Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы,
посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова
Саратов, 27 января — 3 февраля 2014 года

ООО Издательство «Научная книга»
2014

УДК 517; 518; 519; 533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения:
С56 Материалы 17-й междунар. Сарат. зимней школы. — Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2014. – 324 с. : ил.
ISBN 978-5-9758-1523-1

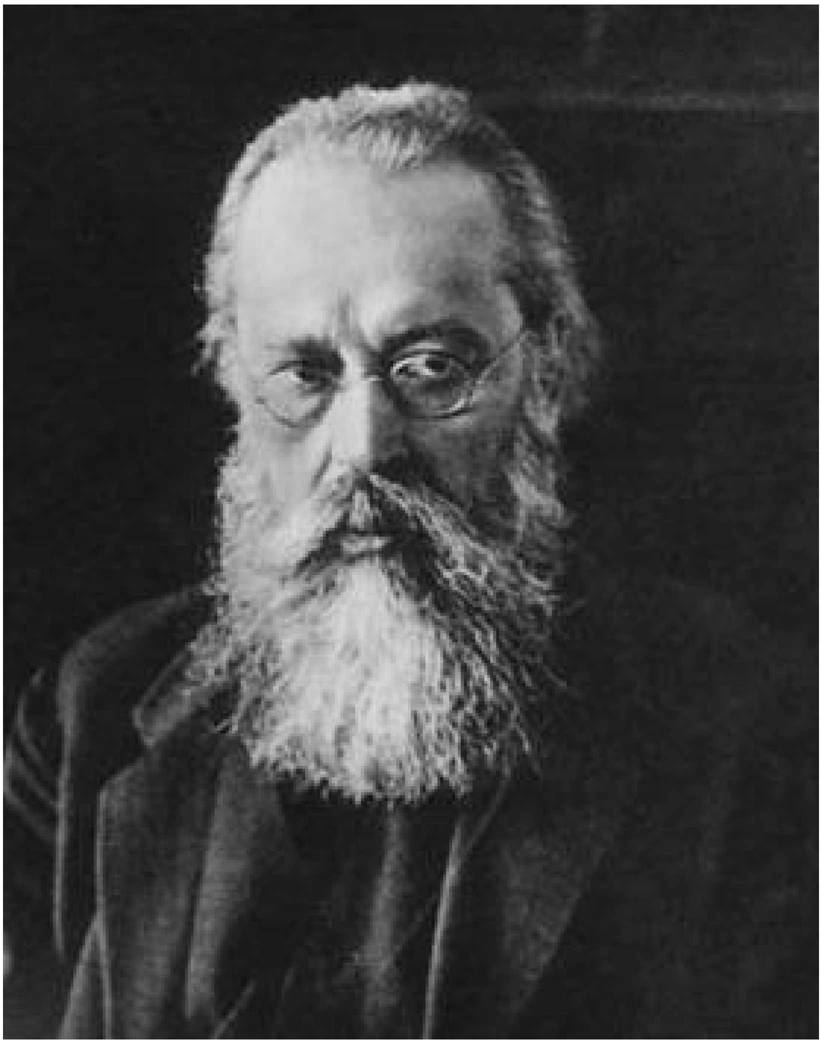
В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу 17-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова. Школа проводилась на базе Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика посвящена вопросам теории функций, таким как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 14-01-06801-мол_г_1)

УДК 517; 518; 519; 533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-9758-1523-1



Владимир Андреевич Стеклов
(1864–1926)

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ

Владимир Андреевич Стеклов — выдающийся ученый-исследователь, педагог и организатор науки. В 1936 г. (через 10 лет после смерти В. А. Стеклова) крупнейший математик, механик и кораблестроитель академик А. Н. Крылов так писал о В. А. Стеклове: «…его можно причислить к той группе знаменитых русских математиков, в которую входят Остроградский, Чебышев и Ляпунов.».

Научные интересы В. А. Стеклова чрезвычайно обширны. Среди них исследования по гидродинамике, теории упругости, геофизике, истории науки и особенно многие вопросы анализа и математической физики (краевые задачи, теория замкнутости, обоснование метода Фурье, асимптотические методы, квадратурные формулы, ортогональные полиномы, приближение функций и др.). По широте постановок задач и глубине используемых методов работы В. А. Стеклова в области математики являются образцовыми.

Владимир Андреевич Стеклов родился 9 января 1864 г. (по новому стилю) в Нижнем Новгороде в семье священника. Его мать — родная сестра выдающегося критика и публициста Н. А. Добролюбова. Высокое чувство гражданского долга у В. А. Стеклова формировалось под влиянием культа Н. А. Добролюбова, царившего в семье.

В 1887 г. В. А. Стеклов окончил Харьковский университет. Он являлся учеником и близким другом знаменитого А. М. Ляпунова. В Харькове он занимался механикой и постоянно переключался на математические проблемы, завязал обширную переписку с крупнейшими зарубежными учеными.

Защитил магистерскую диссертацию на тему «О движении твердого тела в жидкости» (1894 г.) и докторскую — на тему «Общие методы решения основных задач математической физики» (1902 г.). Вскоре он становится профессором Харьковского университета. С 1902 по 1906 гг. В. А. Стеклов был представителем Харьковского математического общества. В 1904 г. его избирают деканом математического факультета Харьковского университета. С 1906 г. он профессор Петербургского университета по кафедре чистой математики. За научные заслуги его избрали в 1902 г. членом-корреспондентом Академии наук, в 1912 г. — ординарным академиком, с 1919 г. и до конца жизни он вице-президент Академии наук. Велика роль В. А. Стеклова в организации Физико-математического института Академии наук, директором которого он был с момента основания в 1921 г. и до конца жизни. В 1934 г. (уже после смерти В. А. Стеклова) этот институт был разделен на два института — Физический институт имени П. Н. Лебедева и Математический институт имени В. А. Стеклова. Эти институты являются крупнейшими академическими институтами в нашей стране.

Творчество В. А. Стеклова оказало и продолжает оказывать большое влияние на работу саратовских математиков. Именно, спецкурс 1956 г. по теоремам равносходимости В. А. Стекловав для уравнений Штурма–Лиувилля, прочитанный профессором Николаем Петровичем Купцов, положил начало широким исследованиям по спектральной теории в Саратовском университете.

А. П. Хромов

УДК 517.9

ВЗАИМОСВЯЗЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону, Владикавказ, РФ)
abanin@math.rsu.ru

Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций с равномерными оценками роста играют важную роль в теории аппроксимации, комплексном анализе и анализе Фурье, при исследовании уравнений типа свертки или в частных производных, теории распределений. Они также представляют и значительный самостоятельный интерес для математиков. В связи с этим они интенсивно изучались в работах многих авторов, особенно после фундаментальной работы Бирштедта, Майзе и Саммерса [1].

Алгебраические и топологические свойства (LB)-пространств непрерывных функций и их проективных оболочек были практически полностью исследованы к концу 1980-х годов (см. [1], [2]). Поэтому дальнейшие исследования сконцентрировались на пространствах голоморфных функций. Но, несмотря на тридцатилетние усилия, было установлено не так много завершенных результатов, а многие важные проблемы остаются открытыми до сих пор (см. обзор Бирштедта [3]). Ряд новых результатов в данном направлении был недавно установлен в работах [4–6] при жестких ограничениях на исследуемые пространства, часть из которых удается проверить только для областей типа шара и радиальных весов, а часть, вообще, составляет самостоятельные открытые проблемы.

В докладе будут представлены более сильные, чем прежде, результаты, полученные автором совместно с Фам Чонг Тиеном (Pham Trong Tien, Vietnam National University), в которых упомянутые ограничения либо снимаются вовсе, либо значительно ослабляются. При этом, применяемая нами техника позволяет вместо пространств голоморфных функций исследовать более общие пространства функций на локально компактных σ-компактных множествах. С целью упрощения понимания сути наших результатов, мы, тем не менее, ограничимся пространствами голоморфных функций.

Пусть G — область в $\mathbb{C}^N$. По положительной непрерывной на G функции (*весу*) образуем банаховы пространства

$$H_v(G) := \{f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty\},$$

$$H_{v0}(G) := \{f \in H(G) : \frac{f(z)}{v(z)} \to 0 \text{ при } z \to \partial G\},$$

с нормой $\|\cdot\|_v$. По возрастающей последовательности $\mathcal{V}$ весов v_n на G определяем внутренние индуктивные пределы:

$$\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind} H_{v_n}(G) \text{ и } \mathcal{V}_0 H(G) := \mathrm{ind} H_{(v_n)0}(G),$$

являющиеся (LB)-пространствами, а также их проективные оболочки $H\overline{V}(G) = \bigcap_{v\in\overline{V}} H_v(G)$ и $H\overline{V}_0(G) = \bigcap_{v\in\overline{V}} H_{v0}(G)$, где

$$\overline{V} := \{v - \text{ вес на } G : \sup_{z\in G} \frac{v_n(z)}{v(z)} < \infty, \ \forall\, n\}.$$

Напомним еще, что внутренний индуктивный предел $E = \mathrm{ind} E_n$ последовательности локально выпуклых пространств E_n называется *регулярным* (*ограниченно стягиваемым*), если каждое ограниченное в нем множество содержится и ограничено в некотором E_n (соответственно, каждая сходящаяся в E к нулю последовательность содержится и сходится к нулю в некотором E_n).

Основные наши результаты таковы:

(1) Алгебраическое равенство $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0 H(G)$ всегда влечет, что данные пространства относятся к классу (DFS) (Dual Fréchet-Schwartz spaces). Обратное утверждение верно при дополнительном ограничении (CD): *Для любого n найдется такое m, что единичный шар пространства $H_{v_n}(G)$ содержится в замыкании по топологии компактной сходимости некоторого шара пространства $H_{(v_m)0}(G)$.*

(2) При условии (CD) алгебраическое равенство $H\overline{V}(G) = H\overline{V}_0(G)$ между проективными оболочками (LB)-пространств $\mathcal{V}H(G)$ и $\mathcal{V}_0 H(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда $H\overline{V}(G)$ является полумонтелевским пространством.

(3) Если (LB)-пространство $\mathcal{V}_0 H(G)$ совпадает со своей проективной оболочкой $H\overline{V}_0(G)$, то оно является регулярным индуктивным пределом. Более того, если каждая дискретная последовательность точек G содержит интерполяционную подпоследовательность для пространства $H^\infty(G)$ всех ограниченных голоморфных в G функций, то $\mathcal{V}_0 H(G)$ является ограничено стягиваемым индуктивным пределом. В частности, если G — область в $\mathbb{C}$, дополнение которой до расширенной комплексной плоскости не имеет одноточечных компонент связности, или ограниченная абсолютно выпуклая область в $\mathbb{C}^N$, то алгебраическое равенство $\mathcal{V}_0 H(G) = H\overline{V}_0(G)$ всегда влечет, что индуктивный предел $\mathcal{V}_0 H(G) = \mathrm{ind} H_{(v_n)0}(G)$ является ограниченно стягиваемым.

Отметим, что нами также установлены новые результаты для банаховых весовых пространств типа $H_v(G)$ и $H_{v0}(G)$ и для пространств Фреше $HV(G) := \bigcap_n H_{v_n}(G)$ и $HV_0(G) := \bigcap_n H_{v_n0}(G)$, задаваемых убывающими весовыми последовательностями $V = (v_n)_n$ весов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H.* A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 107–160.

2. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Some recent results on $\mathcal{V}C(X)$ // Advances in the Theory of Fréchet Spaces (Istanbul, 1988). NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 181–194.

3. *Bierstedt K. D.* A survey on some results and open problems in weighted inductive limits and projective description for spaces of holomorphic functions // Bull. Soc. Roy. Sci. Liége. 2001. Vol. 70. P. 167–182.

4. *Bonet J., Friz M., Jorda E.* Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions // Publ. Math. Debrecen. 2005. Vol. 67. P. 333–348.

5. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0H(G)$ // J. Math. Anal. Appl. 2006. Vol. 323. P. 747–767.

6. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Weighted inductive limits of spaces of entire functions // Monatsh. Math. 2008. Vol. 154. P. 103–120.

УДК 517.51

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ РЯДОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

Н. Ю. Агафонова (Саратов, РФ)

AgafonovaNYu@gmail.com

Пусть $\{p_n\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \leqslant p_n \leqslant N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad 0 \leqslant x_n < p_n. \tag{1}$$

Для x вида k/m_l берем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$ записано в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $0 \leqslant k_i < p_i$, то по определению полагаем для $x \in [0,1)$ $\chi_k(x) = \exp\Big(2\pi i \Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\Big)\Big)$.

Для $x, y \in [0,1)$, записанных в виде (1), полагаем по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $z_n = x_n + y_n (mod\, p_n)$, $0 \leq z_n < p_n$. Аналогично определяется $x \ominus y$ (см. [1]).

Так как система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и ограничена на $[0,1)$, зададим коэффициенты Фурье и частные суммы ряда Фурье функции $f \in L^1[0,1)$ равенствами

$$\hat{f}(n) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\, dt\, n \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим пространства $L^p[0,1)$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ и $B[0,1)$ из ограниченных функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = = \sup\{f(x) : x \in [0,1)\}$.

Для банахова пространства $X \subset L^1[0,1)$ функций на $[0,1)$ введем $X_N = \{f \in E : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_E = 0\}$. В частности, $L^1_N = \{f \in L^1_N : \lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0\}$, а B^1_N есть пространство функций с равномерно сходящимися рядами Фурье по $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

В [2] были установлены аналоги классических результатов о мультипликаторах равномерной сходимости.

Теорема A. *1) Если* $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p[0,1)$ *и* $\{\lambda\}_{n=0}^{\infty}$ *такова, что* $\|\Lambda_n\|_q := \left\|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \chi_k\right\|_q \leqslant M < \infty$, *то ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{f}(k)\chi_k(x)$ *является рядом Фурье по системе* $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *функции* $f_\lambda \in B_N$;

2)Пусть $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\|\Lambda_n\|_p$ *ограничены. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k \hat{f}(k)\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $f_\lambda \in L_p[0,1)$.

Пусть $f, g \in L^1[0,1)$ и $f * g = \int\limits_0^1 f(x \ominus t) g(t)\, dt$. Известно, что $f \hat{*} g(n) = = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \geqslant n\}$, то $E_n(f)_X = \inf\{\|f - t_n\|_X : t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Пусть $E_p(\varepsilon) = \{f \in L^p[0,1) : E_n(f)_p \leqslant \leqslant C\varepsilon_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\{\varepsilon_n\} \downarrow 0$.

Теорема 1. *В теореме A условие* $\|\Lambda_n\|_q \leqslant M < \infty$ ($\|\Lambda_n\|_q \leqslant M < < \infty$) *равносильно существованию* $f \in L^q[0,1)$ ($g \in L^p[0,1)$) *со свойством* $\hat{g}(n) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leqslant 2$, $f \in L^p[0,1)$, *и сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^p$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k\hat{f}(k)\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $f_\lambda \in B_N$ *и*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_\infty \leqslant C E_n(f)_p \left(\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|^p\right)^{1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in L^1_N$, $1 < p < \infty$, $\lambda_n \downarrow 0$, *и при этом сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k n^{-1/p}$. *Тогда* $f * g \in L^p[0,1)$ *и*

$$E_n(f*g)_p \leqslant C\|f - S_n(f)\|_1 \left(n^{1-1/p}\lambda_n + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k n^{-1/p}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Волосивец С. С., Агафонова Н. Ю.* О мультипликаторах равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. научн. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун–та, 2005. Вып. 3. С. 3—23.

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Р. Агачев (Казань, РФ)

AgachevJR@ksu.ru

Как хорошо известно, метод коллокации решения операторных уравнений (см., напр., в [1, 2]) является одним из самых простых из известных прямых методов. Однако его применимость ограничивается жесткими условиями на коэффициенты исследуемого уравнения; в настоящее время обоснование метода коллокации для дифференциальных уравнений проведено в случае R-интегрируемости исходных данных. Здесь нами предлагается метод решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, который вбирает в себя положительные стороны метода коллокации, но в то же время может быть применен и в случае суммируемых по Лебегу коэффициентов.

Рассмотрим краевую задачу

$$R_\nu(x) = 0, \quad \nu = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) = y(t), \quad a \le t \le b. \tag{2}$$

Здесь $g_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, и $y(t)$ — известные функции, а R_ν, $\nu = \overline{0, m-1}$, — линейно-независимые непрерывные функционалы на пространстве $C^{(m-1)}[a, b]$.

Введем в рассмотрение на $[a, b]$ сетку узлов

$$\Delta_n : \, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \quad t_k - t_{k-1} \equiv \pi_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

удовлетворяющая естественному условию: $\|\Delta_n\| \equiv \max\limits_k \pi_k \to 0$ при $n \to \infty$.

Для произвольной суммируемой на $[a, b]$ функции $z(t)$ через $\Phi_k(z)$ обозначим ее среднее значение на частичном промежутке $[t_{k-1}, t_k]$:

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{\pi_k} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} z(t)\, dt, \quad k = \overline{1, n}.$$

Метод решения задачи (1)–(2) заключается в следующем. Приближенное решение будем искать в виде сплайна (см., напр., в [3]) $x_n(t) \equiv \equiv x_{n,m}(t)$ степени m на сетке (3), а его неизвестные коэффициенты определим из условий:

$$x_n^{(m)}(t_j) + \sum_{k=1}^{m} \Phi_j(g_k) \cdot x_n^{(m-k)}(t_j) = \Phi_j(y), \quad j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

$$R_\nu(x_n) = 0, \quad \nu = \overline{0, m-1}. \tag{5}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и выполнены предположения:*[1]

1) функции $y, g_k \in L_p(a, b), k = \overline{1, m}$;

2) задача (1)–(2) однозначно разрешима при любой правой части из $L_p(a, b)$.

[1]Под $L_\infty(a, b)$ будем понимать пространство $C[a, b]$.

Тогда, начиная с некоторого номера n, система (4)–(5) также однозначно разрешима и приближенные решения $x_n(t)$ сходятся к точному решению $x(t)$ задачи (1)–(2) со скоростью

$$\|x - x_n\|_{W_p^{(m)}(a,b)} = O\Big\{E_n^0(y)_p + \sum_{k=1}^{m} E_n^0(g_k)_p +$$

$$+\|\Delta_n\|^{(1-1/p)} \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + \|\Delta_n\|\Big\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

где $E_n^0(z)_p$ есть наилучшее приближение $z \in L_p(a,b)$ сплайнами нулевой степени на сетке (3).

Доказательство теоремы проводится с помощью общей теории приближенных методов анализа, использующей левостороннюю обратимость операторов (см. в [1, гл. XIV], [2, гл. I]).

Замечания. 1. Отметим, что для классов функций, задаваемых мажорантой модуля непрерывности, в монографии [4] (см. с. 163) дана неулучшаемая оценка величины $E_n^0(z)_p$. В случае же «почти равномерной» сетки (3) эту величину можно оценить через интегральный модуль непрерывности функции $z \in L_p(a,b)$.

2. Вычислительная схема метода и сформулированный результат распространяются на краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения вида

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{i=0}^{m} \int_a^b h_i(t,s)x^{(i)}(s)\,ds = y(t), \quad a \le t \le b,$$

при этом на функции $h_i(t,s)$ накладываются условия:

$$h_i \in L_p(a,b) \times L_1(a,b), \quad i = \overline{0, m-1},$$
$$h_m \in L_p(a,b) \times L_q(a,b), \quad 1/p + 1/q = 1.$$

3. Приближенные решения в рассмотренном методе можно также строить, используя классический аппарат алгебраических полиномов. В этом случае имеет место сходимость приближенных решений к точному в метрике пространства Соболева $W_2^{(m)}(a,b)$, если в качестве точек $\{t_k\}$ взять узлы Гаусса (нули полинома Лежандра).

4. Схема применима и для некоторых некорректно-поставленных по Адамару задач, в частности, для краевых задач (1) для интегро-дифференциального уравнения вида

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{i=0}^{r} \int_a^b h_i(t,s)x^{(i)}(s)\,ds = y(t), \quad a \le t \le b, \tag{6}$$

где $r > m \geq 0$. В этом случае для обоснования полиномиальго метода предлагается пара пространств Соболева $W_p^{(r)}(a,b)$ и $W_p^{(r-m)}(a,b)$.

5. Если дана периодическая краевая задача, то обоснование полиномиального метода значительно облегчается благодаря известным результатам по тригонометрическому интерполированию по равноотстоящим узлам в пространстве Соболева $W_2^{(m)}$ (см., напр., в [5, с. 18]).

6. В частном случае $r = m+1$ обоснование метода для задачи (1), (6) проводится также без особых усилий в силу известных результатов в первом весовом пространстве Соболева (см. в [5, с. 25]), если в качестве точек $\{t_k\}$ и весовой функции взять соответственно узлы и вес Чебышева первого рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М. : Наука, 1984. 752 с.

2. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980. 232 с.

3. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976. 248 с.

4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М. : Наука, 1984. 352 с.

5. *Габдулхаев Б. Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1995. 230 с.

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ M-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА[1]

Г. Акишев (Караганды, РК)
akishev@ksu.kz

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, ..., x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leq x_j \leq 1;\ j = 1, ..., m\}$ — m-мерный куб. $X(\varphi)$ — симметричное пространство измеримых по Лебегу на I^m с фундаментальной функцией φ, $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X(\varphi)$ (см. [1, с. 123, с. 137]).

Для функции $\varphi(t)$, $t \in [0,1]$ положим

$$\alpha_\varphi = \underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}, \qquad \beta_\varphi = \overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта 0740/ГФ МО и Н РК.

Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1 \leq \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi \leq 2$. Рассматриваются сепарабельные симметричные пространства. Примерами сепарабельных симметричных пространств являются пространство Лебега $L_q(I^m)$, $1 \leq q < +\infty$, (см. [2]), пространство Лоренца $L_{q\theta}(I^m)$ с нормой

$$\|f\|_{q,\theta} = \left\{ \frac{\theta}{q} \int_0^1 \left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau \right)^\theta t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

где $f^*(\tau)$ не возрастающая перестановка функций $|f(2\pi\bar{x})|$ (см. [1, с. 83]), $1 \leq q < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$.

Отметим, что примерами симметричных пространств также являются многопараматрические пространства Лоренца определенные Е. Д. Нурсултановым [3].

Пусть $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по системе $\{e^{i\langle \bar{n}, 2\pi\bar{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$. Положим

$$\delta_s(f, \overline{x}) = \sum_{\bar{k} \in \rho(s)} a_{\bar{k}}(f) e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle},$$

где $\rho(s) = \left\{ \bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ 2^{s-1} \leq |k_j| < 2^s, \ j = 1, ..., m \right\}$, $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$, $s = 1, 2, ...$

Пусть $X(\varphi)$ — симметричное пространство и $1 < \alpha_\varphi \leq \beta_\varphi < 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $r > 0$. Рассматриваются классы Никольского, Бесова ([2])

$$B^r_{X,\theta} = \Big\{ f \in X(\varphi) : \Big(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \left\| \delta_s(f) \right\|_X^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \Big\}.$$

Пусть $f \in X(\varphi)$ и $\left\{ \bar{k}^{(j)} \right\}_{j=1}^M$ — система векторов $\bar{k}^{(j)} = (k_1^{(j)}, ..., k_m^{(j)})$ с целочисленными координатами. Наилучшим тригонометрическим M-членным приближением функции $f \in X(\varphi)$ называется величина

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^{(j)}, b_j} \|f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, 2\pi\bar{x}\rangle}\|_X.$$

Для заданного класса $F \subset X(\varphi)$ положим $e_M(F)_X = \sup\limits_{f \in F} e_M(f)_X$.

Впервые наилучшее M-членное приближение определил С. Б. Стечкин [4]. Оценки M-членных приближений различных функциональных классов установили Р. С. Исмагилов, Э. С. Белинский, Е. В. Майоров, Б. С. Кашин, R. De Vore, В. Н. Темляков [5], А. С. Романюк , P. Oswald, P. Petrushev, Ding Dung, Wang Heping и Sun Yongsheng, L. Duan, W. Sickel и M. Hansen, С. А. Стасюк [6], Д. Б. Базарханов и другие (см. библиографии в [5–8]).

В докладе на обсуждение предлагаются следующие утверждения

Теорема 1. *Пусть* $X(\varphi)$ *— симметричное пространство,* $0 < \frac{1}{q} < < \frac{1}{2} \le \log_2 \alpha_\varphi \le \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

1. Если $\log_2 \beta_\varphi - \frac{1}{q} < \frac{r}{m} < \log_2 \alpha_\varphi$, *то*

$$e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \asymp \frac{M^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{m}+\frac{1}{q})}}{\varphi(M^{-\frac{q}{2}})}.$$

2. Если $\frac{r}{m} > \log_2 \beta_\varphi$, *то*

$$e_M\left(B_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \asymp \frac{M^{-(\frac{r}{m}+\frac{1}{2})}}{\varphi(M^{-1})}.$$

Следствие 1. *Пусть* $X(\varphi) = L_{p,\tau_1}(\log L)^\beta (I^m)$ *— пространство Лоренца–Зигмунда,* $\beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < 2 < q < +\infty$, $1 < \tau, \tau_1 < +\infty$. *Если* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{r}{m} < \frac{1}{p}$, *то* $e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{q,\tau} \asymp M^{-\frac{q}{2}(\frac{r}{m}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(\ln(1+M))^{-\beta}$.

Теорема 2. *Пусть* $X(\varphi)$ *— симметричное пространство,* $0 < \frac{1}{q} < < \frac{1}{2} \le \log_2 \alpha_\varphi \le \log_2 \beta_\varphi < 1$, $1 < \tau < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Если $\frac{r}{m} = \log_2 \beta_\varphi$, *и* $\frac{t^{\frac{r}{m}}}{\varphi(t)} \downarrow$, $\frac{\varphi(t)}{t^{\frac{r}{m}}} \log_2^\gamma \frac{1}{t} \downarrow$, *для некоторого* $\gamma \in (0, \frac{1}{\theta})$ *на* $(0,1)$, *то*

$$e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \asymp \frac{M^{-(\frac{r}{m}+\frac{1}{2})}}{\varphi(M^{-1})}(\ln(M+1))^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $X(\varphi) = L_{\frac{m}{r},p}(I^m)$ *— пространство Лоренца,* $1 < \frac{m}{r} < q < +\infty, ! < p < +\infty$. *Тогда* $e_M\left(B^r_{X,\theta}\right)_{L_{q,\tau}} \asymp M^{-\frac{1}{2}}(\ln(M+1))^{1-\frac{1}{\theta}}$.

Замечание. При $X(\varphi) = L_p(I^m)$ и $\tau = q$ из теорем 1 и 2 следуют результаты [5], [6]. Аналогичные результаты для пространств Лебега, Лоренца со смешанной нормой приведены в [7], [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.,* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с.

2.*Никольский С. М.,* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977. 456 с.

3. *Нурсултанов Е. Д.* Многопараметрический интерполяционный функтор и пространства Лоренца $L_{p,\bar{q}}$, $\bar{q} = (q_1, ..., q_n)$ // Функ. анал. и его приложения. 1997. Т. 31, №2. С. 79–82.

4. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. С. 37–40.

5. *De Vore R. A. , Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Analysis and applications. 1995. Vol. 2, №1. P. 29–48.

6. *Stasyuk S. A.* Best m-term trigonometric approximation for the classes $B^r_{p,\theta}$ of functions of low smoothness // Ukrain. Math. J. 2010. Vol. 62, №1. P. 114–122.

7. *Акишев Г.* Об M-членных приближениях класса Бесова // International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Approximations" dedicated to the 70th Anniversary of Corresponding Member of National Academy of Ukraine, Professor A. I. Stepanets (1942-2007), May 28-June 3, 2012. Ukraine, Kamianets-Podiisky, 2012. P. 12.

8. *Акишев Г.* Об -членных приближениях класса Бесова в пространстве Лоренца // Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры : материалы VI междунар. науч. конф. Актобе, 2012. С. 255–257.

УДК 517.984

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННЫМ С ПОГРЕШНОСТЬЮ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ[1]

Р. Р. Акопян (Озёрск, РФ)
R.Akopyan@oti.ru

Пусть G — односвязная область расширенной комплексной плоскости с границей Γ — спрямляемой, жордановой кривой; γ — измеримое подмножество Γ. В пространстве Харди $H^\infty(G)$ выделим класс функций

$$Q = \left\{ f \in H^\infty(G) \,:\, \|f\|_{L^\infty(\Gamma\setminus\gamma)} \leq 1 \right\}.$$

Пусть $\mathcal{R}$ — множество всех (или только линейных) функционалов на $L^\infty(\gamma)$. Оптимальным восстановлением значения в точке z_0 функций класса Q по заданным с погрешностью $\delta > 0$ граничным значениям на γ назовём величину, определяемую равенством

$$E(\delta, \gamma) = \inf_{\phi\in\mathcal{R}} \sup_{\substack{q\in L^\infty(\gamma),\, f\in Q: \\ \|f-q\|_{L^\infty(\gamma)}\leq\delta}} |f(z_0) - \phi(q)|. \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00462), Минобрнауки РФ (госзадание 1.1544.2011).

Задача состоит в вычислении величины (1) и нахождении оптимального метода восстановления функционала, на котором в (1) достигается нижняя грань.

Задача (1) тесно взаимосвязана с рядом экстремальных задач, в частности, с наилучшим приближением оператора аналитического продолжения на классе аналитических функций. Подробно о взаимосвязи задач (в более общей, чем рассматриваемая здесь, постановке) и истории их исследований см. [1]. Задачам оптимального восстановления аналитических функций посвящена монография [2]. Ранее в работах [3, 4] задача (1), её L_p-обобщения и взаимосвязанные экстремальные задачи исследовалась в случаях когда G — полоса и кольцо.

Обозначим через ϕ_σ функционал, определяемый равенством

$$\phi_\sigma(q) = \psi^{-\sigma}(z) \int_\gamma P(\zeta - z)\, \psi^\sigma(\zeta)\, q(\zeta)\, dS \qquad (2),$$

в котором P — ядро Пуассона области G, функция $\psi \in H^\infty(G)$ отображает G на кольцо с центром в нуле так, что $|\psi(\gamma)| = R_1$, $|\psi(\Gamma \setminus \gamma)| = R_2$, где R_1, R_2 — некоторые положительные числа.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$E(\delta, \gamma) = \delta^{\,\omega(z_0, \gamma, G)},$$

в котором $\omega(z_0, \gamma, G)$ — гармоническая мера γ относительно точки z_0 и множества G, при этом оптимальным методом восстановления является функционал ϕ_σ, заданный в (2)*, параметры связаны равенством* $\sigma = \ln\delta/(\ln R_2 - \ln R_1)$.

В случае, когда G — единичный круг, обозначим через $\Delta(m)$ множество кривых $\gamma \subset \Gamma$, состоящих из конечного числа дуг окружности Γ сумма длин которых не превосходит числа m, $0 < m < 2\pi$. Рассмотрим следующую задачу наилучшего выбора γ

$$\mathcal{E}(\delta, m) = \inf_{\gamma \in \Delta(m)} E(\delta, \gamma). \qquad (3)$$

Теорема 2. *Нижняя грань в задаче* (2) *достигается на дуге*

$$\gamma_0 = \left\{ z \,:\, z = e^{it},\, |t - \arg z_0| < \frac{m}{2} \right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.

2. *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions. Huntington : Nova Science Publ.Inc., 2000.

3. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.

4. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4, С. 3–13.

