая ставка страхования

составила бы  $v_{\text{итог}} = 3,42\%$ . Рассматривая же нечёткий классификатор, значение функции принадлежности объекта первому кластеру составит 0,1, второму – 0,592 и третьему – 0. Таким образом, находя взвешенную сумму различных программ страхования, получаем итоговую ставку ипотечного страхования:

$$v_{\text{итог}} = \frac{(3,42 - 2) \cdot 0,1 + 3,42 \cdot 0,592 + 0}{0,1 + 0,592 + 0} = 3,13\%.$$

Относительная погрешность при этом составляет  $\Delta = 0,08$ .

В качестве заключения можно отметить, что полученные модели позволяют страховым организациям более точно определять страховой тариф, что дает возможность привлекать большее количество клиентов и соответственно капитала в сферу ипотечного кредитования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тиндова М. Г., Носов В. В.* Алгоритм нечёткого логического вывода для определения цены земельных участков // Никоновские чтения. 2012. № 17. С. 320–322.
2. *Разумова И. А.* Ипотечное кредитование. СПб.: Питер, 2006. 128 с.
3. *Тиндова М. Г., Бескурникова Ю. В.* Сравнительный анализ оценочных моделей в целях страхования и купли-продажи недвижимости // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2013. № 4 (8). С. 124–129.
4. *Потапов Д. К.* Неклассические логики: учеб. пособие. СПб.: СПбГУ, 2006. 108 с.
5. *Тиндова М. Г.* Предварительная кластеризация многомерных объектов в интеллектуальном анализе данных // Вестн. Саратов. гос. соц.-экон. ун-та. 2008. № 4. С. 137–138.

## ДЕТЕРМИНАНТЫ ПОВЕДЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ НА СТРАХОВОМ РЫНКЕ: СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА

**А. А. Трегубова, М. Ю. Широченко**

*Ростовский государственный экономический университет, Россия*  
E-mail: alexandra\_a\_t@mail.ru, maksim.shirochenko@gmail.com

Дальнейшее углубление экономического кризиса, ослабление курса рубля и ужесточение контроля со стороны регулятора привели к замедлению темпов роста страховых сборов. Отбор клиентов в таких условиях должен проводиться страховщиками с большей осторожностью. В работе с помощью эконометрических методов проанализировано влияние социально-экономических и демографических факторов на поведение индивидов на рынке добровольного автострахования. При расчетах использованы данные 22-й волны Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения НИУ-ВШЭ (RLMS-HSE) за 2013 г. Выявлены факторы повышения шансов наличия у индивида полиса добровольного страхования автомобиля.

# THE DETERMINANTS OF THE POPULATION BEHAVIOR IN THE INSURANCE MARKET: STATISTIC EVALUATION

A. Tregubova, M. Shirochenko

The negative situation in the Russian insurance market was determined by further escalation of crisis, ruble weakening and toughening of control by the regulator. Furthermore the growth of the loss ratio (direct insurance) is mostly attributed to the worsening of the macroeconomic situation. Therefore insurers have to use more cautious approaches when selecting clients. This paper studies the socio-economic and demographic factors affecting the individuals' behavior in the voluntary motor insurance market using logit econometric models. Individual RLMS-HSE Round 22 (2013) data is used for model estimation. The factors increasing the individual chances of having voluntary motor insurance policy have been identified.

Начавшийся в 2014 г. экономический кризис, ослабление курса рубля, а также ужесточение контроля со стороны регулятора привели к замедлению темпов роста страховых сборов в текущем году. По словам И. Юргенса [1], за первое полугодие 2015 г. наблюдался «номинальный» рост сборов на 2% (с учетом ОСАГО), при этом на рынке корпоративного страхования (в том числе автострахования и ДМС) было отмечено существенное падение – на 20%.

Кроме того, можно ожидать дальнейшей концентрации страхового рынка, в том числе за счет перехода определенной части клиентов в более надежные компании, с лучшей репутацией. Одной из основных задач для страховщиков в таких условиях может стать сохранение клиентской базы и грамотное привлечение новых клиентов, потенциально заинтересованных в страховании (однако, не приводящее к антиселекции и росту убыточности). Для чего можно использовать как «внутреннюю» статистику страховой компании, так и различные «внешние» источники информации (например, различные репрезентирующие все население микроданные).

Для целей данного исследования было проведено моделирование детерминант страхового поведения индивидов, по данным 22-й волны Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения НИУ-ВШЭ (RLMS-HSE) за 2013 г. [2]. Объем сформированной выборки составил 4 254 индивида в возрасте от 18 лет до 69 лет включительно (рис.1).

Доля мужчин в выборке составила 43,96%, женщин – 56,04%. Около 55% опрошенных состоят в официально зарегистрированном браке. Почти 27% респондентов проживает в сельской местности, около 40% – в областных центрах. Среди опрошенных занимается трудовой деятельностью почти 63% индивидов (рис. 2).

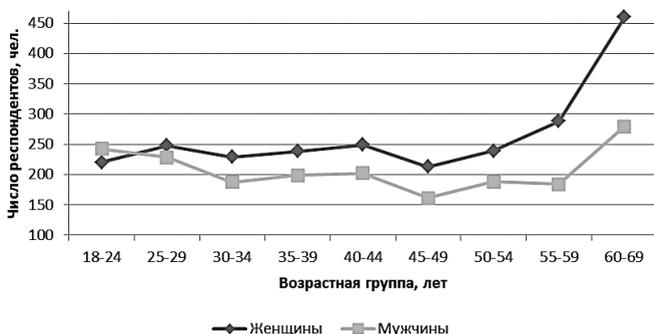


Рис. 1. Распределение респондентов по полу и возрасту, чел.

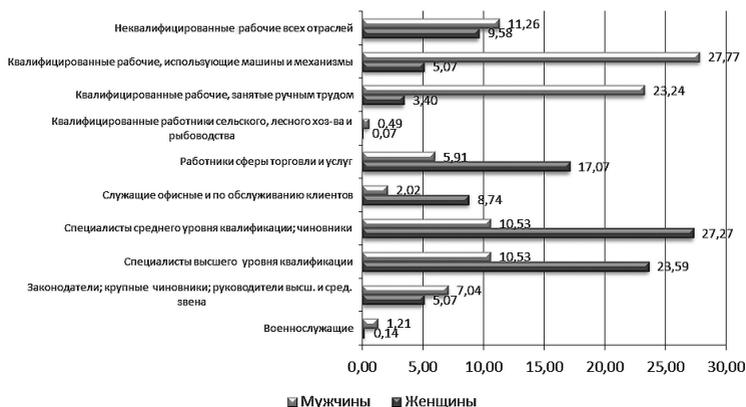


Рис. 2. Распределение респондентов по полу и профессиональной группе, %

Более половины всех работающих мужчин (51%) является квалифицированными рабочими, использующими машины и механизмы, а также занятыми ручным трудом. Неквалифицированных рабочих среди мужчин насчитывается около 11,3%. Среди работающих женщин половина – специалисты высшего и среднего уровней квалификации, а также чиновники. Чуть более 17% женщин работает в сфере торговли и услуг.

В сформированной выборке среди застрахованных в рамках добровольных программ страхования большая часть заявила о наличии страхования автомобиля, на втором месте – страхование квартиры или дома,

третье место занимает страхование жизни от несчастных случаев (что, возможно, связано с требованиями к ипотечным заемщикам). При этом доля застрахованных по различным видам добровольного страхования не превышала 5%.

При этом чаще всего основными потребителями услуг добровольного страхования становились специалисты высшего и среднего уровней квалификации; исключением является страхование сельскохозяйственно-го имущества и скота – 40% работников сферы торговли и услуг (рис. 3).

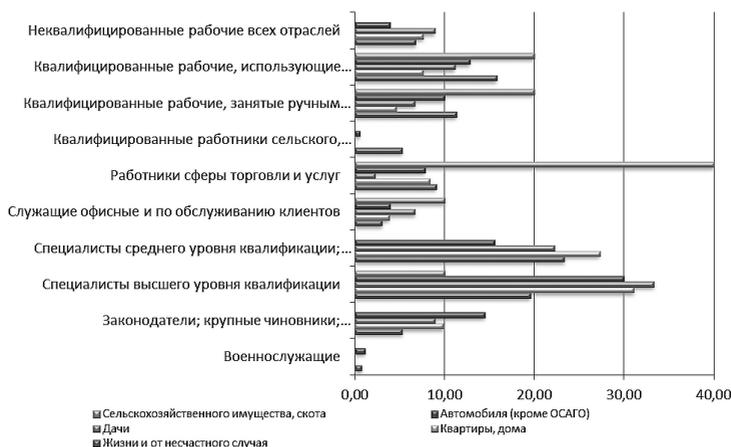


Рис. 3. Распределение респондентов по виду приобретенных полисов добровольного страхования и профессиональной группе, % от числа застрахованных по каждому виду страхования

Для выделения детерминант страхового поведения (на примере автострахования) была оценена логистическая модель бинарного выбора, в которой зависимой переменной был ответ на вопрос о том, имеет ли респондент полис добровольного страхования автомобиля (переменная принимала значение 1, если ответ «да», значение 0 – иначе).

В качестве независимых были отобраны и дополнительно сконструированы следующие характеристики индивидов: пол; уровень образования (сформированы четыре группы); статус занятости; наличие детей у респондента; тип населенного пункта; возрастная и доходная группы (квинтильные группы по доходу индивида). Результаты моделирования представлены в таблице.

**Результаты оценивания бинарной логистической регрессии (зависимая переменная «Респондент имеет полис добровольного страхования автомобиля»)**

Переменная	Коэффициент регрессии	Коэффициент отношения шансов
Пол (женский)		
Мужской	0,472***	1,604
Тип поселения (областной центр)		
Город	-0,937***	0,392
ПГТ	-1,343***	0,261
Село	-0,275	0,759
Уровень образования (высшее и послевузовское)		
Неполное среднее (до 9 классов)	0,506	1,659
Среднее (9–11 классов)	0,519	1,680
Среднее профессиональное	1,391***	4,018
Статус занятости (неработающий)		
Работающий	0,712***	2,038
Наличие детей (нет)		
Есть дети	0,495**	1,639
Возрастная группа (18–24 лет)		
25–29 лет	0,536	1,709
30–34 лет	0,425	1,529
35–39 лет	1,028*	2,796
40–44 лет	1,267**	3,551
45–49 лет	1,077**	2,935
50–54 лет	0,945*	2,573
55–59 лет	0,363	1,437
60–69 лет	0,719	2,269
Квинтили по доходу индивида (I)		
II	-0,084	0,919
III	-0,701**	0,496
IV	-0,236	0,789
V	0,505*	1,657
Константа	-5,369***	–
-2LL	-730.326	
хи-квадрат	224.19***	
Число наблюдений	4254	

Примечание. \*\*\*, \*\*, \* – значим на уровне 1, 5 и 10% соответственно.

Интерпретация коэффициентов проведена в терминах отношения шансов, которое показывает, во сколько раз вероятность выбора одной альтернативы больше (меньше), чем выбора другой альтернативы (принятой в качестве базисной категории или эталона).

Так, вероятность наличия полиса добровольного страхования автомобиля будет выше для мужчин по сравнению с женщинами (в 1,6 раза); респондентов, имеющих среднее профессиональное образование по сравнению с респондентами с высшим образованием (в 4 раза); имеющих детей (шансы выше на 64%); относящихся к возрастной категории от 35 до 54 лет, а также к наиболее высокодоходной группе.

При этом шансы быть застрахованными снижаются для проживающих в городе и поселке городского типа по сравнению с живущими в областных центрах (соответственно, на 60 и 74%); а также для респондентов, отнесенных к третьей доходной группе.

Проведенный анализ позволяет выделить некоторые типичные черты клиентов, которые страховщикам необходимо учитывать при формировании и сохранении клиентской базы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юргенс И. Ю.* Какие основные тренды наблюдались на страховом рынке России в 1 полугодии 2015 г.? [Электронный ресурс]. URL: <http://www.insur-info.ru/brief/> (дата обращения: 08.10.2015).

2. Сайт обследования RLMS-HSE [Электронный ресурс]. URL: <http://www.hse.ru/rf/lms/> (дата обращения: 09.10.2015).

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИБЕРАЛЬНЫХ ЭВРИСТИК В СОСТАВЕ МУЛЬТИМЕТОДНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАСКРОЯ**

**Э. Р. Тухватуллин**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия*

E-mail: [lurnet@mail.ru](mailto:lurnet@mail.ru)

В данной работе рассматривается задача двумерного раскроя. Описываются сферы, где она возникает, представляется общая постановка задачи, описываются однопроходные и либеральные эвристики, которые можно использовать при её решении. Предлагается метод решения с помощью мультиметодного алгоритма, использующего либеральные эвристики.

## **USING OF LIBERAL HEURISTICS COMPOSED OF MULTIMETHOD ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF THE RECTANGULAR CUTTING**

**E. R. Tukhvatullin**

In this paper, we consider the problem of rectangle cutting. The article describes the spheres where this problem occurs, introduces a general formulation of the problem, describes

single-pass and liberal heuristics that can be used for solving it. The paper offers a method of solution using multimethod algorithm that uses liberal heuristics.

Задача прямоугольного раскроя возникает на многих производственных предприятиях. Промышленное применение задачи прямоугольного раскроя для предприятий с массовым выпуском продукции возникает, когда основной материал производится в виде рулонов или листов металла, стекла, различных пластиковых или древесных плит, тканей и т.п., а затем режется на более мелкие части.

В общем случае имеется набор прямоугольных заготовок с заданными размерами, а также полубесконечный рулон с фиксированной шириной.

В зависимости от входных данных применяются онлайн- и офлайн-эвристики. Офлайн-эвристики применяются в случае, когда заранее известно количество заготовок. Часто в этой ситуации заготовки сортируются по убыванию. Онлайн же версия используется, когда детали поступают последовательно или порциями, и их нужно размещать «на ходу».

Известно небольшое количество основных технологий моделирования алгоритмов решения задач одномерного раскроя: блочная, уровневая, шельфовая, мультиметодная и некоторые другие. Данная статья посвящена разработке мультиметодного алгоритма для решения поставленных задач.

Принцип работы мультиметодных алгоритмов состоит в последовательном применении простых однопроходных эвристик, каждая из которых добавляет к частично построенному решению одну заготовку. Большинство известных метаэвристических алгоритмов и простых эвристик использует стратегию жадности [1].

Однако анализ оптимальных решений задач прямоугольного раскроя показал, что в ряде случаев оптимальное решение не может быть получено лишь применением жадных эвристик, так как на некоторых шагах нужно делать ухудшение частично полученного решения. Это обусловило возникновение идеи о внедрении в состав мультиметодных алгоритмов либеральных эвристик, позволяющих осуществлять так называемые ухудшающие шаги [2].

В настоящей работе для решения задачи двумерного раскроя предлагается мультиметодный алгоритм, включающий либеральные эвристики.

Приведем постановку задачи и ее математическую модель.

Исходная информация:  $\langle W, L, m, \varepsilon, n, x, y, w, l \rangle$ ,

где  $W$  – ширина,  $L$  – длина листа картона,  $m$  – количество заготовок,  $\varepsilon$  – вектор флагов разрешения на поворот заготовок на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ;  $n = (n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_m)$ , где  $n_j$  – количество прямоугольников в прямоугольно-ориентированной заготовке с номером  $j$ ;  $x = (x_j^k)$ ,  $y = (y_j^k)$ , где  $(x_j^k, y_j^k)$  – координаты левого нижнего угла прямоугольника с номером  $k$ , входящего в заготовку с номером  $j$ ,  $k = \overline{1, n_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ; при задании входных данных каждая заготовка описывается в своей системе координат;  $w = (w_j^k)$ ,  $l = (l_j^k)$ , где  $(w_j^k, l_j^k)$  – длина и ширина прямоугольника с номером  $k$ , входящего в заготовку с номером  $j$ ,  $k = \overline{1, n_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Выходная информация: минимальные координаты  $(x_j^k, y_j^k)$  каждого прямоугольника в прямоугольно-ориентированных заготовках в единой системе координат полубесконечной полосы или листа,  $k = \overline{1, n_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Требуется: минимизировать отходы материала:  $\mu(x, y) = W \cdot L - \sum_m \sum_k w_j^k \cdot l_j^k \rightarrow \min$ ,  $k = \overline{1, n_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Допустимость упаковки:

1) ортогональное размещение прямоугольников в упаковке: для  $(x_i, y_i)$  и любой другой вершины  $(x_i^k, y_i^k)$   $i$ -го прямоугольника  $((x_i^k = x_i) \vee (x_i^k = x_i + l_i)) \wedge ((y_i^k = y_i) \vee (y_i^k = y_i + w_i))$ ;

2) неперекрывание заготовок: для  $i \neq j$ :  $i, j = \overline{1, m}$ :  $((x_i \geq x_j + l_j) \vee (x_j \geq x_i + l_i)) \vee ((y_i \geq y_j + w_j) \vee (y_j \geq y_i + w_i)) \vee s_i \neq s_j$ ;

3) неперекрывание заготовок с гранями объектов: для всех  $i = \overline{1, m}$ :  $(x_i \geq 0) \wedge (y_i \geq 0) \wedge ((y_i + w_i) \leq W) \wedge ((x_i + l_i) \leq L)$  [1].

Описание алгоритма. На каждом шаге алгоритма к частичной упаковке добавляется одна заготовка. Выбор и расположение заготовки в частичной упаковке определяются в соответствии с эвристикой, работающей на данном шаге. Эвристика на каждом шаге выбирается случайным образом.

В состав разработанного мультиметодного алгоритма входят следующие эвристики:

- следующий подходящий;
- первый подходящий;
- наилучший подходящий;
- худший подходящий;
- первый подходящий с обратной сортировкой;
- случайный подходящий.

Поскольку задача прямоугольного раскроя относится к классу NP-трудных, важно использовать эвристики, потому что лишь они могут дать приемлемое решение за допустимое время, когда применение

других методов решения, например, полного перебора, хоть и допускает получение лучшего решения, но требует значительных временных затрат.

Можно повысить эффективность работы мультиметодного алгоритма, рассчитав вероятности использования для каждой из входящих в состав эвристик. Величина вероятности должна быть прямо пропорциональной эффективности эвристик.

Несмотря на простоту описанных эвристик, мультиметодный алгоритм позволяет получить рациональные решения с помощью комбинирования этих эвристик. В литературе описаны результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность мультиметодных алгоритмов с либеральными эвристиками.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валиахметова Ю. И.* Мультиметодная технология моделирования ортогональной упаковки и размещения прямоугольно-ориентированных заготовок: дис. ... канд. техн. наук. Уфа, 2008.
2. *Скобцов Ю. А.* К вопросу о применении метаэвристик в решении задач рационального раскроя и упаковки // *Вісн. Хмельн. нац. ун-ту.* 2008. Т. 1, № 4. С. 205–217.

## ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЛИЯНИЕ НА ИННОВАЦИОННОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИКИ

**И. Н. Филатова**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*  
E-mail: irinatar@rambler.ru

На современном этапе экономического развития процесс новейших технологических внедрений приобретает глобальный характер. Технологическая глобализация приводит к усилению конкуренции в мировом масштабе. Экономическое развитие страны на всех уровнях управления зависит от конкурентных преимуществ промышленного комплекса, и прежде всего сырьевого сектора экономики. Изучены и систематизированы последствия «голландской болезни». В статье приведены методические аспекты теории имитаций и инноваций в рамках эндогенной теории экономического роста для исследования динамики инновационного развития стран с развивающейся и переходной экономикой. Разработаны модели в рамках теории эндогенного роста, которые являются многосекторным расширением модели Солоу с постоянной нормой сбережения. Главным механизмом, определяющим динамику роста, является переток инвестиций из одного сектора в другой. В работе проведено моделирование динамики технологического развития экономики и анализ эффекта попадания экономики в ловушку отсталости при отставании экономики от мировых технологических лидеров. Доказано, когда экзогенные высокие цены на ресурс при низком технологическом уровне, потенциале развития и уровне образования могут привести к усилению зависимости экономики от сырьевого фактора.

# GOVERNMENT INFLUENCE ON INNOVATIVE DEVELOPMENT OF ECONOMY

I. N. Filatova

At the present stage of economic development process of the latest technological implementations acquires a global character. Technological globalization leads to increased competition on a global scale. Economic development of the country at all levels of management depends on the competitive advantages of the industrial complex, and first of all the commodity sector of the economy. Studied and systematized the consequences of "Dutch disease". This article presents methodological aspects of the theory of imitation and innovation in the framework of endogenous economic growth theory to study the dynamics of innovative development of countries with developing and transitional economies. The model developed in the framework of endogenous growth theory, which are multi-sector extension of the Solow model with constant saving rate. The main mechanism determining the dynamics of growth, is the flow of investment from one sector to another. In this work the modeling of the dynamics of technological development of the economy and analysis of the effect of the falling economy in the underdevelopment trap with a backlog of economy from the world's technological leaders. Proved when exogenous high price of the resource at a low technological level, the development potential and the level of education can lead to increased dependence on the resource factor.

Рост экономики, а также увеличение результативности общественного производства не могут выступать средством для разрешения всех социальных задач. Например, в России большинство проблем, связанных с наращиванием экспорта ресурсов и сокращением стоимости сырья, становится весьма актуальным. В связи с этим следует находить иные пути для дальнейшего развития, в том числе и для обеспечения социального прогресса.

С 2010 г. формируется новая концепция управления экономическим ростом. Фиксируются постулаты о главной роли государства в организации новых точек экономического роста в промышленности, а также в научном и капиталоемком секторах. Россия старается преодолеть зависимость от сырьевого экспорта за счет модернизации экономики и перевода ее в инновационное русло [1].

Высокий темп роста экономики, основанный на развитии и формировании сырьевого сектора, возможен. Но постоянное использование природной ренты может привести к множеству проблем:

- во-первых, высокая доля полезных ископаемых в национальном богатстве страны ведет к низкому темпу роста ВВП на душу населения;
- во-вторых, низкий темп роста сырьевых отраслей на фоне высокого темпа роста сырьевого сектора в мировой экономики;
- в-третьих, низкий темп роста добавленной стоимости в сырьевом секторе при относительно высокой эффективности горнодобывающих предприятий.

Также следует отметить, что на современном этапе экономического развития процесс новейших технологических внедрений уже не имеет границ и отдельно взятых стран [2]. Сейчас он в целом приобретает глобальный характер. Результаты этого мы можем наблюдать во всех без исключения промышленно развитых странах, это касается и России. Технологическая глобализация почти всегда приводит к усилению конкуренции в мировом масштабе.

Следовательно, организации разных стран мира при формировании производств должны, прежде всего, ориентироваться на наиболее оптимальные технические решения и приспособляться к условиям локального рынка. Это позволит образовывать мощные стимулы для торговых отношений и углублять международную научно-техническую кооперацию, с соблюдением принципов стратегического партнерства.

Математически проиллюстрируем динамику технологического развития экономики и эффект попадания экономики в ловушку отсталости. Рассмотрим случай чисто обрабатывающей экономики, находящейся на границе технологического роста в момент времени  $t$ . Тогда  $\sigma_{M,t} = I$ ,  $A_t = \bar{A}_t$  и уравнение на потенциал развития имеет вид:

$$H_t = (\delta_H + (1 - \delta_H)C(1))H_{t-1}.$$

Тогда эволюция технологического прогресса имеет вид:

$$A_{t+1} = \min \{ \bar{A}_{t+1}, A_{t+1}^* \},$$

$$A_{t+1}^* = \delta_A A_t + inn(1)A_t H_t.$$

Страна сохранит технологическое лидерство, если

$$\delta_A + inn(1)H_t \geq (1 + g).$$

Следствием этого неравенства является тот факт, что потенциал развития  $H$  и уровень образования  $C$  должны оставаться достаточно высокими на протяжении всей эволюции системы.

Пусть уровень образования является постоянным и равным единице, то есть  $C = \text{const} = 1$ , а экономика технологическим лидером не является. Потенциал развития подчинен уравнению [3]

$$H_t = (\delta_H + (1 - \delta_H)C)H_{t-1} = H_{t-1} = H.$$

Технологический уровень имеет динамику

$$a_{t+1} = \min \left\{ 1, \frac{\delta_A a_t + \max \{ inn(a_t) a_t, im(a_t) \} H}{1 + g} \right\}.$$

Можно видеть, что при определенных (малых) значениях  $H$  экономика никогда не достигнет технологической границы. При больших же значениях  $H$  экономика быстро выйдет на мировой технологический уровень. Проиллюстрируем это на конкретном примере. Пусть  $g = 0.001$ ,  $\delta_A = 0.5$ ,  $\delta_H = 0.5$ ,  $im(a) = 0.7(1 - a^2)$ ,  $inn(a) = 0.9 \cdot a^2$ ,  $C(a_t) = 1$ . Рассмотрим уровни  $H = 1$  и  $H = 0.6$ .

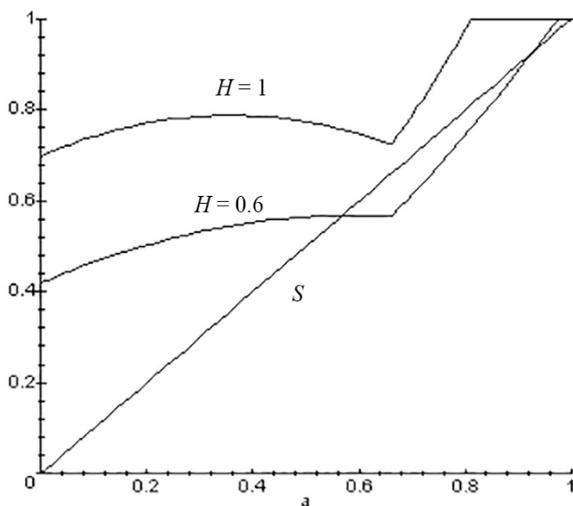


Рис 1. Ловушка отсталости при малых значениях  $H$  (зависимость  $a+1$  от  $at$ )

Верхний график соответствует уровню  $H = 1$ , а нижний – уровню  $H = 0.6$ . Можно видеть, что для случая  $H = 0.6$  существует стационарный уровень  $a$  в точке  $S$ , не равный единице. Это означает, что в перспективе уровень отсталости страны стабилизируется и не будет сокращаться [4].

Неторгуемая продукция не предполагает расходов сырья или торгуемой продукции, т.е. включает в себя только услуги, для которых необходима рабочая сила. Все это дает возможность определить последствия «голландской болезни» (рис. 2).

Причем современное национально-инновационное устройство предполагает рассмотрение, разработку и реализацию сложных, последовательных и взаимосвязанных систем госрегулирования, которые, в свою очередь, направлены на развитие и формирование национальных инновационных систем. Помимо этого, они концентрируются на инвестицион-



Рис. 2. Последствия «голландской болезни»

ном, трудовом и научно-технологическом аспекте производства, внедрения и реализации инновационной конкурентоспособной продукции для стимулирования стабильного роста экономики [5].

Будущий рост возможен только за счет объемных инвестиций, как в образование новых производств, так и в модернизацию ныне действующих, не говоря уже о человеческом капитале. Нужно постоянно стимулировать системные видоизменения в экономике, формировать условия для появления новых секторов и найти современные источники экономического роста. На сегодняшний день необходимо содействовать процессу диверсификации и технологического обновления.

Обусловливающими приоритетами политики государства должны стать:

- инвестиционные вложения в человеческий капитал;
- совершенствование образовательной и научной сфер;
- формирование национальных инновационных систем;
- общая модернизация экономики страны;
- создание конкурентоспособных секторов в высокотехнологических сферах.

Рост экономики, а также увеличение результативности общественного производства не могут выступать средством для разрешения всех социальных задач. Например, в России большинство проблем, связанных с наращиванием экспорта ресурсов и сокращением стоимости сырья, становятся весьма актуальными. В связи с этим следует находить иные пути для дальнейшего развития, в том числе и для обеспечения социального прогресса.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-06-00446а).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лоскутова М. В., Лоскутова Е. С. Генезис трансформации государственной политики экономического роста в постсоветской России // Соц.-экон. явления и процессы. 2012. № 11 (045). С. 152–159.
2. Дерунова Е. А. Рыночно-государственная модель управления инновационным развитием АПК // Инновационный Вестник Регион. 2012. № 3. С. 58–63.
3. Young A. Growth without Scale Effects // J. of Polit. Econ. 1998. № 106 (1). P. 41–63.
4. Derunova E., Semenov A. Study of the Problematic Issues of the Raw Material Orientation of the Economy: The Dutch Disease and its Influence on Innovative Development // World Applied Sciences Journal. 2013. № 25 (9). P. 1295–1301.
5. Семенов А. С., Дерунова Е. А. Методические подходы к развитию сырьевого сектора экономики России // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Экономика. Управление. Право. 2014. Т. 14, вып. 2, ч. 2. С. 379–386.

# **МУЛЬТИМЕТОДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ С ЛИБЕРАЛЬНЫМИ ЭВРИСТИКАМИ**

**А. А. Хабиров**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия*

E-mail: anvarufa@mail.ru

В данной работе рассматривается задача линейного раскроя. Описываются сферы, где она возникает, представляется общая постановка задачи, описываются однопроходные и либеральные эвристики, которые можно использовать при её решении. Предлагается метод решения с помощью мультиметодного алгоритма, использующего либеральные эвристики.

## **MULTIMETHOD ALGORITHM FOR SOLVING LINEAR CUTTING WITH A LIBERAL HEURISTICS**

**A. A. Khabirov**

In this paper, we consider the problem of linear cutting. The article describes the spheres where this problem occurs, introduces a general formulation of the problem, describes single-pass and liberal heuristics that can be used for solving it. The paper offers a method of solution using multimethod algorithm that uses liberal heuristics.

Задача линейного раскроя возникает на многих производственных предприятиях. Промышленное применение задачи линейного раскроя для предприятий с массовым выпуском продукции необходимо, когда основной материал производится в стержнях, а затем режется на более мелкие части. Кроме того, имеет место проблема составления расписания, когда необходимо как можно плотнее нагрузить определённый станок работой, в то же время обеспечивая необходимые технические перерывы и соблюдая прочие технологические ограничения, обусловленные особенностями производства или ограничениями процесса, требованиями заказчиков и вопросами качества.

В общем случае имеется определенный ассортимент линейных заготовок, подлежащих раскрою из линейного ресурса, заданного набором стержней одинаковой длины, с наименьшим расходом стержней.

В зависимости от входных данных применяются онлайн- и офлайн-эвристики. Офлайн-эвристики применяются в случае, когда заранее известно количество заготовок и, возможно, стержней. Часто в этой ситуации заготовки сортируются по убыванию, а стержни – по возрастанию. Онлайн же версия используется, когда детали поступают последовательно или порциями, и их нужно размещать «на ходу».

Известно небольшое количество основных технологий моделирования алгоритмов решения задач одномерного раскроя: блочная, уровневая, мультиметодная и некоторые другие [1]. Данная статья посвящена разработке мультиметодного алгоритма для решения поставленных задач.

Принцип работы мультиметодных алгоритмов состоит в последовательном применении простых однопроходных эвристик, каждая из которых добавляет к частично построенному решению одну заготовку. Большинство известных метаэвристических алгоритмов и простых эвристик использует стратегию жадности [2].

Однако анализ оптимальных решений задач линейного раскроя показал, что в ряде случаев оптимальное решение не может быть получено лишь применением жадных эвристик, так как на некоторых шагах нужно делать ухудшение частично полученного решения. Это обусловило возникновение идеи о внедрении в состав мультиметодных алгоритмов либеральных эвристик, позволяющих осуществлять так называемые ухудшающие шаги.

В настоящей работе для решения задачи одномерного раскроя предлагается мультиметодный алгоритм, включающий либеральные эвристики.

*Постановка задачи и её математическая модель.* Дано:  $N$  – количество стержней;  $F_i, i = \overline{1, N}$  – размеры свободной части стержней;  $M$  – количество размещаемых заготовок;  $S_j, j = \overline{1, N}$  – размеры заготовок.

Найти рациональное размещение  $R = \{R_k\}, k = \overline{1, l}$ , где  $R_k = (i_k j_k)$  – координаты заготовки  $S_{j_k}$  в стержне  $F_{i_k}$ ,  $F_i^*$  – деловой остаток стержня  $i$ , то есть остаток, пригодный для дальнейшего использования; деловые отходы воспринимаются как ресурс нестандартного размера;  $l$  – количество стержней, использованных для размещения заготовок.

Задача линейного раскроя может рассматриваться в двух вариантах:

$$1. \sum_{i=1}^N F_i < \sum_{j=1}^M S_j \text{ (дефицит стержней).}$$

В этом случае требуется найти такое  $R$ , что  $\sum_{k=1}^l S_{j_k} \rightarrow \max$ .

$$2. \sum_{i=1}^N F_i \gg \sum_{j=1}^M S_j \text{ (достаточная ёмкость стержней).}$$

Требуется найти такое  $R$ , что:

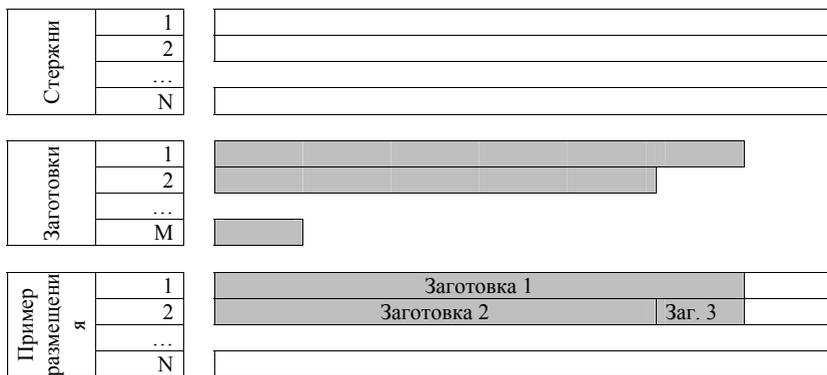
$$- \sum_{i=1}^N (F_i - F_i^*) \rightarrow \min,$$

$$- l \rightarrow \min,$$

$$- \sum_{k=1}^l S_{jk} = \sum_{j=1}^M S_j \text{ (все заготовки размещены).}$$

Оба варианта задачи относятся к классу NP-трудных, то есть для решения подобных задач не существует точных алгоритмов полиномиальной сложности, поэтому в случае большой размерности задач применяются эвристические и метаэвристические алгоритмы. Случай 2 задачи – двухкритериальный, критерии не противоречивые: минимизация количества использованных стержней влечет за собой минимизацию неиспользованных остатков стержней. Таким образом, для решения задачи должны использоваться эвристические алгоритмы.

*Мультиметодный алгоритм с либеральными эвристиками.* На каждом шаге алгоритма к частичной упаковке добавляется одна заготовка. Выбор и расположение заготовки в частичной упаковке определяются в соответствии с эвристикой, работающей на данном шаге. Эвристика на каждом шаге выбирается случайным образом (рисунок).



Исходные данные и решение задачи одномерного раскроя

В состав разработанного мультиметодного алгоритма входят следующие эвристики.

### Однопроходные эвристики

*Следующий подходящий.* На очередном шаге текущая заготовка, если есть место, помещается в текущий стержень. В противном случае

заготовка размещается в следующий стержень, и к предыдущему уже не возвращаются.

*Первый подходящий.* Эта эвристика похожа на предыдущую, но имеет важное отличие: на очередном шаге идёт проверка всех стержней, начиная с первого, и если в одном из них есть место, то текущая заготовка помещается в него. Таким образом, возможно уменьшение количества использованных стержней, но при этом на выполнение процедуры требуется больше времени. Существует модификация, где заготовки предварительно сортируются по невозрастанию размеров, а стержни – по неубыванию.

*Наилучший подходящий.* На каждом шаге текущая заготовка помещается в тот стержень, при размещении в который в нём останется как можно меньше свободного места. Это особо жадный алгоритм, который в зависимости от входных данных может иметь существенный минус – после завершения его работы остаётся множество мелких остатков.

*Случайный подходящий.* На каждом шаге случайно выбранная заготовка помещается в случайно выбранный стержень, если позволяет остаточная ёмкость последнего. В противном случае случайным образом выбирается другой стержень.

*Минимизация рисков.* Алгоритм полезен при дефиците стержней в случаях, когда для очередной заготовки (обычно крупной, «неудобной») доступно несколько возможных мест размещения, но размещение заготовки в некоторые стержни сделает невозможной размещение туда других заготовок, которые могли бы поместиться там.

### **Либеральные эвристики**

*Худший подходящий.* Противоположность «Наилучшего подходящего»: на каждом шаге заготовка помещается в тот стержень, в котором после размещения останется как можно больше места.

*Максимизация рисков.* Алгоритм действует противоположно «минимизации рисков»: очередная заготовка помещается в стержень, являющийся единственным возможным местом размещения для другой заготовки.

*Первый подходящий с обратной сортировкой.* В отличие от первого подходящего с сортировкой, этот алгоритм сортирует заготовки по неубыванию размеров.

Можно повысить эффективность работы мультиметодного алгоритма, рассчитав вероятности использования для каждой из входящих в состав эвристик. Величина вероятности должна быть прямо пропорциональной эффективности эвристик.