УДК 517.982.3

ТЕОРЕМА РЕЙНУОТЕРА–СИМОНСА О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ АССОЦИИРОВАННОЙ НОРМЫ[1]

А. Р. Алимов (Москва, РФ)
alexey.alimov@gmail.com

Мы распространяем классическую теорему Рейнуотера–Симонса о слабой сходимости последовательностей на случай сходимости относительно ассоциированной (по Брауну) нормы.

Рассмотрим следующий класс пространств, введенный Франчетти и Роверси [1]:

$$(\mathit{Ex}\text{-}w^*s) \qquad\qquad \operatorname{ext} S^* \;\; w^*\text{-сепарабельно.}$$

(Здесь, как обычно, $\operatorname{ext} S^*$ — множество крайних точек сопряженной сферы S^*.) При этом в определении класса $(\mathit{Ex}\text{-}w^*s)$ мы всегда предполагаем, что

$$F = (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^* \quad w^*\text{-плотно в } \operatorname{ext} S^*, \quad \operatorname{card} I \le \aleph_0, \quad F = -F.$$

Из теоремы Крейна–Мильмана понятно, что любое пространство из класса $(\mathit{Ex}\text{-}w^*s)$ имеет w^*-сепарабельный единичный шар B^*. Последнее условие эквивалентно тому, что X изометрично изоморфно подпространству из ℓ^∞. Характеризация пространств класса $(\mathit{Ex}\text{-}w^*s)$ не известна.

Класс $(\mathit{Ex}\text{-}w^*s)$ содержит все сепарабельные банаховы пространства (в частности, все пространства $C(Q)$ на метризуемом компакте Q) и несепарабельное пространство ℓ^∞.

Пусть пространство $X \in (\mathit{Ex}\text{-}w^*s)$ $F = (f_i)_{i\in I}$ — семейство функционалов из $(\mathit{Ex}\text{-}w^*s)$, $(\alpha_i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i\in I} \alpha_i |f_i(x)|.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00554).

Тогда $|\cdot|$ — норма на X, которую, следуя Брауну [2] мы называем *ассоциированной.* Ясно, что $|x| \le \|x\| \sum \alpha_i$.

Известная теорема Рейнуотера–Симонса утверждает, что ограниченная последовательность (x_n) в банаховом пространстве X слабо сходится к $x \in X$ если и только если последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$ для каждого функционала f из произвольной фиксированной границы Джеймса пространства X (например, для всех $f \in \operatorname{ext} S^*$). Таким образом, хотя в общем случае слабая сходимость не метризуема, имеется норма на $X \in$ (*Ex-w*s*) (в частности, на любом сепарабельном пространстве), относительно которой сходимость *последовательностей* равносильна слабой сходимости.

Теорема. *Пусть* $X \in$ (*Ex-w*s*) *— банахово пространство,* $F := = (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^*$ *— набор функционалов из определения класса* (*Ex-w*s*). *Пусть* (x_n) *— ограниченная последовательность в* X. *Рассмотрим следующие условия*:

a) $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$;
b) $f_i(x_n) \to f_i(x)$ *для любого* $i \in I$;
c) $x_n \xrightarrow{w} x$.

Тогда условия a) *и* b) *эквивалентны, любое из них обеспечивается выполнением условия* c). *Если* X^* *сепарабельно, то все три условия эквивалентны.*

Пример пространства $X = \ell^1$ показывает, что в импликации b) $\Rightarrow$ c) сепарабельность X^* существенна. Также отметим, что пространство $(X, |\cdot|)$ всегда является пространством Шура относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$.

В теореме импликации a) $\Rightarrow$ b), b) $\Rightarrow$ a), c) $\Rightarrow$ b) доказываются стандартными рассуждениями. Предположим, что X^* сепарабельно. Докажем b) $\Rightarrow$ c). Для банахова пространства X что следующие утверждения эквивалентны:

– для X имеется сепарабельная граница (Джеймса);
– граница $\operatorname{ext} B^*$ сепарабельна;
– пространство X^* сепарабельно.

По определению, множество $C \subset B^*$ (I)-*генерирует* шар B^*, если $B^* = \overline{\operatorname{conv}}\Big(\bigcup_i \overline{\operatorname{conv}}^{\,w^*} C_i\Big)$ при любом представлении $C = \bigcup C_i$ в виде объединения счетного семейства множеств C_i. Понятие (I)-генерирующего множества было введенного В. Фонфом и Й. Линденштрауссом. Известно, что

$$B^* = \overline{\operatorname{conv}} C \implies C \text{ (I)-генерирует } B^* \implies B^* = \overline{\operatorname{conv}}^{\,w^*} C.$$

Положим $C_i := \{f_1, \dots, f_i\}$, $i \in I$ (где $F := (f_i)_{i\in I}$ — набор функционалов из определения класса (*Ex-w*s*). Ясно, что $F = \bigcup C_i$. Далее, $B^* = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|} \operatorname{ext} B^*$ по теореме (Кадеца–Фонфа–)Годфроя–Роде. Поскольку X^* сепарабельно, то граница $\operatorname{ext} B^*$ также сепарабельна. Далее, $\operatorname{ext} S^* \subset \overline{F}^{w^*}$ по определению класса (*Ex-w*s*) и, следовательно, $\operatorname{ext} S^* \subset \left(\bigcup_i \overline{\operatorname{conv}}^{w^*} C_i\right)$. Окончательно, F (I)-генерирует шар B^*. Теперь осталось воспользоваться одним результатом, полученном независимо Нигардом [3] и Календой [4], согласно которому, если $C \subset B^*$ (I)-генерирует шар B^*, то C — множество Рейнуотера, т. е. множество со следующим свойством: если ограниченная последовательность $(x_n) \subset X$ сходится поточечно на C, то (x_n) сходится слабо. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Franchetti C., Roversi S.* Suns, M-connected sets and P-acyclic sets in Banach spaces. Preprint no. 50139, Instituto di Matematica Applicata "G. Sansone", 1988. P. 1–29.

2. *Brown A. L.*. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // Math. Ann. 1987. Vol. 279. P. 87–101

3. *Nygaard O.* A remark on Rainwater's theorem // Annales Math. Inform. 2005. Vol. 32. P. 125–127.

4. *Kalenda O. F. K.* (I)-envelopes of unit balls and James' characterization of reflexivity // Studia Math. 2007. Vol. 182. P. 29–40.

УДК 517.27/51/225

α-ДОСТИЖИМОСТЬ ОБЛАСТИ В НЕГЛАДКОМ СЛУЧАЕ[1]

К. Ф. Амозова, В. В. Старков (Петрозаводск, РФ)
amokira@rambler.ru, VstarV@list.ru

Пусть $\alpha \in [0;1)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $K_+(p,\alpha,r)$ — конус, полученный пересечением замкнутого евклидова шара $\overline{\mathbb{B}}^n(p,r)$ радиусом $r > 0$ и конуса

$$K_+(p,\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\}.$$

Определение. [1] *Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$, называется α–достижимой (относительно 0), если для каждой точки $p \in \partial D$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус $K_+(p,\alpha,r) \subset \mathbb{R}^n \backslash D$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности, второй автор поддержан РФФИ (проект 14-01-00510.

В [1] было доказано, что α–достижимые области являются звездообразными и удовлетворяют *условию конуса*, важному для приложений, например таких, как теория интегральных представлений функции, теоремы вложения, вопросы граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле

В [1] в гладком случае был получен критерий α–достижимости области. В негладком случае в [2] и [3] были получены необходимое и достаточные условия α–достижимости области, определенной неравенством $F(x) < 0$ для непрерывной функции F из $\mathbb{R}^n$.

Далее будем предполагать, что

a) *функция* $F(x)$ *— определена и непрерывна на* $\mathbb{R}^n$;

b) *открытое множество* $D = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\}$ *содержит 0;*

c) *в точках множества уровня* $S = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = 0\}$ *существуют производные* $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p)$ *по всем направлениям* $l \in (K_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$.

Теорема 1 [2]. *1) Пусть выполнены условия a), b), c). Тогда*

i) из α-достижимости области D для некоторого $\alpha \in [0;1)$ следует, что $\dfrac{\partial F}{\partial l}(p) \geq 0$ *для любого направления* $l \in (K_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$ *и для любой точки* $p \in S$;

ii) если D — ограниченное множество и для некоторого $\alpha \in [0;1)$ производные

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0 \tag{1}$$

для любого $l \in (K_+(p,\alpha) - p)\setminus\{0\}$ *и для любой точки* $p \in \partial D$, *то* D *— α-достижимая область;*

2) Если $F(x)$ удовлетворяет условиям a) и b), множество D ограничено и для некоторого $\alpha \in [0;1)$ и $\delta > 0$ у F существуют производные по направлениям $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$, *и*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|} \cdot \cos\frac{\alpha\pi}{2} \tag{2}$$

для любых $x \in D^\delta = \{x \in D : \rho(x,S) < \delta\}$, *где* $\rho(x,S)$ *расстояние от* x *до* S, *то* D *— α–достижимая область.*

Условие ограниченности множества D здесь естественно в силу доказанного в [1] факта ограниченности α–достижимых областей $D \neq \mathbb{R}^n$ при $\alpha > 0$. Заметим также, что в неравенстве (2) правая часть отрицательная, в отличие от неравенства (1).

Теорема 2 [3]. *Пусть* $\Psi(\xi)$ *— такая дифференцируемая, строго возрастающая числовая функция на* $\mathbb{R}^+ = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi > 0\}$*, что существует* $\lim\limits_{\xi\to+0} \Psi(\xi) = 0 \overset{def}{=} \Psi(0)$*, функция* $F(x)$ *удовлетворяет условиям a) и b) и множество* D *ограничено. Если для некоторого* $\alpha \in [0;1)$ *и* $\delta > 0$ *у* F *существуют производные по направлениям* $l \in (K_+(x,\alpha) - x)\setminus\{0\}$*, и*

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) > -\Psi'(\Psi^{-1}(-F(x)))\frac{2}{\|x\|}\Psi^{-1}(-F(x))\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

для любых $x \in D^\delta$*, то* D *—* α*–достижимая область.*

В случае $\alpha = 0$ достаточные условия, полученные в этих теоремах, являются достаточными условиями звездообразности множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liczberski P., Starkov V. V.* Domains in $\mathbb{R}^n$ with conical accessible boundary // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 408, № 2. P. 547–560.

2. *Амозова К. Ф., Старков В. В.* Альфа-достижимые области, негладкий случай // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 3–8.

3. *Амозова К. Ф.* Достаточные условия α-достижимости области в негладком случае // Проблемы анализа – Issues of analysis. 2013. Т. 2(20), № 1. С. 3–13.

УДК 519.71:681.51

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СЕМЕЙСТВА КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, В. В. Кононов
(Саратов, РФ)

kp_andreichenko@renet.ru, valentin.kononov@gmail.com

Комбинированные динамические системы (КДС) с входными и выходными вектор-функциями непрерывного времени представляют собой математические модели ряда современных технических систем в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений и связанных с ними посредством граничных условий и условий связи уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях [1]. После линеаризации и решения модельных краевых задач динамическая модель управляемой КДС сводится к матрице передаточных функций

$$\Phi(\lambda,\mathbf{p},\mathbf{s}) = [\Phi_{kj}(\lambda,\mathbf{p},\mathbf{s})] = [Q_{kj}(\lambda,\mathbf{p},\mathbf{s})/D(\lambda,\mathbf{p},\mathbf{s})], \quad k=\overline{1,N_y},\ j=\overline{1,N_x} \tag{1}$$

связывающей компоненты изображения Лапласа входной и выходной вектор-функций, где $D : \mathbb{C}\times\mathbb{R}^{N_p}\times\mathbb{R}^{N_s} \to \mathbb{C}$ и $Q_{kj} : \mathbb{C}\times\mathbb{R}^{N_p}\times\mathbb{R}^{N_s} \to \mathbb{C}$ — характеристический и возмущающий квазимногочлены [1], $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$ — параметры обратных связей, $\mathbf{s} \in \Omega_s \subset \mathbb{R}^{N_s}$ — некоторые конструктивные параметры. На основании теорем об устойчивости КДС [1, 2] проверка принадлежности параметров обратных связей области устойчивости $\Omega_{st} = \Omega_{st}(\mathbf{s}) \subset \mathbb{R}^{N_p}$ сводится к проверке условия

$$\mathbf{p} \in \Omega_{st}(\mathbf{s}) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta} \arg D(i\omega, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = n\pi/2 \tag{2}$$

где n — обобщенная степень характеристического квазимногочлена [1]. В ряде случаев требуется реализовать выбор значений параметров обратных связей $\mathbf{p}$ так, чтобы выполнить улучшение качества переходных процессов сразу для всего семейства линеаризованных моделей КДС (1), зависящих от параметров $\mathbf{s} \in \Omega_s$. На основе теорем об устойчивом квазимногочлене, об устойчивых и неустойчивых КДС [1, 2] задача выбора обеспечивающих требуемое качество переходных процессов параметров обратных связей $\mathbf{p}$ в пределах пересечения областей устойчивости

$$\Omega^{(st)} = \bigcap_{\mathbf{s}\in\Omega_s} \Omega_{st}(\mathbf{s}) \tag{3}$$

сведена к задаче минимизации функции $F : \mathbb{R}^{N_p} \to \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \int_{\Omega_s} f(\mathbf{p},\mathbf{s}) ds_1 ... ds_{N_s}, & \mathbf{p} \in \Omega^{(st)}, \\ +\infty, \quad \mathbf{p} \notin \Omega^{(st)}, \end{cases} \tag{4}$$

$$f(\mathbf{p},\mathbf{s}) = \left[\|R_A(0,\mathbf{p}_0,\mathbf{s})\|^{-2} + \|R_A(0,\mathbf{p},\mathbf{s})\|^{-2}\right] \int_0^\infty f(\mathbf{p},\mathbf{s},\omega) d\omega,$$

$$f(\mathbf{p},\mathbf{s},\omega) = \|R_A(\omega,\mathbf{p},\mathbf{s}) - R_A(0,\mathbf{p},\mathbf{s}) R_A^*(\omega)\|^2 +$$

$$+c_1 \left\|{R'}_A(\omega,\mathbf{p},\mathbf{s}) - R_A(0,\mathbf{p},\mathbf{s}) {R_A^*}'(\omega)\right\|^2 +$$

$$+c_2 \left\|{R''}_A(\omega,\mathbf{p},\mathbf{s}) - R_A(0,\mathbf{p},\mathbf{s}) {R_A^*}''(\omega)\right\|^2, \quad ()' = d()/d\omega,$$

$$R_A(\omega,\mathbf{p},\mathbf{s}) = [R_{A_{kj}}(\omega,\mathbf{p},\mathbf{s})], \quad R_A^*(\omega) = \operatorname{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\},$$

$$R_{A_{kj}}(\omega,\mathbf{p},\mathbf{s}) = \begin{cases} \operatorname{Re}\Phi_{kj}(i\omega,\mathbf{p},\mathbf{s}), & A_j(\mathbf{p},\mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1+\omega^2}\operatorname{Re}[\Psi_{kj}(i\omega,\mathbf{p},\mathbf{s})], & A_j(\mathbf{p},\mathbf{s}) = 0, \end{cases}$$

$$R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} (1-(t_0\omega)^2)/(1+(t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p},\mathbf{s}) \neq 0, \\ \sqrt{1+\omega^2}(1-(t_0\omega)^2)/(1+(t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p},\mathbf{s}) = 0, \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p},\mathbf{s}) = \left[\sum\nolimits_{k=1}^{N_y} |\Phi_{kj}(0,\mathbf{p},\mathbf{s})|^2\right]^{1/2}, \quad \Psi_{kj}(\lambda,\mathbf{p},\mathbf{s}) = \Phi_{kj}(\lambda,\mathbf{p},\mathbf{s})/\lambda,$$
$$k = \overline{1, N_y}, \qquad j = \overline{1, N_x},$$

что служит обобщением аналогичных результатов из работы [2].

Вычисление целевой функции (4) может быть распараллелено на основе последовательного создания и использования двух наборов задач. Первый набор задач обеспечивает проверку условия (3), а отдельные задачи в нем выполняют проверку условий (2). Второй набор задач реализует вычисление значения (4) на основе квадратурных формул, а отдельные задачи в нем выполняют вычисление подынтегрального выражения $f(\mathbf{p},\mathbf{s})$ в узлах квадратурной формулы. Задачи из созданных наборов поочередно запускаются на свободных в текущий момент времени вычислителях и выполняются на них параллельно.

В качестве приложения выполнен параметрический синтез автономной системы угловой стабилизации реактивных снарядов залпового огня [3]. Показана эффективность распараллеливания вычислений при реализации параметрического синтеза на симметричных мультипроцессорных системах с общей памятью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

2. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Комарова М. С.* Выбор оптимальных параметров комбинированных динамических систем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 7–11.

3. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В.* К устойчивости системы угловой стабилизации вращающегося упругого стержня под действием продольного ускорения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 12–25.

УДК 517.984

ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА «ДВАЖДЫ СИММЕТРИЧНЫХ» МНОЖЕСТВ Ю. КАЗЬМИНА

Г. И. Андриянов (Калуга, РФ)
AndrijanovGI@info.sgu.ru

Пусть D — односвязная ограниченная область, с односвязным дополнением до всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}_z$.

$A(D)$ — пространство функций $f(z)$, регулярных в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах из D. Через $A_0(\overline{\mathbf{C}}_z \setminus D)$ обозначаем пространство функций $g(z), g(\infty) = 0$, регулярных на $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus D$, с топологией индуцированной топологией сопряженного пространства, которое может быть реализовано в виде $A(D)$. Хорошо известно следующее

Определение. Система функций $\{f_n(z)\}_0^\infty$, регулярных в области D, называется *полной в пространстве* $A(D)$, если замыкание линейной оболочки данной системы по топологии пространства $A(D)$, совпадает со всем $A(D)$.

Рассмотрим систему аналитических функций

$$\bigcup_{k=0}^{k=2} \left\{[W(z\delta^k)]^{3n}\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad k = 0, 1, 2; \quad \delta = \exp\left\{\frac{2\pi i}{3}\right\}, \tag{1}$$

здесь $W(z)$ — регулярная однолистная функция в области D. Но этого мало, будем считать, что область D — инвариантна относительно поворотов на угол $2\pi/3$, вокруг начала координат в $\mathbf{C}_z$. Тот факт, что область D инвариантна относительно поворотов на угол $2\pi/3$ в $\mathbf{C}_z$, будем записывать в виде: $D \subset S_\delta$.

Примем обозначения: $S_\delta\, W\, S_\delta(D) \equiv \{$компакты $B \subset D, B \neq \phi$: $B \subset S_\delta$ и $W(B) \subset S_\delta\}$, т. е. множество B — инвариантно относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{3}$, вокруг начала координат в $\mathbf{C}_z$ и его образ $W(B)$ — тоже инвариантен относительно поворотов на угол $2\pi/3$ вокруг начала координат, но уже в плоскости $\mathbf{C}_w$. Таким образом, B — «дважды симметричное» множество (случай $p = 3$).

Через $S_\delta \;\; W \;\; S_{\delta T}(D)$ обозначим класс множеств B, состоящих из конечного числа изолированных точек: $B \subset S_\delta \;\; W \;\; S_\delta(D)$. Через $S_\delta\, W\, S_{\delta T 9}(D)$ обозначим класс множеств B следующего вида:

$$B \equiv \{\{z_0,\, z_0\delta,\, z_0\delta^2\}; \quad \{z_1,\, z_1\delta,\, z_1\delta^2\}; \quad \{z_2,\, z_2\delta,\, z_2\delta^2\};$$
$$z_0 \neq z_1 \neq z_2 \neq 0; \quad \{z_0,\ z_1,\ z_2\} \subset D\}.$$

Очевидно, что образы точек из множества B в этом случае имеют вид:

$$W(B) = \{\{w_0,\, w_0\delta,\, w_0\delta^2\}; \quad \{w_1,\, w_1\delta,\, w_1\delta^2\}; \quad \{w_2,\, w_2\delta,\, w_2\delta^2\}\}.$$

При изучении «дважды симметричных» множеств важную роль играет следующее K-условие:

существует точка $a \in \mathbf{C}_w$, такая, что функция

$$f_0(w) \equiv \frac{\{e^{aw} + e^{aw\delta} + e^{aw\delta^2}\}}{3}$$

имеет только три простых нуля в области G $(G \equiv W(D))$, вида $\{w^*,\, w^*\delta,\, w^*\delta^2\}$.

Предложение 1. *Пусть выполнено K-условие. Если система функций* (1) *неполна в пространстве $A(D)$, то $S_\delta\ W\ S_{\delta T9}(D) \neq \phi$.*

Доказательство получено с помощью техники краевых задач (см. [1]), проблемы моментов Ю. Казьмина (см. [2]) и модифицированной проблемы моментов (см. [3]). Кроме того (с использованием техники краевых задач) доказано и обратное.

Предложение 2. *Если $S_\delta\ W\ S_{\delta T9} \neq \phi$, то система функций* (1) *— неполна в пространстве $A(D)$.*

Из Предложений 1, 2 следует

Теорема. *Пусть выполнено K-условие. Система функций* (1) *полна в пространстве $A(D)$* ($D \subset S_\delta$, $\delta = \exp\{2\pi i/3\}$)*, тогда и только тогда, когда $S_\delta\ W\ S_{\delta T9}(D) \neq \phi$.*

Таким образом этот результат сводит проблему полноты системы функций (1) к поиску «дважды симметричных» точечных множеств $B \subset D$ (случай $p = 3$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.

2. *Казьмин Ю. А.* Общая проблема моментов в комплексной области // Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Fanctions (Budapest,1969). Budapest, 1972. P. 225–254.

3. *Андриянов Г. И.* Модифицированная проблема моментов в комплексной области // Мат. заметки. 2002. Т. 72, № 6. С. 804–814.

УДК 517. 538.52 + 517. 538.53

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА В ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ПАДЕ

А. В. Астафьева (Гомель, Беларусь)
avastafeva@mail.ru

Пусть

$$\left\{ f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_j^{\nu} z^{\nu} \right\}_{j=1}^{k} \tag{1}$$

набор голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем $n, m_1,\ m_2, \dots, m_k$ — произвольные целые неотрицатетельные числа. Обозначим $\sum_{j=1}^{k} m_j = m$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Известно, что для системы экспонент $f_j(z) = e^{\lambda_j z}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ — различные комплексные числа, при $j = 1, 2, \dots, k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^{j}$, $degQ_m \le m$, $degP_{n_j}^{j} \le n_j$, для которых

$$Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^{j}(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots$$

и единственные рациональные функции

$$\pi_{n,m}^{j}(z) = \pi_{n_j,m}^{j}(z, f_j) = \frac{P_{n_j}^{j}(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

называемые аппроксимациями Эрмита-Паде для системы функций (1) [1, гл. 4].

В настоящей работе исследуется асимптотика поведения аппроксимаций Эмита–Паде для системы из двух экспонент $\{e^{(a+i)z}, e^{(a-i)z}\}$ при $m_1 = m_2 = n$ и $m_1 \to \infty$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $\{e^{(a+i)z}, e^{(a-i)z}\}$ — набор из двух экспонент с действительными числом a, удовлетворяющему словию $a^2 \neq (7 - \sqrt{48})$, а $\{\pi_{n_1,m}^{1}(z, e^{(a+i)\xi}), \pi_{n_2,m}^{2}(z, e^{(a-i)\xi})\}$ — соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита–Паде. Тогда, если $m_1 = m_2 = n$, $n_1 = n_2 = 2n$, для любого комплексного числа z, при $n \to \infty$*

$$e^{(a+i)z} - \pi_{2n,m}^{1}(z, e^{(a+i)\xi}) = \frac{2z^{3n+1}}{(3n)!(2 + 4ia - a^2)n}(a)^{n+1} \times$$
$$\times (2 + ia)^{n+1} e^{5az/2}(1 + O(1)),$$
$$e^{(a-i)z} - \pi_{2n,m}^{2}(z, e^{(a-i)\xi}) = \frac{2(-1)^{n+1} z^{3n+1}}{(3n)!(2 + 4ia - a^2)n}(a)^{n+1} \times$$
$$\times (ai - 2)^{n+1} e^{5az/2}(1 + O(1)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 256 с.

2. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного : учеб. для вузов. 3-е изд. М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 480 с.

УДК 517.5

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ХААРА В СЖАТИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ [1]

А. А. Барышев, Д. С. Лукомский, С. Ф. Лукомский
(Саратов, РФ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Цель доклада – изучить эффективность обобщенных двумерных систем Хаара в сжатии изображений. Пусть $(G,\dot{+})$ локально компактная абелева группа, топология в которой задана счетной системой открытых подгрупп

$$\supset G_{-n} \supset \dots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

$(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$, $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — базисная последовательность в G, т. е. $g_n \in \in G_n/G_{n+1}$, μ — мера Хаара на G. Пусть далее X — совокупность характеров группы G, $G_n^\perp$ — аннуляторы подгрупп G_n, (r_n) — базисная последовательность в X, т. е. $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Характеры r_n называют функциями Радемахера. Функции Хаара на нульмерной группе определяются равенствами

$$H_0 \equiv 1, \quad H_{jp^n+k}(x) = r_n^j(x\dot{-}q)\mathbf{1}_{G_n}(x\dot{-}q), \quad k=\overline{0,p^n-1}, \quad j=\overline{1,p-1},$$

где k и q связаны соотношениями

$$k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n-1}p^{n-1},$$
$$q = a_0 g_{n-1} \dot{+} a_1 g_{n-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_0.$$

Носитель функции $H_{jp^n+k}(x)$ есть смежный класс $G_n\dot{+}q$. Построим систему Хаара на произведении групп $G\times G$.

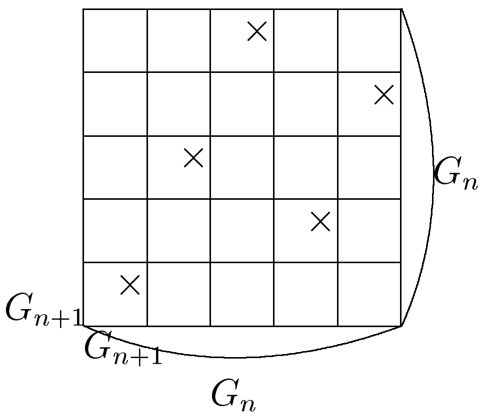
1. Для этого строим последовательности

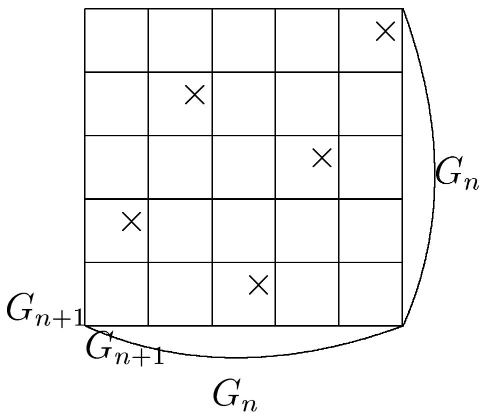
$$\mathfrak{G}_{2n+1} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1}(G_{n+1}\times G_{n+1}\dot{+}j\mathbf{g}_{2n+1}), \quad \mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n),$$

$$\mathfrak{G}_{2n} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1}(\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}j\mathbf{g}_{2n}), \quad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, (\nu\dot{+}s)g_n), \quad s=\overline{1,p-1}.$$

Знак $\dot{+}$ в определении вектора $\mathbf{g}_{2n}$ означает сложение по модулю p. Очевидно, что $\mathfrak{G}_{2n} = G_n \times G_n$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).





На этих рисунках: подгруппа $\mathfrak{G}_{2n+1}$ при $\nu = 2$ и смежный класс $\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\mathbf{g}_{2n}$ при $s = 3, p = 5$.

2. На произведении $G \times G$ по цепочке подгрупп $\mathfrak{G}_m$ строим функции Радемахера

$$\mathbf{r}_{2n+1}(x_0, x_1) = r_n(\gamma_0, x_0) \cdot r_n(\gamma_1, x_1),$$
$$\mathbf{r}_{2n}(x_0, x_1) = r_n(\xi_0, x_0) \cdot r_n(\xi_1, x_1),$$

где

$$\gamma_0 + \gamma_1\nu \equiv 1 \bmod p, \quad \xi_0 + \xi_1\nu \ \equiv 0 \bmod p, \quad \xi_1 s \equiv 1 \bmod p, \quad \xi_1 \neq 0.$$

В этом случае функции $(\mathbf{r}_{2n}, \mathbf{r}_{2n+1})$ образуют систему Радемахера и выполнены равенства

$$\mathbf{r}_{2n}(\mathbf{g}_{2n}) = (r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}, \quad \mathbf{r}_{2n+1}(\mathbf{g}_{2n+1}) = (r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

3. Записываем функции Хаара на группе $\mathfrak{G} = G \times G$ с основной цепочкой подгрупп $(\mathfrak{G}_{2n}, \mathfrak{G}_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$, базисной последовательностью $(\mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ и системой Радемахера $(\mathbf{r}_{2n}(x_0, x_1), \mathbf{r}_{2n+1}(x_0, x_1))_{n=0}^{\infty}$

$$H_{jp^n+k}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_n(\mathbf{x}\dot{-}\mathbf{q})\mathbf{1}_{\mathfrak{G}_n\dot{+}\mathbf{q}}(x) \quad (j = \overline{1, p-1}).$$

Здесь $\mathbf{q} = a_0\mathbf{g}_0\dot{+}a_1\mathbf{g}_1\dot{+}\ldots\dot{+}a_{n-1}\mathbf{g}_{n-1}$, число k определяется по элементу $\mathbf{q}$ равенством $k = a_{n-1} + a_{n-2}p + \cdots + a_0 p^{n-1}$.

Таким образом система Хаара определяется 3 параметрами: p, ν, s. Мы представим результаты численного эксперимента по сжатию изображения с мелкими деталями в зависимости от выбора этих параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukomskii Sergei, F.* Haar system on a product of zero-dimensional compact groups // Cent. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9(3). P. 627–639.

УДК 517.518

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО В КЛАССАХ ВАТЕРМАНОВСКОГО ТИПА[1]

А. Н. Бахвалов (Москва, Россия)
an-bakh@yandex.ru

В работе рассматривается поведение средних Чезаро отрицательного порядка ((C,α)-средних) для сумм тригонометрического ряда Фурье (определение этих методов суммирования см., например, в [1, т. 1, гл. 3, § 5]).

Ватерман [2] показал, что при $\alpha \in (-1,0)$ для функции из введенных им классов $\{n^{\alpha+1}\}BV([-\pi,\pi])$ ее (C,α)-средние равномерно ограничены, а если функция к тому же принадлежит формально более узкому классу $C\{n^{\alpha+1}\}V([-\pi,\pi])$, то эти средние всюду сходятся. Позднее Саблин [3] доказал, что при всех $\alpha \in (-1,0)$ указанные классы совпадают.

С другой стороны, в той же работе [2] было показано, что ограниченность (C,α)-средних не гарантирована ни для какого более широкого класса ΛBV, а автор [4] привел пример функций из любого более широкого класса ΛBV, для которых нарушено даже свойство локализации соответствующих чезаровских средних.

Многомерные обобщения этих результатов получены в работах Гогинавы и Саакяна [5] и автора [6], см. также ссылки в этих работах.

Мы устанавливаем условие, более слабое, чем непрерывность по $\{n^{\alpha+1}\}$-вариации, но всё же гарантирующее локализацию средних Чезаро. Напомним, что Λ-вариацией функции f на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$V_\Lambda(f,[a,b]) = \sup_\Omega \sum_k \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k},$$

где Ω — совокупность всех систем $\{I_k\}$ попарно непересекающихся интервалов из $[a,b]$, а $f(I)$ — приращение функции на интервале I. Класс $\Lambda BV([a,b])$ есть множество функций, для которых эта величина конечна.

Функция f называется непрерывной по Λ-вариации (обозначается $f \in$ $\in C\Lambda V([a,b])$), если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\Omega \sum_k \frac{|f(I_k)|}{\lambda_{n+k}} = 0.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00043) и гранта НШ-3682.2014.1.

Определение. Скажем, что f *непрерывна в среднем по* Λ*-вариации* ($f \in C\Lambda vm([a,b])$), если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(I_k)|}{\lambda_{n+k}} = 0.$$

Отличие от определения непрерывности по Λ-вариации в том, что число слагаемых в сумме связано со сдвигом последовательности $\{\lambda_k\}$ в знаменателе. Это условие, как несложно показать, равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\Omega} \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{|f(I_k)|}{\lambda_{n+k}} = 0 \qquad (*)$$

при некотором $\gamma > 0$, или тому, что $(*)$ выполнено при всех $\gamma > 0$.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (-1, 0)$ *и* $f \in C\{n^{\alpha+1}\}vm([-\pi,\pi])$. *Тогда если* $f(x) = 0$ *на* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *при некотором* $\delta > 0$, *то* (C,α)*-средние ряда Фурье функции* f *сходятся к нулю в точке* x_0, *и притом равномерно на любом отрезке* $[x_0 - t, x_0 + t]$, *где* $0 < t < \delta$.

Отметим, что теорема не вытекает из указанных выше результатов Ватермана и Саблина. Действительно, рассмотрим при $\beta \in (0,1)$ последовательность $a_k = \dfrac{1}{k^{1-\beta}\ln(k+1)}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{k^\beta} = \infty$, но в то же время

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n+k)^\beta} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\beta}\ln(k+1)} = 0.$$

Используя это наблюдение, несложно построить пример кусочно-линейной функции, не принадлежащей классу $\{n^\beta\}BV([-\pi,\pi])$, но принадлежащей классу $C\{n^\beta\}vm([-\pi,\pi])$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. 616 с.

2. *Waterman D.* On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Studia math. 1976. Vol. 55(1). P. 87–95.

3. *Саблин А. И.* Λ-вариация и ряды Фурье // Изв. вузов. Математика. 1987. № 10. С. 66–68.

4. *Бахвалов А. Н.* О локализации средних Чезаро рядов Фурье функций ограниченной Λ-вариации // Изв. вузов. Математика. 2011. Т. 55, № 8. С. 9–13.

5. *Гогинава У., Саакян А.* О суммируемости кратных рядов Фурье функций ограниченной обобщенной вариации // Труды МИАН. М. : МАИК. 2013. Т. 280. С. 150–161.

6. *Бахвалов А. Н.* Непрерывность по Λ-вариации и суммирование методами Чезаро кратных рядов Фурье // Мат. заметки. 2011. Т. 90(4). С. 483–500.

УДК 517.982.256

ОБ N-АНТИПРОКСИМИНАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ[1]

Б. Б. Беднов (Москва, РФ)
noriiii@inbox.ru

Рассмотрим банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ и непустое множество M в нём. Для точки $x \in X$ определим метрическую проекцию $P_M(x) = \{y \in M : \|x-y\| = \rho(x, M)\}$, где $\rho(x, M) = \inf\limits_{z \in M} \|x - z\|$. Множество M называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus M$ во множестве M нет ближайшей точки, то есть $P_M(x) = \emptyset$.

Антипроксиминальные множества исследовали Кли, Эдельштейн, Томпсон, Кобзаш, Борвейн, Фелпс, В. П. Фонф, Флорет, В. С. Балаганский, Джименез-Севилла, Морено и др. (подробнее см. [1]).

В работе [2] для точек $x_1, \dots, x_n \in X$ определена метрическая n-проекция $P_M(x_1, \dots, x_n) = \left\{ y \in M : \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i - y\| = \rho(x_1, \dots, x_n, M) \right\}$, где $\rho(x_1, \dots, x_n, M) = \inf\limits_{z \in M} \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i - z\|$, и поставлен вопрос об исследовании $n-$антипроксиминальных множеств.

Определение. Непустое выпуклое замкнутое множество M назовём *n-антипроксиминальным*, если для любых таких $x_1, \dots, x_n \in X$, что $\rho(x_1, \dots, x_n, M) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$, выполнено $P_M(x_1, \dots, x_n) = \emptyset$.

При $n = 1$ n-антипроксиминальное множество есть в точности антипроксиминальное множество. Действительно, неравенство $\rho(x_1, \dots, x_n, M) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$ становится неравенством $\rho(x, M) > \rho(x, X)$, что эквивалентно условию $x \notin M$. Неравенство $\rho(x_1, \dots, x_n, M) > \rho(x_1, \dots, x_n, X)$ в определении означает, что метрическая проекция $P_M(x_1, \dots, x_n)$ не пересекается со множеством точек Штейнера $\mathrm{St}(x_1, \dots, x_n) = P_X(x_1, \dots, x_n)$. Если же это условие убрать, то определение потеряет смысл: при $n = 2$ можно найти такие две точки x_1, x_2, что отрезок $[x_1, x_2]$ пересекает M; тогда $P_M(x_1, x_2) \supset [x_1, x_2] \cap M$.

Доклад посвящён вопросу существования выпуклых замкнутых n-антипроксиминальных множеств в пространстве $\mathbf{c_0}$, пространстве L_1 суммируемых функций и пространстве $C[K]$ непрерывных функций на хаусдорфовом компакте K при $n = 2, 3, \dots$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №11-01-00952а).

Теорема 1. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в пространстве $\mathbf{c_0}$. Множество M 2-антипроксиминально тогда и только тогда, когда M антипроксиминально.*

В частности, антипроксиминальное выпуклое замкнутое ограниченное тело V, построенное Эдельштейном и Томпсоном [3] в пространстве $\mathbf{c_0}$ 2-антипроксиминально.

Теорема 2. *В пространстве L_1, сопряжённое к которому канонически изоморфно L_∞, в частности, в пространстве L_1 с σ-конечной мерой μ, не существует выпуклого замкнутого n-антипроксиминального множества ни для какого $n = 2, 3, \ldots$.*

Интересно, что вопрос о существовании в $L_1[0, 1]$ выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального тела открыт до сих пор.

Теорема 3. *В пространстве $C[K]$ не существует выпуклого замкнутого n-антипроксиминального множества ни для какого $n = 3, 4, \ldots$.*

Пример выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального тела в $C[K]$ построил В. С. Балаганский [4].

Интересен вопрос о существовании выпуклых замкнутых ограниченных 2-антипроксиминальных множеств в пространстве $C[K]$ для произвольного компакта K.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Cobzas S.* Antiproximinal sets in Banach spaces // Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica. 1999. Vol. 40, № 2. P. 43–52.

2. *Бородин П. А.* О выпуклости $N-$чебышёвских множеств // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 5. С. 19–46.

3. *Edelstein M., Thompson A. C.* Some results on nearest points and support properties of convex sets in $\mathbf{c_0}$ // Pacific J. Math. 1972. Vol. 40, № 3. P. 553–560.

4. *Балаганский В. С.* Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 5. С. 643–657.

УДК 517.984

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ (N,M)-ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА [1]

Г. С. Бердников (Саратов, РФ)
evrointelligent@gmail.com

Мы рассматриваем кратномасштабный анализ на локально компактных группах Виленкина $\mathfrak{G}$:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

$$\mathfrak{G} = \{x = (..., 0, x_n, x_{n+1}, ...)|\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \forall\ x_i = \overline{0, p-1},\ p \in \mathbb{N},\ x_n \neq 0\},$$

p — простое число. На группе определена операция покоординатного сложения по модулю p и она может быть представлена в виде

$$\mathfrak{G} = \bigcup_n \mathfrak{G}_n,$$

где

$$\mathfrak{G}_n = \{x = (..., 0, x_n, x_{n+1}, ...)|\ n \in \mathbb{Z},\ \forall\ x_i = \overline{0, p-1},\ p \in \mathbb{N},\ x_n \neq 0\},$$

и выполняется вложение

$$... \supset \mathfrak{G}_{-n} \supset ... \supset \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset ... \supset \mathfrak{G}_n \supset ...$$

Также мы рассматриваем аннуляторы $\mathfrak{G}_n^\perp$ — множества характеров, обращающих группы $\mathfrak{G}_n$ в единицу.

Для построения кратномасштабного анализа на $\text{Ł}_2(\mathfrak{G})$ необходимо найти масштабирующую функцию $\varphi(x)$, которая является решением масштабирующего уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(Ax \dot{-} h),$$

где $\sum |\beta_h|^2 < \infty$, H_0 — счетное множество сдвигов. Для преобразования Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ такой функции выполняется условие

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

где A — оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской.

Ю. Фарков [1] нашел необходимые и достаточные условия на масштабирующую функцию, при которых она порождает кратномасштабный анализ на группах Виленкина. Но в его работах нет алгоритма построения такой масштабирующей функции. В работе [2] для класса $(1, M)$-элементарных функций доказано, что ступенчатая функция порождает КМА тогда и только тогда, когда она порождена некоторым деревом и указан алгоритм ее построения по заданному дереву. Мы рассмотрим этот вопрос для более широкого класса (N, M)-элементарных функций.

Мы рассматриваем особый класс (N, M)-элементарных функций, который определяется следующим образом.

Определение. Мы будем называть маску $m_0(\chi)$ *N-элементарной* ($N \in \mathbb{N}_0$), если она постоянна на множествах вида $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\chi$ и ее модуль $|m_0(\chi)|$ принимает только два значения: 0 или 1, причем $m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}) = 1$. В этом случае, масштабирующую функцию $\varphi(x)$ с преобразованием Фурье вида

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n})$$

мы также будем называть *N-элементарной.*

N-элементарная функция φ называется *(N, M)-элементарной*, если $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$, т. е. $\operatorname{supp}(\hat{\varphi}) \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$ и она постоянна на всех подгруппах вида $\mathfrak{G}_{-N}\dot{+}g$. В этом случае *$(N, M)$-элементарным* мы также называем и преобразование Фурье этой функции — $\hat{\varphi}(\chi)$.

Теорема. *Пусть N — нечетное, $N = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть T — дерево, вершинами которого являются все возможные k-координатные векторы $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k}, \alpha_i = 0, 1, ..., p-1$, причем корнем дерева является нулевой вектор, а последние координаты вершин первого порядка отличны от нуля. Каждый вектор повторяется в дереве только один раз. Тогда по такому дереву можно построить (N, M) элементарную масштабирующую функцию φ, причем $M = kh - N - 1$, где h — максимальная длина пути от листа к корню.*

В докладе будет приведен конкретный алгоритм построения функции по заданному дереву указанного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934—952.

2. *Lukomskii S. F.* Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups. URL : http://arxiv.org/abs/1303.5635 (дата обращения 20.09.2013).

УДК 517.5

КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ–УОЛША С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ[1]

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский (Москва, РФ)
ig.bloshn@gmail.com

1. Пусть $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathbb{I}^N)$ обозначим множество суммируемых на $\mathbb{I}^N = \{x \in \mathbb{R}^N :$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

$0 \le x_j < 1,\ j = 1, \ldots, N\}$ функций f таких, что $\int\limits_{\mathbb{I}^N} \Phi(|f(x)|)dx < \infty$. Пусть $S_n(x; f)$, $n \in \mathbb{Z}_+^N$, — прямоугольная частичная сумма ряда Фурье по системе Уолша–Пэли функции $f \in \Phi(L)(\mathbb{I}^N)$, $N \ge 1$.

2. Рассмотрим M — множество чисел $\{1, \ldots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \ldots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$, — непустые подмножества множества M. Будем также считать, что $J_0 = M \setminus J_N = \emptyset$.

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$. Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{I}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_k] = \Omega[J_k] \times \mathbb{I}[M \setminus J_k]$, где $\Omega[J_k] = pr_{(J_k)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция Ω на пространство $\mathbb{R}[J_k]$, $\mathbb{I}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : 0 \le x_j < 1$ при $j \in M \setminus J_k\}$. Положим

$$W_k = \bigcup_{J_k \subset M} W[J_k] \quad \text{и} \quad W_k^0 = \bigcap_{J_k \subset M} W[J_k]. \tag{1}$$

В работе [1] (см. также [2]) было введено следующее понятие.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ — N-мерная мера Лебега), $J_k \subset M$, $1 \le k \le N$, $N \ge 1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_k$, если найдется множество W_k вида (1) такое, что $\mu(W_k \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_k$ есть свойство $\mathbb{B}_k(W^0)$, если $W_k = W_k(W_k^0)$.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \ge 2$, — произвольное множество, $\mu\mathfrak{A} > 0$. Нами в работах [3, 4] были получены критерии справедливости слабой обобщенной локализации почти всюду (СОЛ) для кратных рядов Фурье–Уолша функций из классов $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p \ge 1$, $N \ge 2$ в терминах свойства $\mathbb{B}_2$ множества $\mathfrak{A}$. (Для кратных рядов Фурье–Уолша функций из класса $\Phi(L)(\mathbb{I}^N)$ справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ СОЛ, если для любой функции $f \in \Phi(L)(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует такое подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A}_1 > 0$, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x; f) = 0$ почти всюду (п.в.) на $\mathfrak{A}_1$[1]).

Пусть далее, $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_l \in J_k$, $l = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$

[1]Символ $n \to \infty$ означает у нас, что $\min\limits_{1 \le j \le N} n_j \to \infty$.

являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (т.е. $n_j^{(\lambda+1)}/n_j^{(\lambda)} \geq q_j > 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, $j \in J_k$). В свою очередь, последовательности частичных сумм $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ будем называть «J_k-лакунарными последовательностями частичных сумм» ряда Фурье–Уолша.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < 1$, и пусть $2 \leq k \leq N$. Если существует множество W_k^0 вида (1) такое, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_k(W_k^0)$, то*

a) для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2k-1}(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_{N-1},\\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_{N-1}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x; f) = 0 \quad \textit{п.в. на} \quad W_k^0,$$

b) для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2k-2}(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\lambda_j \to \infty,\, j \in J_N} S_{n^{(\lambda)}[J_N]}(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad W_k^0\,{}^{1}.$$

Теорема 2. *Для любого J_k ($J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, или $J_k = \emptyset$, $k = 0$) существует множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < 1$, и существует функция $f \in L_\infty(\mathbb{I}^N)$ такая, что $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и*

$$\varlimsup_{\substack{n_0 \to \infty, n_j = n_0,\, j \in J_k,\\ n_j \to \infty,\, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{I}^N.$$

3. Результаты теорем 1 и 2, в частности, показывают, что если $N-1$ или N компонент «номера» $n \in \mathbb{Z}_+^N$ прямоугольной частичной суммы $S_n(x; f)$ будут элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, то для любого k, $2 \leq k \leq N$, в классах Орлича справедливость СОЛ на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_k$. При повышении гладкости рассматриваемых функций (т.е. при увеличении k) свойство $\mathbb{B}_{k-1}$ множества $\mathfrak{A}$ заменяется свойством $\mathbb{B}_k$, т.е.

[1]Для $N = 2$ можно доказать более сильный результат: для любого открытого (непустого) множества $\mathfrak{A}$ и для любой функции $f \in L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ L)(\mathbb{I}^2)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x; f) = 0$ п.в. на $\mathfrak{A}$.

«жесткие» условия на геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (определяемые свойством $\mathbb{B}_{k-1}$) заменяются более «мягкими» условиями, накладываемыми на ту же геометрию и структуру множества $\mathfrak{A}$ (определяемыми уже свойством $\mathbb{B}_k$). В [1] проведены исследования поведения последовательностей прямоугольных частичных сумм тригонометрических рядов Фурье функций $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{I}^N)$, $f = 0$ на $\mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mathfrak{F}$ — некоторые подпространства L_1) в зависимости от структурно-геометрических характеристик множества $\mathfrak{A}$ (СГХ($\mathfrak{A}$)) и вида пространства $\mathfrak{F}$. Даны описания некоторых пар ($\mathfrak{F}$, СГХ($\mathfrak{A}$)).

4. Результат теоремы 1 интересно сравнить с результатами о сходимости кратных рядов Фурье–Уолша в классах Орлича, прямоугольные частичные суммы которых являются J_{N-1} или J_N-лакунарными последовательностями. В работе Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе [5] доказано: для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2N-1}(\mathbb{I}^N)$

$$\lim_{\substack{\lambda_j\to\infty,\, j\in J_{N-1},\\ n_j\to\infty,\, j\in M\setminus J_{N-1}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-1}]}(x;f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{I}^N,$$

а для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{2N-2}(\mathbb{I}^N)$

$$\lim_{\lambda_j\to\infty,\, j\in J_N} S_{n^{(\lambda)}[J_N]}(x;f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{I}^N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bloshanskii I. L.* Structural and Geometric Characteristics of Sets of Convergence and Divergence of Multiple Fourier Series of Functions which Equal Zero // Intern. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Proc. 2004. Vol. 2, № 2. P. 187–195.

2. *Блошанский И. Л.* Структурные и геометрические характеристики множеств сходимости и расходимости кратных разложений Фурье функций, равных нулю на некотором множестве // Вестник МГОУ. 2007. № 1. С. 3–13.

3. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л.* Обобщенная локализация для кратных рядов Фурье–Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 2. С. 21–36.

4. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л.* Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье-Уолша функций из $L_p, p \geq 1$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1996. Т. 214. С. 83–106.

5. *Санадзе Д. К., Хеладзе Ш. В.* О сходимости и расходимости кратных рядов Фурье–Уолша // Тр. Тбилисск. мат. ин-та АН Груз. ССР. 1977. Vol. 55, № 2. P. 93–106.

УДК 517.518.4, 517.518.5

КРИТЕРИЙ РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ В КРАТНЫЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ С «J_k-ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ»[1]

И. Л. Блошанский, Д. А. Графов (Москва, РФ)
ig.bloshn@gmail.com, grafov.den@yandex.ru

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geq 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье $f(x) \sim \sum c_k e^{ixk}$, и $S_n(x; f)$, $n \in \mathbb{Z}_+^N$, — прямоугольная частичная сумма этого ряда, и пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, разложена в кратный интеграл Фурье $g(x) \sim \int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, и $J_\alpha(x; g)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^N$, — собственный интеграл Фурье.

Предположим, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{T}^N$. Обозначим символом $R_\alpha(x; f, g)$ разность $R_\alpha(x; f, g) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$, и символом $R_\alpha(x; f)$ разность $R_\alpha(x; f) = S_n(x; f) - J_\alpha(x; g)$, если $g(x) = 0$ вне $\mathbb{T}^N$. Здесь $n = ([\alpha_1], \ldots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}_+^N$, $[\alpha_j]$ — целая часть $\alpha_j \in \mathbb{R}_+^1$. В работе [1] И. Л. Блошанский доказал, что для $N = 2$ и $p > 1$, $R_\alpha(x; f, g) \to 0$ при $\alpha \to \to \infty$ (т.е $\min\limits_{1 \leq s \leq N} \alpha_s \to \infty$) почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$. В этой же работе была выяснена существенность условий $N = 2$, $p > 1$. В частности, была построена функция $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, такая, что $\varlimsup\limits_{\alpha \to \infty} |R_\alpha(x; f_0)| = +\infty$ всюду внутри $\mathbb{T}^N$. Последний результат ставит вопрос о справедливости равносходимости п.в. (рассматриваемых разложений) в классах L_p, $p > 1$, если $N \geq 3$, при дополнительных ограничениях на функцию $f(x)$ и вектор α.

Пусть $M = \{1, 2, \ldots, N\}$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset M$, $j_1 < \cdots < j_k$, $1 \leq k \leq N - 2$, и пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$. Символом $\alpha^{(\lambda)} = \alpha^{(\lambda)}[J_k] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$ обозначим N-мерный вектор у которого компоненты α_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) обобщенных вещественных лакунарных последовательностей (данное понятие было введено в работе [2]), т.е. для $j \in J_k$: $\alpha_j = \alpha_j^{(\lambda_j)}$, $|\alpha_j^{(\lambda_j)} - n_j^{(\lambda_j)}| \leq \varrho$, $n_j^{(\lambda_j+1)} / n_j^{(\lambda_j)} \geq q > 1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots$, где ϱ некоторая постоянная.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

Обозначим $\mathbb{R}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$, и $\mathbb{T}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : -\pi \le x_j < \pi$ при $j \in M \setminus J_k\}$.

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$. Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$, $J_2 \subset M$.

Фиксируем произвольную выборку J_k из M, $1 \le k \le N-2$, и определим следующие множества

$$W(J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \quad \text{и} \quad W^0(J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \tag{1}$$

В работе [3] И. Л. Блошанским и О. В. Лифанцевой было введено следующее понятие.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, $N \ge 3$.

1. Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$ вида (1) такое, что $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ есть свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, если $W = W(W^0, J_k)$.

2. Свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть *максимальным свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ *множества* $\mathfrak{A}$, если для любого множества $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k)$ вида (1) такого, что $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widetilde{W}^0)$.

Далее, пусть измеримое множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $N \ge 3$, удовлетворяет следующим условиям на границу:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}) = 0; \tag{2}$$

$$\mu_2 Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{3}$$

здесь $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$, μ_2 — мера на плоскости ($intP$ множество внутренних точек, $\overline{P}$ замыкание и FrP — граница множества P).

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольное измеримое множество,* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \ge 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, *и пусть* $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-2$.

1. *Если существует множество* $W^0 = W^0(J_k)$ *вида* (1) *такое, что множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ \alpha_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} R_{\alpha^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (2), (3), *тогда*

2. *Если свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ является максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_1 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $f_1(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(v_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(v_j)} \to \infty$ при $v_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{v_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} |R_{\alpha^{(v)}[J_k]}(x; f_1)| = +\infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

3. *В частности, если множество $\mathfrak{A}$ вообще не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_2 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $f_2(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей вещественных чисел $\{\alpha_j^{(v_j)}\}$, $j \in J_k$, $\alpha_j^{(v_j)} \to \infty$ при $v_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{v_j\to\infty, j\in J_k,\\ \alpha_j\to\infty, j\in M\setminus J_k}} |R_{\alpha^{(v)}[J_k]}(x; f_2)| = +\infty \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

Результат теоремы показывает, что для любого k, $1 \le k \le N-2$, справедливость или несправедливость равносходимости п.в. для кратных рядов и интегралов Фурье (в случае «лакунарной последовательности частичных сумм») в классах L_p, $p > 1$, на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$ определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, где величина k — это число «лакунарных компонент» вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ («номера» $R_\alpha(x; f)$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блошанский И. Л.* О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 2. С. 153–168.

2. *Блошанский И. Л., Графов Д. А.* Равносходимость разложений в кратный тригонометрический ряд и интеграл Фурье в случае «лакунарной последовательности частичных сумм» // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 3. С. 260–263.

3. *Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.* Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 4. С. 439–442.

УДК 517.51

О ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕМ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И НЕПРЕРЫВНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ[1]

Д. И. Бойцов, С. П. Сидоров (Саратов, РФ)
SidorovSP@info.sgu.ru

Если переменные состояния и управления задачи динамического программирования являются непрерывными, то целевая функция может быть приближена удобными для вычислений методами. Обычно целевую функцию приближают элементами параметрически заданного семейства функций (многочлены, сплайны и т. п.). Алгоритм с итерацией целевой функции для задач с конечным горизонтом включает использование либо спектральных методов приближения, либо методов конечных элементов [1, 2].

Как указывается в работе [3], данный метод имеет ряд недостатков. Так, на шаге максимизации использование методов локальной оптимизации требует, чтобы целевая функция была гладкой и выпуклой, а множество допустимых значений было выпуклым.Так как традиционные методы аппроксимации не гарантируют сохранение выпуклости при приближении, это приводит к отсутствию стабильности работы алгоритма.

Мы воспользуемся идеей, состоящей в применении формосохраняющих методов приближения (таких, как операторы Бернштейна, формосохраняющая сплайн-интерполяция), чтобы избежать этого недостатка.

В докладе будут представлены новые методы формосохраняющего динамического программирования для решения задач принятия решений с дискретным временем и непрерывными состояниями на основе применения многочленов Бернштейна и формосохраняющих интерполяционных сплайнов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cai Y.* Dynamic programming and its application in economics and finance. PhD thesis, Stanford University, 2009.

2. *Judd K. L.* Numerical methods in economics. Cambridge : MIT Press, 1998.

3. *Cai Y., Judd K. L.* Shape-preserving dynamic programming // Math. Meth. Oper. Res. 2013. Vol. 77. P. 407–421.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА КОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ[1]

Н. П. Бондаренко (Саратов, РФ)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

Разнопорядковые дифференциальные операторы на графах и некоторые их приложения изучались в работах [1–2]. В. А. Юрко была решена обратная спектральная задача для таких операторов на графе-звезде [3]. В данной работе изучается обратная задача для дифференциального оператора на графе с циклом следующего вида.

Рассмотрим компактный граф G с вершинами $V = \{v_0, \dots, v_m\}$ и ребрами $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_m\}$, где $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1, m}$, и e_0 — цикл, содержащий только одну вершину v_0. Таким образом, v_j, $j = \overline{1, m}$, — граничные вершины и v_0 — единственная внутренняя вершина. Пусть T_j — длина ребра e_j. Для каждого ребра $e_j \in \mathcal{E}$ введем параметр $x_j \in [0, T_j]$ таким образом, чтобы при $j = \overline{1, m}$ конец $x_j = 0$ соответствовал вершине v_j, а конец $x_j = T_j$ — вершине v_0. При $j = 0$ оба конца совпадают с вершиной v_0.

Фиксируем числа $2 = n_0 \le n_1 \le \dots \le n_m$ и рассмотрим следующие дифференциальные уравнения различных порядков:

$$y_j^{(n_j)} + \sum_{\mu=0}^{n_j-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{0, m}, \tag{1}$$

где $q_{\mu j} \in L[0, T_j]$. Будем называть набор $q := \{q_{\mu j}\}_{j=\overline{0,m},\, \mu=\overline{0,n_j-2}}$ *потенциалом* на графе G.

Перейдем к введению условий склейки во внутренней вершине v_0, которые будут представлять собой обобщение условий Кирхгофа для операторов Штурма–Лиувилля (см. [4]) и операторов высших порядков на графах. Рассмотрим линейные формы

$$U_{j\nu}(y_j) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu} y_j^{(\mu)}(T_j), \quad \gamma_{j\nu\nu} \ne 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{0, n_j - 1},$$

$$U_{0\nu}(y_0) = y_0^{(\nu)}(T_0), \quad \nu = 0, 1,$$

где $\gamma_{j\nu\mu}$ — некоторые комплексные числа.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

Определим условия непрерывности $C(\nu)$, $C(0,\alpha)$ и условия Кихгофа К(ν) порядка ν:

$$
\begin{array}{ll}
C(\nu)\colon & U_{m\nu}(y_m) = U_{j\nu}(y_j), \quad j = \overline{0, m-1}\colon \nu < n_j - 1, \\
C(0,\alpha)\colon & C(0) \text{ и } \alpha y_0(0) = y_0(T_0), \\
K(\nu)\colon & \sum\limits_{j\colon \nu < n_j} y_j^{(\nu)}(T_j) = \delta_{1\nu} y_0'(0),
\end{array}
$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, $\alpha \neq 0$ — некоторое комплексное число.

В работе [5] изучалось восстановление потенциала q на графе G по системе спектров различных краевых задач для уравнения (1) и некоторым дополнительным данным, связанным с циклом. В данной работе исследуется обратная задача в другой постановке. Мы откажемся от требования дополнительных данных засчет вариации параметра α в условиях склейки.

Пусть $m > 1$. Случай $m = 1$ требует незначительных изменений. Зафиксируем номер ребра $s = \overline{1, m}$ и порядки $k = \overline{1, n_s - 1}$, $\mu = \overline{k, n_s}$. Рассмотрим краевые задачи $L_{sk\mu}$ для системы (1) с краевыми условиями

$$
\begin{cases}
y_k^{(\nu-1)}(0) = 0, & \nu = \overline{1, k-1}, \mu, \\
y_j^{(\nu-1)}(0) = 0, & \nu = \overline{1, n_j - k}, \ j = \overline{1, m} \backslash s\colon n_j > k, \\
y_j(0) = 0, & j = \overline{1, m}\colon n_j \leq k,
\end{cases}
$$

и условиями склейки $C(0, \alpha_s)$, $C(\nu)$, $\nu = \overline{1, k-1}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{k, n_s - 1}$, в вершине v_0. Здесь α_s, $s = \overline{1, m}$, — отличные от нуля числа, среди которых есть хотя бы два различных. Будем считать, что выполняются условия регулярности из [5]. Тогда задачи $L_{sk\mu}$ имеют дискретные спектры $\Lambda_{sk\mu} = \{\lambda_{lsk\mu}\}_{l \geq 1}$. Характеристические функции $\Delta_{sk\mu}$ краевых задач $L_{sk\mu}$ могут быть однозначно построены по их спектрам.

В работе решается следующая задача.

Обратная задача 1. *Даны спектры $\Lambda_{sk\mu}$, $s = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n_s - 1}$, $\mu = \overline{k, n_s}$, построить потенциал q на графе G.*

Зафиксируем $s = \overline{1, m}$ и $k = \overline{1, n_s - 1}$. Пусть $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j = \overline{1, m}}$ — решение системы (1) при условиях

$$
\begin{cases}
\psi_{sks}^{(\nu-1)}(0) = \delta_{k\nu}, & \nu = \overline{1, k}, \\
\psi_{skj}^{(\xi-1)}(0) = 0, & \xi = \overline{1, n_j - k}, \quad j = \overline{1, m} \backslash s\colon k < n_j, \\
\psi_{skj}(0) = 0, & j = \overline{1, m}\colon k \geq n_j, \\
C(0, \alpha_s), \quad C(\nu), & \nu = \overline{1, k-1}, \quad K(\nu), \quad \nu = \overline{k, n_s - 1}.
\end{cases}
$$

Пусть $M_{sk\mu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\mu-1)}(0,\lambda)$, $M_{sn_s\mu}(\lambda) = \delta_{n_s,\mu}$. При любом фиксированном $s = \overline{1,m}$ матрица $M_s(\lambda) := [M_{sk\mu}(\lambda)]_{k,\mu=1}^{n_s}$ называется *матрицей типа Вейля* для вершины v_s. Справедливы соотношения $M_{sk\mu}(\lambda) = -\dfrac{\Delta_{sk\mu}(\lambda)}{\Delta_{skk}(\lambda)}$, то есть матрицы типа Вейля могут быть построены по заданным спектрам.

Рассмотрим вспомогательную обратную задачу.

IP(s). *Дана матрица типа Вейля M_s, построить потенциал $q_s := \{q_{\mu s}\}_{\mu=0}^{n_s-2}$ на ребре e_s.*

Задача IP(s) имеет единственное решение, которое может быть построено методом спектральных отображений (см. [4]).