Несмотря на простоту описанных эвристик, мультиметодный алгоритм позволяет получить рациональные решения с помощью комбинирования этих эвристик. В литературе описаны результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность мультиметодных алгоритмов с либеральными эвристиками.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валиахметова Ю. И.* Мультиметодная технология моделирования ортогональной упаковки и размещения прямоугольно-ориентированных заготовок: дис. ... канд. техн. наук. Уфа, 2008. 176 с.

2. *Валиахметова Ю. И., Филиппова А. С.* Теория оптимального использования ресурсов Л. В. Канторовича в работах Уфимской научной школы // Омский науч. вестн. Сер. Приборы, машины и технологии. 2013. № 1 (117). С. 39–42.

### **МНОГОУРОВНЕВОЕ РЕГРЕССИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА НА РЫНКЕ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ г. УФА**

**А. А. Халикова, И. А. Лакман**

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия*

E-mail: \_energy.ru@mail.ru, lackmania@mail.ru

В статье представлены результаты анализа спроса на рынке трудовых ресурсов г. Уфа со стороны работодателей в разрезах категорий профессий с учетом его межгрупповой вариации по видам экономической деятельности. При разработке соответствующих моделей применялся специализированный эконометрический инструментарий – иерархическое регрессионное моделирование, позволяющее учитывать многоуровневую структуру изучаемого показателя. На основании полученных при этом результатов были сформулированы рекомендации для основных участников городского рынка труда. И сделанные при этом выводы были учтены при разработке Стратегии развития города Уфа.

### **MULTILEVEL MODELING OF UFA'S LABOR DEMAND**

**A. A. Khalikova, I. A. Lackman**

The paper presents the results of econometric modeling of labor demand of Ufa's employers in the context of integrated groups of professions in view of the inter-group variation of economic activities. Special econometric tool was used during the research, which is called hierarchical modeling. This method allows considering labor demand's multilevel structure. On the basis of modeling results, some recommendations for the main labor market participants were given. And the results of hierarchical analysis was used by city government while creating Ufa's Development Strategy.

При исследовании различных социально-экономических процессов зачастую приходится иметь дело с данными, имеющими иерархическую структуру. В рамках одного явления отдельные предметы исследования могут быть классифицированы или объединены в группы, которые сами

по себе обладают качествами, влияющими на весь процесс в целом и на его составные элементы. В этом случае отдельные объекты могут рассматриваться в качестве первого уровня исследования, а группы, в которые они объединены, – в качестве второго уровня. Моделирование подобных процессов возможно с применением современного подхода к учету их многоуровневой структуры – иерархических (многоуровневых, вложенных) регрессионных моделей, которые могут распространяться как на линейные, так и на нелинейные зависимости. И применение данного инструментария позволит повысить качество и адекватность проводимого исследования, а также изучить отношения между исследуемыми единицами на любом уровне, при этом не игнорируя изменчивости, связанной с каждым уровнем иерархии [1–4].

Стоит отметить, что оценивание иерархических регрессионных моделей проводится при помощи симуляционного метода максимального правдоподобия. При этом выделяют три класса подобных моделей, математическое описание которых (в виде систем уравнений и обобщенных Mixed-Effects моделей) представлено в таблице [5].

**Классы многоуровневых регрессионных моделей**

Класс	Система уравнений	Mixed-Effects модель
Unconstrained	$Y_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij}$ $\beta_{0j} = u_{0j}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + u_{0j} + r_{ij}$
Random intercepts	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$ $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j} + r_{ij}$
Random intercepts and slopes	$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + r_{ij}$ $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j}$ $\beta_{1j} = \gamma_{10}$	$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}X_{ij} + \gamma_{01}Z_j + u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + r_{ij}$

Класс Unconstrained представляет собой иерархическую регрессию с включением вариации только по свободному члену. В этой модели предполагается, что зависимая переменная  $Y_{ij}$  является функцией общего свободного члена  $\gamma_{00}$  и двух ошибок: межгрупповой дисперсии  $u_{0j}$  и внутригрупповой дисперсии  $r_{ij}$ . И в соответствии с этой моделью оцениваются два параметра – межгрупповая дисперсия  $\sigma_u^2$  и внутригрупповая –  $\sigma_r^2$ .

В процессе анализа данных на этом этапе может встать вопрос о том, насколько значимо межгрупповая дисперсия отличается от нуля. Для ответа на этот вопрос строится модель без включения варьирования по свободному члену. После этого через дисперсионный анализ сравни-

ваются модели между собой. Если обнаруживается значимое различие между моделями, это означает, что  $\sigma_u^2$  отличается от нуля, в противном случае различие признается незначимым.

В модели второго класса уравнения системы означают следующее:

1) первое уравнение в системе моделирует зависимость переменной  $Y_{ij}$  от свободного члена  $\beta_{0j}$  – среднего в группе  $j$ , регрессора  $X_{ij}$ , входящего с некоторым коэффициентом  $\beta_{1j}$  (также определяемого принадлежностью к конкретной группе  $j$ ) в модель, плюс ошибка  $r_{ij}$  – внутригрупповая вариация;

2) второе уравнение показывает, что свободный член  $\beta_{0j}$  есть функция от некоторой константы  $\gamma_{00}$ , группового регрессора  $Z_j$ , входящего с некоторым коэффициентом  $\gamma_{01}$  и межгрупповой вариации  $u_{0j}$ ;

3) третье уравнение показывает, что коэффициент  $\beta_{1j}$  – линейный наклон регрессора  $X_{ij}$  есть константа  $\gamma_{10}$ .

Модель же третьего класса отличается от предыдущего видом последнего уравнения. Оно содержит коэффициент (наклон)  $\beta_{1j}$ , который находится в линейной зависимости между зависимой переменной  $Y_{ij}$  и предиктором  $X_{ij}$ , и варьируется от группы к группе.

В модели Random intercepts and slopes коэффициенты  $\gamma_{00}$  – общее среднее зависимой переменной по всем группам, когда все регрессоры равны 0,  $\gamma_{01}$  – общий коэффициент регрессии (наклон) между зависимой переменной и регрессором level-2,  $\gamma_{20}$  – общий коэффициент регрессии (наклон) между зависимой переменной и регрессором level-1,  $u_{2j}$  – отклонение наклона группы от общего наклона.

Стоит отметить, что при оценке адекватности применяются показатели, отличные от величин, применимых в анализе временных рядов и пространственной эконометрике. Так, в рамках иерархического регрессионного анализа применяется коэффициент детерминации ( $R^2$ ), который рассчитывается согласно специальной методике отдельно для каждого уровня, а также межклассовый коэффициент корреляции ( $ICC$ ), который показывает, какую часть от общей дисперсии можно объяснить варьированием среднего в группах.

Неоспоримо, что формирование спроса на рынке труда является одним из процессов, имеющих многоуровневую структуру. Так, одна и та же единица спроса может быть рассмотрена с позиции двух уровней – уровня вида экономической деятельности, то есть спроса на труд в конкретном секторе экономики, и уровня категорий профессий, то есть потребности на конкретные профессиональные качества. При этом же наблюдается пересечение уровней в структуре спроса, то есть возможно

рассмотрение формирования данного показателя по категориям профессий отдельно в каждой отрасли (и наоборот) с применением иерархического регрессионного анализа [6–8].

В настоящее время на городском уровне исследование и прогнозирование спроса на трудовую силу производится в рамках разрабатываемой Стратегии развития г. Уфа до 2030 г. В данной работе описаны основные результаты построения аналитических моделей рынка труда в разрезе категорий профессий с учетом его межгрупповой вариации по ВЭД, которые были учтены при разработке данной стратегии.

При проведении исследования в качестве исходных данных были использованы первичные данные за 2009–2014 гг. о количестве вакантных мест и средней заработной плате по городу, предоставленные Центром занятости населения г. Уфа. При этом данные за каждый год представлены в виде двумерной выборки – матрицы, каждый элемент которой ( $x_{ij}$ ) отражает величину спроса (зарботной платы) на  $i$ -ю профессию (КП) в  $j$ -м секторе экономики. Стоит отметить, что для дальнейшего моделирования первичные данные были модифицированы с помощью процедур верификации и валидации, в результате которых были сформированы соответствующие показатели по 10 укрупненным группам профессий (КП) и 15 ВЭД за каждый период рассматриваемого временного интервала.

В дальнейшем был проведен многоуровневый анализ спроса на труд на основе иерархических регрессионных моделей в разрезах «КП (1-й уровень) – ВЭД (2-й уровень)». Причем было построено несколько моделей различных классов иерархического анализа для каждого периода: класса Unconstrained с вариацией только на константу и Random intercept с включением заработной платы в качестве предиктора. Стоит отметить, что данные модели были построены с применением специализированного прикладного пакета *HLM* (Hierarchical Linear Modeling).

Далее среди двух моделей, построенных для каждого года рассматриваемого интервала времени, согласно методике многоуровневого регрессионного анализа были выбраны наилучшие из них. Так, для 2009 и 2012 гг. модели класса Random Intercept были признаны наилучшими, что указывает на высокую значимость межгруппового влияния заработной платы на величину спроса на труд.

На завершающем этапе исследования, основываясь на полученных ранее результатах, были сформулированы рекомендации для основных участников городского рынка труда, выполнение которых поможет повысить эффективность их дальнейшего функционирования.

1. *Органы государственной законодательной и исполнительной власти*, основные функции которых связаны с обеспечением развития и контроля рынка труда г. Уфа.

В процессе многоуровневого анализа было выявлена значимость вариации спроса на работников определенных категории профессий по видам экономической деятельности, а также положительное влияние величины средней заработной платы, которая была также рассмотрена в разрезах «КП – ОКВЭД». Таким образом, при принятии мер по повышению либо понижению величины спроса на конкретную специализацию (в зависимости от преследуемых целей) необходимо учитывать, в каком именно секторе экономики и в каком объеме будут задействованы работники данной категории профессии. Причем одним из инструментов, регулирующим потоки рабочей силы на городском рынке труда, может служить заработная плата, устанавливаемая для конкретных групп профессий в конкретных ВЭД.

2. *Работодатели, заявляющие потребность на рабочую силу.*

Так как в результате проведенного анализа величина заработной платы была признана предиктором спроса на труд на различных уровнях, то ее регуляция со стороны самих работодателей может служить для них инструментом рационализации использования предлагаемой рабочей силы. Так, установление работодателем высокой заработной платы по каждой из необходимых им профессиональных групп дает им возможность требовать от будущих работников высокой квалификации, что, в свою очередь, повысит эффективность деятельности соответствующей организации с меньшим количеством привлеченных работников.

3. *Работники и специалисты, ищущие работу.*

В связи с диверсификацией рынка труда, наличие которой было подтверждено в процессе многоуровневого регрессионного анализа, для будущих работников важным является повышение уровня их квалификационной подготовки. А в связи с наличием прямой связи между уровнями заработной платы и спроса на труд категории квалифицированных рабочих они могут рассчитывать на повышение спроса на соответствующие группы профессий, а, следовательно, и на увеличение предлагаемой работодателями заработной платы.

Итак, рекомендации для участников рынка труда г. Уфа, сформулированные на основе результатов проведенного исследования, могут повысить рациональность их дальнейших действий. Однако стоит учитывать, что рынок труда является системой конкурентных связей между его

участниками, и поэтому для эффективности функционирования рынка в общем необходим системный подход к решению некоторых проблем, предполагающих задействование всех участников рынка.

Таким образом, примененный при анализе спроса на рынке трудовых ресурсов г. Уфа инструмент иерархического регрессионного моделирования позволил рассмотреть изучаемый показатель на различных уровнях – укрупненных категорий профессий и видов экономической деятельности. При этом одним из важнейших выводов, сделанных в результате работы, было признание значимости межгрупповой вариации спроса на труд на всех уровнях. Это еще раз доказывает тот факт, что при изучении спроса на трудовую силу необходимо учитывать его многоуровневый характер и рассматривать спрос на максимально возможных уровнях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халикова А. А., Гуляева А. В.* Обзор моделей рынка труда // Математические методы и модели в исследовании современных проблем экономики и общества: сб. материалов Всерос. молодеж. науч.-практ. конф. (14–15 ноября 2014 г.). Уфа: Аэтерна, 2014. С. 49–58.
2. *Халикова А. А., Гуляева А. В.* Анализ и прогнозирование спроса на рынке трудовых ресурсов г. Уфы в разрезах ОКВЭД и категорий профессий // Математические методы и модели в исследовании государственных и корпоративных финансов и финансовых рынков: сб. материалов Всерос. молодеж. науч.-практ. конф. Уфа: Аэтерна, 2015. С. 93–100.
3. *Халикова А. А.* Theoretical and empirical prerequisites of Ufa's labor market modeling // Молодые исследователи и наука: реальность и перспективы: сб. науч. тр. по материалам IV Всерос. науч.-практ. конф. студентов и молодых ученых с международным участием (24–25 апреля 2015 г.). Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. С. 57–59.
4. *Саяпова А. Р., Гусельникова Е. А., Лакман И. А., Шамуратов Н. М.* Математические методы прогнозирования экономических показателей. Уфа, 2000. 128 с.
5. *Ратникова Т. А.* Анализ панельных данных и данных о длительности состояний: учеб. пособие. М.: Изд. дом ВШЭ, 2014. С. 178–191.
6. *David G.* Hierarchical linear modeling: guide and applications. Thousand Oaks, Calif.: Sage, 2013. 371 p.
7. *Luke D. A.* Multilevel modeling. Sage University Paper Series on Quantitative Applications in Social Sciences. Newbury Park: Sage, 2004. P. 7–143.
8. *Snijders T. A. B., Bosker R. J.* Multilevel Analysis: an Introduction to Basic and Advanced Multilevel Modeling. 2nd ed. L.: Sage, 2011. P. 12–76.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА БУТСТРАПА В ОЦЕНКЕ СТРАХОВЫХ РЕЗЕРВОВ

А. Г. Хорошавцева, Ю. Н. МIRONKINA

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: annahorosh93@gmail.com, YMironkina@hse.ru

На сегодняшний день страхование является одной из наиболее динамично развивающихся отраслей экономики, целью которой является защита имущественных интересов физических и юридических лиц при наступлении определенных событий, носящих рискованный, непредвиденный характер, за счет страховых резервов – денежных фондов, формируемых из уплачиваемых ими страховых взносов. Вероятностный характер страховых случаев, а также неопределенность момента их наступления и размера ущерба приводят к необходимости формирования страховых резервов. Резервы произошедших, но не заявленных убытков (РПНУ) представляют наибольшую сложность с точки зрения актуарных расчетов. Целью данной работы является расчет страховых резервов произошедших, но не заявленных убытков различными методами на примере реального портфеля договоров российской страховой компании. В работе сравниваются точечные методы расчета РПНУ, такие как метод цепной лестницы (пошагового восхождения), метод Борнхуеттера–Фергюсона и мультипликативные методы с интервальным методом Бутстрап, кроме того, с помощью *run-off* анализа проверяется предположение о том, что использование Бутстрапа повышает точность оценки.

## BOOTSTRAPPING IN LOSS RESERVING

A. G. Khoroshavtseva, Yu. N. Mironkina

Nowadays insurance market is one of the most rapidly developing sectors of economy, the purpose of which is to protect the property interests of individuals and legal entities under ensuing of specific events (insured accidents) at the expense of monetary funds formed from insurance dues (insurance premiums) paid by them. Probabilistic nature of insured accidents as well as the uncertainty of the moment of their occurrence and the severity of losses leads to the necessity of forming loss reserves. Reserves for incurred but not reported claims (hereinafter referred to as IBNR reserves) seem to be the most challenging in terms of actuarial calculations. The following article provides the descriptions of various actuarial techniques of loss reserving and examples of their application to a real insurance portfolio. In this paper the point estimating methods such as Chain Ladder, Bornhuetter–Fergusson, multiplicative techniques are compared with the stochastic method of Bootstrap and the most accurate estimate is determined using run-off analysis.

Основной идеей всех методов формирования страховых резервов является прогнозирование будущих выплат на основе информации о предыдущих периодах.

Все методы расчета страховых резервов реализуются с использованием так называемых треугольников развития (табл. 1). Треугольник развития представляет собой таблицу, где исходные данные о выплатах

страховой компании сгруппированы по периоду возникновения убытка и периоду его оплаты (урегулирования).

Таблица 1

**Общий вид типичного треугольника развития выплат страховой компании**

Период наступления убытков, $i$	Период оплаты убытков, $j$						Совокупные платежи по $i$ -му году
	1	2	3	...	$N-1$	$N$	
1	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	...	$C_{1,N-1}$	$C_{1,N}$	$C_{1\infty}$
2	$C_{21}$	$C_{22}$	$C_{23}$	...	$C_{2,N-1}$	?	$C_{2\infty}$
3	$C_{31}$	$C_{32}$	$C_{33}$	...	?	?	$C_{3\infty}$
...	...	...	...	?	?	?	...
$N-1$	$C_{N-1,1}$	$C_{N-1,2}$	?	?	?	?	$C_{N-1,\infty}$
$N$	$C_{N,1}$	?	?	?	?	?	$C_{N\infty}$

Примечание.  $C_{ij}$  – совокупный размер платежей к концу периода  $j$  по страховым случаям, произошедшим в периоде  $i$ . На одной диагонали располагаются платежи, которые были сделаны в один и тот же финансовый год [1].

Наиболее распространенный известный метод цепной лестницы основывается на предположении об отсутствии экстремальных факторов, например, инфляции, изменения в составе портфеля, изменения законодательства и т.д., что позволяет предположить, что столбцы в треугольнике убытков пропорциональны. Таким образом, для расчета ожидаемой величины накопленных платежей по страховым случаям для  $i$ -го периода можно использовать алгоритм:

$$\hat{E}[C_{iN} | C_{ij}] = C_{ij} \cdot \hat{f}_j \cdot \dots \cdot \hat{f}_{N-1},$$

где  $\hat{f}_i$  – коэффициент развития, не зависящий от года наступления убытка [2].

Из методики расчетов видно, что данный метод отличается чрезмерной чувствительностью даже к незначительным изменениям наблюдений, вследствие чего очень неустойчив. Тем не менее метод цепной лестницы и ее модификации широко используется в страховых компаниях.

Метод Борнхуеттера–Фергюсона, законодательно принятый в России, в отличие от метода цепной лестницы, основывается не только на информации треугольника развития, но и на сведениях о заработанной страховой премии. Основное различие между данным методом и рассмотренным выше состоит в том, что суть метода цепной лестницы – прогнози-

рование итоговой величины убытка, в то время как метод Борхуеттера–Фергюсона нацелен на оценку доли неоплаченных убытков в суммарной величине [3]. Соответственно резерв представляет собой незаявленную часть неоплаченных убытков.