Пусть $S_0(x_0,\lambda)$ и $C_0(x_0,\lambda)$ — решения уравнения (1) на ребре e_0 ($n_0 = 2$), удовлетворяющие начальным условиям $S_0(0,\lambda) = C_0'(0,\lambda) = 0$, $S_0'(0,\lambda) = C_0(0,\lambda) = 1$. По известным характеристическим функциям $\Delta_{sk\mu}(\lambda)$ и потенциалам q_s на граничных ребрах оказывается возможным построить $S_0(T_0,\lambda)$ и $d_{\alpha_s}(\lambda) := C_0(T_0,\lambda) + \alpha_s S_0'(T_0,\lambda) - \alpha_s - 1$. Из функций $d_{\alpha_s}(\lambda)$ с различными α_s нетрудно найти $S_0'(T_0,\lambda)$. Осталось решить на ребре e_0 классическую обратную задачу по двум спектрам (нулям $S_0(T_0,\lambda)$ и $S_0'(T_0,\lambda)$) и найти потенциал $q_{00}(x)$ на цикле.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. *Обратная задача 1 однозначно разрешима и ее решение может быть найдено конструктивно описанным методом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Лазарев К. П.* Об одном классе разнопорядковых обыкновенных дифференциальных уравнений на графе // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 469–470.

2. *Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Дикарева Е. В., Перловская Т. В.* О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 146–148.

3. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов на графе с разными порядками на разных ребрах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 112–116.

4. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

5. *Bondarenko N.* An inverse problem for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges // arXiv:1309.5360 [math.SP].

УДК 517.547.22

НАИМЕНЬШИЙ РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЯМИ НА ЛУЧАХ ИЛИ В УГЛЕ ФИКСИРОВАННЫХ УСРЕДНЕННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ[1]

Г. Г. Брайчев (Москва, РФ)
braichev@mail.ru

Усредненными ρ-плотностями последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ называют величины $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}$ и $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varliminf\limits_{r\to+\infty} \dfrac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}$, где $N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \dfrac{n_\Lambda(t)}{t}dt$, $n_\Lambda(t) = \sum\limits_{|\lambda_n|\le t} 1$. Характеристика

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|$$

называется ρ-типом целой функции $f(z)$. Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$l_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = re^{i\frac{(2k+1)\pi}{m}},\, r > 0 \right\}, \quad k = 0, 1, ..., m-1, \quad V_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} l_k.$$

В докладе приводятся точные оценки снизу для ρ-типов целых функций с нулями, расположенными либо на нескольких лучах, либо в одном угле. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$, и $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f \subset V_m$, имеющими усредненные ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \ge \alpha^*$. Тогда выполняется неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \ge \frac{\rho}{m} \left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\frac{\pi\rho}{m}} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{m/\rho}}^{aa_2^{m/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\frac{\rho}{m}} - \alpha^* \tau^{-\frac{\rho}{m}}}{\tau + 1} d\tau \right), \qquad (1)$$

где a_1, a_2 являются корнями уравнения (см. [1])

$$a \ln\frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \qquad (0 \le a_1 \le 1 \le a_2 \le e). \qquad (2)$$

Для каждого фиксированного набора параметров m, ρ, β^*, α^* существует целая функция из указанного в условии класса, доставляющая равенство в (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).

При $\alpha^* = 0$ из теоремы 1 получаем

Следствие. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\beta^* > 0$, и $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f = \Lambda \subset V_m$ усредненной ρ-плотности $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta^* e\rho}{m} \max_{a>0} \frac{\ln(1+a^m)}{a^\rho}. \tag{3}$$

Для любых $m \in \mathbb{N}$, $\beta^* > 0$, $\rho \in (0, m)$ существует целая функция $\widetilde{f}(z)$ порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_{\widetilde{f}} \subset V_m$ усредненной верхней ρ-плотности β^*, доставляющая равенство в (3).

Рассмотрим важный случай целой функции с вещественными нулями, соответствующий значению $m = 2$ в приведенных выше результатах.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, 2)$ с вещественными нулями $\Lambda_f = \Lambda$. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Если $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* > 0$, то выполняется точная оценка*

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta^* e\rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(1+a^2)}{a^\rho}.$$

2. *Если $\rho \neq 1$, $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) = \beta^* > 0$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda) \geq \alpha^* \in [0, \beta^*]$, то имеет место точный результат для индикатора функции:*

$$h_\rho(f, \pm\frac{\pi}{2}) = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(ix)|}{x^\rho} \geq \frac{\rho}{2}\left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\frac{\pi\rho}{2}} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{2/\rho}}^{aa_2^{2/\rho}} \frac{\beta^* a^{-\frac{\rho}{2}} - \alpha^*\tau^{-\frac{\rho}{2}}}{\tau+1}\, d\tau\right)$$

с корнями a_1, a_2 уравнения (2). При $\rho = 1$ результат верен для канонических произведений $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}$. Именно,

$$h\left(f, \pm\frac{\pi}{2}\right) \geq \max_{a>0}\left\{\frac{\beta^*}{2a} \ln\frac{1+(aa_2)^2}{1+(aa_1)^2} + \alpha^* \operatorname{arctg}\frac{1+a^2a_1a_2}{a(a_2-a_1)}\right\}.$$

Оценку наименьшего типа целой функции с нулями в угле дает

Теорема 3. *Пусть $\beta^* > 0$, $\alpha^* \in [0, \beta^*]$, и $f(z)$ — целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$, все корни которой Λ_f лежат в угле $\{|\arg z| \leq \theta\}$, $\theta \in [0, \pi/2]$, причем $\overline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}_\rho^*(\Lambda_f) \geq \alpha^*$. Тогда справедлива точная* (*достижимая*) *оценка*

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\alpha^*\pi\rho}{\sin(\pi\rho)}\,\cos(\rho\,\theta) + \rho\,\max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \left(\beta^*\, a^{-\rho} - \alpha^*\,\tau^{-\rho}\right) \frac{\tau+\cos\theta}{\tau^2+2\tau\cos\theta+1}\,d\tau,$$

где по-прежнему a_1, a_2 *— корни уравнения* (2). *В частности, при* $\alpha^*=0$ *имеем*

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta^* e\rho}{2}\,\max_{a>0}\frac{\ln(1+2a\cos\theta+a^2)}{a^\rho}.$$

Относительно точных оценок типа целой функции в терминах обычных плотностей см. [2]–[4], а в терминах усредненных — [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М. : Прометей, 2005. 233 с.

2. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ- плотностью корней // СМФН. 2013. Т. 49. С. 132–164.

3. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho\in(0,1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 3–28.

4. *Шерстюков В. Б.* Минимальное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями заданных плотностей, лежащими в угле // Настоящий сборник.

5. *Брайчев Г. Г.* Наименьший тип целой функции порядка $\rho\in(0,1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Мат. сборник. 2012. Т. 203, № 7. С. 31–56.

УДК 517.983

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ[1]

В. М. Брук (Саратов, РФ)
vladislavbruk@mail.ru

На конечном или бесконечном интервале (a,b) рассмотрим систему уравнений

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00378).

$$y_{j-1}(t) = c_j + \sum_{k=1}^{j+1} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{j,k}) y_{k-1}(s), \quad j = 1, ..., r-1,$$

$$y_{r-1}(t) = c_r + \sum_{k=1}^{r} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{r,k}) y_{k-1}(s) + \lambda i^{-r} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) y_0(s) + i^{-r} \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) f(s), \quad (1)$$

где $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$, и 0, если $t_0 = t$. Здесь $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ — операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset (a,b)$, значения которых — линейные операторы в конечномерном гильбертовом пространстве H, причем мера $\mathbf{m}$ неотрицательна; $c_j \in H$ $(j = 1, ..., r)$; $y = y_0$, y_1,...,y_{r-1} — неизвестные функции, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ определено ниже). Меры $\mathbf{p}_{j,k}$ удовлетворяют условиям: (a) $\mathbf{p}_{j,k} = 0$ при $k > j+1$; (b) $\mathbf{p}_{j,j+1}(\Delta) = \int_\Delta p_{j,j+1}(t)dt$ для любого борелевского множества Δ (т. е. меры $\mathbf{p}_{j,j+1}$ абсолютно непрерывны) и операторы $p_{j,j+1}(t)$ обратимы при всех t; (c) $(J\mathbf{P})^* = -J\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ — матрица с элементами $\mathbf{p}_{j,k}$, $J = i^{r+1}\Lambda$, Λ — матрица с побочной диагональю $-E$, E,...,$(-1)^r E$ (E — тождественный оператор), остальные элементы Λ равны нулю (условие (d) означает, что система (1) формально самосопряженная).

Конец a называется регулярным, если $a > -\infty$ и меры $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ продолжаются (стандартным образом) на отрезок $[a, b_1]$ $(b_1 < b)$. Конец a называется сингулярным, если он не является регулярным. Аналогично определяются регулярность и сингулярность конца b. Если конец a сингулярный, полагаем $a_0 = a$. В случае регулярного конца a фиксируем конечное $a_0 < a$ и расширяем меры $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}$ на интервал $[a_0, b)$, полагая $\mathbf{p}_{j,k}(\Delta) = \mathbf{m}(\Delta) = 0$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a_0, b) \setminus [a, b)$. Аналогично определяется число b_0 для конца b.

Система (1) имеет единственное решение для любых фиксированных $c_j \in H$, $f \in \mathfrak{H}$ [1]. Пусть система функций $\widehat{y} = \mathrm{col}(y_0, ..., y_{r-1})$ является решением (1). Тогда y_j назовем *квазипроизводной* от y, обозначим $y_j = y^{[j]}$ и говорим, что $y = y_0$ — решение (1). Квазипроизводные непрерывны слева и в (1) $c_j = y^{[j-1]}(t_0)$. Если все меры $\mathbf{p}_{j,k}$ абсолютно непрерывны, то $y^{[j]}$ является квазипроизводной в смысле [2], [3]. Пусть $W_m(t,\lambda)$ — операторное решение (1) при $f = 0$, удовлетворяющее условию $W_m^{[j-1]}(t_0, \lambda) = \delta_{jm} E$ $(j, m = 1, ..., r)$. Однострочную матрицу $(W_1(t,\lambda), ..., W_r(t,\lambda))$ обозначим $W(t,\lambda)$.

На множестве финитных ступенчатых на (a_0, b_0) функций введем квазискалярное произведение $(x,y)_\mathbf{m} = \int_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})x(t), y(t))$. Отождествляя с нулем функции y, для которых $(y,y)_{\mathbf{m}}=0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Пусть Q_0 — множество элементов $c\in H^r$, для которых функция $W(t,\lambda)c$ отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$, $Q=H^r\ominus Q_0$. Можно доказать, что Q_0, Q не зависят от λ.

Определим *максимальное* отношение L как отношение, состоящее из тех пар $\{\tilde{y},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, для каждой из которых найдется такая пара $\{y,f\}$, что $\{y,f\}$ отождествлена в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$ и y является решением (1) при $\lambda=0$. Отношение L, вообще говоря, не является оператором, так как может случиться, что функция y отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$, а f отлична от нуля. Обозначим через L_0' отношение, состоящее из таких пар $\{y,f\}\in L$, что y финитна на (a_0,b_0) и является решением (1) при $\lambda=0$. Замыкание L_0 отношения L_0' назовем *минимальным* отношением. Так же, как в [1], доказывается, что отношение L_0 симметрическое и $L_0^*=L$.

Теорема 1. *Всякая обобщенная резольвента* $R(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\lambda\neq 0)$ *отношения* L_0 *является интегральным оператором*

$$(R(\lambda)f)(t)=\int_{a_0}^{b_0}K(t,s,\lambda)(d\mathbf{m}(s))f(s)$$

с ядром $K(t,s,\lambda)=W(t,\lambda)(M(\lambda)+(1/2)\mathrm{sgn}(s-t)iJ)W^*(s,\bar{\lambda})$, *где* $M(\lambda)$ — *голоморфная при* $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$ *операторная функция, значения которой — такие линейные операторы, отображающие* Q *в* Q, *что* $M^*(\lambda)=M(\bar{\lambda})$ *и* $(\lambda-\bar{\lambda})^{-1}(M(\lambda)-M^*(\bar{\lambda}))\geqslant 0$.

В случае, когда оба конца a, b регулярны, установим связь между обобщенными резольвентами и краевыми задачами со спектральным параметром в граничном условии. Пара $\{\tilde{y},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит отношению L, когда существует такая пара $\{y,f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$, что справедливо равенство

$$y(t)=W(t,0)c-W(t,0)iJ\int_{a_0}^{t}W^*(s,0)(d\mathbf{m})f(s),$$

где $c\in Q$. Через Γ обозначим оператор, ставящий в соответствие каждой паре $\{y,f\}\in L$ пару граничных значений $\{\mathcal{Y},\mathcal{Y}'\}\in Q\times Q$

$$\mathcal{Y}'=\int_{a_0}^{b_0}W^*(s,0)(d\mathbf{m})f(s),\quad \mathcal{Y}=c-(1/2)iJ\mathcal{Y}'.$$

Непосредственными вычислениями можно получить

$$\mathcal{Y}'=iJ(\widehat{W}^{-1}(b_0,0)\widehat{y}(b_0)-\widehat{W}^{-1}(a_0,0)\widehat{y}(a_0)),$$

$$\mathcal{Y} = 2^{-1}(\widehat{W}^{-1}(b_0, 0)\widehat{y}(b_0) + \widehat{W}^{-1}(a_0, 0)\widehat{y}(a_0)),$$

где $\widehat{y} = \mathrm{col}(y^{[0]}, ..., y^{[r-1]})$, $\widehat{W}$ — матрица с элементами $W_m^{[j-1]}$ $(j, m = 1, ..., r)$. Пара (Q, Γ) является пространством граничных значений отношения L_0 в смысле работ [4], [5]. Из [5] следует

Теорема 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между обобщенными резольвентами отношения L_0 и краевыми задачами*

$$Ly = \lambda y + f, \quad (K(\lambda) - E)\mathcal{Y}' - i(K(\lambda) + E)\mathcal{Y} = 0, \quad \mathrm{Im}\lambda > 0, \qquad (2)$$

где $\{\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'\} = \Gamma\{y, f\}$, $\lambda \to K(\lambda)$ — голоморфная при $\mathrm{Im}\lambda > 0$ операторная функция в Q такая, что $\|K(\lambda)\| \leqslant 1$. Каждое решение задачи (2) определяет обобщенную резольвенту и, обратно, всякая обобщенная резольвента определяется решением задачи (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брук В. М.* О линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с неванлинновской мерой // Изв. вузов. Математика. 2012. № 10. С. 3–19.

2. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. 1975. Vol. 5, № 3. P. 453–474.

3. *Шин Д.* О казидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Мат. сб. 1943. Т. 13, № 1. С. 39–70.

4. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 41–48.

5. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 2. С. 210–216.

УДК 517.984

О ВОЗМОЖНЫХ ИНВАРИАНТАХ НА СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов (Обнинск, РФ)

Рассмотрим две функции

$$L_b(z) = z \cdot B(z) \qquad L_a(w) = w \cdot A(w), \qquad (1)$$

где $B(z)$ и $A(w)$ бесконечные цепные экспоненты

$$B(z) = e^{b_1 \cdot z \cdot e^{b_2 \cdot z \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^z;\ b_1,\ b_2,\ \ldots \rangle, \qquad (2)$$

$$A(w) = e^{a_1 \cdot w \cdot e^{a_2 \cdot w \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^w;\ a_1,\ a_2,\ \ldots \rangle, \qquad (3)$$

В последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |b_n| = \overline{b} < \infty$, а показатели $a_1,\ a_2, \ldots$ определяются рекуррентной формулой посредством $b_1,\ b_2, \ldots$ (в работе [1] на стр. 30 см. формулу (5), здесь см. ниже формулу (5)). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта (1), которые могут быть взаимно обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z;\ -b,\ -b,\ \ldots\rangle \tag{4}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w;\ b,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle\,.$$

Из формулы (4) мы видим равенство $b_1 = b_2$; тогда, включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (4).

Это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (4) и гиперфункциями Ламберта (Lambert's W function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 году. W-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности в гравитационной механике (см. [2–4]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности точки $w = 0$ (или наоборот: по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), то есть по заданным показателям $b_1, b_2, \ldots$ найти показатели $a_1, a_2, \ldots$

В общем случае легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, \quad a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}} \cdot \Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!} \times$$

$$\times \big[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\big] + b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n \Bigg\}. \tag{5}$$

В работе [5] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Цепная экспонента (1) в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд (см. [8] и [9])

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n!} \cdot z^n, \tag{6}$$

где

$$H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \times$$

$$\times b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n}, \tag{7}$$

сходится в круге $K = \left\{z : \ |z| < \frac{1}{be}\right\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд

$$w = z \cdot B(z) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot z + \frac{w''(0)}{2!} \cdot z^2 + \cdots =$$

$$= B(0) \cdot z + \frac{B'(0)}{1!} \cdot z^2 + \frac{B''(0)}{2!} \cdot z^3 + \cdots \tag{8}$$

В работе [6] показывается, как получается формула (5). Используя разложение обратной функции

$$z = z(w) = L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{9}$$

аналитическую в окрестности точки $w = 0$, по Лагранжу, имеем формулу

$$z^{(n+1)}(0) = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n). \tag{10}$$

Цепную экспоненту (9), показатели которой $a_1, a_2, \ldots$ подлежат определению, представим в виде двух степенных рядов. Во-первых, как формальное разложение в окрестности точки $w = 0$ в степенной ряд таким же способом, как осуществлено разложение цепной экспоненты (1) по формулам (6) и (7):

$$A(w) = A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n =$$

$$= H_a^{(0)} + \frac{H_a^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H_a^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{H_a^{(n)}}{n!} \cdot w^n \cdots, \tag{11}$$

где

$$H_a^{(n)} = H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \times$$

$$\times a_1^{k_1} \cdot (a_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (a_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot k_{n-1})^{k_n} \tag{12}$$

Во-вторых, функция $A(w)$ выражается посредством степенного ряда

$$z = z(w) = \frac{z'(0)}{1!} \cdot w + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n + \cdots , \tag{13}$$

и системы равенств

$$z'(w) = A(w) + w \cdot A'(w), \quad z''(w) = 2A'(w) + w \cdot A''(w), \ldots$$

$$\ldots, z^{(n)}(w) = nA^{(n-1)}(w) + w \cdot A^{(n)}(w),$$

откуда получаем второе представление

$$A(w) = \frac{z'(0)}{1!} + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w + \frac{z'''(0)}{3!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \cdot w^n + \cdots \tag{14}$$

Заметим, что каждый коэффициент $H_a^{(n)}$ в разложении (12) выражен формулой (11) посредством показателей $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в то время, как в разложении (14) коэффициент $z^{(n+1)}(0)$ выражен полиномом (10). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной w получаем систему равенств:

$$H_a^{(0)} = A(0) = z'(0) = 1; \quad 2H_a^{(1)} = 2A'(0) = z''(0);$$

$$3H_a^{(2)} = 3A''(0) = z'''(0); \quad \ldots \quad nH_a^{(n-1)} = nA^{(n-1)}(0) = z^{(n)}(0);$$

$$(n+1)H_a^{(n)} = (n+1)A^{(n)}(0) = z^{(n+1)}(0); \quad \ldots . \tag{15}$$

Равенства в последней строке запишем в виде

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_a = (n+1)H_a^{(n)} = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= (n+1)A^{(n)}(0) = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = z^{(n)}(0)\Big|_b \tag{16}$$

Для выявления инвариантов и построения «равновесия» от этих равенств будем следовать двумя путями. О некоторых шагах первого пути было сказано в работе [1]. Равенства (16) дают рекуррентную формулу (5), по которой определяются все показатели типа «а». Если развернуть сумму в правой части этой формулы, то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [7] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством $b_1, \ldots, b_6$ и $a_1, \ldots, a_5$. В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k, заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (5) посредством $b_1, b_2, \ldots, b_k$, то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные. Здесь делается попытка сократить количество слагаемых путем выявления инвариантов. Некоторые слагаемые оставляем в обозначениях «a» и с обратным знаком переставляем в левую часть уравнения, полученного из основной формулы (5). Тогда основное равенство может оказаться инвариантом.

На странице 298 работы [1] намечены некоторые «шаги» для выявления инвариантов. Умножая левую и правую части равенства (5) на $n!a_2a_3\cdots a_{n-1}$ и перемещая последнее слагаемое в правой части на первое место получаем уравнение

$$n!a_2a_3\ldots a_{n-1}a_n = n!b_2b_3\ldots b_{n-1}b_n + \left\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times \right.$$

$$\left. \times\left[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]\right\}. \qquad (17)$$

Сумму в правой части в фигурной скобке этого равенства запишем в виде

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$

$$\times\left[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right] =$$

$$= \sum_{j=n}^{2}\left\{\frac{n!}{j!}\sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-j} \frac{j^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(-(n+1))^{j-1}b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]\right\}+$$

$$+n!\sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-1} \frac{k_2^{k_3}k_3^{k_4}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\times$$

$$\times\left[(b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]. \qquad (18)$$

Видно, что последняя сумма распадается на две суммы, в одной из которых слагаемые являются типа «b», а другая сумма имеет точно такие же слагаемые, только буквы b заменяются буквами a.

Последующие шаги заключаются в том, что содержимое в каждой квадратной [ ] скобке, где $k_1 = j \geq 2$, мы помещаем в две квадратные скобки (т. е. $[\,] = [\,]_{(a,b)} + [\,]_a$) в виде

$$[\,]_{(a,b)} = [(-(n+1))^{j-1}(b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}})], \tag{19}$$

$$[\,]_a = [((-(n+1))^{j-1} - 1)a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}]. \tag{20}$$

Если слагаемое «a» в квадратной скобке (19) (с коэффициентом, стоящим перед квадратной скобкой) переставить в левую часть равенства (17), то мы имеем слагаемое в одном из инвариантов. Слагаемое же в квадратной скобке (20) подлежит преобразованиям вместе с другими «a» — слагаемыми с целью получения инвариантов для фиксированного n, используя инварианты, полученные для меньших n.

Для следования вторым путем выявления инвариантов нам понадобится формула, по которой можно представить форму $H^{(n)}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ (и форму $H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$) n-го порядка посредством форм, порядок которых строго меньше: $H^{(0)}(1) = 1$, $H^{(1)}(a_1) = a_1$, $H^{(2)}(a_1, a_2) = 2a_1a_2 + a_2^2$, $H^{(3)}(a_1, a_2, a_3), \ldots H^{(n-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. В работе [8] (см. с. 60, лемма 7) доказана формула

$$H^{(n)}(g_r) = H^{(0)}(a_r)\cdot\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}H^{(n-m)}(g_{r+1}^m), \tag{21}$$

где $g_r = g_r(z) = a_r \cdot e^{a_{r+1}\cdot z\cdot e^{a_{r+2}\cdot z\cdot e^{\cdots}}} = a_r\cdot e^{g_{r+1}}$, а формы $H^{(n)}(g_r)$, $H^{(n-m)}(g_{r+1}^m)$ в нынешних обозначениях представляются так:

$$H^{(n)}(g_r) = a_r\cdot H^{(n)}(a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_{r+n}),$$

$$H^{(n-m)}(g_{r+1}^m) = a_{r+1}^m\cdot H^{(n-m)}(m\cdot a_{r+2}, a_r + 3, \ldots, a_{r+n-m+1}).$$

Таким образом мы имеем представление

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_a = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= (n+1)\binom{n}{1}a_1H^{(n-1)}(a_2, a_3, \ldots, a_n) +$$

$$+(n+1)\binom{n}{2}a_1^2H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) + \cdots$$

$$+(n+1)\binom{n}{k}a_1^k H^{(n-k)}(ka_2, a_3, \ldots, a_{n-k+1}) + \cdots$$

$$+(n+1)\binom{n}{n-1}a_1^{n-1}H^{(1)}((n-1)a_2) + (n+1)a_1^n; \tag{22}$$

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_b = \binom{n}{1}(-(n+1)b_1)H^{(n-1)}(b_2, b_3, \ldots, b_n) +$$

$$+\binom{n}{2}(-(n+1)b_1)H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}) + \cdots$$

$$+\binom{n}{k}(-(n+1)b_1)^k H^{(n-k)}(kb_2, b_3, \ldots, b_{n-k+2}) + \cdots$$

$$+\binom{n}{n-1}(-(n+1)b_1)^{n-1}H^{(1)}((n-1)b_2) + (-(n+1)b_1)^n \tag{23}$$

Так как $a_1 = -b_1 \neq 0$, то можно поделить на $(n+1)a_1$ равенства (22) и (23), при этом в равенстве (19) величину $-b_1$ заменим на a_1.

Тогда имеем разность

$$\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\bigg|_a - \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\bigg|_b = 0 =$$

$$= \left[nH^{(n-1)}(a_2, a_3, \ldots, a_n) - nH^{(n-1)}(b_2, b_3, \ldots, b_n\right] +$$

$$+\Bigg[\binom{n}{2}a_1 H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}) -$$

$$-\binom{n}{2}(n+1)a_1 H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \ldots, b_{n-1})\Bigg] + \ldots$$

$$+\Bigg[\binom{n}{n-1}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)a_2) -$$

$$-\binom{n}{n-1}(n+1)^{n-2}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)b_2)\Bigg] + \left[a_1^{n-1} - (n+1)^{n-1}a_1^{n-1}\right]. \tag{24}$$

Если в правой части равенства (24) мы обнаруживаем «равновесную» пару типа $\phi(a) - \phi(b)$, то перемещая слагаемое $-\phi(b)$ в левую часть, где пока еще стоит ноль, мы тем самым строим инвариант n-го порядка. Видно, что разность в первых квадратных скобках является равновесной парой. Разности во вторых квадратных скобках и последующих не являются равновесными и подлежат преобразованиям.

Далее рассмотрим, как этим путем получить инвариант 4-го порядка, исходя из равенства (24) при $n = 4$. Но прежде приведем несколько простых инвариантов на совокупности первых показателей, которые будут использованы как непосредственно, так и в качестве аргументов полиномов (в частности линейных функций), которые могут оказаться инвариантами.

$$\Delta_0 = \Delta_0(a) = \Delta_0(b) = a_1^2 = b_1^2;$$

$$\Delta_1 = \Delta_1(a) = 2a_2 - a_1 = 2b_2 - b_1 = \Delta_1(b);$$

$$\Delta_2 = \Delta_2(a) = a_2a_3 - a_2^2 = b_2b_3 - b_2^2 = \Delta_2(b);$$

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(a) = a_2^2 - 2a_1a_2 + a_2a_3 = b_2^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3 = \varkappa_1(b);$$

$$\varkappa_2 = \varkappa_2(a) = a_2(a_2 - a_1) = a_2b_2 = b_2(b_2 - b_1) = \varkappa_2(b);$$

$\varkappa_{1,k} = a_{k-1}a_k + b_{k-1}b_k$, $k = 2, 3, \ldots$ При $k = 2$ $\varkappa_{1,2} = \Delta_0$; при $k = 3$ $\varkappa_{1,3} = 2a_2a_3 - a_1\Delta_1$. $\varkappa_{2,k} = a_{k-1}a_ka_{k+1} + b_{k-1}b_kb_{k+1}$, $k = 2, 3, \ldots$.

При $k = 2$

$$\varkappa_{2,2} = \Delta_0\Delta_1. \tag{25}$$

Если равенство, которое преобразовывается (и делается попытка из него получить инвариант), содержит в правой части слагаемое типа $cb_1\varkappa$ (или типа $ca_1\varkappa$), где $\varkappa$ – инвариант, то это слагаемое можно представить в виде «равновесной» пары:

$$cb_1\varkappa = \frac{c}{2}(2b_1)\varkappa = \frac{c}{2}(b_1 - a_1)\varkappa = \frac{c}{2}b_1\varkappa - \frac{c}{2}a_1\varkappa \tag{26}$$

Используя формулы разложения (21), (22) и (23) получим представление

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) +$$

$$+\binom{4}{2}a_1H^{(2)}(2a_2, a_3) + \binom{4}{3}a_1^2H^{(1)}(3a_2) + a_1^3 = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) +$$

$$+4a_1\left(\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - 6a_1a_2 - a_1^2 + 3a_2^2\right) + 12a_1^2a_2 + a_1^3 = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) +$$

$$+4a_1 \cdot \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a + 12a_1a_2b_2 - 3a_1a_1^2. \tag{27}$$

Заметим, что в правой части этих равенств $\varkappa_2 = a_2b_2 = a_2(a_2 - a_1)$ — инвариант и $\Delta_0 = a_1^2 = b_1^2$ тоже инвариант.

Аналогично имеем

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + \binom{4}{2}(5a_1)H^{(2)}(2b_2, b_3) +$$

$$+\binom{4}{3}(5a_1)^2 H^{(1)}(3b_2) + (5a_1)^3 = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b +$$

$$+16a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b - 4(5a_1)\cdot 24a_1b_2 - 4(5a_1)\cdot 16a_1^2 + 4(5a_1)3b_2^2 +$$

$$+300a_1^2b_2 + 125a_1^3 = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b +$$

$$+48a_1\varkappa_3 + 108a_1\varkappa_2 + 13a_1\Delta_0, \qquad (28)$$

где $\varkappa_3 = \varkappa_{1,3} = a_2a_3 + b_2b_3$ — инвариант (см. (25)).

Теперь рассматривая разность (27) и (28) получим уравнение

$$0 = \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4\Big(H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4)\Big) +$$

$$-48a_1\varkappa_3 - 96a_1\varkappa_2 - 16a_1\Delta_0.$$

Сократим правую часть этого равенства на 4 и представим множитель a_1 в виде $\frac{1}{2}2a_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$ и получим в правой части «равновесные пары»:

$$0 = H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) +$$

$$-6(a_1 - b_1)\varkappa_3 - 12(a_1 - b_1)\varkappa_2 - 2(a_1 - b_1)\Delta_0 =$$

$$= \Big[H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4)\Big] - \Big[(a_1 - b_1)(6\varkappa_3 + 12\varkappa_2 + 2\Delta_0)\Big].$$

Применяя обозначения, которые были введены в работе [1], получим инвариант в виде

$$\Delta_{3,6}(a) = H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - a_1\overline{\varkappa_3} = H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) - b_1\overline{\varkappa_3} = \Delta_{3,6}(b) \qquad (29)$$

где $H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) = a_2^3 + 6a_2^2a_3 + 3a_2a_3^2 + 6a_2a_3a_4$, $\overline{\varkappa_3} = 6\varkappa_3 + 12\varkappa_2 + 2\Delta_0$ Так же, как в работе [1] осуществим проверку формулы (29) по известным чередующимся показателям $b_1 = b_3 = \beta$; $b_2 = b_4 = 1$, $a_1 = a_3 = -\beta$; $a_2 = 1 - \beta$; $a_4 = \frac{1}{2} - \beta$. Имеем $H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) = 1 - 12\beta + 27\beta^2 - 16\beta^3$,

$H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) = 1 + 12\beta + 3\beta^3$. Первая «равновесная» разность $H^{(3)}(a) - H^{(3)}(b) = -24\beta + 24\beta^2 - 16\beta^3$. Вторая «равновесная» разность $-(a_1 - b_1)\overline{\varkappa} = -2a_1\overline{\varkappa} = 24\beta - 24\beta^2 + 16\beta^3$. По этому примеру можно судить о надежности преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов А. П.* Об инвариантах на совокупности показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. мат. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

2. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370.

3. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

4. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

5. *Буланов А. П.* О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.

6. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 64–71.

7. *Буланов А. П.* Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводск. междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

8. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. АНРФ. Сер. математическая. Т. 62, № 5. 1998. С. 49–78.

9. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 3–34.

УДК 517.51

APPROXIMATION BY C^∞ FUNCTIONS IN SOBOLEV–MORREY SPACES

V. I. Burenkov (Cardiff, UK and Astana, Kazakhstan)
burenkov@cf.ac.uk
M. Lanza de Cristoforis (Padova, Italy)
mldc@math.unipd.it
N. A. Kydyrmina (Karaganda, Kazakhstan)
nurgul-k@mail.ru

Let $\mathbb{N}$ denote the set of all natural numbers including 0. Throughout the paper, n is an element of $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definition 1. *Let Ω be a Lebesgue measurable subset of $\mathbb{R}^n$. Let $0 < p \leq \leq +\infty$ and let w be a measurable function from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$. Denote by $\mathcal{M}_p^{w(\cdot)}(\Omega)$ the space of all real-valued measurable functions on Ω for which*

$$\|f\|_{\mathcal{M}_p^{w(\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \|w(\rho)\|f\|_{L_p(B(x,\rho)\cap\Omega)}\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty.$$

Definition 2. *Let $0 < p \leq +\infty$. Denote by $\Lambda_{p,\infty}$ the set of all measurable functions w from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$ which are not equivalent to 0 and such that*

$$\|w(\rho)\|_{L_\infty(1,\infty)} < \infty, \quad \|w(\rho)\rho^{\frac{n}{p}}\|_{L_\infty(0,1)} < \infty.$$

In [1], [2] it is proved that, if w is a non-negative measurable function from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$ which is not equivalent to 0, then the space $\mathcal{M}_p^{w(\cdot)}(\Omega)$ is non-trivial, *i.e.* consists not only of functions f equivalent to 0 on Ω if, and only if, $w \in \Lambda_{p,\infty}$.

Definition 3. *If $w_\lambda(\rho) = \begin{cases} \rho^{-\lambda}, & \rho \in]0,1], \\ 1, & \rho \geq 1, \end{cases}$, then we set*

$$M_p^\lambda(\Omega) \equiv \mathcal{M}_p^{w_\lambda}(\Omega)$$

and the condition $w_\lambda \in \Lambda_{p,\infty}$ means that $0 \leq \lambda \leq n/p$.

We find convenient to set

$$|f|_{\rho,w,p,\Omega} \equiv \sup_{x\in\Omega} \left\|w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r)\cap\Omega)}\right\|_{L_\infty(0,\rho)} \quad \forall\, \rho \in]0, +\infty[,$$

and

$$|f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} \equiv |f|_{\rho,w_\lambda,p,\Omega}$$

for all measurable functions f from Ω to $]0, +\infty[$ and for all functions w from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$.

Definition 4. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $p \in [1, +\infty]$.*

(i) Let w be a function from $]0, +\infty[$ to $]0, +\infty[$. Then we define as generalized little Morrey space with weight w and exponent p the subspace

$$\mathcal{M}_p^{w,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in \mathcal{M}_p^w(\Omega) \,:\, \lim_{\rho\to 0} |f|_{\rho,w,p,\Omega} = 0 \right\}$$

of $\mathcal{M}_p^w(\Omega)$.

(ii) Let $\lambda \in [0,+\infty[$. Then, in particular, the little Morrey space with exponents λ, p is the subspace

$$M_p^{\lambda,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^\lambda(\Omega) \, : \, \lim_{\rho\to 0} |f|_{\rho,\lambda,p,\Omega} = 0 \right\}$$

of $M_p^\lambda(\Omega)$.

Lemma 1. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $p \in [1,+\infty]$. Let $w \in \Lambda_{p,\infty}$. Then $\mathcal{M}_p^{w,0}(\Omega)$ is a closed proper subspace of $\mathcal{M}_p^w(\Omega)$.*

Definition 5. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. Let $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ and $\lambda \in [0, n/p]$. Then we define the Sobolev space of order l built on the Morrey space $M_p^\lambda(\Omega)$, as the set*

$$W_p^{l,\lambda}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^\lambda(\Omega) : D_w^\alpha f \in M_p^\lambda(\Omega) \; \forall \; \alpha \in \mathbb{N}^n, \; |\alpha| \leq l \right\},$$

where $D_w^\alpha f$ is the weak derivative of f.

Then we set

$$\|f\|_{W_p^{l,\lambda}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq l} \|D_w^\alpha f\|_{M_p^\lambda(\Omega)} \quad \forall \; f \in W_p^{l,\lambda}(\Omega).$$

In particular, $W_p^{0,\lambda}(\Omega) = M_p^\lambda(\Omega)$ and $W_p^{l,0}(\Omega) = W_p^l(\Omega)$, where $W_p^l(\Omega)$ denotes the classical Sobolev space with exponents l, p in Ω. It is obvious that $W_p^{l,\lambda}(\Omega) \subset W_p^l(\Omega)$.

Definition 6. *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. Let $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ and $\lambda \in [0, n/p]$. Then we define the Sobolev space of order l built on the little Morrey space $M_p^{\lambda,0}(\Omega)$, as the set*

$$W_p^{l,\lambda,0}(\Omega) \equiv \left\{ f \in M_p^{\lambda,0}(\Omega) : D_w^\alpha f \in M_p^{\lambda,0}(\Omega) \; \forall \; \alpha \in \mathbb{N}^n, \; |\alpha| \leq l \right\}.$$

Since $M_p^{\lambda,0}(\Omega)$ is a closed subspace of $M_p^\lambda(\Omega)$, we can easily deduce the validity of

Lemma 2. *Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^n$. Let $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1,+\infty]$ and $\lambda \in [0, n/p]$. Then $W_p^{l,\lambda,0}(\Omega)$ is a closed proper subspace of $W_p^{l,\lambda}(\Omega)$.*

Contrary to the classical Sobolev spaces built on the L_p spaces with $p < \infty$, the Sobolev spaces built on Morrey spaces are not separable spaces even if $p < \infty$ and we cannot expect that the set of C^∞ functions of a Sobolev Morrey space be dense in a Sobolev Morrey space. However, we show that the functions in a Sobolev space built on little Morrey spaces can be approximated by C^∞ functions.

Theorem. *Let $l \in \mathbb{N}$. Let $1 \le p < +\infty$, $0 \le \lambda \le n/p$. Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$. Then for $u \in W_p^{l,\lambda,0}(\Omega)$ there exist functions $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^{l,\lambda}(\Omega)$ such that*

$$u_m \to u \quad \text{in} \quad W_p^{l,\lambda}(\Omega).$$

R E F E R E N C E S

1. *Burenkov V.I., Guliyev H.V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Math. 2004, №163(2), P. 157–176.

2. *Burenkov V.I., Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal, 2011, № 2(1), P. 52–80.

УДК 517.984

О ПРОЕКТОРАХ РИССА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ И НЕГЛАДКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

М.Ш. Бурлуцкая (Воронеж, РФ),
А.П. Хромов (Саратов, РФ)
bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим оператор

$$(Lz)(x) = Bz'(x) + Q(x)z(x), \quad z(0) = z(1), \quad x \in [0,1],$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, T — знак транспонирования, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $q(x) \in C[0,1]$ — комплекснозначная функция. Обозначим через $L^\pm$ операторы:

$$L^\pm y = y'(x) \pm q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1), \quad x \in [0,1].$$

Теорема 1. *Если $y(x)$ есть решение уравнения*

$$L^\pm y = \lambda y(x) + f(x), \tag{1}$$

то $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = \pm y(1-x)$ («+», когда в (1) L^+, «-», когда в (1) L^-), удовлетворяет уравнению

$$Lz = \lambda z + f^\pm(x),$$

где $f^+(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $f^-(x) = (f(x), -f(1-x))^T$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Обозначим через $H^{\pm}[0,1]$ подпространства:

$$H^{+}[0,1]=\{\widetilde{f}(x)\big|\widetilde{f}(x)=(f(x),f(1-x))^T, f(x)\in L_2[0,1]\},$$
$$H^{-}[0,1]=\{\widetilde{f}(x)\big|\widetilde{f}(x)=(f(x),-f(1-x))^T, f(x)\in L_2[0,1]\}.$$

Лемма 1. *$H^{-}[0,1]$ есть ортогональное дополнение $H^{+}[0,1]$ до $L_2^2[0,1]$.*

Лемма 2. *Если $z(x)\in D_L\cap H^{\pm}[0,1]$, то $Lz\in H^{\pm}[0,1]$.*

Обозначим оператор L на $H^{+}[0,1]$ через L_1, а L на $H^{-}[0,1]$ через L_2.

Теорема 2. *Собственные значения λ_n^{+} (λ_n^{-}) оператора L^{+} (L^{-}), достаточно большие по модулю, простые, и для них справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_n^{\pm}=2n\pi i+\beta_n^{\pm}+\alpha_n^2,\quad (n=\pm n_0,\pm(n_0+1),\ldots),$$

где $\beta_n^{\pm}$ явно вычисляемые числа, причем $\sum|\beta_n^{\pm}|^2<\infty$, а одним и тем же α_n обозначаем произвольные комплексные числа, лишь бы $\sum|\alpha_n|^2<\infty$.

Теорема 3. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, совпадают с собственными значениями операторов L^{+} и L^{-}, при этом, если $y_{+}(x)$ ($y_{-}(x)$) собственная функция оператора L^{+} (L^{-}), то $z_{+}(x)=(y_{+}(x),y_{+}(1-x))^T$ ($z_{-}(x)=(y_{-}(x),-y_{-}(1-x))^T$) есть собственная функция оператора L_1 (L_2). Собственные значения операторов L_1 и L_2, достаточно большие по модулю, простые, а оператора L простые или двукратные (в зависимости от того, совпадают ли λ_n^{+} и λ_n^{-} или различны).*

Лемма 3. *Спектр операторов L^{+} и L^{-} состоит из собственных значений.*

Лемма 4. *Если λ — регулярная точка оператора L, то она является регулярной точкой для L_1 и L_2.*

Лемма 5. *Если λ — регулярная точка оператора L, то*

$$R_\lambda f^{+}=R_{1\lambda}f^{+},\qquad R_\lambda f^{-}=R_{2\lambda}f^{-},$$

где $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$, $R_{1\lambda}=(L_1-\lambda E)^{-1}$, $R_{2\lambda}=(L_2-\lambda E)^{-1}$ (E — единичный оператор), $f^{+}\in H^{+}[0,1]$, $f^{-}\in H^{-}[0,1]$.

Лемма 6. *Если $\widetilde{f}((x)=(f_1(x),f_2(x))^T\in L_2^2[0,1]$, то*

$$\widetilde{f}(x)=f^{+}(x)+f^{-}(x),$$

где $f^+(x) = (f(x), f(1-x))^T \in H^+[0,1]$, $f^-(x) = (g(x), -g(1-x))^T \in$ $\in H^-[0,1]$, $f(x) = (f_1(x) + f_2(1-x))/2$, $g(x) = (f_1(x) - f_2(1-x))/2$.

Лемма 7. *Имеет место формула:*

$$R_\lambda \widetilde{f}(x) = R_{1\lambda} f^+(x) + R_{2\lambda} f^-(x).$$

Теорема 4. *Обозначим* $\gamma_n = \{\lambda \,|\, |\lambda - 2n\pi i| = \delta\}$, *где* $\delta > 0$ *и достаточно мало (настолько, что внутри и на* γ_n *нет собственных значений кроме* $\lambda_n^\pm$*). Тогда*

$$P_n \widetilde{f} = P_{1n} f^+ + P_{2n} f^-,$$

где $P_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_\lambda d\lambda$, $P_{jn} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_{j\lambda} d\lambda$ $(j = 1, 2)$.

Замечание. Схожие результаты получаются и в случае $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ \alpha q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, где α — произвольное конечное число, $\alpha \neq 0$.

УДК 517.5

ОЦЕНКИ НОРМ ДВУХВЕСОВЫХ ОПЕРАТОРОВ СУММИРОВАНИЯ НА ДЕРЕВЕ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ВЕСА[1]

А. А. Васильева (Москва, РФ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Критерий ограниченности двухвесового оператора интегрирования на метрическом дереве и порядковые оценки его нормы были получены Эвансом, Харрисом и Пиком [1]. Аналогичное утверждение для двухвесового оператора суммирования несложно вывести из их результата. Однако в общем случае эта оценка имеет довольно сложный вид. Здесь при дополнительных условиях на веса получены оценки более простого вида, которые могут быть удобны для приложений (например, для получения теорем вложения весовых классов Соболева и для оценок поперечников).

Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \xi_0)$ — дерево с корнем ξ_0. На множестве его вершин $\mathbf{V}(\mathcal{T})$ вводится частичный порядок стандартным образом: $\xi' > \xi$, если существует простой путь $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi')$ такой, что $\xi = \xi_k$ для некоторого $k \in \overline{0, n}$; расстоянием между ξ и ξ' называется величина

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00022, 12-01-00554).

$\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = \rho_{\mathcal{T}}(\xi', \xi) = n + 1 - k$. Кроме того, пишем $\rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi) = 0$. Для $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ положим $\mathbf{V}_j^{\mathcal{T}}(\xi) := \{\xi' \geq \xi : \ \rho_{\mathcal{T}}(\xi, \xi') = j\}$. Для вершины $\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{T})$ мы обозначим через $\mathcal{T}_\xi = (\mathcal{T}_\xi, \xi)$ поддерево в $\mathcal{T}$ с множеством вершин $\{\xi' \in \mathbf{V}(\mathcal{T}) : \xi' \geq \xi\}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — граф, $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$. Положим

$$\|f\|_{l_p(\mathcal{G})} = \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} |f(\xi)|^p \right)^{1/p}.$$

Обозначим через $l_p(\mathcal{G})$ пространство функций $f : \mathbf{V}(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_{l_p(\mathcal{G})}$.

Пусть $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, $1 \leq p \leq \infty$, и пусть u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ — весовые функции. Определим оператор суммирования $S_{u,w,\mathcal{A}}$ формулой

$$S_{u,w,\mathcal{A}} f(\xi) = w(\xi) \sum_{\xi' \leq \xi} u(\xi') f(\xi'), \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad f : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}.$$

Через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w}$ обозначим операторную норму $S_{u,w,\mathcal{A}} : l_p(\mathcal{A}) \to l_q(\mathcal{A})$, т. е. минимальную константу C в неравенстве

$$\left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} w^q(\xi) \left(\sum_{\xi' \leq \xi} u(\xi') f(\xi') \right)^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} |f(\xi)|^p \right)^{1/p},$$

$f : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— дерево,* $1 < p < q < \infty$, u, $w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0, \infty)$. *Предположим, что существуют* $K \geq 1$, $l_0 \in \mathbb{N}$ *и* $\lambda \in (0, 1)$ *такие, что*

$$\operatorname{card} \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi) \leq K, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}),$$

$$\frac{u(\xi')}{u(\xi)} \leq K, \ \frac{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_{\xi''})}}{\|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}} \leq \lambda, \quad \xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A}), \quad \xi' \in \mathbf{V}_1^{\mathcal{A}}(\xi), \quad \xi'' \in \mathbf{V}_{l_0}^{\mathcal{A}}(\xi).$$

Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{K,\lambda,l_0,p,q}{\asymp} \sup_{\xi \in \mathbf{V}(\mathcal{A})} u(\xi) \|w\|_{l_q(\mathcal{A}_\xi)}$.

Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(\mathcal{A}, \xi_0)$ — дерево, такое что $\mathbf{V}_{\max}(\mathcal{A}) = \mathbf{V}_N^{\mathcal{A}}(\xi_0)$. Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая функция, $\psi(0) = 0$. Предположим, что существует $C_* \geq 1$ такое, что для любых $0 \leq j \leq j' < N + 1$, $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$

$$C_*^{-1} \cdot 2^{\psi(j') - \psi(j)} \leq \operatorname{card} \mathbf{V}_{j'-j}^{\mathcal{A}}(\xi) \leq C_* \cdot 2^{\psi(j') - \psi(j)}.$$

Пусть $u,\ w : \mathbf{V}(\mathcal{A}) \to (0,\infty)$, $u(\xi) = u_j$, $w(\xi) = w_j$ для $\xi \in \mathbf{V}_j^{\mathcal{A}}(\xi_0)$, $1 \le q \le p \le \infty$.

Положим $\hat{w}_j = w_j \cdot 2^{\frac{\psi(j)}{q}}$, $\hat{u}_j = u_j \cdot 2^{-\frac{\psi(j)}{p}}$, $0 \le j < N+1$. Обозначим через $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ минимальную константу в неравенстве

$$\left(\sum_{j=0}^{N} \hat{w}_j^q \left(\sum_{i=0}^{j} \hat{u}_j \varphi_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{j=0}^{N} \varphi_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varphi_j \ge 0, \quad 0 \le j < N+1.$$

Теорема 2. Пусть $p \ge q$. Тогда $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} \underset{p,q,C_*}{\asymp} \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$; если $C_* = 1$, то $\mathfrak{S}^{p,q}_{\mathcal{A},u,w} = \mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$.

Порядковые оценки $\mathfrak{S}^{p,q}_{\hat{u},\hat{w}}$ получены в работах Хайнига, Андерсена и Беннетта [2–4].

Результат, аналогичный теореме 2, можно получить и для операторов интегрирования на метрических деревьях. Это обобщает результат Наймарка и Соломяка [5], полученный для $p = q = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans W. D., Harris D. J., Pick L.* Weighted Hardy and Poincaré inequalities on trees // J. London Math. Soc. 1995. Vol. 52 (2). P. 121–136.

2. *Andersen K. F., Heinig H. P.* Weighted norm inequalities for certain integral operators // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14. P. 834–844.

3. *Bennett G.* Some elementary inequalities. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1988. V. 39 (156). P. 385-–400.

4. *Heinig H.P.* Weighted norm inequalities for certain integral operators, II // Proc. AMS. 1985. Vol. 95. P. 387–395.

5. *Naimark K., Solomyak M.* Geometry of Sobolev spaces on regular trees and the Hardy inequality. // Russian J. Math. Phys. 2001. Vol. 8 (3). P. 322–335.

УДК 517.5

КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский (Саратов, РФ)

vam21@yandex.ru, LukomskiiSF@info.sgu.ru

Пусть K — локальное поле нулевой характеристики. Оно является конечным расширением $\mathbb{Q}_p$ — поля p-адических чисел степени n. Элементы поля K можно представить как бесконечные в обе стороны последовательности $a = (\ldots, 0_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots)$, $a_j \in GF(p)$, в которых лишь

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

конечное число элементов a_j с отрицательными номерами отлично от нуля, где $GF(p)$ поле классов вычетов по модулю простого числа p. Аддитивная группа поля $(K,+)$ является нульмерной локально компактной группой.

Множества $K_m = \{\dots, 0, a_m, a_{m+1}, \dots\}$ образуют основную цепочку в $(K,+)$, элементы $g_m \in K_m \setminus K_{m+1}$ образуют базис в группе $(K,+)$. K_0 образует кольцо целых элементов поля K с единственным максимальным идеалом (π). Элемент π удовлетворяет равенству $\pi^s = p$. Величина s называется степенью ветвления расширения K над $\mathbb{Q}_p$. Верна следующая

Теорема 1. *Аддитивная группа K локального поля нулевой характеристики является нульмерной локально компактной группой, в которой образующие обладают свойством $pg_m = g_{m+s}$.*

Используя результаты работы [2], определим оператор $\mathcal{A}$ равенством $\mathcal{A}(\sum \beta_m g_m) = \sum \beta_m g_{m-1}$ он является оператором растяжения, множество

$$H_0 = \{x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-s}g_{-s} : \ s \in \mathbb{N}\}$$

есть множество сдвигов.

Поэтому КМА в K можно определять как совокупность подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющих аксиомам:

1) $V_n \subset V_{n+1}$;

2) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ — плотно в $L_2(K)$;

3) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}$;

4) существует $\varphi \in L_2(K)$, сдвиги которой $(\varphi(x \dot{-} h))_{h\in H_0}$ образуют ортонормированный базис в V_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Serre J-P.* Local Fields. Springer-Verlag, 1980.

2. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 5. С. 41–64.

УДК 517.51

ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец, Р. Н. Фадеев (Саратов, РФ)

volosivetsss@mail.ru

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $2 \le p_n \le N$. По определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение вида

$x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$, $x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n)$. Разложение будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$. Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0, 1)$ и полной в $L^1[0, 1)$. Подробней об ее свойствах см. [1, §1.5].

Для двойных последовательностей $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ при $j, k \geq 0$ положим $\Delta_{10} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k}$, $\Delta_{01} a_{jk} = a_{jk} - a_{j,k+1}$, $\Delta_{11} a_{jk} = \Delta_{10}(\Delta_{01} a_{jk})$, $\Delta_{22} a_{jk} = \Delta_{11}(\Delta_{11} a_{jk})$. Для ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \tag{1}$$

рассмотрим прямоугольные частные суммы

$$S_{mn}(x, y) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Ряд (1) определяет максимальную функцию $M^*(x, y) = \sup\limits_{m,n \in \mathbb{N}} |S_{mn}(x, y)|$. Следуя работе М. И. Дьяченко и С. Ю. Тихонова [2], будем писать $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in GM^2$, если $\lim\limits_{m+n \to \infty} a_{mn} = 0$ и при $m, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leq C \beta_{mn}^* :=$$

$$:= C \left(a_{mn} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_{jn}}{j} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{mk}}{k} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{jk} \right). \tag{2}$$

Предполагается, что ряды, входящие в правую часть (2), сходятся, что дает возможность рассматривать сумму $f(x, y)$ ряда (1) при $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in GM^2$. Будем писать $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in GM^{(2)}$, если кроме неравенства (2) выполнены условия $\sum\limits_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} a_{jk}| \leq C a_{jn}$, $j, n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} a_{jk}| \leq C a_{mk}$, $m, k \in \mathbb{N}$. Пусть $1 \leq r < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Через $L^r_{\alpha,\beta}[0, 1)^2$ мы обозначим множество измеримых на $[0,1)^2$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{r,\alpha,\beta} = \left(\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy\right)^{1/r}$. С рядом (1) можно связать выражение

$$S_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{jk}|^r (j+1)^{r-2-\alpha}(k+1)^{r-2-\beta}\right)^{1/r}.$$

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha,\beta<r-1$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}\in GM^{(2)}$, $r\in[1,\infty)$ *и* $S_{r,\alpha,\beta}(a)<\infty$. *Тогда* M^* *содержится в* $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$ *и при этом* $\|M^*\|_{r,\alpha,\beta}\le$ $\le CS_{r,\alpha,\beta}(a)$.

Теорема 2. *Пусть* $r\in(1,\infty)$, $\alpha,\beta<r-1$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *неотрицательна, удовлетворяет условиям* $a_{pq}\ge Ca_{mn}$, $p\le m\le 2p$, $q\le n\le 2q$, $p,q,m,n\in\mathbb{Z}_+$, $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}|\Delta_{11}a_{j,k}|<\infty$ *и* $\lim\limits_{j+k\to\infty}a_{jk}=0$. *Если* $f(x,y)$ — *сумма ряда* (1) *и* $f\in L^r_{\alpha,\beta}[0,1)$, *то* $S_{r,\alpha,\beta}\le C|f\|_{r,\alpha,\beta}$.

Теорема 3. *Пусть* $r\in(1,\infty)$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *такова, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta_{11}a_{jk}|<\infty,\quad \lim_{j+k\to\infty}a_{jk}=0$$

и

$$Q_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)^{3r-2-\alpha}(k+1)^{3r-2-\beta}|\Delta_{22}a_{jk}|^r\right)^{1/r}<\infty.$$

Тогда сумма ряда (1) *принадлежит* $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$ *и* $\|f\|_{r,\alpha,\beta}\le CQ_{r,\alpha,\beta}(a)$.

Теорема 4. *Пусть* $r\in(1,\infty)$, $\alpha,\beta<-1$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *неотрицательна, удовлетворяет условиям* $a_{pq}\ge Ca_{mn}$, $p\le m\le 2p$, $q\le n\le$ $\le 2q$, $p,q,m,n\in\mathbb{Z}_+$, *и* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{j,k}<\infty$. *Если* $f_d(x,y)$ — *сумма ряда* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{j,k}(1-\chi_j(x))(1-\chi_k(y))$, *то*

$$\|f_d\|_{r,\alpha,\beta}\asymp\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}l^{-\alpha-2}q^{-\beta-2}\left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty}a_{jk}\right)^r\right)^{1/r}.$$

Замечание. Теоремы 1 и 2 обобщают одномерные результаты из [3], двумерные результаты из [4] и содержат мультипликативный аналог основной теоремы из [2]. Теорема 3 является аналогом тригонометрического результата из [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.,* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Dyachenko M., Tikhonov S.* A Hardy-Littlewood theorem for multiple series // J. Math. Anal. Appl. 2008, Vol. 339, № 1, P. 303–310.

3. *Волосивец С. С.* О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 3. P. 227–246.

4. *Бокаев Н. А., Муканов Ж. Б.* Весовая интегрируемость двойных тригонометрических рядов и двойных рядов по мультипликативным системам с коэффициентыми класса $R_0^+BVS^2$ // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 617–620.

5. *Вуколова Т. М., Дъяченко М. И.* Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1994. № 7. С. 20–28.

УДК 517.984

АЛГОРИТМ АМПЛИТУДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДИСКРЕТНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ[1]

И. Ю. Выгодчикова (Саратов, РФ)
VigodchikovaIY@info.sgu.ru

Рассмотрим обобщение известной задачи П. Л. Чебышёва об аппроксимации дискретной функции алгебраическим полиномом фиксированной степени [1, с. 13].

Пусть n — целое неотрицательное число, обозначающее степень алгебраического полинома $p_n(A,t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$. Задана дискретная сетка из $N+1$ упорядоченных значений независимой переменной, $T = \{t_0 < \ldots < t_N\}$, в узлах которой определено многозначное отображение (м. о.), $\Phi(\cdot)$, образом которого в каждом узле сетки является фиксированный отрезок $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$.

Требуется отыскать решение задачи минимизации максимального по всем узлам дискретной сетки T уклонения образов м. о. от значений алгебраического полинома степени не выше n:

$$\rho(A) = \max_{k\in\overline{0,N}} \max\{y_{2,k} - p_n(A,t_k), p_n(A,t_k) - y_{1,k}\} \longrightarrow \min_{A\in R^{n+1}}. \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00175).

Если $y_k = y_{2,k} = y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$, то задача (1) сводится к задаче П. Л. Чебышёва [1, с. 13]:

$$\max_{k\in\overline{0,N}} |y_k - p_n(A,t_k)| \quad \longrightarrow \quad \min_{A\in R^{n+1}}. \tag{2}$$

В общем случая решение задачи (1) принципиально отличается от решения задачи (2), кроме того, задача (1) может иметь неединственное решение при любом соотношении N и n. Несмотря на наличие широкого класса прикладных программ для приближенного решения задач оптимизации и возможности сведения задачи (1) к задаче линейного программирования, целесообразно найти более эффективный вычислительный алгоритм решения задачи, не увеличивающий объёма вычислений, шаг за шагом приближающий к цели и на конечном шаге дающий точное решение.

Такой алгоритм разработан и изложен в [2]. На каждом шаге алгоритма решения задачи (1) осуществляется чебышевская интерполяция [1, с. 14] на подмножествах $\sigma = \{t_{j_0} < \ldots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$, называемых базисами, для так называемых амплитудных функций, определяемых формулами:

$$\varphi_{1-i}(\sigma,k) = \begin{cases} iy_{2,j_k} + (1-i)y_{1,j_k} & k - \text{четно}, \\ iy_{1,j_k} + (1-i)y_{2,j_k} & k - \text{нечетно}, \end{cases} \qquad k = \overline{0,n+1}, \tag{3}$$

для $i = 0$ или $i = 1$.

Приведём алгоритм решения (1), для случая $N = n+1$. В этом случае имеем $\sigma = T = \{t_0 < \ldots < t_{n+1}\}$. Положим $\rho^* = \min\limits_{A\in R^{n+1}} \rho(A)$. Обозначим через

$$m = \max_{k=\overline{0,N}} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \quad M = \{k \in \overline{0,N} : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = m\}.$$

Для решения задачи (1) выполняем следующие действия.

Шаг 1. Применяя к функциям (3) альтернансные условия оптимальности [1, с. 14], вычисляем компоненты векторов A_0, A_1 и величины h_0, h_1, удовлетворяющие равенствам:

$$h_i = (-1)^{k+i}\left(y_{1.5+0.5\cdot(-1)^{k+i},k} - p_n\left(A_i,t_k\right)\right), k = \overline{0,n+1}, \tag{4}$$

для $i = 0$ или $i = 1$.

Шаг 2. Определяем $h_\beta = \max\{h_0, h_1\}$.

Шаг 3. Проверяем условие

$$\rho\,(A_\beta) = h_\beta. \tag{5}$$

Если равенство (5) выполнено то A_β — решение задачи (1), при этом $\rho^* = h_\beta$, алгоритм завершается. Если (5) не выполняется, имеем $\rho^* = m$, переходим к шагу 4.

Шаг 4. Вычислим величину

$$\alpha = \frac{m - h_0}{2m - h_0 - h_1}.$$

Несложно показать, что $\alpha \in (0, 1)$, и для любого $l \in M$

$$\alpha p_n\,(A_1, t_l) + (1 - \alpha)\, p_n\,(A_0, t_l) = \frac{y_{1,l} + y_{2,l}}{2},$$

вектор $A^\alpha = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_0$ является решением задачи (1).

Если во множестве M содержится не менее чем $(n + 1)$ элементов, решение будет единственным, иначе задача (1) имеет бесконечно много решений, A^α — лишь одно из них. Любое решение в последнем случае представимо в виде выпуклой комбинации конечного множества крайних точек [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.

2. *Выгодчикова И. Ю.* О монотонном алгоритме решения задачи аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : И‘зд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15.

3. *Выгодчикова И. Ю.* О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 15–18.

УДК 517.54

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Е. Г. Ганенкова, В. В. Старков (Петрозаводск, РФ)
g_ek@inbox.ru, vstar@petrsu.karelia.ru

Пусть D — плоская область, $z_0 \in \partial D$ — достижимая точка, f — аналитическая в D функция.

Говорят, что $a \in \overline{\mathbb{C}}$ является асимптотическим значением функции f в точке z_0, если существует кривая $\Gamma_a \subset D$ с концом в точке z_0, для которой

$$\lim_{\Gamma_a \ni z \to z_0} f(z) = a.$$

Множество всех асимптотических значений (асимптотическое множество) функции f в точке z_0 будем обозначать $\mathrm{As}(f, z_0)$.

Известно, что множество асимптотических значений непостоянной целой функции является аналитическим в смысле Суслина [1] и содержит бесконечность [2] (см. также [3, с. 224]). Более того M. Heins в [4] показал, что каждое аналитическое множество, содержащее бесконечность, является асимптотическим множеством некоторой целой функции.

Будем рассматривать функции, аналитические в некоторой плоской области произвольной связности. Для таких функций мы получили следующий аналог результата M. Heins'a.

Теорема. *Пусть D — плоская область с изолированным граничным фрагментом K, $z_0 \in K$. Если K — такой континуум, что существует открытое множество U, $K \subset U$ и $(\partial D \setminus K) \cap U = \emptyset$, то будем дополнительно предполагать, что z_0 — носитель некоторого простого конца области D. Пусть A — аналитическое множество, $\infty \in A$. Тогда существует локально биголоморфная аналитическая в D функция φ и целая функция Φ, для которых $As(\Phi \circ \varphi, z_0) = A$. Если* $\operatorname{card} A = \infty$, *то*

$$\overline{\lim_{z \to z_0}} \frac{\ln \ln |\Phi(\varphi(z))|}{\ln |\varphi(z)|} = \infty.$$

Теорема доказана для случая однолистной функции φ и для случая, когда функция φ не более чем 3-листна (константа 3 не может быть уменьшена).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности. Второй автор поддержан РФФИ (грант № 14-01-00510).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mazurkiewicz S.* Sur les points singuliers d'une fonction analytique // Fund. Math. 1931. Vol. 17. P. 26–29.