При расчете резервов по мультипликативному методу используется модель выплат страховой компании вида [1]

$$y_{ij} = x_i p_j \lambda_{i+j-1},$$

где  $y_{ij}$  – размеры выплат в финансовом периоде с номером  $j$  по страховым случаям, произошедшим в период с номером  $i$ ;

$x_i$  – общая стоимость страховых выплат, произошедших в периоде с номером  $i$ , выраженная в постоянных денежных единицах;

$p_j$  – доля суммы  $x_i$ , выплаченной в течение финансового года с номером  $j$ ;

$\lambda_{i+j-1}$  – мера инфляции и влияния внешних факторов на размер выплат в периоде с номером  $i + j - 1$ .

Параметр инфляции в представленном исследовании моделировался на основе данных об индексе потребительских цен [4] при помощи авторегрессии со скользящим средним ARMA в сочетании с сезонными моделями SAR и SMA [5]. Далее параметры модели итеративно оценивались методом наименьших квадратов:

$$\sum_{i,j} w_{ij} \cdot (x_i p_j \lambda_{i+j-1} - y_{ij})^2 \rightarrow \min,$$

где  $w_{ij}$  – произвольные веса, с помощью которых можно учитывать степень важности и надежности имеющихся данных.

Довольно быстро, после 6–7 итераций, получаем оценки  $x_i$  и  $p_j$ , по которым можно рассчитать оценки будущих выплат по формуле нашей модели, после чего достраивается треугольник развития и рассчитываются резервы для будущих выплат.

Достоинством метода является то, что нет необходимости располагать всей информацией треугольника развития. Если в течение года происходят какие-либо неожиданные структурные изменения, например, политика урегулирования убытков, то можно не учитывать предыдущие сведения и анализировать только последующие диагонали. Таким образом, результаты оценки являются более устойчивыми к колебаниям величин.

Представленные методы относятся к точечным, в то время как актуарная наука последнее время все чаще обращается к различным сто-

хастическим методам, которые, в отличие от точечных, позволяют вычислить не только прогноз, но и его доверительный интервал и дисперсию, а также осуществлять проверку гипотез. Одним из наиболее широко распространенных является метод интервальной оценки, известный как «бутстрап» (*bootstrap*) [6], относящийся к классу методов генерации повторной выборки. Суть этого непараметрического подхода заключается в том, чтобы из имеющейся выборки  $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  случайным образом сгенерировать выборку для бутстрапа  $\vec{X}_i^b = \{X_1^b, X_2^b, \dots, X_n^b\}$  и, повторив это действие  $N$  раз, получить распределение интересующей нас статистики  $\vec{\theta}_i^b = \{\hat{\theta}_1^b, \hat{\theta}_2^b, \dots, \hat{\theta}_N^b\}$ , рассчитанной на основе  $N$  псевдovyборок.

Стоит отметить, что бутстрап сам по себе не является моделью, это процедура, которая применяется к уже существующей модели, поэтому успешность его применения зависит от того, насколько хорошо подходит модель к имеющимся данным. Наиболее часто бутстрап применяется к модели цепной лестницы.

Алгоритм применения метода бутстрапа к оценке резерва незаявленных убытков методом цепной лестницы схематично можно изобразить следующим образом [7] (рис. 1).

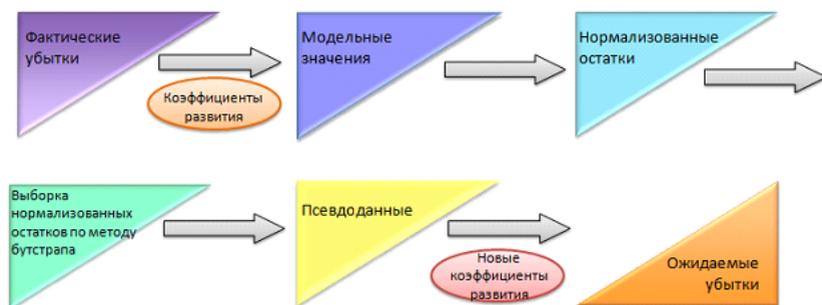


Рис. 1. Основные этапы применения метода бутстрапа

Первым шагом является расчет коэффициентов развития методом цепной лестницы. Далее рассчитываются модельные значения накопленных убытков, которые приводятся в форму приращений и вычитаются из треугольника приращений фактических убытков.

Затем нормализуем остатки и перемешиваем по методу бутстрапа. Для осуществления этого шага нами были использованы стандартные функции Microsoft Excel. Из треугольника остатков был сформирован

ряд, где каждому значению остатка соответствует случайная величина, полученная с помощью генератора случайных чисел Excel. Затем из массива случайных чисел последовательно выбирается наибольшее  $i$ -е, где  $i$  – случайная величина от 1 до 210 (количество наблюдений в исследуемом треугольнике из 20 периодов) и возвращается значение из массива остатков, соответствующее найденной случайной величине.

Псевдоданные вычисляются путем прибавления перемешанных нормализованных остатков к модельным значениям. Новый треугольник приращений приводится к накопительному виду и по нему рассчитываются новые коэффициенты развития, как на первом шаге. По правилу пропорциональности столбцов рассчитываются прогнозные значения убытков.

Как и в стандартном методе цепной лестницы, резерв рассчитывается как сумма значений достроенной нижней части треугольника развития.

Сгенерировав таким образом выборки, мы можем получить распределение интересующей величины. Для реализации этой задачи был написан макрос VBA в Excel, который выполнил описанный алгоритм 1000 раз и рассчитал необходимые параметры. Полученное распределение ожидаемых резервов представлено на рис. 2. Специфика имевшихся данных дала очень близкие результаты по всем генерациям и маленькую дисперсию полученных резервов.

Интересующее нас значение – это выборочное среднее полученных значений.

Итак, нами были рассмотрены различные методы оценивания резерва произошедших, но незаявленных убытков, сравним полученные оценки (табл. 2).

Таблица 2

**Оценки РПНУ на основе различных методов**

Метод цепной лестницы	172 366 613,51 р.
Метод Борнхуеттера–Фергюсона	58 500 487,36 р.
Мультипликативный метод без инфляции	175 287 367,50 р.
Мультипликативный метод с инфляцией	176 158 378,58 р.
Бутстрап метод	195 054 823,06 р.

Как мы видим, метод Борнхуеттера–Фергюсона дает самую низкую оценку резерва. В этом кроется опасность для страховой компании, так

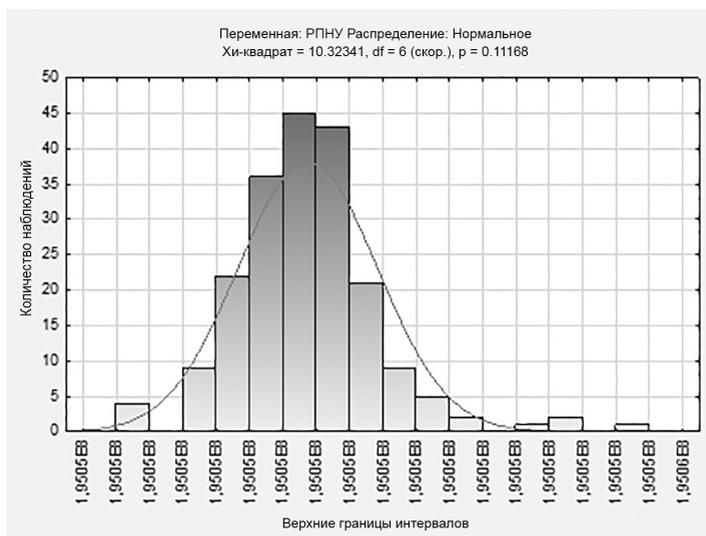


Рис. 2. Распределение ожидаемых убытков, полученное с помощью бутстрапа

как недооцененные резервы могут привести к тому, что компания будет неспособна покрыть возникшие убытки, а это может привести к серьезным финансовым потерям и даже банкротству. Поэтому очень важно исключить возможность недорезервирования. В то же время слишком большой размер резерва также не всегда является хорошим показателем, так как свидетельствует о нерациональном распределении средств.

Чтобы получить количественные оценки достоверности каждого из рассмотренных нами методов, прибегнем к *run-off* анализу. Суть его заключается в том, чтобы рассчитать резервы произошедших, но незаявленных убытков на основе половины имеющегося треугольника выбывания каждым из проверяемых методов и затем сравнить полученные оценки с фактическими выплатами, которые совершались в соответствующие периоды. Например, если исходный треугольник развития имел размерность  $20 \times 20$ , следует взять первые 10 кварталов наступления и урегулирования убытков, а все, что ниже – считать неизвестным. Мерой надежности будет выступать относительная ошибка аппроксимации для общей величины РПНУ. Результаты проведенного *run-off* анализа представлены в табл. 3

Результаты *run-off* анализа

Реальные выплаты	Цепная лестница	Мультипликат. метод без учета инфляции	Мультипликат. метод с учетом инфляции	Борнхуеттер–Фергюсон	Бутстрап
344 243 523,00	362 007 509,85	370 088 079,61	377 388 952,41	265 708 316,19	355 231 591,69
Относительная ошибка для общего резерва, %	5,16	7,51	9,63	–22,81	3,19

Наиболее точным является метод, которому соответствует наименьшая ошибка аппроксимации. Среди точечных методов наиболее точный прогноз показал метод цепной лестницы, его относительная ошибка составила 5,16%. Это говорит о том, что использование бутстрапа на основе данной модели было правомерно и должно было дать хороший результат. *Run-off* анализ подтверждает это предположение: оценка резерва с применением бутстрапа имеет наименьшее отклонение от фактических выплат – 3,19%, что свидетельствует о том, что данный метод можно считать оптимальным для наших данных.

Полученные результаты позволяют обеспечить максимальную эффективность работы страховой компании и свести к минимуму вероятность ее разорения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лемер Ж. Автомобильное страхование. Актуарные модели : пер. с англ. М. : Янус-К, 2003. 307 с.
2. Dahl P. Introduction to Reserving [Электронный ресурс]. URL: <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK4540/h13/pensum-literature/dahl2003.pdf> (дата обращения: 10.09.2015).
3. Schmidt K. D., Zocher M. The Bornhuetter–Ferguson Principle // Variance. 2008. № 4. P. 85–110.
4. Единый архив экономических и социологических данных НИУ ВШЭ [Электронный ресурс]. URL: <http://sophist.hse.ru/hse/nindex.shtml> (дата обращения: 23.09.2015).
5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М. : Мир, 1974. Вып. 1, 2.
6. Efron B Bootstrap methods : another look at the jackknife // The Annals of Statistics. 1979. № 7 (1). С. 26
7. Гарнер М. Оценка неопределенности при резервировании : введение в стохастические методы расчета резервов общего страхования // Актуарий. 2008. Вып. 1 (2). С. 20–44.

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РОЖДАЕМОСТИ В РЕСПУБЛИКЕ БУРЯТИЯ

**И. Б. Шаданова**

*Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,  
Улан-Удэ, Россия*  
E-mail: [irmishay@gmail.com](mailto:irmishay@gmail.com)

Демографическая ситуация в Бурятии характеризуется высокой рождаемостью, превышающей показатели РФ и СФО в течение ряда лет. Главной целью демографического развития Республики Бурятия является стабилизация численности населения, создание условий для дальнейшего увеличения численности населения. По прогнозам в ближайшие годы сохранится высокий уровень рождаемости благодаря реализации действенных мер, направленных на поддержку семей, имеющих детей. С целью исследования рождаемости в Республике Бурятия был проведен анализ, на основе которого разработан прогноз уровня рождаемости.

## THE STATISTICAL ANALYSIS OF BIRTH RATE IN THE REPUBLIC OF BURYATIA

**I. B. Shadanova**

The demographic situation in Buryatia is characterized by the high birth rate exceeding indicators of the Russian Federation and Siberian federal district within several years. A main goal of demographic development of the Republic of Buryatia is population stabilization, creation of conditions for further increase in population. According to forecasts in the next years the high level of birth rate thanks to realization of the effective measures directed on support of the families having children will remain. With a birth rate research objective in the Republic of Buryatia the analysis on the basis of which the forecast of level of birth rate is developed was carried out.

Основным итогом реализации демографической политики в Республике Бурятия в 2011–2014 гг. является рост численности населения республики за этот период на 7 тыс. чел., или на 0,73%. На 1 января 2015 г. Бурятия среди 85 регионов России занимает 54-е место с численностью населения 978,5 тыс. человек. Рост численности населения обусловлен двумя факторами: естественным приростом населения и снижением миграционного оттока [1–4].

Для определения места Республики Бурятия по демографической ситуации в Сибирском федеральном округе были использованы следующие показатели:

$x_1$  – общий коэффициент рождаемости населения, ‰;

$x_2$  – общий коэффициент смертности, ‰;

$x_3$  – коэффициент миграционного прироста населения, на 10000 человек населения;

$x_4$  – удельный вес лиц пенсионного возраста в общей численности населения, %;

$x_5$  – ожидаемая продолжительность жизни при рождении, лет.

В качестве исходной базы для проведения кластерного анализа были использованы статистические данные по 12 субъектам Сибирского федерального округа за 2013 г.

Для группировки был выбран метод  $k$ -средних. Мы разбили совокупность на три кластера. В первый кластер вошло 2 субъекта: Республики Алтай и Тыва. Во второй кластер вошло также 2 субъекта: Новосибирская и Томская области. В третий кластер: Республики Бурятия и Хакасия, Алтайский, Забайкальский и Красноярский края, Иркутская, Кемеровская и Омская области.

Регионы между кластерами распределились неравномерно. В третий кластер вошло 66,7% от общего количества регионов, в первый и второй по 16,65% (рисунок).

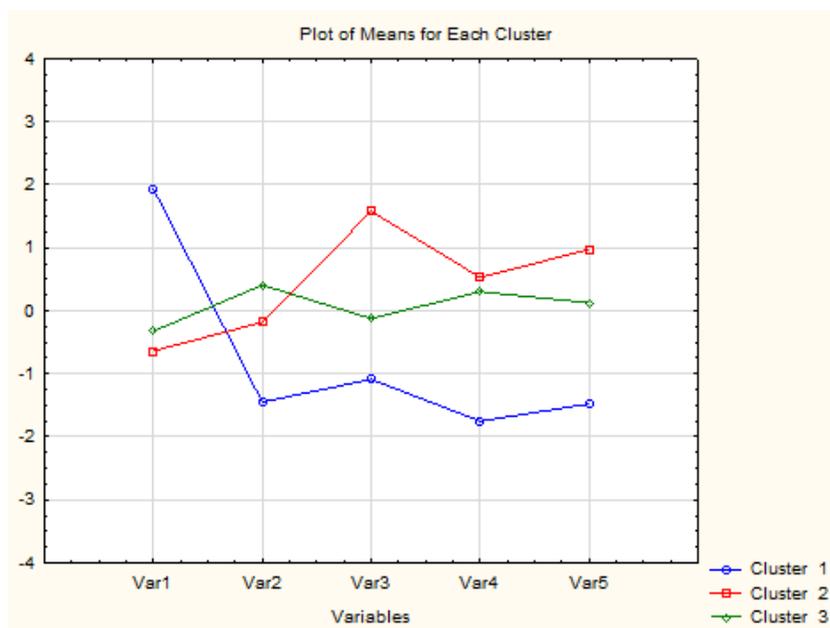


График средних значений показателей по кластерам

Распределение регионов СФО в зависимости от уровня основных показателей демографической ситуации позволил определить, что Республика Бурятия относится к наибольшей группе регионов, показатели которых находятся на среднем уровне. Для данного кластера в среднем характерны низкий уровень естественного прироста населения, миграционный отток населения и средний уровень ожидаемой продолжительности жизни.

Чтобы выявить факторы, влияющие непосредственно на уровень рождаемости, были использованы следующие показатели:

$y$  – общий коэффициент рождаемости;

демографические показатели:

$x_1$  – число браков в расчете на 1000 населения;

$x_2$  – число разводов в расчете на 1000 населения;

$x_3$  – доля городского населения в общей численности населения, %;

социальные:

$x_4$  – среднедушевые денежные доходы, руб.;

$x_5$  – уровень безработицы, %;

специальные:

$x_6$  – число аборт на 100 родов;

$x_7$  – младенческая смертность на 1000 родившихся живыми. В качестве исходной базы для проведения регрессионного анализа были использованы статистические данные по Республике Бурятия за период 1994–2013 гг.

С помощью пошагового алгоритма исключения переменных было получено следующее регрессионное уравнение общего коэффициента рождаемости.

$$\hat{y} = 34,87650,3414 \cdot x_3 + 0,00022 \cdot x_4 - 0,1699 \cdot x_7,$$

(-4,9561)                      (8,0835)                      (-3,4723)

$$R^2 = 0,9858; \quad F(3; 1_6) = 371,31.$$

Множественный коэффициент детерминации равный 0,9858 говорит о том, что набор независимых переменных объясняет 98,58% вариации зависимой переменной, остальные 1,42% объясняются причинами, не учтенными в модели.

В ходе анализа значений коэффициентов регрессии было выявлено, что на общий коэффициент рождаемости в Республике Бурятия существенное влияние оказывает доля городского населения в общей численности населения. Помимо данного показателя на уровень рождаемости также влияют среднедушевой доход и младенческая смертность. Так, при

повышении доли городского населения ( $x_{\downarrow 3}$ ) на 1%, общий коэффициент рождаемости в среднем уменьшается на 0,3414 рождений на 1000 человек. При повышении среднедушевого дохода ( $x_{\downarrow 4}$ ) на 1 руб. общий коэффициент рождаемости увеличивается на 0,00022 рождений на 1000 человек в среднем. При снижении младенческой смертности ( $x_{\downarrow 7}$ ) на 1 единицу на 1000 родившихся живыми общий коэффициент рождаемости в среднем увеличится на 0,1699 рождений на 1000 человек.

В рамках статистического исследования прогнозирование параметров изучаемого объекта является его логичным этапом завершения. Для вычисления прогнозных значений были использованы три модели:

- трендовая;
- авторегрессионная;
- регрессионная.

На основании расчетов можно сказать, что полиномиальный тренд третьей степени наилучшим образом описывает имеющийся временной ряд (количество родившихся в республике с 1994 по 2014 г.):

$$y_t = -3,292t^3 + 122,39t^2 + 952,58t + 13588,$$

$$R^2 = 0,9765,$$

$$\bar{A} = 1,9681.$$

По выбранной модели тренда были получены следующие прогноз-ные значения (табл. 1).

*Таблица 1*

**Прогноз числа родившихся на основе модели полиномиального тренда третьей степени, чел.**

Год	Нижняя граница	Точечный прогноз	Верхняя граница
2015	15970	16815	17660
2016	15524	16369	17214
2017	14869	15714	16559

Данный метод прогнозирования позволил установить что, при соблюдении существующих условий уровень рождаемости снизится с 17141 родившихся в 2014 г. до 15714 – в 2017, т.е. рождаемость снизится на 8,3%.

Однако если учесть, что по Концепции демографического развития Республики Бурятия предусмотрен ряд мер, направленных на улучшение

демографической ситуации, в том числе на повышение уровня рождаемости, то можно предположить, что уровень рождаемости не снизится, а, наоборот, увеличится. И для его прогноза предпочтительней воспользоваться другой моделью тренда.