2. *Iversen F.* Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Helsinki : Imprimerie de la Société de littérature finnoise, 1914.

3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1970. 592 с.

4. *Heins M.* The set of asymptotic values of an entire function // Proceedings of the Scandinavian Math. Congress, Lund 1953, 1954. P. 56–60.

УДК 517.982.22, 517.982.252, 517.982.256

СВЯЗЬ СИЛЬНО ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ С СИЛЬНОЙ ВЫПУКЛОСТЬЮ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ И СЛАБОЙ ВОГНУТОСТЬЮ ФУНКЦИИ АНТИРАССТОЯНИЯ[1]

М. О. Голубев (Москва, РФ)

maksimkane@mail.ru

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, $B_R(x) = \{y \in \mathbb{H} : \|y - x\| \le R\}$ замкнутый шар радиуса $R \ge 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{H}$. Функция расстояния от точки $x \in \mathbb{H}$ до множества $A \subset \mathbb{H}$ задается формулой $\varrho_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

Определение 1 [1, определение 4.3.1]. Непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ называется *сильно выпуклым множеством с радиусом* R, если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса $R > 0$, то есть $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$ для некоторого множества $X \subset \mathbb{H}$.

Определение 2 [2, определение 2.1.2 и лемма 2.1.2], [3, определение 1.4]. Пусть $U \subset \mathbb{H}$ открытое множество. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *слабо вогнутой с константой* $C > 0$ на множестве U, если она непрерывна на множестве U и для любой пары точек $x_0, x_1 \in U$, таких что $[x_0, x_1] \subset U$, и для любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство:

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \ge (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - \frac{C}{2}\lambda(1-\lambda)\|x_0 - x_1\|^2.$$

Определение 3 [4]. Пусть $A \subset \mathbb{H}$ выпуклое замкнутое ограниченное множество. Тогда функция $f_A : \mathbb{H} \to [0, +\infty)$,

$$f_A(x) = \sup_{a \in A} \|x - a\|$$

называется *антирасстоянием* от точки x до множества A.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00295-а и 13-01-12423)

Заметим, что функция антирасстояния $f_A(x)$ выпукла на $\mathbb{H}$ как супремум выпуклых функций.

Определение 4 [4]. Пусть $A \subset \mathbb{H}$ выпуклое замкнутое ограниченное множество, $r > 0$. Тогда множество

$$T_A(r) = \{x \in E \mid f_A(x) > r\}$$

называется *антиокрестностью радиуса* r множества A.

С. И. Дудовым был получен следующий результат.

Предложение 1. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ сильно выпуклое множество радиуса R.*

Тогда для всех $x_0, x_1 \in \mathbb{H} \setminus A$, таких что $\varrho_A(x_0) = \varrho_A(x_1) = \varrho > 0$, $[x_0, x_1] \bigcap A = \emptyset$ и для всех $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\varrho_A\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \le (1-\lambda)\varrho_A(x_0) + \lambda\varrho_A(x_1) - \lambda(1-\lambda)\frac{1}{2(R+\varrho)}\|x_0 - x_1\|^2.$$

Следующая теорема уточняет предложение 1.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathbb{H}$ выпуклое замкнутое множество. Пусть $R > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) Для любой пары точек $x_0, x_1 \in \mathbb{H} \setminus A$ таких, что $[x_0, x_1] \bigcap A = \emptyset$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено следующее неравенство

$$\varrho_A\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \le (1-\lambda)\varrho_A(x_0) + \lambda\varrho_A(x_1) -$$

$$-\lambda(1-\lambda)\frac{\|x_0 - x_1\|^2 - \big(\varrho_A(x_0) - \varrho_A(x_1)\big)^2}{2\big(R + (1-\lambda)\varrho_A(x_0) + \lambda\varrho_A(x_1)\big)}.$$

2) A сильно выпуклое множество с радиусом R.

Исследована связь радиуса сильной выпуклости множества A и константы слабой вогнутости функции f_A.

Теорема 2 [3, теорема 3.1]. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ сильно выпуклое множество с радиусом R. Пусть $r > R$. Тогда функция антирасстояния $f_A(x)$ слабо вогнута на множестве $T_A(r)$ с константой $C = \frac{1}{r-R}$.*

М. В. Балашовым был доказан следующий результат.

Теорема 3 [3, теорема 3.2]. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ замкнутое выпуклое ограниченное множество и $r > 0$. Предположим, что функция антирасстояния f_A слабо вогнута на множестве $T_A(r)$ с константой $C > 0$. Тогда A сильно выпуклое множество с радиусом $r - \frac{1}{C}$.*

Из теоремы 2 и теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $A \subset \mathbb{H}$ замкнутое выпуклое ограниченное множество и $R > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A сильно выпуклое множество с радиусом R

2) Для всех $r > R$ функция антирасстояния f_A слабо вогнута на множестве $T_A(r)$ с константой $C = \frac{1}{r-R}$.

Замечание 1. Заметим, что функция антирасстояния f_A выпукла, а значит и слабо выпукла с любой константой $C > 0$ [2, определение 2.1.2]. Вместе со слабой вогнутостью на множестве $T_A(r)$ это означает, что функция f_A дифференцируема на $T_A(r)$, а f'_A удовлетворяет условию Липшица на $T_A(r)$ с константой C [2, теорема 2.1.2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с.

2. *Иванов Г. Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М. : Физматлит, 2006. 352 с.

3. *Balashov M. V., Golubev M. O.* Weak concavity of the antidistance function // J. of Convex Analysis. 2014. № 4.

4. *Балашов М. В., Иванов Г. Е.* Об удаленных точках множеств // Мат. заметки. 2006. Т. 80, №2. С. 163–170.

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОБЩЕГО ВИДА С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ РАЗРЫВ

А. В. Голубь (Саратов, РФ)

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

$\theta(x) = 1/2 - x$ при $x \in [0, 1/2]$ и $\theta(x) = 3/2 - x$ при $x \in (1/2, 1]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т. е. $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = 1/2$. Требования на ядро оператора A: функция $A(x, t) = 0$ при $t \geq x$, $A(x, x-0) \equiv 1$ и $\dfrac{\partial^{k+l} A(x,t)}{\partial x^k \partial t^l}$ непрерывны при $t < x$ и $k + l \leq 2$. Такой оператор был рассмотрен в [1].

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(1/2-0)=0$, $f(0)= = f(1)$ и $f(x)\in C[0,1/2]\cap V[0,1/2]$ при $x\in[0,1/2]$, $f(x)\in C[1/2,1]\cap \cap V[1/2,1]$ при $x\in[1/2,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}R_\lambda(A)f(x)\,d\lambda\right|=0,$$

где $R_\lambda(A)=(E-\lambda A)^{-1}A$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубь А. В., Хромов А. П.* Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 5–10.

УДК 517.977

О ТРАЕКТОРИЯХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И. В. Гребенникова, А. Г. Кремлев (Екатеринбург, РФ)
giv001@mail.ru

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu>0$) с запаздыванием $h>0$ (по состоянию) следующего вида:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t)+A_{12}(t)y(t)+G_1(t)x(t-h)+B_1(t)u(t),\\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t)+A_{22}(t)y(t)+G_2(t)x(t-h)+B_2(t)u(t), \end{aligned}\qquad(1)$$

где $t\in T=[t_0,t_1]$; $x\in R^n$, $y\in R^m$; $u\in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t)=\psi(t)$, $t_0-h\le t<t_0$, $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0\in X_0$, $y_0\in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t)\in \in\Psi(t)$, $t_0-h\le t<t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Управление $u(t)$, $t\in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot)\in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$.

Рассматривается минимаксная задача управления: среди управлений $u(\cdot)\in P$ найти оптимальное $u^0=u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1,\mu)=J(u^0)=\min_{u(\cdot)\in P}J(u(\cdot)),$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящих из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Рассмотрим вырожденную систему, полученную из (1) при $\mu = 0$:

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t-h) + B_0(t)u(t), \tag{2}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_2(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t)u(t), \tag{3}$$

где $t \in T$, $A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)$, $G_0(t) = G_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_2(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t)$.

Пусть $Z[t,\tau]$ и $X[t,\tau]$ есть фундаментальные матрицы решений соответственно систем (1) и (2), (при $u \equiv 0$), причем $X[\tau,\tau] = E$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$; $Z[\tau,\tau] = E$, $Z[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$.

Матрицу $Z[t,\tau]$ представим в следующем блочном виде [1]:

$$Z[t,\tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t,\tau] & Z_{12}[t,\tau] \\ Z_{21}[t,\tau] & Z_{22}[t,\tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t,\tau]$, $Z_{12}[t,\tau]$, $Z_{21}[t,\tau]$, $Z_{22}[t,\tau]$ — матрицы с размерами соответственно n×n, n×m, m×n, m×m.

В [2] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t,\tau]$ $(i,j = 1,2)$, определяющих асимптотику матрицы $Z[t,\tau]$ относительно $\mu > 0$:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau] = X[t,\tau] -$$

$$-\int_{\tau}^{t} (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau] = Y[t,\tau] + \int_{\tau}^{t} Z_{21}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]ds,$$

$$Z_{12}^{(k)}[t,\tau] = \int_{\tau}^{t} Z_{11}^{(k)}[t,s]A_{12}(s)Y[s,\tau]ds, \quad k = 0,1,2,\ldots;$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau] = (1/\mu)\int_{\tau}^{t} Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau] + G_2(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds;$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau] = X[t,\tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t,\tau] = Y[t,\tau]$, $Y[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y$, $Y[\tau,\tau] = E$.

Применяя формулу Коши, выпишем решение системы (1) при некоторых $z_0 \in Z_0$, $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$, $u(\cdot) \in P$:

$$x(t,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot)) = Z_{11}[t,t_0]x_0 + Z_{12}[t,t_0]y_0+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}(Z_{11}[t,\tau]G_1(\tau) + (1/\mu)Z_{12}[t,\tau]G_2(\tau))\psi(\tau-h)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}(Z_{11}[t,\tau]B_1(\tau) + (1/\mu)Z_{12}[t,\tau]B_2(\tau))u(\tau)d\tau,$$

$$y(t,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot)) = Z_{21}[t,t_0]x_0 + Z_{22}[t,t_0]y_0+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}(Z_{21}[t,\tau]G_1(\tau) + (1/\mu)Z_{22}[t,\tau]G_2(\tau))\psi(\tau-h)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}(Z_{21}[t,\tau]B_1(\tau) + (1/\mu)Z_{22}[t,\tau]B_2(\tau))u(\tau)d\tau.$$

Используя [1], но для системы с запаздыванием, получим следующий результат.

Лемма 1. *При $0 < \mu \le \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $z_0 \in Z_0$, $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$, $u(\cdot) \in P$ справедливы асимптотические представления:*

$$x(t,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot)) = x_0(t,u(\cdot),x_0,\psi(\cdot)) + o(1), \quad t_0 \le t \le t_1,$$

при $t_0 + h + \alpha(\mu) \le t \le t_1$, $\alpha(\mu) = o(1)$, $\alpha(\mu)/\mu \to +\infty$ при $\mu \to +0$,

$$y(t,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot)) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)(x_0(t,u(\cdot),x_0,\psi(\cdot))+$$

$$+G_2(t)x_0(t-h,u(\cdot),x_0,\psi(\cdot))) + (1/\mu)\int\limits_{t_0}^{t}Y[t,\tau]B_2(\tau)u(\tau)d\tau + o(1),$$

где $x_0(t,u(\cdot),x_0,\psi(\cdot))$ — решение системы (2), исходящее из X_0 при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Обозначим $X(t,u(\cdot),Z_0,\psi(\cdot))$, $Y(t,u(\cdot),Z_0,\psi(\cdot))$ соответствующие проекции множества $Z(t,u(\cdot),Z_0,\psi(\cdot))$ — ансамбля траекторий $z(t,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, при некотором $\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot)\in P$, на пространства переменных $x\in R^n$ или $y\in R^m$; $X_0(t,u(\cdot),X_0,\psi(\cdot))$, $Y_0(t,u(\cdot),X_0,\psi(\cdot))$ — аналогичные проекции множества $Z_0(t,u(\cdot),X_0,\psi(\cdot))$ — ансамбля траекторий $z_0(t,u(\cdot),x_0,\psi(\cdot))$ системы (2), (3), исходящих из X_0, при $\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)$ и $u(\cdot)\in P$.

Лемма 2. [3] *Существует достаточно малое число $\mu_0>0$, что при $0<\mu\le\mu_0$ для любых $t\in T$, $u(\cdot)\in P$, $\psi(\cdot)\in\Psi$ справедливы представления ($\rho(l|X)$ — опорная функция множества X на элементе $l=(p',q')'$):*

(i) $\rho(p|X(t,u(\cdot),Z_0,\psi(\cdot)))=\rho(p|X_0(t,u(\cdot),X_0,\psi(\cdot)))+o(1)$ *равномерно по $p\in R^n$, $p'p=1$;*

(ii) $\int\limits_{t_0}^{t}\rho(q|Y(\tau,u(\cdot),Z_0,\psi(\cdot)))d\tau=\int\limits_{t_0}^{t}\rho(q|Y_0(\tau,u(\cdot),X_0,\psi(\cdot)))d\tau+o(1)$ *равномерно по $q\in R^m$, $q'q=1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кремлев А. Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автомат. и телемехан. 1993. № 9. С. 61–78.

2. *Гребенникова И. В.* Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9б вып. 3. С. 14–22.

3. *Гребенникова И. В.* Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 28–39.

УДК 519.853

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТОДОВ НАИСКОРЕЙШЕГО И ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

М. В. Долгополик, Г. Ш. Тамасян (Санкт-Петербург, РФ)
maxim.dolgopolik@gmail.com, g.tamasyan@spbu.ru

Существует множество разнообразных методов решения гладких и негладких задач условной оптимизации, в частности, модификация метода множителей Лагранжа, метод штрафных функций. В последнее

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00752).

время при исследовании экстремальных задач с ограничениями широко используется метод точных штрафных функций [1–4], который позволяет сводить задачи условной оптимизации к эквивалентным задачам безусловной оптимизации. Данный подход был успешно применен при решении задач вариационного исчисления, теории управления, вычислительной геометрии, математической диагностики [4–10]. Отметим, что даже если исходная задача условной оптимизации является гладкой, построенная с помощью теории точных штрафных функций эквивалентная задача безусловной оптимизации всегда является существенно негладкой [4].

На сегодняшний день имеется хорошо разработанная теория негладкого анализа и недифференцируемой оптимизации с помощью которой можно исследовать и эффективно решать широкий круг негладких задач. Одними из центральных понятий данной теории являются понятия субдифференциала и субдифференцируемости. С помощью субдифференциала можно проверять необходимые условия экстремума исследуемой функции, находить направления спуска, а также строить численные методы решения негладких оптимизационных задач. Заметим, что во многих задачах на условный экстремум построенная точная штрафная функция принадлежит к классу субдифференцируемых функций [4].

Из всего разнообразия существующих субдифференциалов (Шора, Кларка, Мишеля–Пено, Мордуховича) в приложениях наиболее «привлекателен» субдифференциал введенный Б. Н. Пшеничным и его модификации. Однако, субдифференциальное отображение не является непрерывным, из-за чего возникают трудности со сходимостью в численных методах. В конце 80-х годов прошлого столетия В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов ввели и исследовали понятие кодифференциала, который состоит из пары выпуклых компактов, гиподифференциала и гипердифференциала. В отличи от субдифференциального отображения кодифференциальное отображение является непрерывным. Заметим, что множество субдифференцируемых функций совпадают со множеством гиподифференцируемых функций.

В докладе будет рассказано о методах наискорейшего и гиподифференциального спусков, об их свойствах и случаях, когда данные методы эквиваленты. На примерах задач вариационного исчисления и вычислительной геометрии будет продемонстрирована эффективность предлагаемого подхода в решении задач условной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еремин И. И.* Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Докл. АН СССР, 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.

2. *G. Di Pillo and F. Facchinei* Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems // Nonsmooth Optimization and Related Topics / Eds. F.H. Clarke, V.F. Demyanov and F. Giannessi. N. Y. : Plenum, 1989. P. 89–107.

3. *Демьянов В. Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 4, № 22. С. 21–27.

4. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. М. : Высш. шк., 2005. 335 с.

5. *Demyanov V. F. and Tamasyan G. Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. Vol. 60, iss. 1. P. 153–177.

6. *Tamasyan G. Sh.* Numerical methods in problems of calculus of variations for functionals depending on higher order derivatives // J. of Math. Sciences. 2013. Vol. 188, №. 3. P. 299–321.

7. *Dolgopolik M. V., Tamasyan G. Sh.* Method of steepest descent for two-dimensional problems of calculus of variations // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. Springer Optimization and Its Applications. 2014. Vol. 87. P. 101–113.

8. *Demyanov V. F., Giannessi F. and Karelin V. V.* Optimal Control Problems via Exact Penalty Functions // J. of Global Optimization. 1998. Vol. 12, № 3. P. 215–223.

9. *Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А.* Нахождение расстояния между эллипсоидами // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. (принята в печать)

10. *Demyanov V. F.* Mathematical diagnostics via nonsmooth analysis // Optim. Methods Softw. 2005. Vol. 20, № 2–3. P. 197–218.

УДК 517.54

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ.[1]

Е. П. Долженко (Москва, РФ)
eugen@ngcom.ru
С. В. Колесников (Иваново, РФ)
servikkol@rambler.ru

§1. Выпуклые области

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Каждое конформное отображение $w = \varphi(z)$ любой ограниченной выпуклой области G комплексной плоскости на единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$, по непрерывности продолженная на замыкание*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952а).

$\overline{G}$ *этой области, имеет всюду на* $\overline{G}$ *ограниченную производную* $\varphi'(z)$ *(так что* $\varphi \in Lip\,1$ *на* $\overline{G}$*).*

Там же найден критерий непрерывности $\varphi'(z)$ в какой-либо точке $\zeta_0 \in \in \partial G$. Сформулируем этот критерий. Для этого потребуются следующие определения.

Открытая жорданова дуга Γ границы ∂G некоторой односвязной области G называется достижимой из G посредством (односвязной) жордановой области $\Omega(G,\Gamma) \subset G$ если $\overline{\Omega(G,\Gamma)} \cap \partial G = \overline{\Gamma}$.

Пусть Γ — открытая достижимая дуга границы односвязной области G, выпуклая или вогнутая относительно этой области. Очевидно, что в каждой ее внутренней точке ζ существует правая полукасательная. Пусть $\Theta(\zeta)$ обозначает величину угла, образованного правой полукасательной к дуге Γ в некоторой точке $\zeta \in \Gamma$ с положительным направлением действительной оси. Через $\vartheta(\zeta)$ обозначим однозначную ветвь бесконечнозначной функции $\Theta(\zeta)$ на Γ, обладающую следующими свойствами: 1) в случае достижимой дуги Γ, выпуклой из области G, функция $\vartheta(\zeta)$ монотонно не убывает, а в случае вогнутой в G она монотонно не возрастает при движении ζ вдоль Γ в положительном направлении; 2) в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ колебание функции[1] $\vartheta(\zeta)$ строго меньше π.

Через ν обозначим борелевскую меру на Γ, порожденную функцией $\vartheta(\zeta)$. В случае выпуклости достижимой дуги Γ эта мера неотрицательна, в случае её вогнутости — неположительна. Определим потенциал $U_\nu(z)$ на плоскости $\mathbf{C}$ равенством

$$U_\nu(z) := \int_\Gamma \ln \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\nu(\zeta).$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 2. *Функция* $\varphi'(z)$ *непрерывна относительно* $\Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$ *в некоторой достижимой точке* $\zeta_0 \in \Gamma$ *тогда и только тогда, когда* $-\infty < U_\nu(\zeta_0) \le +\infty$ *и потенциал* $U_\nu(z)$ *непрерывен в этой точке вдоль* Γ *(или что то же, на* $\mathbf{C}$*). С другой стороны, функция* $\psi'(w)$ *непрерывна по* $w \in D \cup \gamma$ *в точке* $\omega_0 = \varphi(\zeta_0) \in \gamma$ *тогда и только тогда, когда* $-\infty \le U_\nu(\zeta_0) < +\infty$ *и потенциал* $U_\nu(z)$ *непрерывен в точке* ζ_0*.*

Используя этот критерий, нетрудно построить выпуклую область с гладкой границей, для которой функция $\varphi'(z)$ не является непрерывной в некоторой граничной точке ζ_0.

[1]Колебанием конечной функции $f(z)$, определенной на множестве $E \subset \mathbb{C}$, в точке $z_0 \in E$ называется величина $\lim_{\delta\to 0} \sup\{|f(z') - f(z'')| : \ z', z'' \in E,\ |z' - z_0| < \delta, |z'' - z_0| < \delta\}$

§2. Области с гладкими границами

Пусть теперь Γ — открытая достижимая жорданова дуга границы ∂G некоторой односвязной области G, не обязательно выпуклая, $t \in \Gamma$, $D(t,r)$ — открытый круг радиуса $r > 0$ с центром t. Пусть число $a = a(t) > 0$ таково, что при любом $r \in (0,a]$ окружность $C(t,r) := \partial D(t,r)$ пересекается с границей области $\Omega(G,\Gamma)$ ровно в двух точках, причем, лежащих на Γ. Заметим, что это условие выполняется в случае гладкой кривой Γ, однако для выполнения этого условия гладкость не обязательна.

Пусть функция $w = \Phi(z)$ однолистно и конформно отображает область G на верхнюю полуплоскость P таким образом, что $\Phi(\Gamma)$ является ограниченным открытым интервалом действительной оси. Через $G(t,r)$ обозначим пересечение $D(t,r)$ с $\Omega(G,\Gamma)$. При $R \in (0,a]$ положим

$$p(t,R) := 1 - \sqrt{mes\, D(t,R)/(2\, mes\, G(t,R))}, \quad I(t,R) := \int_R^a (p(t,r)/r)\, dr.$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 3. *Если t — фиксированная точка дуги Γ и интеграл $\int_R^a (p(t,r)/r)\, dr$ ограничен сверху при $R \in (0,\, a)$, то $|\Phi(z) - \Phi(t)| \le K|z-t|$ при $z \in \Omega(G,\Gamma) \cup \Gamma$ ($K > 0$ и не зависит от z).*

Теорема 4. *Пусть t — фиксированная точка гладкой открытой достижимой дуги Γ границы односвязной области G. Тогда*

(1) если величина $I(t,R)$ имеет предел A, отличный от $+\infty$ при стремлении R к 0, то функция $\Phi'(z)$ имеет в точке t конечный угловой предел изнутри $\Omega(G,\Gamma)$,

(2) если функция $\Phi'(z)$ имеет в точке t угловой предел, отличный от 0, то величина $I(t,R)$ имеет предел A, отличный от $-\infty$.

Следствием из этой теоремы является

Теорема 5. *При условиях теоремы 4 на Γ, если $t \in \Gamma$ и существует предел $\lim\limits_{R\to 0+} I(t,\, R) \in [-\infty,\, +\infty)$, то функция $\varphi(z)$ имеет в точке t производную относительно множества $\Omega(G,\, \Gamma) \cup \Gamma$.*

Об оценках модулей непрерывностей конформных отображений произвольных жордановых областей см. [3] и [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долженко Е.П., Колесников С.В.* О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг// Мат. заметки. 2011. Т. 90(4). С. 801–516.

2. *Долженко Е. П., Колесников С. В.* О граничном поведении производных конформных отображений областей с гладкими границами// Вестник Моск. ун-та. Математика. Механика (принята к печати).

3. *Долженко Е. П.* Модули непрерывности и производные конформных отображений // Збiрник праць Iн-ту математики НАН Украiни. 2013. Т. 10, № 4–5. С. 450–465.

4. *Долженко Е. П.* Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг // Мат. сб. 2011. Т. 202. С. 57–106.

УДК 519.583

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ПО ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ[1]

С. И. Дудов (Саратов, РФ)
DudovSI@info.sgu.ru

Пусть D — заданный выпуклый компакт из $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$.

Ряд известных задач по оценке выпуклого компакта D шаром данной нормы можно записать в следующей общей форме

$$F(R(x), P(x)) \to \min_{x \in S}. \tag{1}$$

Здесь $F(t_1, t_2)$ — некоторая функция вещественных переменных t_1 и t_2, $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$,

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y), \qquad P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$, $\rho_A(x) = \inf\limits_{y \in A} n(x - y)$ — функция расстояния от точки x до множества A.

Цель работы — показать, что при некоторых естественных условиях на функцию $F(t_1, t_2)$, решение задачи (1) может быть выражено решениями «канонической» задачи

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00238 и 13-01-00175).

при определенных значениях параметра r и с помощью этого параметра предложить систематизацию задач вида (1). Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \le r\}$ — шар нормы $n(\cdot)$ радиуса r и с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\right\}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцируемое нормой $n(\cdot)$.

Обозначим

$$C_\varphi(r) = \left\{y \in \mathbb{R}^p : \varphi(y,r) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} \varphi(x,r)\right\}$$

и

$$C_F = \left\{y \in S : \ F(R(y), P(y)) = \min_{x\in S} F(R(x), P(x))\right\},$$

считая, что решение конкретной задачи (1) существует.

Теорема. *Пусть $S \in \{\mathbb{R}^p, D\}$, а функция $F(t_1,t_2)$ не убывает по $t_1 \in \mathbb{R}_+$, а по t_2 — на $\mathbb{R}$ или, хотя бы на $\mathbb{R}_-$, если $S = D$, и при этом возрастает хотя бы по одной из переменных. Тогда, если $x^* \in C_F$, то $x^* \in C_\varphi(r)$ для значения $r = (R(x^*) - P(x^*))/2$.*

Условия теоремы и общая форма записи (1) задают конкретный класс задач по шаровым оценкам выпуклого компакта, систематизацию которых можно предложить через ранжирование по соответствующим значениям параметра r.

На основе изучения и использования свойств решения задачи (2) были получены диапазоны значений радиуса r (или их оценки), в которых она выражает решения

– задач о вписанном и описанном шарах (случай $F(t_1,t_2) = t_2$ и $F(t_1,t_2) = t_1$ соответственно и $S = \mathbb{R}^p$, см. [1] и [2]);

– задач о равномерной оценке шаром в метрике Хаусдорфа (случай $F(t_1,t_2) = t_1 + t_2$, $S = \mathbb{R}^p$, см. [3, 4]);

– задачи об асферичности выпуклого тела (случай $F(t_1,t_2) = \dfrac{t_1}{|t_2|}$, $S = D$, см. [5, 6]);

– задач о шаровой оболочке наименьшей толщины ([7]) и наименьшего объема для границы выпуклого тела (случай $F(t_1,t_2) = t_1 + t_2$ и $F(t_1,t_2) = t_1^p - |t_2|^p$ соответственно и $S = D$).

Это позволило расположить задачи в порядке возрастания соответствующих значений радиуса r. Итоговая таблица расположения задач будет приведена в процессе доклада.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1982.

2. *Дудов С. И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 5. С. 153–159.

3. *Никольский М. С., Силин Д. Б.* Наилучшее приближение выпуклого компакта элементами аддиала // Труды МИ РАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.

4. *Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38.

5. *Дудов С. И., Мещерякова Е. А.* О методе приближенного решения задачи об асферичности выпуклого тела // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1668–1678.

6. *Дудов С. И., Мещерякова Е. А.* Об асферичности выпуклого тела // Изв. вузов. Математика (принята к печати).

7. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002.

УДК 517.984

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ОТРЕЗКЕ

А. А. Елеуов, Н. Б. Закариянова, Р. А. Елеуова
Казахский национальный университет им. Аль-Фараби (Алматы, Казахстан)
Eleuov@mail.ru

В настоящей статье изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающиемися граничными условиями. В данной работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализе для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающие граничные условия. Таким образом, результаты настоящей статьи охватывают как распадающиеся так и нераспадающие граничные условия. Именно, в этом смысле основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [1], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

1. Вначале приведем известные результаты по прямой задачи спектрального анализа дифференциальных операторов высших порядков на

отрезке. В работе [2], изложена возможность разложения функции из некоторого функционального пространства по собственным и присоединенным функциями дифференциального оператора , положенного функциональном пространстве $L_2[0,b]$ при $b<\infty$ линейным дифференциальным выражением с переменными коэффициентами

$$Ly = l(y) = y^{(n)}(x) + P_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \ldots + P_0(x)y(x) \qquad (1)$$

с единственным ограничением.

(1) резольвентное множество оператора L — ненулевое множество. Не умоляя общности, полагаем, что комплексное число 0 принадлежит резольвентному множеству оператора L. Коэффициенты выражения $l(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$P_0(x) \in C[0,b], \qquad P_1(x) \in C^1[0,b], \ \ldots, \ P_{n-2}(x) \in C^{n-2}[0,b]. \qquad (2)$$

Согласно известной теореме М. Отелбаева [3] область определения такого оператора описывается с помощью набора n функций $l_1(\cdot), \ldots, l_n(\cdot)$ из пространства $L_2[0,b]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовничий В. А., Кангужин Б. Е.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 310–313.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

3. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 2000. Т. 299. 175 с.

4. *Кангужин Б. Е.* Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. КазНУ имени аль-Фараби. Алматы, 2005. 45 с.

УДК 517.984

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Л. С. Ефремова (Саратов, РФ)

liubov.efremova@gmail.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (1)$$

на отрезке $[0,\pi]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00375).

Добавим две пары краевых условий

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0. \tag{3}$$

Пусть $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, $(\nu_n)_{n\geqslant 0}$ — спектры краевых задач (1), (2) и (1), (3) соответственно.

Рассмотрим потенциал $q(x)$ с произвольным количеством точек разрыва первого рода. Такую функцию можно представить в виде

$$q(x) = q_1(x) + \sum_{a_j<x} h_j, \tag{4}$$

где a_j — j-я точка разрыва, $j = 1, ..., m$, h_j — высота j-го скачка, $j = 1, ..., m$. Пусть $q_1(x) \in AC[0, \pi]$.

Численные методы восстановления потенциала в случае его непрерывности показывают хорошие результаты. В противном случае их использование приводит к ухудшению точности на всем отрезке. Рафлер и Бёкманн в своей работе [2] предложили использовать обобщенную схему Ранделла–Сакса [3], которая в случае наличия информации о характеристиках разрыва, использует адаптированный под эти данные модельный потенциал, что приводит к увеличению точности восстановления потенциала. Однако возникает вопрос, который и будет рассматриваться далее, где взять необходимую априорную информацию о разрывах.

Определим $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ как вспомогательное множество собственных значений:

$$\lambda_{2n+1} = \nu_n, \quad n \geqslant 0,$$

$$\lambda_{2n} = \mu_n, \quad n \geqslant 1.$$

Если продолжить потенциал $q(x)$ с $[0, \pi]$ на $[0, 2\pi]$ следующим образом

$$q(2\pi - x) = q(x), \quad x \in [0, \pi],$$

то ясно, что $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ — спектр задачи Дирихле уравнения (1) на отрезке $[0, 2\pi]$.

Как известно, асимптотические формулы для $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ имеют следующий вид [1]:

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + A + c_n,$$

где $A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(x)dx$, $c_n = o(1)$, $n \to \infty$.