Полиномиальный тренд второй степени также обладает высоким коэффициентом детерминации, а значит, вполне пригоден для прогнозирования (табл. 2).

$$y_t = 13,759t^2 + 25,786t + 11589,$$

$$R^2 = 0,9064,$$

$$\bar{A} = 3,7787.$$

Таблица 2

**Прогноз числа родившихся на основе модели полиномиального тренда второй степени, чел.**

Год	Нижняя граница	Точечный прогноз	Верхняя граница
2015	17184	18816	20447
2016	17809	19461	21112
2017	18460	20133	21806

По данной модели можно сказать, что уровень рождаемости увеличится до 20133 родившихся в 2017 г. по сравнению с 17141 – в 2014, т.е. увеличится на 17,5%.

Также мы спрогнозировали уровень рождаемости с помощью авторегрессионной модели. Наилучшим образом описывает ситуацию авторегрессия второго порядка:

$$\hat{y} = 411,9423 + 1,3883x_1 - 0,40697x_2,$$

$$R^2 = 0,9611.$$

По этой модели прогнозное значение на следующий период составит 17246. По данному прогнозу уровень рождаемости увеличится на 105 человек, или на 0,61%. Недостатком данной модели является прогнозирование исследуемого показателя лишь на один период времени.

На основе полученной модели регрессии был также составлен прогноз уровня рождаемости в Республике Бурятия (табл. 3).

Таблица 3

**Прогноз уровня рождаемости в Республике Бурятия, на тыс. населения**

Год	Прогнозные значения
2014	18,62
2015	19,11
2016	19,64
2017	19,84

По полученным прогнозным значениям можно сказать, что общий коэффициент рождаемости увеличится к 2017 г. до 19,84, т.е. на 12,7%, по сравнению с 2013 г.

Для выявления наилучшего прогноза мы сравнили коэффициенты детерминации в моделях (табл. 4).

Таблица 4

**Сопоставление коэффициентов детерминации в моделях**

Вид модели	Коэффициент детерминации
Полиномиальная 3-й степени	0,9765
Полиномиальная 2-й степени	0,9064
Авторегрессионная	0,9611
Регрессионная	0,9858

По данным табл. 4 видно, что наиболее точный прогноз будет наблюдаться по регрессионной модели. Однако все модели обладают достаточно высоким уровнем качества и их результаты вполне можно учитывать. Прогнозные значения будут находиться в одном диапазоне.

В постановлении Правительства Республики Бурятия от 29 декабря 2014 г. «О внесении изменений в постановление Правительства Республики Бурятия от 13.01.2011 № 5 «О Концепции демографического развития Республики Бурятия на период до 2025 года» указан ожидаемый уровень рождаемости. Сравним полученные прогнозные значения с показателями постановления (табл. 5).

По табл. 5 видно, что прогнозные значения по полиномиальной модели 2-й степени близки к значениям итоговой ожидаемой численности родившихся.

**Сопоставление полученных прогнозных значений с показателями Концепции демографического развития, чел.**

Год	Концепция демографического развития			Полученные прогнозные значения		
	Ожидаемая численность родившихся	Ожидаемый прирост рождений за счет реализации мероприятий по повышению рождаемости	Итоговая ожидаемая численность родившихся	Полином 3-й степени	Полином 2-й степени	Авторегрессия
2015	17200	1421	18621	16815	18816	17246
2016	17280	1715	18995	16369	19461	X
2017	17350	2060	19410	15714	20133	X

Подводя итоги результатов прогнозов уровня рождаемости в Республике Бурятия, можно сказать, что прогноз позволил предположить рост общего коэффициента рождаемости на 12,7% и общей численности родившихся на 17,5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Концепция демографической политики РФ на период до 2025 г.: указ Президента РФ от 9 октября 2007 г. № 1351. Официальный сайт компании «КонсультантПлюс» [Электронный ресурс]. URL: <http://base.consultant.ru/> (дата обращения: 21.09.2015).
2. Концепция демографического развития Республики Бурятия на период до 2025 года: утв. постанов. Правительства Республики Бурятия от 13.01.2011 № 5. Официальный сайт компании «КонсультантПлюс» [Электронный ресурс]. URL: <http://base.consultant.ru/> (дата обращения: 25.09.2015).
3. Официальный сайт территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Республике Бурятия [Электронный ресурс]. URL: <http://www.burstat.gks.ru> (дата обращения: 10.10.2015).
4. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения: 11.10.2015).

# OPTIMISING CONDITIONAL-VALUE-AT-RISK OF A PORTFOLIO

A. R. Chebakov

*Keele University, United Kingdom*

E-mail: r.chebakov@keele.ac.uk

One of the most important problems of financial science is portfolio selection. Asset returns cannot be precisely predicted, they are volatile, hence the risk arises in terms of variability of asset returns and the problem converts to investment decision under uncertainty. Thus, it is necessary to determine how to allocate weights of different assets of the portfolio in order to minimise risk while obtaining the specified level of return on the investment [1].

Mean-risk models are very widespread in the area of portfolio selection. Within these models, the expected value and the value of the risk measure are two statistics which are used in order to compare return distributions. Although mean-risk models are easy in a computational sense, such approaches can be questionable as describing a distribution using only two parameters does not take a large amount of information into account.

Risk measures are connected with left “bad”, tails of distributions, which represent most adverse outcomes, for regulatory and reporting purposes. The most popular measure of risk for left tails is Value-at-Risk (VaR). However, VaR has a list of undesirable properties, e.g. it does not account for outliers. Therefore, another measure of the risk in “left tails” is becoming more and more widely used, the so-called Conditional Value-at-Risk (CVaR). Unlike VaR, CVaR has attractive theoretical properties and compensates some shortcomings of the VaR metric.

Variance and CVaR consider risk from different points of view. Variance of a random variable is the mean of the square deviation of that variable from its mean. Variance shows the spread around the expected value of a random variable, while CVaR shows the expected loss of a number of worst scenarios, depending on the chosen confidence level. Therefore, the Mean-Variance and the Mean-CVaR models may give very different solutions. For instance, Mean-Variance model may give a resulting portfolio with a large CVaR, that is leading to big losses under undesirable scenarios and hence it may be rejected by a regulator. Similarly, a portfolio obtained as a solution of Mean-CVaR model may be rejected by traditional fund managers since it may have an unacceptably large variance and a very small Sharpe index [2].

In this work, the focus is on the model that incorporates both variance and CVaR in order to make investment decisions. It is called the Mean-Variance-CVaRmodel [3]. In this model, random variables are described and compared using three characteristics: the expected value, variance and CVaR.

The model works in such a way that it is impossible to improve on any of three statistics (expected value, variance and CVaR) without making another statistic worse. In mathematical sense, this problem is multi-objective, that is, it involves maximisation of expected return, minimisation of variance and minimisation of CVaR and the efficient solutions of the Mean-Variance-CVaR model are the Pareto optimal solutions of the multi-objective problem [3].

It was proved that efficient solutions of the Mean-Variance-CVaR model can be derived by solving a single objective optimisation problem where variance is minimised subject to expected return and CVaR level, i. e. they are constrained. This approach is important for financial practice. For instance, if the CVaR of a Mean-Variance efficient portfolio is too large and unacceptable, it is possible to impose constraint on the CVaR level and obtain a new portfolio having minimised variance under certain conditions. Moreover, if the random variables in the problem are discrete and are given for different scenarios, the problem is of quadratic programming. In general, the Mean-Variance and Mean-CVaR efficient portfolios are efficient solutions of the Mean-Variance-CVaR model as well. But most of the Mean-Variance-CVaR efficient portfolios are dominated in both Mean-Variance and Mean-CVaR models despite that they might represent better distributions, a compromise between the classical fund manager's and regulator's portfolios [3].

One of the objectives of the work is to implement a Mean-Variance, Mean-CVaR and Mean-Variance-CVaR models. Then, it is necessary to build three types of portfolios, using these models, analyse their performances using a real stock price data across different selected sectors, and summarise possible benefits or drawbacks of using different models for forming a portfolio. To be more precise, it is necessary to compare and contrast effectiveness of the three different models in order to create a portfolio that would minimise risk providing better level of expected return.

The main focus of the work was on the performance comparison of different portfolios obtained by solving 3 mean-risk models. These are classical Mean-Variance model, where the variance is minimised subject to the specified level of expected return; Mean-CVaR model, where CVaR is minimised with constraint imposed on the level of expected return; and, finally, combined Mean-Variance-CVaR model, where CVaR is incorporated into the Mean-Variance model and the variance is minimised while constraints are imposed on expected return and CVaR. All the models are problems of linear or quadratic programming. Therefore, they are not difficult to implement, are fast with respect to calculation time, and are represented well in the corresponding literature.

The Mean-Variance-CVaR model is of the most interest due to the fact that it represents a compromise between the classical fund manager's portfolio, where the problem is to minimise variance of the portfolio by, for instance, diversification or picking less volatile assets, and regulator's portfolio, where the main focus is on CVaR minimisation, i. e. improving left tail of return distributions, regardless of the issues mentioned above. In the first case, the portfolio may have a very large CVaR, that is an adverse feature due to the fact that it will not account for potential extreme losses beyond the VaR. In the second case, the portfolio may be too undiversified or have a large variance, therefore, large risk in terms of standard deviation. The Mean-Variance-CVaR portfolio may be considered as an intermediate choice, a balance between the two mentioned "extremes". In this model, variance is chosen to be minimised. The reason for this is that it is more convenient to constrain expected value and CVaR rather than variance in terms of logical understanding and calculations. As a result, a quadratic programming problem should be obtained.

Thus, the most important intermediate step of the work was the implementation of the Mean- Variance-CVaR model. It was done using AMPL Studio software, the auxiliary calculations and data inputs/outputs were carried out in Microsoft Excel. The dataset was drawn from the FTSE All Share indices. Prices of the assets included in the different FTSE All Share indices (different across sectors) were taken initially. The data was retrieved from DataStream terminal, then it was filtered by the country (the United Kingdom) and was grouped by the 3 selected sectors: the "consumer services", the "financials" and the "industrials". Asset returns were derived from asset prices using "logarithm method" proposed by JP Morgan.

Thereafter, the 3 types of portfolio were constructed: Mean-Variance efficient, Mean-CVaR efficient, and Mean-Variance-CVaR efficient (but dominated in both Mean-Variance and Mean-CVaR models) portfolios. It was possible to make a comparative analysis due to the fact that all the 3 portfolios are Mean-Variance-CVaR efficient. These 3 types of portfolio were built for each of the 4 specified levels of expected return and for the 3 selected sectors. In total,  $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$  portfolios were formed.

The in-sample and out-of-sample performances were compared and contrasted on the real historical stock price data across the specified sectors, and the results were analysed and interpreted. Possible benefits and drawbacks of using models that incorporate CVaR in terms of optimisation, in comparison to classical Mean-Variance model, were analysed and discussed.

The in-sample analysis clearly showed the advantage of the Mean-CVaR and the Mean- Variance-CVaR portfolios for different levels of expected return

in each of the selected sectors. The Mean-Variance efficient portfolios were outperformed almost for every given level of expected return and across all the 3 chosen sectors. It can be the evidence of the effectiveness of CVaR application in the optimisation models.

Analysing the out-of-sample results, the performance advantages of the Mean-CVaR portfolios were not as significant as for the in-sample. Probably it happened due to relatively small out-of- sample dataset or to disturbances in the economy of the UK in the period that was included in the out-of-sample data. However, the Mean-Variance-CVaR portfolios confirmed their “status” of being a compromise in balancing between two extremes, that is, low variance and large CVaR or, vice versa, low level of CVaR and high level of variance. In general, the Mean- Variance-CVaR portfolios were neutral and, hence “moderate” or they outperformed the other portfolios within the selected comparison blocks. Thus, it proves that using CVaR in optimisation models (especially, it concerns the Mean-Variance-CVaR model) can be, in many cases, advantageous as compared to using Mean-Variance model.

Summarising the thoughts, it can be said that the models that use CVaR optimisation, and the Mean-Variance-CVaR “compromise” model especially, do not completely outperform or “cancel” the basic Mean-Variance model. However, the CVaR optimisation models may be used as complementary to the classical model in the investment decisions and portfolio selection problems. The final decision will depend on an investor’s risk appetite, knowledge and beliefs. However, the results of this investigation have proved the existence of apparent advantages of application of CVaR in optimisation models.

#### REFERENCES

1. *Luenberger D. G.* Investment Science. N.Y.: Oxford University Press, 1998.
2. *Roman D., Mitra G.* Portfolio Selection Models: A Review and New Directions // *Wilmott Journal*. 2009. № 1 (2). P. 69–75.
3. *Roman D., Darby-Dowman K., Mitra G.* Mean-Risk Models Using Two Risk Measures: A Multi-Objective Approach // *Quantitative Finance*. 2007. № 74. P. 443–458.

# GREEDY ALGORITHMS FOR INDEX TRACKING PROBLEM AND THEIR COMPARATIVE ANALYSIS

A. R. Faizliev, S. P. Sidorov, A. A. Homchenko

*Saratov State University, Russia*

E-mail: faizlievar1983@mail.ru, sidorovsp@info.sgu.ru, aahomchenko@gmail.com

This paper examines two methods for choosing an investment portfolios with returns that replicate as close as possible the return of an index, with the constraint on the number of assets in the portfolio. We describe two algorithms (greedy  $l_1$ -norm minimization and greedy  $l_2$ -norm minimization algorithms) and conduct a comparative empirical analysis.

## 1 Introduction

For any  $q > 0$  and  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , let  $x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2$  s.t.  $x^T 1_n = 1$ ,  $\|x\|_0 \leq K$ , and  $\|x\|_0 = \lim_{q \rightarrow 0^+} \|x\|_q$  (the number of non-zero elements of  $x$ ). If  $q \geq 1$  then  $\|x\|_q$  denotes  $l_q$ -norm of  $x \in \mathbb{R}^n$ . Let  $n$  be the number of investable assets. Denote  $r_{it}$  the return of asset  $i$  at time  $t$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq t \leq m$ ,  $R = (r_{it})_{t=1, i=1}^{m, n}$ . A portfolio is defined to be a vector of weights,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Let  $I_t$  be the index return at time  $t$ ,  $1 \leq t \leq m$ , and  $I = (I_1, \dots, I_m)^T \in \mathbb{R}^m$ . We do not allow the portfolio changes over time and do not take into account transaction costs. We will assume that

1. short selling is allowed, i.e. weights  $x_i$  can be negative;
2. one unit of capital is available, i.e.  $x^T 1_n = 1$ , where  $1_n$  denotes the vector from  $\mathbb{R}^n$  in which every component is equal to 1.

In the traditional index tracking optimization, the objective is to find a portfolio which has minimal tracking error variance, the sum of squared deviations between portfolio returns and market index returns [1]:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad x^T 1_n = 1. \quad (1)$$

It should be noted that the standard Markovitz model is a special case of index tracking portfolio model (1) (see, for example [2, 3]). Since the problem (1) is the problem of convex optimization, it can be easily solved by Lagrange method.

Instead of squared deviations, the absolute error is also presented in research and is used in practice [4–6]:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_1 \quad \text{s.t.} \quad x^T 1_n = 1. \quad (2)$$

The problem (2) can be rewritten as a linear programming problem.

In this paper we will examine two greedy algorithm for solving the problems (1) and (2) with the cardinality constraint:

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_2^2 \quad s.t. \quad x^T \mathbf{1}_n = 1, \|x_0\| \leq K, \quad (3)$$

$$x^* = \arg \min \frac{1}{m} \|I - Rx\|_1 \quad s.t. \quad x^T \mathbf{1}_n = 1, \|x_0\| \leq K, \quad (4)$$

where  $K$  is the limit on the number of assets in the portfolio with non-zero weights. It is supposed that  $K$  is substantially smaller than  $n$ .

For solution of the problems (3) and (4), in this paper we propose to use greedy algorithms. In section 2 we describe two algorithms (greedy  $l_1$  – norm minimization and greedy  $l_2$  – norm minimization algorithms) for solving the problems (3) and (4) respectively. The second of the greedy algorithms is the adaptation of ideas [2] to the  $l_1$ -minimization. In section 3, using a technique for comparative analysis, exploited in [7], we compare the performance of two different portfolios obtained by the two algorithms for index tracking problem (4). Empirical tests show The values of  $t$ -statistics show that the difference between the algorithms is not significant for almost all data sets both in terms of return and with respect to volatility.

## **2 Algorithms for Minimization of Index Tracking Error with the Cardinality Constraint**

Index tracking problem with cardinality constraint is NP-hard problem and it usually requires the development of heuristic algorithms such as genetic algorithms and differential evolution algorithm [4, 8–11]. These algorithms, though providing a sufficiently accurate solution of the problem, are associated with significant time costs connected with algorithm operation. Good reviews can be found in [8, 12, 13]. Greedy algorithms also proved their effectiveness [2, 14]. On the other hand, greedy algorithms does not necessarily yield an optimal solution.

### *2.1 Greedy algorithm for $l_2$ -norm minimization with regularization*

Let  $N = \{1, \dots, n\}$  be the index set of investable assets. Problem (3) is the special case (with  $\tau = 0$ ) of the following problem

$$x^* = \arg \min_x \|I - Rx\|_2^2 + \tau \|x\|_2^2 \quad s.t. \quad x^T \mathbf{1}_n = 1, \|x_0\| \leq K, \quad (5)$$

where  $\tau$  is a positive parameter. The regularization term  $\tau\|x\|_2^2$  allows to use the least squares estimator even in the case of multicollinearity in the matrix  $R$  [2]. The model with  $\tau = 0$  was examined in [15, 16]. The greedy algorithm for solving the problem (5) in  $l_2$ -norm was studied in [2]. The algorithm at each step adds to our portfolio the asset that is the closest to the index. The process continues until we reach the cardinality  $K$ .

Let  $M_k \subset N$  be the set of indices corresponding to  $k$  non-zero elements of  $x$ . Let  $\tilde{R}_{M_k}$  be a submatrix of  $R$  with dimension  $(m \times |M_k|)$ . Then the problem (5) with  $x_i = 0$  for  $i \in N \setminus M_k$  can be rewritten as

$$\tilde{x}^* = \arg \min_{\tilde{x}} \|I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}\|_2^2 + \tau \|\tilde{x}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{x}^T \mathbf{1}_{|M_k|} = 1, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}. \quad (6)$$

Denote  $f^\tau(M_k) := \|I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}^*\|_2^2 + \tau \|\tilde{x}^*\|_2^2$ . The optimal solution of the problem (6) can be obtained by Lagrange method:

$$\tilde{x}_{M_k}^* = (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} + \tau E_k)^{-1} (\tilde{R}_{M_k}^T I - \lambda e_k), \quad (7)$$

where  $E_k$  is the  $(k \times k)$ -identity matrix and  $\lambda = \frac{1_k^T (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} + \tau E_k)^{-1} \tilde{R}_{M_k}^T I - 1}{1_k^T (\tilde{R}_{M_k}^T \tilde{R}_{M_k} + \tau E_k)^{-1} 1_k}$ .

### Algorithm 1: Greedy Algorithm in $l_2$

begin

Let  $M_0 = \emptyset$  and  $k = 1$ . Set  $f^\tau(M_0)$  to be sufficiently large.

While  $k \leq K$  do

$\forall s \in N \setminus M_{k-1}$  calculate  $\tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s\}}^\tau$  using (7).

Select  $s^* = \arg \min_{s \in N \setminus M_{k-1}} f^\tau(M_{k-1} \cup \{s\})$  and set  $\tilde{x}_{M_k}^\tau = \tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s^*\}}^\tau$ .

Set  $M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$  and  $k = k + 1$ .

Set  $x_G^\tau = \tilde{x}_{M_K}^\tau$  and  $M_G^\tau = M_K$ .

Return  $x_G^\tau$  and  $M_G^\tau$ .

end

### 2.2 Greedy algorithm for $l_1$ -norm minimization

Greedy algorithms have been intensively studied since the 80s of the last century, and their main credit consists in obtaining constructive methods for finding the best  $m$ -term approximations. The main contribution to the development of greedy algorithms was made by J. Friedman, V. Stuzl, S. Mallat, J. Zhang, P. Huber, L. Jones, A. Barron, R. DeVore, V. N. Temlyakov, S. V. Konyagin and others.

Greedy algorithms showed an excellent performance in solution of practical problems of machine learning. This paper will show the use of such techniques in solving the problem of index replication. This problem reduces to the construction of "individual approximation" for a given function (in this case, index) of a certain class.

Let  $M_k \subset N = \{1, \dots, n\}$  be the set of indices corresponding to  $k$  non-zero elements of  $x$ . Let  $\tilde{R}_{M_k}$  be a submatrix of  $R$  with dimension  $(m \times |M_k|)$ . Then the problem (4) can be rewritten as:

$$\tilde{x}^* = \arg \min_{\tilde{x}} \|I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}\|_1 \quad s.t. \quad \tilde{x}^T \mathbf{1}_{|M_k|} = 1, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^{|M_k|}. \quad (8)$$

Denote  $h(M_k) = \|I - \tilde{R}_{M_k} \tilde{x}^*\|_1$ . The optimal solution of the problem (8) can be obtained by solving the linear programming problem

$$\tilde{x}_{M_k}^* = \arg \min_{o, u, \tilde{x}} (o + u) \quad s.t. \quad \tilde{x}^T \mathbf{1}_k = 1, \quad \tilde{R}_{M_k}^T \tilde{x} = I + o - u, \quad o, u \geq 0. \quad (9)$$

Using the ideas of [2] we propose the following algorithm for finding weights of assets in the index tracking problem in  $l_1$  with cardinality constraint (problem (4)). The basic idea of the algorithm is that at each step we add to our portfolio the asset that is the closest to the index. The process continues until we reach the cardinality  $K$ .

**Algorithm 2: Greedy Algorithm in  $l_1$**

begin

Let  $M_0 = \emptyset$  and  $k = 1$ . Set  $h(M_0)$  to be sufficiently large.

While  $k \leq K$  do

$\forall s \in N \setminus M_{k-1}$  calculate  $\tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s\}}^T$  using (9).

    Select  $s^* = \arg \min h(M_{k-1} \cup \{s\})$  and set  $\tilde{x}_{M_k}^T = \tilde{x}_{M_{k-1} \cup \{s^*\}}^T$ .

    Set  $M_k = M_{k-1} \cup \{s^*\}$  and  $k = k + 1$ .

Set  $x_G^T = \tilde{x}_{M_K}^T$  and  $M_G^T = M_K$ .

Return  $x_G^T$  and  $M_G^T$ .

end

### 3 Empirical Results

#### 3.1 Data description

In our empirical analysis we use publicly available data relating to five major market indices, that can be obtained from the OR-Library [8, 17]. The five market indices are the Hang Seng (Hong Kong,  $n = 31$ ), DAX 100 (Germany,  $n = 85$ ), FTSE 100 (UK,  $n = 89$ ), S&P 100 (USA,  $n = 98$ ) and

the Nikkei 225 (Japan,  $n = 225$ ) for  $m = 290$  time periods each (weekly data), taken from [8]. The summary statistics of the daily log-returns of the indices shows that the return time series exhibit the typical patterns of financial times series: mean values around zero, light asymmetry and fat tails. The data used in this paper is given in the form of matrices of asset prices. We transformed the original data sets into matrices of asset returns. It is widely accepted to use of the price ratio in order to derive the rate of returns, instead of using absolute asset price relations.

### 3.2 Comparative Analysis of Greedy $l_1$ and Greedy $l_2$ Algorithms

To compare the two approaches described in section 2 to the index tracking problem, we use a moving time window procedure described in [7]. We determine the optimal tracking portfolio by using a window of 100 observations (weeks) and held unchanged for the subsequent 10 out-of-sample trading weeks for testing. Then, the (in-sample) window is moved forward by 10 weeks and the new optimal tracking portfolio is determined using a window of 100 observations and again held unchanged for the next 10 out-of-sample weeks, and so forth. Thus, tracking portfolios are revised once every ten weeks.

Tables 1,2 present empirical results for the in-sample and out-of-sample tracking error volatility, excess return and correlation for DAX 100 and FTSE 100 data sets (with  $K$  equals to 5 and 20) of both the  $l_1$ -norm greedy algorithm (abbreviated  $G - l_1$ ) and the  $l_2$ -norm greedy algorithm (abbreviated  $G - l_2$ ). A statistically significant difference with confidence level 10% (5%, 1%) between the two approaches is shown by \* (\*\*, \*\*\*) for the  $t$ -statistic of the difference between the two approaches  $t_{\text{diff}}$ . The *corr*-rows present the values of the correlation coefficient between the returns of the tracking portfolio and the index. We set maximum number of assets  $K$  of the cardinality constraint in the greedy algorithm equal 5 and 20.

Tables 1, 2 shows that the Greedy  $l_1$  and the Greedy  $l_2$  algorithms gives very similar results. In this paper we present results only for DAX 100, FTSE 100 data sets for brevity. Similar results hold for the remaining data sets.

Table 3 show that the values of skewness, kurtosis and Value at Risk at the 95% level for the Greedy  $l_1$  and the Greedy  $l_2$  algorithms are very similar.

The values of  $t$ -statistics show that the difference between the algorithms is not significant for almost all data sets both in terms of return and with respect to volatility. The two greedy algorithms give the similar results with respect to the correlation with the benchmark (index) and with respect to  $\text{VaR}_{95\%}$ . However, it should be noted that the greedy algorithm in 11 has a

bigger correlation with the benchmark for cardinality  $K = 20$ . For all data sets there is the presence of heavy tails (kurtosis is greater than 3), and the presence of small asymmetries for both algorithms.

Table 1

**Results for DAX 100 data set**

Parameter	In-sample		Out-of-sample		In-sample		Out-of-sample	
	$G - l_2$	$G - l_1$	$G - l_2$	$G - l_1$	$G - l_2$	$G - l_1$	$G - l_2$	$G - l_1$
weekly volatility, %, $K = 5$								
mean	1,75	1,55	0,89	0,84	1,38	1,09	0,69	0,55
std	0,69	0,56	0,53	0,58	0,74	0,48	0,65	0,62
$t_{diff}$	1,37		0,38		1,95**		0,92	
excess return, %, $K = 5$								
mean	-0,12	-0,15	-0,15	-0,02	-0,21	-0,08	-0,03	-0,05
std	0,51	0,44	0,24	0,23	0,40	0,33	0,18	0,14
$t_{diff}$	0,58		0,70		0,68		0,97	
corr	0,57	0,68	0,90	0,89	0,67	0,81	0,91	0,94

Table 2

**Results for FTSE 100 data set**

Parameter	In-sample		Out-of-sample		In-sample		Out-of-sample	
	$G - l_2$	$G - l_1$	$G - l_2$	$G - l_1$	$G - l_2$	$G - l_1$	$G - l_2$	$G - l_1$
weekly volatility, %, $K = 5$								
mean	1,30	1,19	0,99	1,02	0,73	0,61	0,55	0,53
std	0,41	0,44	0,31	0,30	0,23	0,15	0,14	0,14
$t_{diff}$	1,05		0,36		2,51***		0,80	
excess return, %, $K = 5$								
mean	-0,10	-0,06	-0,03	-0,04	0,06	0,00	0,00	0,02
std	0,33	0,38	0,24	0,21	0,20	0,19	0,09	0,11
$t_{diff}$	0,60		0,71		0,87		0,71	
corr	0,70	0,76	0,79	0,80	0,88	0,91	0,93	0,93

It should be noted that, despite the fact that we do not impose any constraint on the positivity of asset weights  $x_i$ , the greedy algorithms give solutions with short sales only for the cardinality  $K = 20$  (i.e., in the case of

sufficiently high cardinality). In general, portfolios obtained by the greedy algorithms are substantially similar with respect to the selection of assets, namely, the intersection of the sets of assets selected by the first and second algorithms, were significant.

Table 3

**The values of skewness, kurtosis and Value at Risk at the 95% level for the Greedy  $l_1$  and Greedy  $l_2$  algorithms.**

DAX 100 data set				
Parameter	Greedy $l_2$	Greedy $l_1$	Greedy $l_2$	Greedy $l_1$
	$K = 5$		$K = 20$	
distribution of returns (out-of-sample)				
Skew	-0,04	-0,01	-0,31	-0,31
Kurt	3,88	3,45	3,64	3,54
VaR <sub>95</sub>	0,96	0,97	0,96	0,96
FTSE 100 data set				
distribution of returns (out-of-sample)				
Skew	-0,11	-0,01	-0,20	-0,20
Kurt	3,72	3,89	3,55	3,72
VaR <sub>95</sub>	0,97	0,97	0,97	0,97

## 4 Conclusions

This paper examines two methods for choosing portfolios with returns that replicate as close as possible the return of an index, with the constraint on the number of assets in the portfolio. In general, the greedy algorithms show similar results for many statistical indicators in all data sets both for cardinality  $K = 5$  and  $K = 20$ . The proof of convergence and estimates on the rate of convergence of greedy algorithms can be found in the paper [18].

*This work was supported by the Russian Fund for Basic Research, Grant № 14-01-00140.*

## REFERENCES

1. Roll R. A Mean/Variance Analysis of Tracking Error // J. of Portfolio Management. 1992. № 18. P. 13–22.
2. Takeda A., Niranjana M., ya Gotoh J., Kawahara Y. Simultaneous pursuit of out-of-sample performance and sparsity in index tracking portfolios // Computational Management Science. 2013. Vol. 10, iss. 1. P. 21-49.

3. *Brodie J., Daubechies I., De Mol C., Giannone D., Loris I.* Sparse and stable Markowitz portfolios // Proc. of the National Academy of Sciences of the USA. 2009. № 106. P. 12267–12272.
4. *Gilli M., Kellezi E.* Financial Engineering, E-Commerce, and Supply Chain. Dordrecht : Kluwer Academic, 2002.
5. *Prigent J. L.* Portfolio Optimization and Performance Analysis. London : Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007.
6. *Rudolf M., Wolter H. J., Zimmermann H. A.* linear model for tracking error minimization // J. of Banking & Finance. 1999. № 23. P. 85–103.
7. *Fastrich B., Paterlini S., Winker P.* Cardinality versus  $q$ -norm constraints for index tracking // Quantitative Finance. 2014. № 14. P. 2019–2032.
8. *Beasley J., Meade N., Chang T. J.* An evolutionary heuristic for the index tracking problem // European Journal of Operational Research. 2003. № 148. P. 621–643.
9. *Derigs U., Nickel N. H.* Meta-heuristic based decision support for portfolio optimization with a case study on tracking error minimization in passive portfolio management // OR Spectrum. 2003. № 25. P. 345–378.
10. *Maringer D., Oyewumi O.* Index tracking with constrained portfolios // Intell. Syst. Account., Finance Mgmt. 2007. № 15. P. 57–71.
11. *Gilli M., Winker P.* Handbook of Computational Econometrics. London : Wiley, Chichester, 2009.
12. *Maringer D.* Portfolio Management with Heuristic Optimization (Advances in Computational Management Science). New York : Springer-Verlag New York, Inc., 2006.
13. *Canagkuz N., Beasley J.* Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation // European Journal of Operational Research. 2008. № 196. P. 384–399.
14. *Das A., Kempe D.* Submodular meets Spectral: Greedy Algorithms for Subset Selection, Sparse Approximation and Dictionary Selection // Proc. of the 28th Intern. Conf. on Machine Learning. New York : ACM, 2011. P. 1057–1064.
15. *Chang T., Meade N., Beasley J., Sharaiha Y.* Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers and Operations Research. 2000. № 27. P. 1271–1302.
16. *Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J. E.* Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // European Journal of Operational Research. 2011. № 213. P. 538–550.
17. *Beasley J. E.* OR-Library : distributing test problems by electronic mail // J. of the operational research society. 1990. № 7. P. 1069–1072.
18. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, № 2. P. 269–296.

# MODELLING PROFESSIONAL CHOICE THROUGH OPENNESS TO DIVERSITY

E. O. Mavrina

*Nizhny Novgorod branch of Higher School of Economics, Russia*

E-mail: katyblanka1993@gmail.com

The paper sets out to research the model of professional choice dependent on diversity characteristics of a place where a person is employed. The diversity comprises two categorical variables revealing people's attitude towards homosexuals and towards immigrants respectively. The data used are supported by the European Values Study for 2008–2009 across 45 European countries. The countries were purposely divided into postsocialist and proeuropean subgroups. The research brought about that the squewness towards the creative class vocations is quite straightforward for more open to diversity people for both types of countries. Moreover, the hypothesis of a town size effect was also confirmed, thus megacities are the most desirable and promising destinations for the creative class. The analysis of factors other than openness to diversity showed that creative class appreciates development prospects at work, while for those valuing taking initiatives, work/life balance, good salary, contacts with people the creative vocations seem to be less frequent career choices.

## Introduction

One of the distinguishable characteristics of human capital is its high geographic mobility which is expressed in the distribution of professional groups in space. For instance, some places favour creativity, innovations, freedom of expression which most likely will put conservative professionals off. However, it might be a desirable destination for the creative class, the term introduced by R. Florida. Such a class includes professionals in a number of creative areas which demand high level of human capital, ability to take initiatives and make judgement. These comprise IT-specialists, architects, sociologists, librarians, coaches, designers, engineers, people employed in the fields of science, media, art and culture, sports, entertainment, education, healthcare, management, finance and law [1]. Therefore, professional concentration in one region and not the other might be determined by some specific characteristics of a place.

According to R. Florida, there are three factors explaining concentration of the creative class which are: scientific and research potential of a place (assessed through the availability of universities and technological clusters), cultural and social amenities offered by a place, openness to diversity (measured as tolerance towards minorities). The latter acts as a precursor to the innovative development of a region. Due to the lack of barriers to entry for creative individuals, they are able to quickly settle into the culture [2]. Thus, it turns out, that specific qualities, or “territorial assets” of a place, determine which kind of professionals will be attracted to it [3].

This paper sets out to shed light on the relation between a professional choice and openness to diversity which is represented by two components: attitude towards homosexuals and a subjective vision of immigrants' influence on the cultural heritage.

### Data description

The data used in the research were supported by the European Values Study [4]. As the vast majority of the data are categorical and taking into account the absence of overlap in the countries surveyed in 2008 and 2009, it was decided to combine the data for these consecutive years. Furthermore, it was assumed to distinguish two types of countries within the sample, namely postsocialist and proeuropean countries in order to account for the overall differences in the tolerance rates across the nations. For instance, the first group comprises the countries with the mean value for the degree of tolerance towards sexual minorities of 2.3, whereas for the second group the value amounts to 5.8 out of 10. The postsocialist group includes former Soviet Union countries, along with the countries-satellites that used to form a so-called "Soviet Empire" and some of the transitional countries (see Table 1).

Table 1

Distribution of countries into two types

Postsocialist	Proeuropean
Albania, Armenia, Azerbaijan, Belarus, Bulgaria, Bosnia & Herzegovina, Croatia, Czech Republic, Estonia, Georgia, Hungary, Kosovo, Latvia, Lithuania, Macedonia, Moldova, Montenegro, Poland, Romania, Russian Federation, Serbia, Slovak Republic, Turkey, Ukraine	Austria, Belgium, Cyprus, Denmark, Finland, France, Germany, Great Britain, Greece, Iceland, Ireland, Italy, Luxembourg, Malta, Netherlands, Norway, Portugal, Slovenia, Spain, Sweden, Switzerland

In order to test the hypothesis that postsocial countries have to be estimated separately from proeuropean ones, an LR-test was run which supported the relevance of the idea.

### Multinomial model of a professional choice<sup>1</sup>

A multinomial model was elaborated in order to estimate the influence of openness to diversity compounded of two variables on a professional choice. The explanatory variables include as follows:

<sup>1</sup>A total of 19 240 observations for proeuropean and 22 240 for postsocialist countries were estimated in multinomial regressions.

1) tolerance towards homosexuals measured as the answer to the question “Do you justify homosexuality?” at 1–10 scale (1 – the most negative and 10 – the most positive reaction)

2) tolerance towards immigrants measured as the agreement with the statement “Immigrants undermine country’s cultural life” at 1–10 scale (1 – the strongest agreement, 10 – the highest extent of disagreement)

3) town size measured according to the number of inhabitants at 1–8 scale (1 – under 2 000, 8 – 500 000 and more)

4) 6 binary variables with Yes/No answers to the questions:

- “Is it important in a job: learning new skills?”
- “Is it important in a job: family-friendly?”
- “Is it important in a job: good pay?”
- “Is it important in a job: job security?”
- “Is it important in a job: use initiative?”
- “Is it important in a job: meeting people?”

The variable which stands for a professional choice is a modification of one of the EVS variables containing the list of 37 occupations. It was transformed, so that close professions were grouped. Thus, 8 categories were created (see Table 2).