Определим следующую функцию

$$p_N(x) := \frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} c_n n e^{inx},$$

где $c_n = \lambda_n - \left(\frac{n}{2}\right)^2 - A$ — данные, полученные из собственных значений.

Запишем функцию $p_N(x)$ в виде $p_N(x) = \frac{2\pi i}{N+1} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} w_n c_n n e^{inx}$, где w_n — оконная функция, в нашем случае - прямоугольная, то есть $w_n = 1$ при $N \leqslant n \leqslant 2N$ и $w_n = 0$ в противном случае. Проводя аналогию с наблюдением за спектром ограниченного во времени сигнала [4], делаем следующий вывод: чтобы подавить боковые лепестки, нужно изменить оконную функцию w_n, а именно — сделать ее более гладкой.

Окончательно получаем следующую конструкцию

$$p_N(x) = \frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} \frac{w_n c_n n e^{inx}}{\beta}, \tag{5}$$

где w_n — некоторая оконная функция, например, $w_n = 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi(n-1.5N)}{N+1}\right)$, $\beta = \frac{1}{N+1} \sum\limits_{n=N}^{2N} w_n$ — коэффициент ослабления.

Теорема 1. *Пусть $p_N(x)$ — функция, определенная в (5). Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} p_N(a_j) = h_j,$$

$$\lim_{N\to\infty} p_N(x) = 0, \quad x \neq a_j,$$

где сходимость является равномерной на любом множестве вида

$$[0,\pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (a_j - \delta, a_j + \delta), \quad \delta > 0.$$

Следствие 1. *Пусть известно, что $a_1 \in [A_1, B_1]$, ..., $a_m \in [A_m, B_m]$, где A_k, B_k — некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < ... < A_m < B_m < \pi$. Для всех $\delta > 0$ существует $N(\delta) = N_\delta$ такое, что: если $N > N_\delta$ и x^* является точкой глобального максимума функции $|p_N(x)|$ на $[A_j, B_j]$, то $x^* \in (a_j - \delta, a_j + \delta)$.*

Алгоритм 1. Пусть даны $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$, $(\nu_n)_{n\geqslant 0}$, $[A_1, B_1], ..., [A_m, B_m]$ и известно, что потенциал $q(x)$ имеет вид (4). Требуется восстановить потенциал $q(x)$.

1. Конструируем функцию $p_N(x)$ по формуле (5).

2. На каждом отрезке $[A_j, B_j]$ находим точку разрыва a_j, $j = 1, ..., m$ как глобальный максимум функции $|p_N(x)|$ на этом отрезке.

3. Для каждого скачка приближенно находим его высоту h_j, $j = 1, ..., m$ как $h_j = p_N(a_j)$.

4. Применяем обобщенный итерационный алгоритм Ранделла–Сакса, в качестве модельного потенциала берем $\tilde{q} = \sum\limits_{a_j<x} h_j + C$, где C выбирается таким образом, чтобы $\int\limits_0^\pi \tilde{q}(x)dx = \int\limits_0^\pi q(x)\,dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications. N. Y. : NOVA Science Publishers, 2001.

2. *Rafler M., Böckmann C.* Reconstruction method for inverse Sturm–Liuville problems with discontinuous potentials // Inverse Problems. 2007. Vol. 23. P. 933–946.

3. *Rundell W., Sacks P. E.* Reconstruction techniques for classical inverse Sturm–Liuville problems // Math. Comput. 1992. Vol. 58. P. 161–183.

4. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов / пер. с англ. М. : Связь, 1979. 416 с.

УДК 517.54

О НАРУШЕНИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ ГАХОВА В СЕМЕЙСТВЕ КЛАССОВ ЯНОВСКОГО

Т. В. Жаркова, А. В. Казанцев (Казань, РФ)
zharkova89@yandex.ru, kazandrey0363@rambler.ru

Рассмотрим $\Delta = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha+\beta > 0, \alpha \le 1, \beta \le 1\}$. Класс Яновского $S^*[\alpha, \beta], (\alpha, \beta) \in \Delta$ (см., напр., [1]), состоит из всех функций f с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, голоморфных в круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta}, \quad \zeta \in D.$$

Пусть $\tilde{S}^*[\alpha, \beta]$ — подкласс $S^*[\alpha, \beta]$ с дополнительным условием $f''(0) = 0$, которое задает нулевой корень уравнения Гахова

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}. \tag{1}$$

Область единственности для семейства $\tilde{S}^*[\alpha,\beta],(\alpha,\beta)\in\Delta$, определяется как множество $\tilde{\Delta}\subset\Delta$, такое, что для любых $(\alpha,\beta)\in\tilde{\Delta}$ и $f\in\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ уравнение (1) имеет единственный корень.

Введем $\Delta_0=\{(\alpha,\beta)\in\Delta:3(\alpha+\beta)\le 2\}$ и $\Delta_1=\{(\alpha,\beta)\in\Delta_0: 2\beta-3\alpha\ge-3\}$. Через Δ_2 обозначим множество, выделяемое из $\Delta_0\setminus\Delta_1$ неравенством $\alpha<\alpha(\beta),\beta\in(-1,-1/5)$, где

$$\alpha(\beta)=1-\frac{(1+\beta)^3}{(1+\beta)^2-16\beta},\beta>-1.$$

В статье [2] доказана

Теорема. *Множество* $\Delta'=\Delta_1\cup\Delta_2$ *является максимальной (по включению) областью единственности для семейства классов* $\tilde{S}^*[\alpha,\beta],(\alpha,\beta)\in\Delta$.

Доклад посвящен исследованию ситуации,когда в рассматриваемую выше постановку добавляется третий параметр $r\in(0,1]$, связывающий с каждой функцией $f\in\tilde{S}^*[\alpha,\beta]$ семейство $f_r(\zeta)=f(r\zeta)/r$. Построена поверхность $\Phi\in\Delta\times(0,1]$, которая представляет собой границу максимальной области единственности решения уравнения (1). Изучен характер нарушения единственности корня при выходе на указанную границу и за ее пределы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Janowski W.* Some extremal problems for certain families of analytic functions. I // Ann. Polon. Math. 1971. Vol. 28. P. 297–326.

2. *Жаркова Т. В, Казанцев А. В.* О единственности решения уравнения Гахова для функций из классов Яновского // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2013. № 2.

УДК 517.98, 517.968

О ЛИНЕЙНОМ ОГРАНИЧЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЕ ОБЩЕГО ВИДА, СВЯЗАННОМ С ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИИРОВАНИЯ

Н. А. Знатнина, С. Н. Кабанов (Саратов, РФ)

В [1] был введен оператор обобщенного интегродифференцирования вида

$$C_p\,y(x):=K_p\,K_{p-1}\dots K_1\,y(x),\quad x\in[0,1],\tag{1}$$

где

$$K_l\,y(x)=\int_0^x k_l(x-t)y(t)dt,\quad l=\overline{1,p},$$

$p\ge 1$ — целое, $k_l(x)$, $y(x)\in L[0,1]$.

Было установлено, что для оператора (1) существует обратный оператор вида

$$D_p = DK_1^*\, DK_2^* \dots DK_p^*, \tag{2}$$

где

$$DK_l^* g(x) = \frac{d}{dx} K_l^* g(x),$$

$$K_l^* g(x) = \int\limits_0^x k_l^*(x-t) g(t)\, dt,$$

и при этом справедливы формулы обращения

$$D_p\, C_p\, y(x) \overset{\text{п. в.}}{=} y(x), \quad x \in [0,1],$$

$$C_p\, D_p\, y(x) \overset{\text{п. в.}}{=} y(x) - \sum_{l=1}^{p} \omega_l y(0) \mathcal{K}_l(x), \tag{3}$$

где

$$\omega_1 = K_1^*(DK_2^* \dots DK_p^*), \quad \dots, \quad \omega_{p-1} = K_{p-1}^*(DK_p^*), \quad \omega_p = K_p^*,$$
$$\mathcal{K}_1(x) = k_p(x) * \dots * k_1(x), \quad \dots, \quad \mathcal{K}_{p-1}(x) = k_p(x) * k_{p-1}(x),$$
$$\mathcal{K}_p(x) = k_p(x).$$

Обозначим через AC^{D_p} следующее множество функций:

$$AC^{D_p} = \left\{ \varphi(x) : K_1^*(DK_2^* \dots DK_p^*) \varphi(x) \in AC,\ D_p \varphi(x) \in L[0,1] \right\}.$$

Введем в AC^{D_p} норму $\|\cdot\|_2$ следующим образом:

$$\|\varphi\|_2 = \sum_{l=1}^{p} \left|\{\omega_l \varphi(x)\}_{x=0}\right| + \int\limits_0^1 |D_p \varphi(t)|\, dt.$$

Легко видеть, что для $\|\cdot\|_2$ выполняются все аксиомы нормы.

Тем самым во множестве AC^{D_p} может быть введена структура линейного нормированного пространства. Найдем общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве AC^{D_p}.

Важность этой задачи, среди прочего, обусловлена тем, что вид краевых условий для оператора D_p, как раз определяется такими функционалами. Имеет место

Лемма *Справедливы следующие соотношения:*

$$\{\omega_i \mathcal{K}_j(x)\}_{x=0} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Из леммы и формулы (3) следует, что

$$F_2(\varphi) = F_2(C_p D_p \varphi(x)) + \sum_{l=1}^{p} \left[\{\omega_l \varphi(x)\}_{x=0} F_2(\mathcal{K}_l(x)) \right], \tag{4}$$

где F_2 — обозначает линейный функционал в пространстве AC^{D_p}.

Обозначим $z = D_p\varphi(x)$ и покажем, что $F_2(C_p z) = F_1(z)$ есть некоторый линейный ограниченный функционал в пространстве $L[0,1]$. В самом деле,

$$\|F_2(C_p z(x))\| = \|F_2(C_p D_p \varphi(x))\| \le \|F_2\| \cdot \|C_p D_p \varphi(x)\|_2 =$$
$$= \|F_2\| \left(\sum_{j=1}^{p} \left| \{\omega(C_p D_p \varphi(x))\}_{x=0} \right| + \int_0^1 |D_p C_p D_p \varphi(t)| \, dt \right) =$$
$$= \|F_2\| \left(\sum_{j=1}^{p} \left| \left\{ \omega_j \left(\varphi(x) - \sum_{l=1}^{p} \{\omega_l \varphi(x)\}_{x=0} \mathcal{K}_l(x) \right) \right\}_{x=0} \right| + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 |D_p C_p z(t)| \, dt \right) = \|F_2\| \left(\sum_{j=1}^{p} |\{\omega_j \Phi(x)\}_{x=0}| + \int_0^1 |D_p C_p z(t)| \, dt \right), \tag{5}$$

где $\Phi(x) = \varphi(x) - \sum\limits_{l=1}^{p} \{\omega_l \varphi(x)\}_{x=0} \mathcal{K}_l(x)$.

Но в силу леммы $\{\omega_i \mathcal{K}\}_{x=0} = \delta_{ij}$, поэтому

$$\sum_{j=1}^{p} \left| \{\omega_j \Phi(x)\}_{x=0} \right| \equiv 0. \tag{6}$$

Из формул (5)–(6) следует, что

$$\|F_2(C_p z)\| \le \|F_2\| \cdot \int_0^1 |D_p C_p z(t)| \, dt = \|F_2\| \int_0^1 |z(t)| \, dt = \|F_2\| \cdot \|z\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ — это обозначение нормы в пространстве $L[0,1]$. Таким образом, приходим к выводу, что $F_2(C_p z) = F_1(z)$, и, поэтому, нахождение общего вида функционала в пространстве AC^{D_p} свелось к нахождению общего вида линейного ограниченного функционала в пространстве $L[0,1]$, имеющего вид

$$F_1(z) = \int_0^1 z(t) h(t) \, dt, \tag{7}$$

где $h(x) \in L^\infty[0,1]$.

Теперь с учетом $F_2(C_p z) = F_1(z)$, $z = D_p\varphi(x)$, (7) и (4) получаем

$$F_2(\varphi) = \sum_{l=1}^{p} C_l \left\{\omega_l \varphi(x)\right\}_{x=0} + \int_0^1 D_p\varphi(t)h(t)\,dt, \tag{8}$$

где $C_l = const$, $l = \overline{1,p}$, $h(x) \in L^\infty[0,1]$.

Таким образом получена следующая

Теорема *Общий вид линейного ограниченного функционала в пространстве AC^{D_p}, порождаемом оператором обобщенного интегродифференцирования D_p, задается формулой* (8).

Данные исследования продолжают исследования, начатые в [2] и [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кабанов С. Н., Кузьмина О. Е.* Об одном интегральном уравнении // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 79–80.

2. *Сонин Н. Я.* Исследование о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М., 1954.

3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.,1966.

УДК 517.984.5

ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА–БЕЛЬТРАМИ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ЗАМКНУТЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ В СЛУЧАЕ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Т. В. Зыкова (Москва, РФ)

zytanya@yandex.ru

Рассмотрим евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ в R^3. Пусть существуют координаты (u_1, u_2, u_3), такие что

$$x^2 = f_1(u_1,u_2,u_3), \quad y^2 = f_2(u_1,u_2,u_3), \quad z^2 = f_3(u_1,u_2,u_3).$$

Эти соотношония позволяют выписать в новых координатах ds^2, а дополнительно ограничив получившуюся метрику на сферу единичного радиуса (как правило заменой одной из переменных, например, u_3 на единицу) получим общий вид стандартной метрики единичной сферы в координатах (u_1, u_2):

$$ds^2 = A(u_1,u_2)du_1^2 + B(u_1,u_2)du_1du_2 + C(u_1,u_2)du_2^2,$$

где $A(u_1, u_2)$, $B(u_1, u_2)$, $C(u_1, u_2)$ положительные, дважды дифференцируемые функции.
Далее рассмотрим всевозможные возмущения этой метрики вида

$$ds_p^2 = A_p(u_1, u_2)du_1^2 + B_p(u_1, u_2)du_1du_2 + C_p(u_1, u_2)du_2^2,$$

для которых верно:

1) $A_p(u_1, u_2), B_p(u_1, u_2), C_p(u_1, u_2)$ — неотрицательные (при этом $A_p(u_1, u_2)C_p(u_1, u_2) - B_p^2(u_1, u_2) > 0$), дважды дифференцируемые функции, такие что геодезические получившейся метрики замкнуты и имеют одинаковую длину.

2) $A_p(u_1, u_2) = A(u_1, u_2) + P_A(u_1, u_2)$, $B_p(u_1, u_2) = B(u_1, u_2) + P_B(u_1, u_2)$, $C_p(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) + P_C(u_1, u_2)$, то есть возмущения таковы, что при обнулении функций $P_A(u_1, u_2)$, $P_B(u_1, u_2)$, $P_C(u_1, u_2)$, мы получим стандартную метрику сферы.

Следует ометить, что в такой постановке задача нахождения регуляризованного следа для оператора Лапласа–Бельтрами до этого не рассматривалась. Во всех частных случаях рассмотренных прежде ([1–3] и др.) многообразия задавались метриками, в выражении которых отсутствовал член $B(u_1, u_2)du_1du_2$ (в введенных обозначениях). Приведенный же вид охватывает все возможные выражения метрик на сфере и их возмущений. В таком виде вычислительная сложность решения задачи сильно возросла и решение было получено посредствам символьного программирования в пакете Mathematica.

Теорема 1. *Если q — бесконечно-дифференцируемая вещественнозначная функция на M_{gc}, то для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} \left(\lambda_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{M_{gc}} q(u_1, u_2) \sqrt{\det g}\, du_1 du_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{S^* M_{gc}} (q^{av})^2 dv -$$

$$- \frac{1}{60\pi} \iint\limits_{M_{gc}} (\Delta\gamma(M_{gc}) + \gamma^2(M_{gc}) - \gamma(M_{gc})) \sqrt{\det g}\, du_1\, du_2 -$$

$$\frac{1}{24\pi} \iint\limits_{M_{gc}} \left(-\Delta q(u_1, u_2) + 3q^2(u_1, u_2) - 2q(u_1, u_2)(\gamma(M_{gc}) - 1) \right) \sqrt{\det g} du_1 du_2,$$

где $\gamma(M_{gc})$ — гауссова кривизна M_{gc}, и

$$\sqrt{\det g} = \sqrt{A(u_1,u_2)C(u_1,u_2) - B^2(u_1,u_2)}$$

— корень из определителя матрицы метрического тензора, S^*M_{gc} — расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве, dv — каноническая форма объема на S^*M_{gc}, а q^{av} — символ усреднения на M_{gc} ($q^{av} = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\exp t\Xi)^*(q)dt$, где Ξ — гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T_{gc}^M \setminus \{0\}$, определяемое римановой структурой на M_{gc}).

Важно заметить, что в случае, если $q(u_1,u_2) \equiv 0$, то результат для собственных чисел самого оператора Лапласа–Бельтрами будет чисто геометрическим — будет зависеть только от возмущений самой метрики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. С. 61–62.

2. *Бобров А. Н.* След оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на поверхности Цолля // Докл. АН. 1999. Т. 368, № 2. С. 154–156.

3. *Зыкова Т. В.* Регуляризованный след возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами на некотором семействе многообразий // Докл. АН. 2011. Т. 437, № 5. С. 590–591.

УДК 51-75

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСРОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ ИННОВАЦИЙ

С. В. Иванилова, С. В. Ермасов (Саратов, РФ)
ivanilovasv@yandex.ru

Комбинация механизмов внутреннего (самострахования) и внешнего (страхования) управления рисками вокруг стратегий роста стоимости собственного капитала должны опираться на новую парадигму риск-менеджмента — вместо старой парадигмы, которая характеризовалась обособленным подходом к управлению рисками (когда каждый риск рассматривался отдельно), новый подход является единым, комплексным, интегрирующим все риски организации, в рамках которого разрабатываются стратегии реагирования на риск.

Если самострахование и страхование по отдельности не могут покрывать все убытки по чистому интегральному риску (integrated risk, overall risk, risk package), то целесообразно трансформировать метод Хаустона [3] из модели выбора эффективной защиты в модель сочетания самострахования и страхования для повышения полноты компенсации убытков по интегральному риску с учетом превентивных мероприятий, содержания службы риск-менеджмента организации и действия убытков по остаточному риску:

$$\begin{aligned} S_{ISIOB} = S - F_{si} - P_d - F_p - B_{op} - R_R + C_I + \\ +r(S - F_{si} - P_d - F_p - B_{op} - R_R + C_I) + iF_{si}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где

- S_{ISIOB} — стоимость организации в конце финансового периода при самостраховании (self-insurance), страховании (insurance) и текущем финансировании (operating budget) управления риском;
- S — стоимость организации в начале финансового периода до самострахования и страхования;
- F_{si} — величина фонда риска в случае осуществления самострахования (self-insurance) по размеру приемлемого или допустимого риска (absorbable risk), когда убытки (L_{min} или $L_{average}$) не превосходят размеров:
  - для консервативных инвесторов — величины среднегодовой чистой прибыли;
  - для умеренных инвесторов — величины среднегодовой операционной или маржинальной прибыли;
  - для агрессивных инвесторов — величины среднегодовой чистой выручки (без косвенных налогов);
- P_d (premium paid) — величина уплаченной страховой премии;
- F_p — фонд превентивных мероприятий (preventive fund);
- r — средняя доходность работающих активов;
- i — средняя доходность активов фонда самострахования риска;
- B_{op} — текущие расходы (operating costs) или текущий бюджет (operating budget) службы риск-менеджмента организации (employment of risk management of organization);
- C_I (insurance compensation) — выплата страховой суммы или возмещение страховых убытков при страховом случае по размеру критического риска (emergency risk), когда убытки ($L_{average}$ или L_{max}) не превосходят размеров:

– для консервативных инвесторов — величины среднегодовых ликвидных чистых текущих активов;
– для умеренных инвесторов — величины среднегодовых ликвидных текущих активов без учета текущих пассивов;
– для агрессивных инвесторов — среднегодовой величины собственного капитала без учета долгосрочных и краткосрочных пассивов (обязательств);

- R_R — убытки по остаточному риску (residual risk / loss) непокрытому самострахованием и страхованием.

С математической точки зрения стоимость организации рассматривается как линейный полином вида:

$$^1P = f(^1K) = b \cdot ^1 K + a, \tag{2}$$

где a — скаляр; b — вектор-строка; ^1K — вектор-столбец [2].

Преобразуем рассмотренные формулы, в математическую модель, пригодную для использования в экономике, не только в теории, но и с практической точки зрения.

С математической точки зрения активы предприятия представляют собой пару вида $(^0p, ^1P)^1$, где ^0p — общая стоимость организации в начале финансового периода до самострахования и страхования; ^1P — стоимость организации в конце финансового периода при самостраховании, страховании и текущем финансировании управления риском, аналог экономического обозначения S_{ISIOB}. Формулу (1) можно представить в векторной форме:

$$^1P = ^0 p - ^1 K + ^1 C + r(^0p - ^1 K + ^1 C) + iP_iVaR. \tag{3}$$

Пусть в формуле (1) общая стоимость организации равна стоимости всех активов организации. Стоимость организации в любой момент времени можно представить как вектор активов ^1A, равный:

$$^1A = (A_1, \ldots, A_n)^T, \tag{4}$$

где A_i – стоимость i-го актива в конечный момент времени. ^1K — вектор оттока денежных средств, состоящий из суммы векторов следующих величин: фонда риска в случае осуществления самострахования (F_{si}), уплаченной страховой премии (P_d), фонда превентивных мероприятий (F_p), текущих расходов службы риск-менеджмента организации (B_{op}), убытков по остаточному риску непокрытому самострахованием и страхованием (R_R).

$$^1K = F_{si} + P_d + F_p + B_{op} + R_R, \tag{5}$$

$$F_{si} = (F_{si,1}, \ldots, F_{si,n})^T, \tag{6}$$

$$P_d = (P_{d,1}, \ldots, P_{d,n})^T, \tag{7}$$

По аналогии с формулами (6), (7) рассматриваются показатели F_p и R_R. ^1C — вектор выплат страховой суммы или возмещения страховых убытков при страховом случае, имеет вид аналогичный формулам (6), (7). P_i — вероятность страхового случая, VaR — размер ущерба, рассчитываемый линейным методом.

Предлагаемая модель позволяет с использованием математического аппарата формировать финансовую защиту от действия интегрального чистого риска через сочетание самострахования и страхования в общем объеме компенсации убытков с превентивными мероприятиями и текущим финансированием содержания службы риск-менеджмента организации при учете убытков по остаточному риску.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Holton G. A.* Value-at-Risk. Theory and Practice. Academic Press, 2003.

2. *Долматов А. С.* Математические методы риск-менеджмента : учеб. пособие. М. : Изд-во «Экзамен», 2007.

3. *Хохлов Н. В.* Управление риском. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 1999. С. 172–175.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, РФ)
IgnatievMU@info.sgu.ru

Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in \in r_0$. Функцию y на графе Γ будем трактовать как пару функций $(y_0(x), x \in [0,T], y_1(x), x \in [0,\infty))$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv D^3 y_0 + p_{01}(x) D y_0 + p_{00}(x) y_0 = \rho^3 y_0, \tag{1}$$

где ρ — спектральный параметр, $D = -id/dx$ и коэффициенты $p_{00}(x)$, $p_{01}(x)$ таковы, что $\ell_0^* = \ell_0$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_1 y_1 \equiv D^N y_1 + \sum_{s=0}^{N-2} p_{1s}(x) D^s y_1 = \rho^N y_1, \tag{2}$$

где $N \geq 3$ и $|p_{1s}(x)| \exp(\tau x) \in L(0,\infty)$ для некоторого $\tau > 0$.

Введем в рассмотрение следующие линейные формы:

$$U_\nu(y) := \sigma_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{s=0}^{\nu-2} \sigma_{\nu s} y^{(s)}(0), u_{\xi\nu}(y) = (-1)^{\chi_{\xi\nu}} y^{(\nu-1)}(\xi),$$

где $\xi \in \{0, T\}$, $\chi_{0\nu} = 0$, $\chi_{T\nu} = \chi$, $\nu = 1, 2$, $\chi_{T3} = \chi + 1$, $\chi \in \{0, 1\}$. Для функции $y = (y_0, y_1)$ на Γ и $\nu \in \overline{1, N}$ определим условие склейки $C(\nu)$ как равенство $u_{0\nu}(y_0) = u_{T\nu}(y_0) = U_\nu(y_1)$, а условие $K(\nu)$ равенством $u_{0\nu}(y_0) + u_{T\nu}(y_0) + U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu \leq 3$ и $U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu > 3$.

Пусть $S_l := \{\arg(i\rho) \in \big((l-1)\frac{\pi}{N}, l\frac{\pi}{N}\big)\}$. Для фиксированного l через R_k, $k = \overline{1, N}$ обозначим корни N-й степени из 1, занумерованные таким образом, что $\mathrm{Re}(i\rho R_1) < \mathrm{Re}(i\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(i\rho R_N)$ для всех $\rho \in S_l$.

Зафиксируем $\chi \in \{0, 1\}$. Для каждого $k = \overline{1, N}$ в каждом из секторов S_l определим *решение типа Вейля порядка* k как решение системы (1), (2) $\psi_k(\rho) = (\psi_{k0}(x, \rho), \psi_{k1}(x, \rho))$ со следующими свойствами:

1) $\psi_{k1}(x, \rho) = \exp(i\rho R_k x)(1 + o(1)),\ x \to \infty$;

2) для $\psi_k(\rho)$ выполнены условия склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1, \nu_k - 1}, \nu_k = \min\{k, 3\}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$.

Используя известные методы [1, 2], можно показать, что $\psi_k(\rho)$ существует и единственна при всех $\rho \in \bar{S}_l \setminus (\{0\} \cup Z_{kl})$, где Z_{kl} — множество нулей характеристической функции задачи L_k^χ, порожденной уравнениями (1), (2), условиями склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1, \nu_k - 1}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$ и условием $y_1(x) = o(\exp(i\rho R_k x))$, $x \to \infty$. При этом как функции спектрального параметра ρ $\psi_{kj}(x, \rho)$ непрерывны на $\bar{S}_l \setminus (\{0\} \cup Z_{kl})$ и голоморфны в $S_l \setminus Z_{kl}$. Для любого $\rho_0 \in Z_{kl}$ $\psi_{kj}(x, \rho)$ допускают голоморфное продолжение в некоторую проколотую окрестность ρ_0.

Условие G_0. При каждом k $\psi_{k1}(x, \rho)$ голоморфна в $S_l \cap \{|\rho| < \delta\}$, $\delta > 0$ и $\psi_{k1}(x, \rho) = O\left(\rho^{-M}\right)$ при $\rho \to 0$, где $M < \infty$.

Условие G_1**.** Множества Z_{kl} при различных k не пересекаются. Каждое $\rho_0 \in Z_{kl}$ простой нуль характеристической функции задачи L_k^χ и простой полюс $\psi_{kj}(x,\rho)$ (хотя бы при одном $j \in \{0,1\}$).

Определим матрицу $\Psi = (\Psi_{k\nu})_{k,\nu=\overline{1,N}}$: $\Psi_{k\nu}(x,\rho) := D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho)$. При выполнении условия G_1 для каждого $\rho_0 \in Z_l := \bigcup\limits_{k=1}^{N} Z_{kl}$ существует единственная матрица $v_l(\rho_0)$ такая, что

$$\Psi(x,\rho)\left(I - (\rho-\rho_0)^{-1}v_l(\rho_0)\right)$$

ограничена в окрестности ρ_0. Далее, для $\rho_0 \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ (где $\Sigma_l := \bar{S}_l \cap \bar{S}_{l+1}$) определим: $\Psi_-(x_1,\rho_0) := \lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in S_l} \Psi(x,\rho)$, $\Psi_+(x,\rho_0) := = \lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in S_{l+1}} \Psi(x,\rho)$ и матрицу $v(\rho_0) := \Psi_+(x,\rho_0)\Psi_-^{-1}(x,\rho_0)$.

Назовем *данными рассеяния, ассоциированными с лучом* r_1, набор

$$J_1^\chi = \left\{v(\rho), \rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1}),\ Z_{kl}, v_l(\rho), \rho \in Z_{kl}, k = \overline{1,N}, l = \overline{1,2N}\right\}.$$

Один из результатов настоящей работы утверждает что, при выполнении некоторых условий регулярности, задание J_1^χ для любого $\chi \in \in \{0,1\}$ однозначно определяет коэффициенты уравнения (2). А именно, пусть $D_k^0(\rho)$ — определитель следующей СЛАУ относительно неизвестных $\beta_{ks}, s=\overline{1,3}$, $\gamma_{ks}, s=\overline{1,k-1}$ ($\omega = \exp(2\pi i/3)$):

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} = (-1)^{\chi T_\nu} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)}\exp(i\rho\omega^s T) = \\ = \sigma_\nu \left(\sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks}R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1}\right), \quad \nu = \overline{1,\nu_k-1} \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} + (-1)^{\chi T_\nu} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)}\exp(i\rho\omega^s T) + \\ +\sigma_\nu \left(\sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks}R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1}\right) = 0, \quad \nu = \overline{\nu_k,3} \\ \sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks}R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} = 0, \quad \nu = \overline{4,k}. \end{cases}$$

Условие R. $A_{km}^\pm \neq 0$ для всех k,m,l, где $A_{km}^\pm$ — коэффициенты в представлениях:

$$D_k^0(\rho) = A_{k0} + \sum_{m=1}^{3}\left(A_{km}^+\exp(i\rho\omega^m T) + A_{km}^-\exp(-i\rho\omega^m T)\right).$$

Для восстановления коэффициентов уравнения (1) потребуются, вообще говоря, некоторые дополнительные данные. Обозначим через $\Lambda^{\pm}$ спектры краевых задач для уравнения $\ell_0 y = \lambda y$ с условиями $y^{(\nu-1)}(0) \pm \pm y^{(\nu-1)}(T) = 0$, $\nu = \overline{1,3}$, через $\Lambda_s^{\pm}$, $s = 1, 2$ — спектры задач для этого же уравнения с условиями $y^{(s-1)}(0) = y^{(s-1)}(T) = y^{(2-s)}(0) \pm y^{(2-s)}(T) = 0$ (все собственные значения берутся с учетом их алгебраической кратности). Определим $\Lambda_{3s}^{\pm} := \Lambda^{\pm} \cap \Lambda_s^{\pm}$. Назовем *глобальными данными рассеяния* набор $J = \{J_1^0, J_1^1, \Lambda_{31}^+, \Lambda_{31}^-, \Lambda_{32}^+, \Lambda_{32}^-\}$.

Теорема 1. *При выполнении условий G_0, G_1, R задание данных рассеяния J_1^{χ} однозначно определяет коэффициенты уравнения (2). Задание глобальных данных рассеяния J однозначно определяет коэффициенты уравнений (1), (2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beals R., Deift P. and Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line // Math. Surveys and Monographs. Vol. 28. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1988.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

УДК 517.929

ТЕОРИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г. Г. Исламов (Ижевск, РФ)

ggislamov@gmail.com

В работе [1] показана ведущая роль исследований акад. С. М. Никольского, посвящённых свойствам фредгольмового оператора в нормированных пространствах, в становлении и развитии теории функционально-дифференциальных уравнений. В случае функций трёх переменных эта теория (см. пример 2 в [1]) открывает путь к новому классу моделей описания физических явлений, учитывающих линейные преобразования плотностей потенциалов разного вида: объёмного, поверхностного и двойного слоя.