*Table 2*

**Subgroups within the variable “professional choice”**

Job group	Frequency	Percentage, %
Corporate and general managers	4,017	8.14
Professionals, science and teaching professionals, associate professionals	14,660	29.69
Clerks, office clerks, custom service clerks	4,668	9.45
Service workers, shop and market sales workers	7,444	15.08
Agricultural and fishery workers	1,713	3.47
Trade workers	7,283	14.75
Plant and machine operators and assemblers	4,102	8.31
Elementary occupations	5,487	11.11
Total	49,374	100

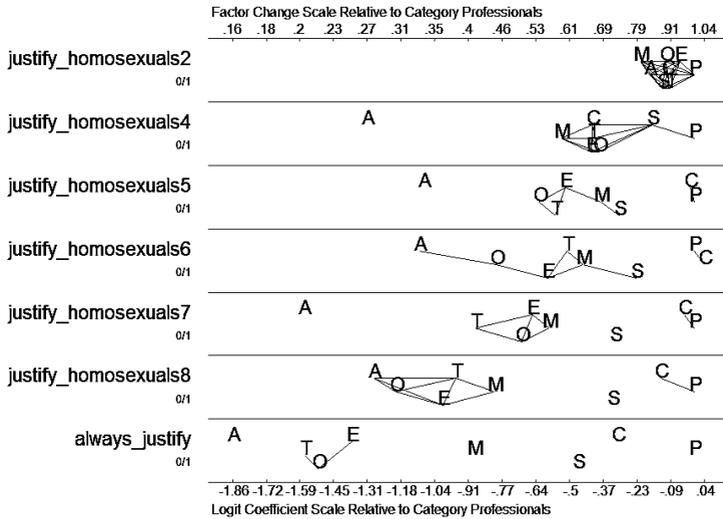
As can be noted, the most numerous category is the second one, namely professionals, scientific workers – in a word, those vocations that R. Florida defined as the creative class. It would be a reference group within the framework of a multinomial regression analysis. The validity of such a distribution within the dependent variable was checked by the Wald test for combining alternatives, which confirmed that all the alternatives were significantly different from each other. Therefore, the transformation of the variable “professional choice” is applicable for further research.

For the purposes of clearer explanation, the estimation results are presented in pic. 1–4 as the regression estimation output is cumbersome to interpret.

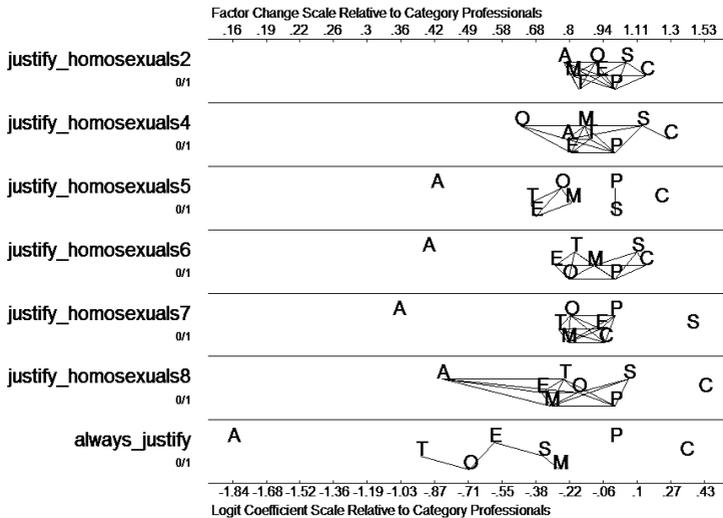
From the graphs in picture 1 it is evident that the more people tolerant are the less likely they will be employed in agricultural and fishery areas. In particular, a more remarkable hollowing-out effect for these areas with the surge in tolerance pertains to proeuropean countries (estimated betas are lower for each respective level of tolerance which are given in the bottom axis of the graphs). The lack of significant difference between the creative class and clerks is characteristic of proeuropean countries for the majority of tolerance levels. However, as far as employment in service sector is concerned, the more tolerant people are likely to gravitate towards creative class vocations. In the case of postsocialist countries, it appears that more tolerant people would opt for the work either in services or as clerks. A more significant hollowing-out effect is notable when it comes to jobs related to trade, plants, elementary work and even managers for proeuropean countries compared with the effects for postsocialist countries.

Therefore, the squewness towards creative vocations is quite straightforward in proeuropean countries. Holding all else equal, a career in science is viewed as the most desirable career choice for more tolerant towards homosexuals people.

Regarding the attitude towards immigrants, for both types of countries a choice to be part of the creative class remains stable across all the levels of tolerance towards immigrants. Moreover, the result for proeuropean countries is consistent for the creative class with the previous outcome for another kind of tolerance. That is, a reference group is strongly more preferable for more sympathetic to immigrants individuals as there are almost no lines linking letter “P” with the rest of the letters. Therefore, a strong hollowing-out effect for other professional choices is notable for proeuropean countries. When considering postsocialist countries, agricultural and fishery areas are the least likely



a) proeuropean



b) postsocialist

Pic. 1. Estimators of betas and of odds ratios in response to the changes in tolerance towards homosexuals<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Hereinafter: 1) letters stand for A – agricultural&fishery workers; C – clerks, office clerks, custom service clerks; E – elementary occupations; M – general&corporate managers; O – plant and machine operators and assemblers; P – professionals (reference group); S – service workers,

elected professions for more tolerant towards immigrants, while for proeuropean countries plant workers and elementary occupations are less frequent choices made by more tolerant to immigrants individuals.

The effect of changes in the size of a town is shown in pic. 3. As was expected, larger cities less likely attract those seeking employment in agriculture and fishery. As for the rest of the vocations, there is no clear pattern. Specifically, there is a dissemination of job alternatives around the reference group. Anyway, the alternatives are more distinguishable for postsocialist countries.

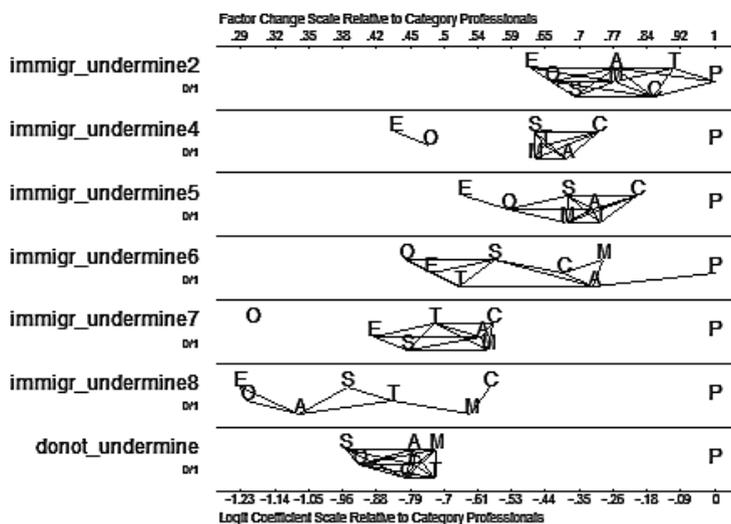
When turning to the factors other than openness to diversity, both groups of countries present similar outcomes (see pic. 4). Necessity for acquiring new skills is more likely valued by those referred to as creative jobs, whereas if one appreciates taking initiatives he is more likely to choose a managerial position for both types of countries. As for such features of a job as compatibility with family life, high level of a salary, job security, meeting people at work, these demonstrate that creative occupations are amongst the least attractive professional choices. If one looks for regular contacts with people at work, he is more likely to be employed in the service sector.

## Conclusion

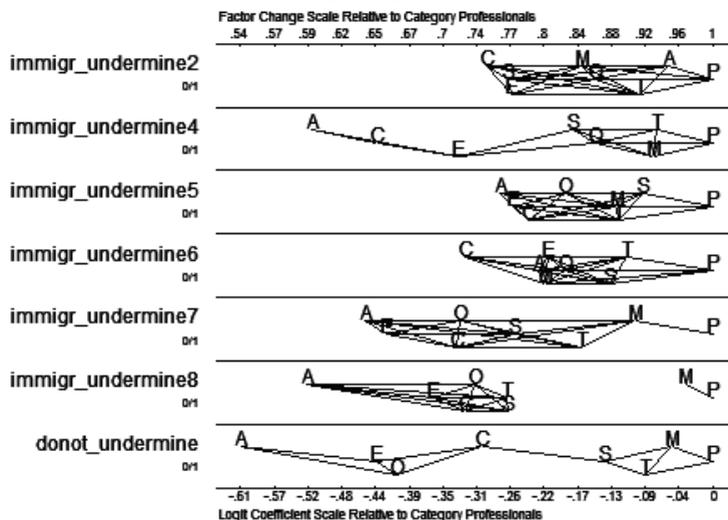
This paper is devoted to the issue of a professional choice and its relation with the degree of openness to diversity of a particular place. The research of multinomial model with professional choice as a dependent variable brought about that there is a hollowing out effect for agricultural, fishery, plants, elementary and even trade workers in places characterized by a higher degree of tolerance towards homosexuals for both postsocialist and proeuropean countries with a more significant effect for the latter. Therefore, holding all else equal, a career in science is viewed as the most desirable career choice for more tolerant towards homosexuals people. Furthermore, in the case of proeuropean countries more open to immigrants individuals will hardly be employed in a factory or perform elementary tasks, whereas for postsocialist nations these less popular areas would be agriculture and fishery. All in all, the squewness towards creative vocations is quite straightforward for more open to diversity people. The confirmation of a town size effect was also revealed, thus megacities are the most desirable and promising destinations for the creative class. The analysis of factors other than openness to diversity showed that creative class appreciates skills development prospects at work, while for

---

shop and market sales workers; T – trade workers; 2) The lines linking letters mark the absence of significant difference between the groups.

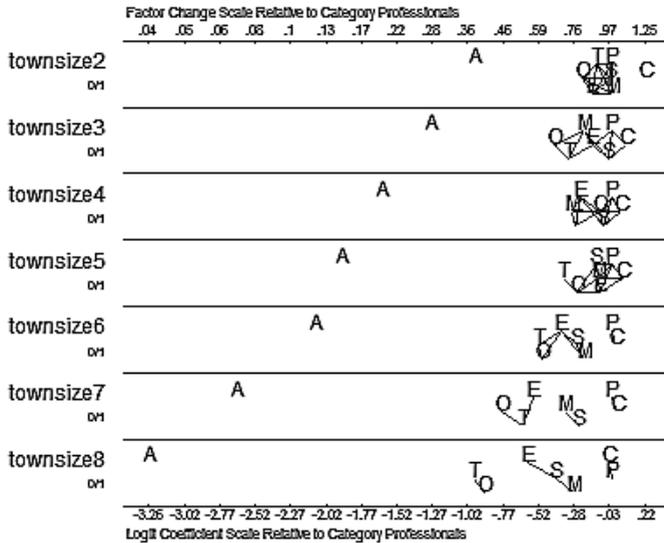


a) proeuropean

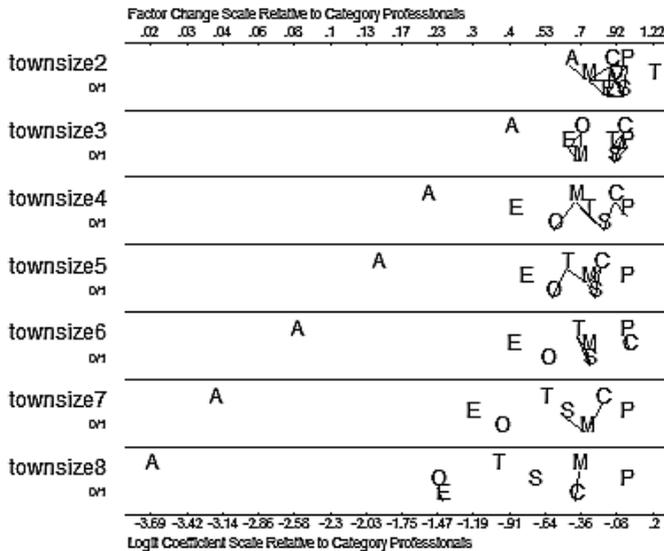


b) postsocialist

Pic. 2. Estimators of betas and of odds ratios in response to the changes in tolerance towards immigrants

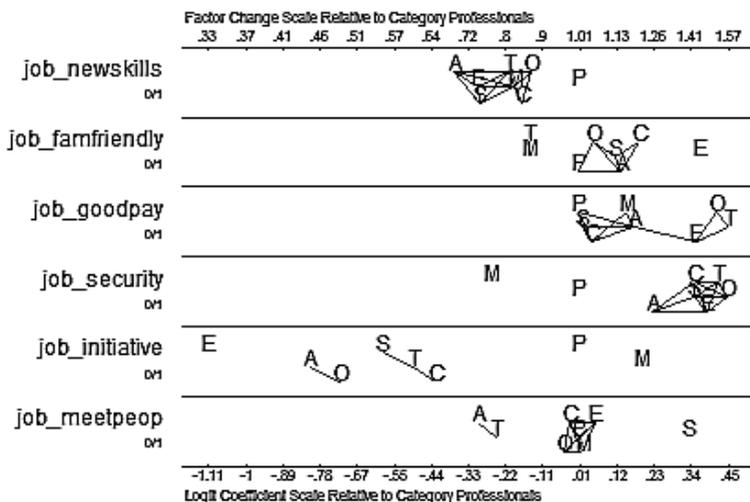


a) proeuropean

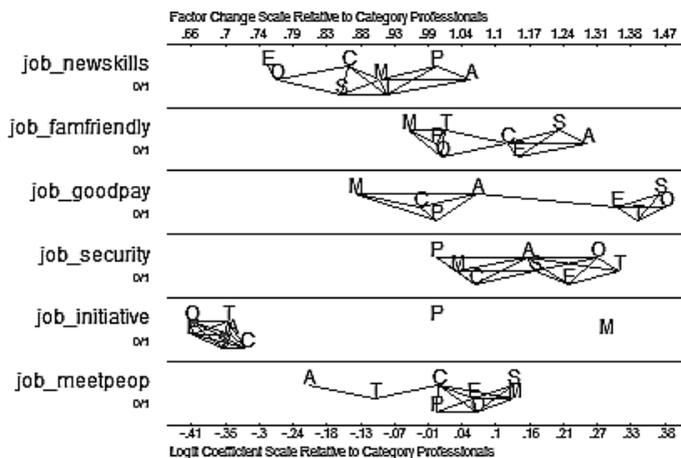


b) postsocialist

Pic. 3. Estimators of betas and of odds ratios in response to the changes in town size



a) proEuropean



b) postsocialist

Pic. 4. Estimators of betas and of odds ratios in response to the changes in features of a working place

those valuing taking initiatives, work/life balance, good salary, contacts with people the creative vocations seem to be less frequent career choices.

#### REFERENCES

1. Florida R., Mellander C., Stolarick K. Inside the black box of regional development—human capital, the creative class and tolerance // *J. Econ. Geogr.* 2008. Vol. 8, № 5. P. 615–649.
2. Lee S. Y., Florida R., Gates G. Innovation, human capital, and creativity // *Intern. Rev. Public Adm.* 2010. Vol. 14. № 3. P. 13–24.
3. Florida R. Bohemia and economic geography // *J. Econ. Geogr.* 2002. № 2. P. 55–71.
4. EVS. European Values Study Longitudinal Data File 1981–2008 (EVS 1981–2008) [Electronic resource]. URL: <http://www.gesis.org/> (date of access: 17.09.15).

## INDIFFERENCE CURVE ANALYSIS OF STOCHASTIC MODELS FOR PORTFOLIO OPTIMIZATION UNDER THE FRAMEWORK OF EXPECTED UTILITY THEORY

S. P. Sidorov, A. A. Khomchenko, V. A. Barabash

*Saratov State University, Russia*

E-mail: [sidorovsp@yahoo.com](mailto:sidorovsp@yahoo.com)

This paper examines the problem of choosing the optimal portfolio for an investor which maximizes the expected value of a power utility function under conditions on the stochastic behavior both of the portfolio price and the discount factor.

### 1. Introduction

One of the classic problems of the portfolio investment theory is the following one: for a given set of assets with the known prices and distribution function of returns, to find an optimal portfolio. Portfolio is a set of assets with weights, the sum of which is equal to 1 (the budget constraint).

The most popular approach to the problem of portfolio choice under risk and uncertainty is the expected utility hypothesis. For an introduction to utility theory, see [1].

Bernoulli [2] and later Von Neumann and Morgenstern [3] suggested a theory for choosing an outcome from a set of risky or uncertain outcomes by comparing the expected utility values defined on final asset position. It was later came to be known as Expected Utility Theory (EUT). It has been used as a reference model to find the optimal solution in many areas of economics.

Von Neumann and Morgenstern [3] formulated the utility in terms of a function. Let  $X$  is the set of all possible outcomes.  $x$  refers to the element of  $X$ . Let  $G = \{X, F, P\}$  is probability space over  $X$  and let  $U : X \rightarrow R$  denote a utility

function such that the value of  $U(x)$  is a measure of the decision maker's preference derived from the outcome  $x$ :

$$x \pm y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y),$$

where  $x \pm y$  means the outcome  $x$  is preferred at least as much as the outcome  $y$ . Thus, the relationship between wealth and the utility of consuming this wealth is described by a utility function,  $U(\cdot)$ . In general, each investor will have a different  $U(\cdot)$ . In expected utility theory, decision makers' attitudes towards uncertainty are wholly modeled by the value of utility functions defined on final asset positions. Let  $f_{\xi}(x)$  be the probability density function of a random variable  $\xi$ .

**Definition 1.** *The expected utility (EU) of the game  $G$  is the expected value of the utility functions of possible outcomes weighted by the corresponding probabilities:*

$$U_{EU}(G) = \int_X U(x) f_{\xi}(x) dx.$$

The expected utility hypothesis states that the individual (EU-investor) will make decisions following the principle of maximizing the value of his expected utility.

An important property of an expected utility function is that it is unique up to affine transformations. That is, if  $U(\cdot)$  describes the preferences of an investor, then so does  $U^*(\cdot) = c_1 U(\cdot) + c_2$ , where  $c_1 > 0$ .

The range of reasonable utility functions should be restricted by economic reasoning. The expected utility function has the following properties:

1. positive marginal utility, i.e.  $U'(x) > 0$  for all  $x$ .
2. risk aversion; a necessary and sufficient condition for risk aversion is that the expected utility function is concave, i.e.  $U''(x) < 0$  for all  $x$ .

The most exploited types of utility functions are

1. the quadratic utility function defined by

$$U(x) = x - \frac{x^2}{2s}, \quad s > 0.$$

Marginal utility is  $U'(x) = 1 - x/s > 0$  for  $x < s$ . As all concave quadratic functions are decreasing after a certain point, care must be taken to make sure that the outcome remains in the lower, relevant range of utility. Furthermore,  $U''(x) = -1/s < 0$ , so  $s > 0$  guarantees risk aversion.

2. the power utility function defined by

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

where  $\gamma \in (0, 1)$ . Marginal utility is  $U'(x) = x^{-\gamma} > 0$  for all  $x > 0$ . We have  $U''(x) = -\gamma x^{-\gamma-1} < 0$  for all  $x > 0$ .

Suppose that EU-investor is maximizing the expected value of a power utility function. Then

$$U_{EU}(V) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon, \quad (1)$$

where  $W_T$  is the wealth of investor at time  $T$ .

Examining expected utility maximization many researches use the following approach: the expected utility is maximized along the MV-efficient frontier and the portfolio obtained this way is used in the comparison with mean-variance method. We will employ this technique in the EU-optimization problems. It means that we examine the following problem:

$$U_{EU}(G) \rightarrow \max_{G \in \Omega} \quad (2)$$

where  $\Omega$  denotes the set of portfolios along the MV efficient frontier,  $U_{EU}(\cdot)$  is EU-utility and  $G = G(\mu, \sigma)$  is a portfolio with price  $S$  that follows Geometric Brownian Motion:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz, \quad (3)$$

where  $\mu$  is a drift,  $\sigma$  is a standard deviation,  $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ , the random variable  $\varepsilon$  is a standard normal,  $\varepsilon : N(0, 1)$ .

For the analysis of portfolio selection, it will be useful to introduce the concept of an indifference curve in  $(\sigma, \mu)$ -space.

**Definition 2.** *The indifference curve in  $(\sigma, \mu)$ -space, relative to a given utility level  $c$ , is the locus of points  $(\sigma, \mu)$  along which expected utility is constant, i.e., equal to  $c$ .*

Based on the indifference curve analysis, we examine the problem of choosing the optimal portfolio for an investor which maximizes the expected value of a power utility function under conditions on the stochastic behavior both of the portfolio price and the discount factor.

## 2. One risky and one risk-free assets

We will assume that the price  $S$  of risky asset follows the standard log-normal diffusion process given by the stochastic differential equation known as Geometric Brownian Motion:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz, \quad (4)$$

where  $\mu$  is a drift,  $\sigma$  is a standard deviation,  $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ , the random variable  $\varepsilon$  is a standard normal,  $\varepsilon : N(0, 1)$ .

We will assume that there is also a money market security that pays the real interest rate  $rdt$  (risk-free asset):

$$\frac{dB}{B} = rdt. \quad (5)$$

Following [4] we will assume that the discount factor  $\Lambda$  follows the process

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda} = -rdt - \frac{\mu - r}{\sigma} dz, \quad (6)$$

where  $S$  is the price of the risky asset,  $r$  is risk-free rate.

It is well-known [4] that the solution of (4) is

$$\ln S_T = \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \varepsilon, \quad (7)$$

where  $S_0$  is the price of the risky asset at the moment 0,  $S_T$  is the asset price on the date  $T$ . The solutions of (6) is

$$\ln \Lambda_T = \ln \Lambda_0 - \left( r + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \right) T - \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{T} \varepsilon, \quad (8)$$

where  $\varepsilon : N(0, 1)$ , and  $S_0$  is the price of the portfolio at  $t = 0$ . It follows from (8) that

$$m_T = m_T(\varepsilon) = \frac{\Lambda_T}{\Lambda} = \exp \left[ - \left( r + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \right) T - \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{T} \varepsilon \right]. \quad (9)$$

Let  $W_0$  denote the investor's wealth at the time  $t = 0$ . Let  $V$  denote the amount of money invested in the risky asset. Then  $W_0 - V$  is the wealth invested in the risk-free asset. It follows from (7) that the investor wealth  $W_T$  on the date  $t = T$  is given by

$$W_T = (W_0 - V)e^{rT} + Ve^{\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \varepsilon}. \quad (10)$$

Then the discounted value of the investor's wealth is

$$\tilde{W}_T = m_T W_T. \quad (11)$$

**Lemma 1.** Let  $a \in \mathbb{R}$ . Then

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{a\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = e^{\frac{1}{2}a^2}$$

We have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{a\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 2a\varepsilon + a^2) + \frac{1}{2}a^2} d\varepsilon = \\ &= e^{\frac{1}{2}a^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon - a)^2} d\varepsilon = e^{\frac{1}{2}a^2}. \end{aligned}$$

Let us examine the problem of optimal portfolio selection in the financial market that consists of one risk-free and one risky assets under assumptions (5) and (4). Then the efficient frontier is the line that passes through two points  $(0, r)$  and  $(\sigma_0, \mu_0)$  in  $(\sigma, \mu)$ -space.

**Theorem 2.** Let  $\mu \geq r, \sigma \neq 0$ . Then there is a unique solution  $V^*$  of the problem (2) defined by

$$V^* = \frac{1}{\gamma} W_0 \frac{\mu - r}{\sigma^2}. \quad (12)$$

Let us consider the function

$$U(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1-\gamma} \left( e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon} \right)^{1-\gamma} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

$U(\mu, \sigma)$  is the expected value of the power utility at the moment  $t = T$  after investing in an asset with parameters  $\mu$  and  $\sigma$  at initial time  $t = 0$ .

It follows from Lemma 1 that

$$\begin{aligned} U(\mu, \sigma) &= \frac{1}{1-\gamma} e^{(1-\gamma)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(1-\gamma)\sigma\sqrt{T}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{1-\gamma} e^{(1-\gamma)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{1}{2}(1-\gamma)^2\sigma^2T} = \frac{1}{1-\gamma} e^{(1-\gamma)\mu T - \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\sigma^2T}. \end{aligned} \quad (13)$$

For a fixed  $c > 0$  the equality

$$U(\mu, \sigma) = c \quad (14)$$

defines an indifference curve in  $(\sigma, \mu)$ -space. It follows from (13) and (14) that

$$\mu = \mu(\sigma) = \frac{1}{(1-\gamma)T} \ln(c(1-\gamma)) + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2.$$

The optimal portfolio, then, is the point on the efficient frontier that is tangential to the investor's highest indifference curve, i.e. the point that satisfies the equation

$$\mu'(\sigma) = \frac{\mu_0 - r}{\sigma_0},$$

and we have

$$\sigma = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu_0 - r}{\sigma_0},$$

and consequently

$$V = \frac{1}{\gamma} W_0 \frac{\mu_0 - r}{\sigma_0^2}.$$

We remark that (12) is consistent with the result of [5].

### 3. Two risky assets

In this section we assume that there are two risky assets with prices  $S_1, S_2$  satisfying

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz_1, \quad \frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz_2, \quad (15)$$

respectively, where  $\mu_1, \mu_2$  is drifts,  $\sigma_1, \sigma_2$  is standard deviations,  $dz_1 = \varepsilon_1 \sqrt{dt}$ ,  $dz_2 = \varepsilon_2 \sqrt{dt}$ , the random variables  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  are standard normal,  $\varepsilon_1 : N(0, 1)$ ,  $\varepsilon_2 : N(0, 1)$  with covariance  $\sigma_{12}$ . Without the loss of generality we suppose that  $\mu_1 < \mu_2$  and  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

Then the efficient frontier is the curve that passes through two points  $(\sigma_1, \mu_1)$  and  $(\sigma_2, \mu_2)$  in  $(\sigma, \mu)$ -space:

$$\sigma^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}, \quad (16)$$

where

$$x = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad 1 - x = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2} \quad (17)$$

are the weights of the assets with parameters  $(\sigma_1, \mu_1)$  and  $(\sigma_2, \mu_2)$  respectively.

**Theorem 3.** Let  $\mu_2 > \mu_1, \sigma_2 > \sigma_1$ . There is a unique solution of the problem (2) with weights  $x^*, 1 - x^*$  defined by

$$x^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12} - \gamma^{-1}(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}, \quad 1 - x^* = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12} + \gamma^{-1}(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}. \quad (18)$$

Let  $U(\mu, \sigma)$  be the expected value of the power utility at the moment  $t = T$  after investing in an asset with parameters  $\mu$  and  $\sigma$  at initial time  $t = 0$ . It follows from (13) that

$$U(\mu, \sigma) = \frac{1}{1 - \gamma} e^{(1-\gamma)\mu T - \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\sigma^2 T}.$$

For a fixed  $c > 0$  the equality  $U(\mu, \sigma) = c$  defines the following indifference curve

$$\mu = \mu(\sigma) = \frac{1}{(1-\gamma)T} \ln(c(1-\gamma)) + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2$$

in  $(\sigma, \mu)$ -space.

On the other hand, it follows from the equation of efficient frontier (16) that

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12} - \sqrt{\sigma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + \sigma_{12}^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} + \mu_2.$$

We get

$$\mu'(\sigma) = \frac{\sigma(\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + \sigma_{12}^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2}}.$$

It must be equal to the derivative of the indifference curve  $\mu'(\sigma) = \gamma\sigma$  at the tangency point, i.e.

$$\frac{\sigma(\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) + \sigma_{12}^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2}} = \gamma\sigma,$$

and, therefore,  $\sigma$  must satisfies the equality

$$\sigma^2 = \frac{\gamma^{-2}(\mu_2 - \mu_1)^2 - \sigma_{12}^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

at the tangency point. After substituting  $\sigma$  in (16) we get the proposition of the theorem.

*This work is supported by the Russian Fund for Basic Research (grant 14-01-00140).*

#### REFERENCES

1. *Eckhoudt L., Gollier C., Schlesinger H.* Economic and financial decisions under risk. Princeton : Princeton University Press, 2005.
2. *Bernoulli D.* Exposition of a new theory on the measurement of risk // *Econometrica*. 1954. № 22. P. 23–36.
3. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton and Oxford : Princeton University Press, 1944.
4. *Cochrane J. H.* Asset Pricing. Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2005.
5. *Merton R.* Lifetime portfolio selection under uncertainty : the continuous time case // *Rev. Econ. Stat.* 1969. № 51 (3). P. 247–257.

---

## СОДЕРЖАНИЕ

---

<i>Абдулгалимов А. М., Мурадалиев С. Г.</i> Автоматизация анализа и оценки инвестиционных проектов по строительству жилья в сельской местности . . . . .	3
<i>Балаш В. А., Степанов А. Н.</i> Взаимосвязи между волатильностью финансовых рынков отдельных стран и характеристиками новостных потоков. . . . .	9
<i>Балаш О. С., Стальмахова А. А., Стальмахова О. Ю.</i> Некоторые подходы к моделированию операционного риска . . . . .	11
<i>Безруков А. И., Погожильская Г. Г.</i> Методы анализа результатов тестирования . . . . .	15
<i>Болотин А. Е.</i> Достаточные условия существования равновесия в модели «спрос–предложение», учитывающей транзакционные издержки . . . .	18
<i>Валимухаметова Э. Р.</i> Факторы, обуславливающие склонность к страхованию жизни . . . . .	23
<i>Волкова В. В., Миронкина Ю. Н.</i> Анализ актуарных стохастических инвестиционных моделей . . . . .	28
<i>Выгодчикова И. Ю.</i> Об оценивании риска потери доминантного признака в аффинно-квадратичной модели. . . . .	35
<i>Выгодчикова И. Ю., Акимова С. К., Андреева А. С.</i> Оценка доходности и риска операций с долговыми финансовыми инструментами . . . . .	40
<i>Выгодчикова И. Ю., Беличенко К. В.</i> Об оценке эффективности краткосрочного кредита в модели аннуитетных и дифференцированных платежей . . . . .	44
<i>Выгодчикова И. Ю., Евстифеева С. А.</i> О моделировании денежных накопленных индивида в режиме монотонной ренты . . . . .	48

<i>Выгодчикова И. Ю., Селиванова А. А.</i> О моделировании долевой структуры затрат с использованием иерархической модели и минимаксного критерия . . . . .	53
<i>Гареев Б. Р.</i> Моделирование репрезентативности финансовых показателей . . . . .	57
<i>Герасимов В. С., Бойцов Д. И.</i> Разработка библиотеки подпрограмм для решения задач формосохраняющего приближения . . . . .	61
<i>Гераськина И. Ю.</i> Определение уровня риска (VaR) моделями гетероскедастичности . . . . .	64
<i>Горина И. А., Файзлиев А. Р.</i> Жадный алгоритм для решения задачи оптимального портфельного инвестирования . . . . .	70
<i>Горобец Е. В.</i> Многомерная оценка процесса воспроизводства населения Республики Крым Российской Федерации . . . . .	74
<i>Давыдова А. А., Ситдикова Э. Э.</i> Регрессионный анализ в прогнозировании основных финансовых показателей предприятия . . . . .	80
<i>Дерунова Е. А., Семенов А. С.</i> Моделирование инновационно-технологического развития российской экономики . . . . .	87
<i>Дудов С. И., Макеева Ю. А.</i> О прогнозировании экономического процесса по двум показателям на основе полиномиального приближения . . . . .	92
<i>Жуматаева Ж. Е., Арыкбай А. М., Мажитов О. Д.</i> Применение нейронных сетей для прогнозирования курсов валют . . . . .	95
<i>Звягина Э. С., Смирнова С. А.</i> Статистическое исследование компетентностных критериев работников банков . . . . .	98
<i>Иванова А. Д.</i> Решение задачи планирования перевозок несколькими видами транспорта сведением к задаче о потоке минимальной стоимости . . . . .	103
<i>Казеева А. А., Бойцов Д. И.</i> Разработка библиотеки подпрограмм для решения задач формосохраняющего динамического программирования на языке R . . . . .	109
<i>Карелина М. Г.</i> Статистическое изучение на региональном уровне дивергенции интеграционной активности российских холдинговых структур . . . . .	113
<i>Качалов Р. М., Слепцова Ю. А.</i> Нечеткая концептуальная модель управления предприятием. . . . .	119
<i>Киндаев А. Ю., Моисеев А. В.</i> Анализ результатов имитационного моделирования рисков выращивания сельскохозяйственных культур при страховании урожая в Пензенской области . . . . .	124
<i>Кобзев А. Ю.</i> Многомерная группировка региональных систем ипотечного жилищного кредитования методами кластерного анализа . . . . .	130

<i>Кондратович Е. В., Гилевская Л. С., Малюгин В. И.</i> О построении индекса экономических настроений белорусской экономики. . . . .	136
<i>Луньков А. Д.</i> Регрессионные модели для панельных данных на рынке недвижимости. . . . .	142
<i>Макаров А. В., Дудов С. И.</i> Индикатор на основе приближения траектории цен и объема торгов: вычислительные эксперименты . . . . .	146
<i>Милешина В. М.</i> Статистический анализ динамики рыночной доли строительной компании . . . . .	149
<i>Михайлова С. С.</i> Модель распределительно-накопительной системы пенсионного страхования: критерии, допущения, факторы . . . . .	153
<i>Мустафина Д. Р.</i> Имитационное моделирование экономических процессов. . . . .	160
<i>Нуриманова И. Ф., Копнова Е. Д.</i> Статистический анализ эффективности использования концепций водного следа в мировом развитии . . . . .	166
<i>Панов В. А., Маркова А. Р.</i> Построение COGARCH (continuous garch) модели . . . . .	171
<i>Петросян А. Л., Жичкин К. А., Жичкина Л. Н.</i> Прогнозирование ущерба нецелевого использования земель сельскохозяйственного назначения . . . . .	177
<i>Пиглицева Е. А.</i> Кластерный анализ социальной мобильности в Республике Мордовия . . . . .	182
<i>Правикова А. А.</i> Котировка договора перестрахования на базе эксцедента убытка: «структурный» метод определения цены . . . . .	188
<i>Прудников В. Б., Шамсутдинова Н. К.</i> Прогноз численности населения г. Уфа в трудоспособном возрасте до 2030 года . . . . .	194
<i>Пчелинцева А. А.</i> О расчете страховых тарифов при использовании механизма франшизы и лимита выплат . . . . .	199
<i>Родионова Л. А.</i> Эконометрические аспекты моделирования влияния возраста на уровень счастья в России и странах Европы . . . . .	205
<i>Салиева А. К.</i> Эконометрическое моделирование влияния факторов на уровень цен на жилье в г. Оренбурге на основе географически взвешенной регрессии . . . . .	211
<i>Серых К. А., Сульженко В. В.</i> Сопоставление эффективности школьного образования России и стран-членов организации экономического сотрудничества и развития с использованием данных проекта PISA . . . . .	217
<i>Синяевская Т. Г., Трегубова А. А.</i> Многомерные пробит-модели как инструмент оценки взаимосвязанных рисков в добровольном медицинском страховании. . . . .	222

<i>Солдатова Н. Г., Рогова С. А.</i> Эффективность и риск в математической модели взаимодействия двух агентов . . . . .	229
<i>Солодкая Т. И.</i> Математическое моделирование взаимосвязи характеристик рынка труда и ВВП . . . . .	233
<i>Тагиев Р. Х., Магомедова Н. З.</i> Прогнозирование демографического развития Республики Дагестан . . . . .	239
<i>Тиндова М. Г.</i> Нечеткие модели страхования в ипотечном кредитовании . . . . .	244
<i>Трегубова А. А., Широченко М. Ю.</i> Детерминанты поведения населения на страховом рынке: статистическая оценка . . . . .	249
<i>Тухватуллин Э. Р.</i> Использование либеральных эвристик в составе мультиметодного алгоритма для решения задачи прямоугольного раскрыя . . . . .	254
<i>Филатова И. Н.</i> Государственное влияние на инновационное развитие экономики . . . . .	257
<i>Хабиров А. А.</i> Мультиметодный алгоритм решения задачи линейного раскрыя с либеральными эвристиками . . . . .	263
<i>Халикова А. А., Лакман И. А.</i> Многоуровневое регрессионное моделирование спроса на рынке трудовых ресурсов г. Уфа . . . . .	267
<i>Хорошавцева А. Г., Миронкина Ю. Н.</i> Использование метода бутстрапа в оценке страховых резервов . . . . .	273
<i>Шаданова И. Б.</i> Статистический анализ рождаемости в Республике Бурятия . . . . .	280
<i>Chebakov A. R.</i> Optimising conditional-value-at-risk of a portfolio . . . . .	287
<i>Faizliev A. R., Sidorov S. P., Homchenko A. A.</i> Greedy algorithms for index tracking problem and their comparative analysis . . . . .	291
<i>Mavrina E. O.</i> Modelling professional choice through openness to diversity . . . . .	299
<i>Sidorov S. P., Khomchenko A. A., Barabash V. A.</i> Indifference curve analysis of stochastic models for portfolio optimization under the framework of expected utility theory . . . . .	308

Научное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЭКОНОМИКЕ, СТРАХОВАНИИ  
И УПРАВЛЕНИИ РИСКАМИ**

*Сборник материалов  
IV Международной молодежной научно-практической конференции  
(Саратов, 2–5 декабря 2015 г.)*

В двух томах

Том 1

Математическое и компьютерное моделирование  
экономических процессов

Редактор *Е. А. Митинёва*  
Технический редактор *В. В. Володина*  
Корректор *Е. Б. Крылова*  
Оригинал-макет подготовил *И. А. Каргин*

---

Подписано в печать 16.11.2015. Формат 60 × 84<sup>1</sup> / 16.  
Усл. печ.л. 18.60 (20.0). Тираж 105. Заказ № 188-Т.

---

Издательство Саратовского университета.  
410012, Саратов, Астраханская, 83.  
Типография Саратовского университета.  
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.