В настоящей работе для плоского случая даётся описание *канонической задачи* теории функционально-дифференциальных уравнений — аналога простейшей задачи Коши в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом существенное значение играет теорема Ляпунова о свойствах нормальной производной потенциала двойного слоя и обобщённый лапласиан в форме Бляшке и Привалова.

Мы сохраняем обозначения, принятые в работе [1]. Здесь через Ω обозначена область на плоскости переменной $t = (t_1, t_2)$, ограниченная замкнутой кривой $\partial\Omega$ с непрерывно вращающейся касательной (кривизна непрерывна в каждой точке контура). Пусть $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. На элементах декартова произведения $B = C(\bar{\Omega}) \times C(\partial\Omega) \times C(\partial\Omega)$ тройки банаховых пространств непрерывных на $\bar{\Omega}$ и $\partial\Omega$ скалярных функций определён линейный оператор

$$\Lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ l \end{pmatrix} = \int_\Omega p(\tau) \ln \frac{1}{|t-\tau|}\, d\tau + \int_{\partial\Omega} q(\sigma) \ln \frac{1}{|t-\sigma|}\, d\sigma -$$
$$- \int_{\partial\Omega} l(\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu(\sigma)} \left(\ln \frac{1}{|t-\sigma|} \right) d\sigma$$

со значениями в классе функций, определённых на R^2. Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма в R^2, $d\tau$ и $d\sigma$ соответственно плоская мера Лебега и мера Лебега на кривой, описывающей границу области Ω, $\nu(\sigma)$ — вектор единичной нормали к кривой $\partial\Omega$ в точке σ, направленный во внешность области Ω.

Пусть D конечномерное расширение образа ΛB за счёт однородных гармонических полиномов степени $\leqslant m$. Пусть, далее, семейство $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ обозначает фиксированный базис указанного подпространства гармонических полиномов.

Теорема 1. *Скалярная функция $x(t), t \in R^2$ принадлежит линейному многообразию D в том и только том случае, когда имеет место разложение $x(t) = (\Lambda \delta x)(t) + \sum_{j=1}^n u_j(t) r_j(x)$, где $r_j(x) = \gamma_j(x - \Lambda \delta x)$, $\{\gamma_j\}_1^n$ семейство функционалов, биортогональное системе $\{u_j\}_1^n$, $\delta : D \to B$ оператор, определённый поточечным пределом: $\delta x = \lim\limits_{h \to +0} \delta_h x$,*

$$\delta_h x = -\frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{4}{h^2} \left(\frac{1}{2\pi h} \int_{C_h(\tau)} x(\xi)\, d\xi - x(\tau) \right) \\ \frac{\partial x}{\partial \nu(\sigma)}(\sigma + h\nu(\sigma)) - \frac{\partial x}{\partial \nu(\sigma)}(\sigma - h\nu(\sigma)) \\ x(\sigma + h\nu(\sigma)) - x(\sigma - h\nu(\sigma)) \end{pmatrix}.$$

Здесь $C_h(\tau)$ окружность радиуса h с центром в точке $\tau \in \Omega$, $\sigma \in \partial\Omega$, первая компонента δ_h представляет собой h-приближение обобщённого лапласиана в форме Бляшке. Она может быть заменена h-приближением обобщённого лапласиана в форме Привалова

$$\frac{8}{h^2} \left(\frac{1}{\pi h^2} \int_{D_h(\tau)} x(\xi)\, d\xi - x(\tau) \right),$$

Здесь $D_h(\tau)$ круг радиуса h с центром в точке $\tau \in \Omega$.

Пусть (ρ, φ) полярные координаты точки (t_1, t_2) : $t_1 = \rho\cos\varphi$, $t_2 = \rho\sin\varphi$. Последовательность $1, \{\rho^k \sin(k\varphi), \rho^k \cos(k\varphi)\}_{k=1}^m$ даёт необходимую систему однородных гармонических многочленов степени $\leqslant m$. Значит, $n = 2m+1$ и базис $u_1(t) \equiv 1, u_j(t) = \rho^k \sin(k\varphi)$, при $j = 2k+1$, $u_j(t) = \rho^k \cos(k\varphi)$, при $j = 2k$, $k = 1, \ldots, m$. Этот базис на единичной окружности $|t| = 1$ превращается в тригонометрическую систему аргумента φ. Поэтому можно взять

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,d\varphi, \gamma_j(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)u_j(t)\,d\varphi, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Предположим, далее, что единичная окружность $|t| = 1$ не пересекает замыкание области Ω. Запишем покомпонентно канонический оператор δ теоремы 1: $\delta x = \begin{pmatrix} \delta_1 x \\ \delta_2 x \\ \delta_3 x \end{pmatrix}$. Обозначим $a_j(\tau) = \gamma_j\left(\ln|\cdot - \tau|\right)$, $\tau \in \bar{\Omega}$, $b_j(\sigma) = \gamma_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu(\sigma)}\ln|\cdot - \sigma|\right)$, $\sigma \in \partial\Omega$. Тогда канонические функционалы $r_j(x)$ теоремы 1 запишутся в виде

$$r_j(x) = \gamma_j(x) + \int_\Omega a_j(\tau)(\delta_1 x)(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int_{\partial\Omega} a_j(\sigma)(\delta_2 x)(\sigma)\,d\sigma - \int_{\partial\Omega} b_j(\sigma)(\delta_3 x)(\sigma)\,d\sigma, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В силу теоремы 1 при любом $f \in B$ каноническая задача

$$\delta x = f, r_j(x) = 0, j = 1, \ldots, n$$

имеет единственное решение $x = \Lambda f$ в пространстве D.

Всякий линейный ограниченный оператор $L : D \to B$ представим в векторно-матричной форме

$$Lx = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 x \\ \delta_2 x \\ \delta_3 x \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^n r_j(x) \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ v_{3j} \end{pmatrix},$$

где линейные ограниченные операторы $Q_{11} : C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$, $Q_{1j} : C(\partial\Omega) \to C(\bar{\Omega})$, $Q_{i1} : C(\bar{\Omega}) \to C(\partial\Omega)$, $Q_{ij} : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$, $i, j = 2, 3$, элементы $v_{1j} \in C(\bar{\Omega})$, $v_{2j}, v_{3j} \in C(\partial\Omega)$, $j = 1, \ldots, n$.

Аналогично, всякий линейный ограниченный функционал $\Phi : D \to R$ может быть записан в виде

$$\Phi(x) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \begin{pmatrix} \delta_1 x \\ \delta_2 x \\ \delta_3 x \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j(x),$$

где линейные ограниченные функционалы $\Phi_1 : C(\bar{\Omega}) \to R$, $\Phi_2, \Phi_3 : C(\partial\Omega) \to R$, скаляры $\alpha_j \in R, j = 1, \dots, n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исламов Г. Г.* Некоторые задачи теории линейных уравнений // Вестн. Удмуртск. ун-та. 2013. № 1. С. 17–28.

УДК 517.977, 519.21

О ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ И ПОТРЕБЛЕНИЯ

Н. С. Исмагилов (Уфа, РФ)
niyaz.ismagilov@gmail.com

Рассматривается модель оптимального инвестирования и потребления инвестором, которому доступны два финансовых актива: рисковый и безрисковый [1]. Стоимость $P_0(t)$ безрискового актива подчиняется обыкновенному дифференцальному уравнению

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt, \quad P_0(0) = p_0,$$

где r — постоянный коэффициент роста (процентная ставка вклада в банк).

Стоимость рискового актива предполагается изменяющейся по модели предложенной Мертоном [2] и Блэком и Шоулсом [3], согласно которой стоимость $P_1(t)$ рискового актива (стоимость акции) задается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$dP_1(t) = bP_1(t)dt + \sigma P_1(t)dW(t), \quad P_1(0) = p_1 > 0, \tag{1}$$

где b — постоянный коэффициентом роста, σ — постоянный коэффициентом волотильности. Предполагается, что уравнение (1) определено на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$, на котором задан стандартный винеровский процесс W_t.

При вложении $u_t X_t$ средств в рисковый и $(1-u_t)X_t$ в безрисковый активы, состояние инвестора X_t изменяется согласно СДУ [4]

$$dX_t = rX_t dt + X_t u_t (b-r)dt - C_t dt + u_t X_t \sigma(t) dW_t. \tag{2}$$

Здесь $u_t \in [0,1]$, C_t — скорость потребления.

Задача инвестора состоит в том, чтобы максимизировать функционал

$$J = \mathbf{E}\Big[\int\limits_0^T e^{-\beta t} U_1(C_t)dt + e^{-\beta T} U_2(X_T)\Big] \to \max, \tag{3}$$

который отражает выгоду от потребления в течении жизни и от оставленного наследства. В уравнении (3) $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания, функции полезности U_i предполагаются возрастающими и строго выпуклыми

На основе явной формулы для решений СДУ, представленной в работе [5], доказывается, что решение СДУ (2) имеет вид $X_t = \Phi(t, u_t W_t + y_t)$, где Φ — некоторая известная функция, а y_t является решением уравнения с мерами

$$dy_t = \frac{r\Phi + \Phi u_t(b-r) - \frac{1}{2}u_t^2\sigma^2\Phi - C_t}{\sigma\Phi} - W_t du_t.$$

Здесь Φ имеет аргументы $(t, u_t W_t + y_t)$. Такое представление позволило автору свести исходную стохастическую задачу (2)–(3) к детерминированной задаче импульсного оптимального управления

$$dy_t = \frac{r\Phi + \Phi u_t(b-r) - \frac{1}{2}u_t^2\sigma^2\Phi - C_t}{\sigma\Phi} - W_t d\theta_t, \tag{4}$$

$$du_t = d\theta_t, \tag{5}$$

$$J = \int_0^T e^{-\beta t} U_1(C_t)dt + e^{-\beta T} U_2(\Phi(T, u_T W_T + y_T)) \to \max. \tag{6}$$

В задаче (4)–(6) дифференциальные уравнения и функционал потерь содержат случайные функции, но не содержат стохастических дифференциалов и математического ожидания, поэтому эта задача для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ может рассматриваться как детерминированная задача, для решения которой могут быть применены методы детерминированной теории импульсного управления, например, принцип максимума [8].

Однако, потраекторное решение задачи (4)–(6) может оказаться упреждающим относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. На основе метода, который представлен в [6] и дополнен в [7], автором показано, что детерминированная задача может быть модифицирована таким образом, что решение модифицированной задачи является неупреждающей функцией и потраекторно совпадает с решением исходной стохастической задачи (2)–(3). Модифицированная потраекторно-детерминированная задача имеет вид

$$\begin{aligned}
&dy_t = \frac{r\Phi + \Phi u_t(b-r) - \frac{1}{2}u_t^2\sigma^2\Phi - C_t}{\sigma\Phi} - W_t d\theta_t,\\
&du_t = d\theta_t,\\
&dz_t = e^{-\beta t}U_1(C_t)dt + \Lambda_1(t)u_t dt + \Lambda_2(t)d\theta_t,\\
&J = G^{\Lambda}(y_T, u_T, z_T) = z_T + e^{-\beta T}U_2(\Phi(T, u_T W_T + y_T)) \to \max\,.
\end{aligned}$$

Здесь $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$ неупреждающие процессы, вычисляемые на основе коэффициентов задачи (4)–(6). Суть модификации заключается в дополнении функционала выйгрыша слагаемыми, которые гарантируют достижение оптимума на неупреждающих функциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karatzas I., Lehoczky J., Shreve S. E.* Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon // SIAM J. Control & Optim. 1987. Vol. 25. P. 1157–1186.

2. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model // Review of Economics and Statistics. 1971. Vol. 3. P. 272–413.

3. *Black F., Scholes M. J* The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637–654.

4. *Harrison J. M., Pliska S. R* Martingales, stochastic integrals, and continuous trading // Stochastic Process. Appl. 1981. Vol. 11. P. 215–260.

5. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы, стохастический анализ. М. : Физматлит, 2011. 211 с.

6. *Davis M. H. A. and Burstein, G.* A deterministic approach to stochastic optimal control, with application to anticipative control // Stochastics and Stochastics Reports. 1992. Vol. 40. P. 203–256.

7. *Исмагилов Н. С., Насыров Ф. С.* О детерминированном подходе к задаче стохастического оптимального управления // Вестн. УГАТУ. 2013. Т. 17. № 6.

8. *Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu, Pereira F.* Pontryagin’s maximum principle for constrained impulsive control problems // Nonlinear Analysis. 2012. Vol. 75, № 3. P. 1045–1057.

УДК 517.956.223+517.575

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В. В. Карачик (Челябинск, РФ)
karachik@susu.ru

Настоящая работа является продолжением исследований автора, начатых в [1–3]. В работе будет дана формула нахождения полиномиального решения однородной задачи Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^m u(x) = Q(x), \quad x \in S; \tag{1}$$

$$u_{|\partial S} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}_{|\partial S} = 0, \tag{2}$$

где ν — внешняя нормаль к единичной сфере ∂S, а $Q(x)$ — некоторый полином.

Сначала устанавливаются некоторые вспомогательные результаты. Пусть $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Лемма 1. *Решение $v_s(x)$ однородной задачи Дирихле* (1)–(2) *при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ имеет вид*

$$v_s(x) = \left(|x|^{2s+2l} - l \binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{|x|^{2i}}{s+l-i} \right) \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}},$$

где $C_{m,s,l} = (2s+2,2)_l (2m-2s+n,2)_l$, а $(a,b)_k = a(a+k)\cdots(a+(k-1)b)$ — обобщенный символ Похгаммера, с соглашением $(a,b)_0 = 1$.

Лемма 2. *Полином $v_s(x)$ из леммы* 1 *может быть переписан в виде*

$$v_s(x) = (|x|^2 - 1)^l \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} \sum_{i=0}^{s} \binom{s+l}{i+l} (|x|^2 - 1)^i,$$

где константа $C_{m,s,l}$ определена в лемме 1.

Пример 1. Решение задачи Дирихле (1)–(2) при $Q(x) = 1$ имеет вид

$$v_0(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^l}{(2,2)_l (n,2)_l}.$$

Пусть теперь $Q(x) = Q_m(x)$ — однородный полином степени m.

Лемма 3. *Решение однородной задачи Дирихле (1)-(2) при $Q(x) = Q_m(x)$ можно записать в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}} \sum_{i=0}^{s} |x|^{2i} \binom{l-1+s-i}{l-1} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{m-2s+2j+n/2-1}{j!(l+s-j)!(m-2s+j+n/2-1)_{s+l+1}}.$$

На основе сформулированных выше лемм можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение $u_0(x)$ однородной задачи Дирихле* (1)–(2) *в случае $Q(x) = Q_m(x)$ записывается в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+l-1}{l-1} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(s+l)!} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+l}}. \tag{3}$$

Полученная формула все еще не очень хороша, она только для однородных полиномов $Q_m(x)$.

Пример 2. Решение задачи Дирихле (1)–(2) при $l = 4$ и $Q_6(x) = x_1^3 x_2 x_3^2$, записанное в виде (3) легко вычисляется с помощью пакета *Mathematica* и имеет вид

$$u(x_1,x_2,x_3) = -\frac{x_1x_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^4}{83805321600}\big(-190+102x_1^4-30x_2^4-$$
$$-616x_3^2+366x_3^4+x_1^2(-112+72x_2^2-1677x_3^2)+28x_2^2(5+12x_3^2)\big).$$

Лемма 4. *Для полинома $u_0(x)$ из теоремы* 1 *имеет место равенство*

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!} \Delta^s Q_m(tx) t^{n/2-1}\, dt.$$

Наконец можно сформулировать окончательный результат.

Теорема 2. *Для любого полинома $Q(x)$ решение $u(x)$ однородной задачи Дирихле* (1)–(2) *можно записать в виде*

$$u(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!} \int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!} \Delta^s Q(\alpha x)\, \alpha^{n/2-1}\, d\alpha. \tag{4}$$

Замечание 1. *Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле* (1)–(2) *в единичном шаре в случае полиномиальных функций* $Q(x)$ *можно записать в виде*

$$G(x;\alpha)\cdot = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\,\alpha^{n/2-1}(\Delta^s\cdot)(\alpha x)$$

и тогда решение (4) *задачи Дирихле в единичном шаре имеет вид*

$$u(x) = \int_0^1 G(x;\alpha)\,Q(x)\,d\alpha.$$

Пример 3. Опуская промежуточные выкладки устанавливается, что решение задачи Дирихле (1)–(2) при $Q(x) = x_i$, вычисленное по формуле (4), имеет вид

$$u_0(x) = x_i\frac{(|x|^2-1)^l}{(2,2)_l(n+2,2)_l}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карачик В. В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51(9). С. 1674–1694.

2. *Карачик В. В., Антропова Н. А.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49(2). С. 250–254.

3. *Карачик В. В.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // Журн. Сиб. федерал. ун-та. Математика и физика. 2012. Т. 5(4). С. 527–546.

УДК 517.987.4

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СДВИГОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА РАЗОМКНУТОМ КОНТУРЕ

Л. В. Карташева (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
kartasheva@mail.ru

Основным пространством $S_{m,n}$ является линеал функций $\varphi(t)$, имеющих неинтегрируемые степенно-логарифмические особенности на концах конутра $[a,b]$. Интегралы будем понимать в смысле конечной части по Адамару (обозначается F.P.).

Топология в $S_{m,n}$ вводится с помощью системы норм:

$$\|\varphi(t)\|_r = \max\left\{\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)}, \|\varphi'(t)\|_{L_p(\rho_2)}, \ldots, \|\varphi^{(p-1)}(t)\|_{L_p(\rho_r)}\right\},$$

$$\rho_i = (t-a)^{p(m+i)}(b-t)^{p(n+i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\|\varphi(t)\|_{L_p(\rho_1)} = \left(\int\limits_L \rho_1 |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Рассматривается интегральное уравнение

$$Kf = A[\beta(t)]\beta'(t)f[\beta(t)] + B(t)f(t) + \underset{\vee}{T}\,Af + \underset{\vee}{S}\,Bf = g(t) \tag{1}$$

в пространстве обобщенных функций $S'_{m,n}$.

Коэффициенты $A(t)$, $B(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на $[a,b]$, причем

$$A(t) = (t-\alpha_0)^{m_0}A_1(t), \quad B(t) = (t-\beta_0)^{\rho_0}B_1(t).$$

$\beta(t)$ — функция, обратная сдвигу $\alpha(t)$. $B_1(t)$, $A_1(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на $[a,b]$.

Под выражениями $\underset{\vee}{T}\,Af$ и $\underset{\vee}{S}\,Bf$ понимаются функционалы, определяемые соответственно равенствами:

$$\underset{\vee}{T}\,Af = \left(f, \frac{A(t)}{\pi i \rho_0[\alpha(t)]}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau\right); \quad \underset{\vee}{S}\,Bf = (f, -B\widehat{S}\varphi),$$

где

$$\widehat{S}\varphi = \frac{1}{\pi i \rho_0(t)}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad \rho_0(t) = (t-a)^m(b-t)^n.$$

Решение уравнения (1) приводит к необходимости рассмотрения союзного уравнения:

$$K'\varphi \equiv A(t)\varphi[\alpha(t)] + B(t)\varphi(t) + \frac{A(t)}{\pi i \rho_0[\alpha(t)]}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho_0(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau -$$

$$-\frac{B(t)}{\pi i \rho_0(t)}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\rho(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \tag{2}$$

в пространстве основных функций $S_{m,n}$.

Для нахождения решения уравнения (2) оно сводится к краевой задаче Газемана:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{(t-\beta_0)^{p_0}}{(t-\alpha_0)^{m_0}} G_1(t) + \frac{\psi_1(t)}{(t-\alpha_0)^{m_0}}, \tag{3}$$

$$\psi_1(t) \in S_{m,n} \neq 0,\ \infty, \quad G_1(t) = \frac{B_1(t)}{A_1(t)} \neq 0,\ \infty.$$

Обозначим $\varkappa'$ индекс краевой задачи, соответствующей уравнению (2) и введем $\varkappa = -\varkappa'$.

Тогда, если $\varkappa + m_0 > 0$ рассмотрим два случая

1) $\varkappa > 0$. В этом случае получим решение уравнения (1) в виде

$$f = M'g + \sum_{k=1}^{\varkappa+m_0} a_k \Delta_k(t),$$

где a_k — постоянные, определяемые равенствами

$$a_k = (f(t) - M'g, \Phi_k(t)),$$

$\Phi_k(t)$ — система основных функций биортогональных системе обобщенных функций $\Delta_k(t)$.

2) $\varkappa < 0$. В данном случае решение задачи (1) имеет вид:

$$f = M'g + \sum_{k=1}^{\varkappa+m_0} a_k \nu_k(t).$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема. *При $\varkappa + m_0 \geqslant 0$ неоднородное уравнение* (1) *разрешимо при любой правой части $g(t) \in S'_{m,n}$, причем соответствующее однородное уравнение имеет $\varkappa + m_0 \geqslant 0$ линейно независимых решений в классе обобщенных функций.*

В случае $\varkappa + m_0 < 0$ решение уравнения (1) *единственно, причем для его существования необходимо и достаточно выполнение условий: $(g(t), \varphi_k(t)) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - m_0$) $\varphi_k(t) \in S_{m,n}$ и образуют полную систему решений однородного уравнения (2), союзного* (1).

УДК 517.518

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СКАЧКА ФУНКЦИИ Φ-ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ЧЕРЕЗ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ

А. А. Кельзон (Санкт-Петербург, РФ)
kelzon@mail.ru

Пусть g — 2π-периодическая функция; $S_n(g;x)$ — частная сумма порядка n тригонометрического ряда Фурье этой функции. Б. И. Голубов [1] доказал, что если g имеет на периоде ограниченную p-вариацию $(p \geq 1)$ в смысле Н. Винера [2], то во всякой точке x' справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(2r+1)}(g;x')}{n^{2r+1}} = \frac{(-1)^r}{(2r+1)\pi}((g(x'+) - g(x'-)), \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Отметим, что частный случай формулы (1) при $r = 0$ для более узких классов функций был известен ранее [3], [4] (см. также [5, гл. III, § 9]).

В работах [6], [7] справедливость формулы (1) была установлена для более широкого класса функций, имеющих на периоде гармоническую ограниченную вариацию [8] (определение см. ниже).

Возникает вопрос, нельзя ли и далее расширять класс функций так, чтобы формула (1) сохраняла силу. Попытке в известной мере ответить на этот вопрос и посвящено настоящее сообщение.

Напомним необходимые определения.

Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Через $\{I_n\}, n = 1.2, \ldots,$ обозначим последовательность непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset [a, b]$. Пусть далее $\Phi = \{\varphi_n\}$, $n = 1.2, \ldots,$ —последовательность строго возрастающих выпуклых вниз функций, заданных на множестве неотрицательных чисел и таких. что $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ для всех n и x и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \infty \tag{2}$$

для всех $x > 0$.

Положим

$$V_\Phi(f; a, b) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(|f(I_n)|), \tag{3}$$

где $f(I_n)=f(b_n)-f(a_n)$, а верхняя грань в (3) берется по всевозможным последовательностям интервалов $\{I_n\}$, удовлетворяющим описанным условиям. Если $V_\Phi(f;a,b)<\infty$, то говорят, что функция f имеет Ф-ограниченную вариацию на $[a,b]$. Это понятие было введено М. Шраммом [9].

В частном случае, когда $\varphi_n(x)=x^p$ при всех натуральных n, мы получим функцию ограниченной p-вариации в смысле Н. Винера [2]

Если же $\varphi_n(x)=x/n$, вместо $V_\Phi(f;a,b)$ пишут $V_H(f;a,b)$, и, если $V_H(f;a,b)<\infty$, то говорят, что функция f имеет гармоническую ограниченную вариацию на $[a,b]$. Это понятие было введено Д. Ватерманом [8].

В настоящей работе через ФBV будем обозначать семейство 2π-периодических функций f, заданных на вещественной оси и таких, что cf является функцией Ф-ограниченной вариации на отрезке $[-\pi,\pi]$ при некотором $c>0$. Через HBV будем обозначать семейство 2π-периодических функций, имеющих гармоническую ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$.

Пусть $\Phi\mathrm{BV}_0=\{f\in\Phi\mathrm{BV}\mid f(\pi)=0\}$. М. Шрамм [9] установил, что ФBV является банаховым пространством, в котором норма определяется следующим образом.

Для $f\in\Phi\mathrm{BV}_0$

$$\|f\|=\inf\{k>0\mid V_\Phi(f/k;-\pi,\pi)\le 1\},$$

а для произвольной $f\in\Phi\mathrm{BV}$

$$\|f\|=|f(\pi)|+||f-f(\pi)||.$$

Через CФBV обозначим множество непрерывных функций, входящих в ФBV. В [9] показано, что CФBV также является банаховым пространством с той же нормой.

Сформулируем основной результат доклада.

Теорема. *Пусть последовательность функций* Φ *такова, что* $\Phi BV\supset HBV$ $(\Phi BV\neq HBV)$ *и* r *— целое неотрицательное число. Тогда найдётся функция* $g_0\in C\Phi BV$ *такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n^{(2r+1)}(g_0;0)|}{n^{2r+1}}>0.$$

Эта теорема показывает, что формула (1) не может быть перенесена на класс ФBV, если он шире класса HBV.

Отметим, что тот факт, что формула (1) не может быть перенесена на класс всех непрерывных 2π-периодических функций, был подмечен Б. И. Голубовым [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И.* Определение скачка функции ограниченной p-вариа-ции по ее ряду Фурье // Мат. заметки. 1972. Т. 12(1). С. 19–28.

2. *Wiener N.* The quadratic variation of a function and its Fourier coeffi-cients // J. Math. Phys. 1924. V. 3. P. 72–94.

3. *Fejer L.* Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus Fourier-reihe // J. Reine Angew. Math. 1912. Vol. 142, № 1. P. 165–188.

4. *Czillag P.* Über die Fourierkonstanten einer Funktion von Beschränkter Schwankung // Mat. Phys. Lapok. 1918. Vol. 27. P. 301–308.

5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 540 с.

6. *Avdispahiċ M.* On the determination of the jump of a function by its Fourier series // Acta Math. Hung. 1986. Vol. 48, № 3–4. P. 267–271.

7. *Kvernadze G.* Determination of the jumps of a bounded function by its Fourier series // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, № 2. P. 167–190.

8. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. Vol. 44, № 2. P. 107–117.

9. *Schramm M.* Functions of Φ-bounded variation and Riemann-Stiltjes integration // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287, № 1. P. 49–63.

УДК 517.5

ПОЛНОТА СИСТЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ[1]

В. Э. Ким (Уфа, РФ)

kim@matem.anrb.ru

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, $H(G)$ — пространство функций голоморфных в области G. В данном сообщении мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $T : H(G) \to H(G)$ — линейный непрерывный оператор, такой что $\ker T \neq \{0\}$ и выполняется коммутационное соотношение $[T, D] = \hat{a}$, где D — оператор дифференцирования, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — произвольная константа, $\hat{a}$ – оператор умножения на константу a. Пусть $f \in \ker T$, $f \not\equiv 0$. Тогда система производных $\{f^{(n)}, n = 0, 1, \cdots\}$ полна в пространстве $H(G)$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00572).

Отметим, что вопросы полноты систем производных голоморфных функций изучались многими математиками (см., например, [1]–[3]).

В качестве приложения теоремы 1 мы доказываем теорему 2, имеющую отношение к теории гиперциклических операторов. Линейный непрерывный оператор Φ на топологическом векторном пространстве X называется гиперциклическим, если найдется такой элемент $x \in X$, что его орбита $\{\Phi^n x,\ n = 0, 1, \cdots\}$ плотна в X. Более подробные сведения о гиперциклических операторах можно найти, например, в обзорной статье [4] и книге [5].

Теорема 2. *Пусть оператор T удовлетворяет условиям Теоремы 1. Тогда T — гиперциклический оператор.*

Замечание 1. В случае $G = \mathbb{C}$ аналоги теорем 1 и 2 были получены ранее автором в [6].

Замечание 2. В теоремах 1 и 2 рассматривается константа $a \neq 0$. Отметим, что линейный непрерывный оператор T на $H(\mathbb{C})$, отличный от оператора умножения на константу и удовлетворяющий коммутационному соотношению $[T, D] = 0$, является гиперциклическим согласно известной теореме Годфруа–Шапиро [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов В. П.* О полноте систем производных аналитической функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1961. Т. 25, № 4. С. 543–556.

2. *Казьмин Ю. А.* О полноте одной системы аналитических функций. I, II // Вестн. МГУ. 1960. № 5. С. 3–13. № 6. С. 11–19.

3. *Попов А. Ю.* О полноте редких подпоследовательностей ... // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 5. С. 189–212.

4. *Grosse-Erdmann K.-G.* Universal families and hypercyclic operators // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36, № 3. P. 345–381.

5. *Bayart F., Matheron E.* Dynamics of linear operators. Cambridge Univ. Press, 2009.

6. *Kim V. E.* Commutation relations and hypercyclic operators // Arch. Math. (Basel). 2012. Vol. 99, № 3. C. 247–253.

7. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds // J. Funct. Anal. 1991. Vol. 98, № 2. P. 229–2691.

УДК 517.51

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫХ КОМПАКТОВ[1]

А. Н. Кириллов, В. В. Старков (Петрозаводск, РФ)
krllv1812@yandex.ru, VstarV@list.ru

Речь пойдет, в частности, о различных обобщения последней теоремы Пуанкаре. Пусть $A_0 = \{a \le |z| \le b\}$ — круговое кольцо на комплексной плоскости с центром в 0, $(0 < a < b < +\infty)$, $J_0 = \{z = ae^{it} : t \in R\}$ — его внутренняя граничная компонента, $J_1 = \{z = be^{it} : t \in R\}$ — внешняя граничная компонента. Пусть f — сохраняющий площадь гомеоморфизм кольца A_0 на себя, причем $f(z) = f(\rho e^{it}) = r(\rho, t)e^{i(t+\Phi(\rho,t))}$, где вещественные функции $r(\rho, t) > 0$ и $\Phi(\rho, t)$ непрерывны в кольце и 2π-периодичны по t. Теорема Пуанкаре утверждает: если

(1) $f(J_0) = J_0$, $f(J_1) = J_1$, и

(2) $\Phi(a, t)\Phi(b, t) < 0$ для всех t,

то f имеет не менее 2 неподвижных точек в A_0.

Т. Динг [1] в 2007 г. модифицировал эту теорему следующим образом. Во-первых, он заменил круговое кольцо звездообразным кольцом (граничные контуры J_0 и J_1 звездообразны относительно 0). Во-вторых, он отказался от условия сохранения площади, заменив его условием аналитичности f по двум вещественным переменным. В третьих, Динг отказался от условия (1), а условие (2) заменил следующим:

$(2')$ $\exists$ $j \in \mathbb{Z}$ такое, что $\Phi(\rho, t) < 2\pi j$ $\forall$ $z = \rho e^{it} \in J_0$, $\Phi(\rho, t) >$ $> 2\pi j$ $\forall$ $z = \rho e^{it} \in J_1$. При этом Динг доказал существование кривой $\Gamma \subset E = \{\rho e^{it} : \Phi(\rho, t) = 2\pi j\}$, разделяющей границы кольца, и вместо условия (2) Пуанкаре кроме более слабого условия $(2')$ Динг предполагал выполненным следующее «условие изгиба»:

$(2'')$ на Γ существуют такие точки P и Q, что $I(P)I(Q) < 0$, где $I(z) = I(\rho, t) = r(\rho, t) - \rho = |f(z)| - |z|$.

Итак, Динг доказал, что если f — вещественно-аналитическое отображение звездообразного кольца в другое звездообразное кольцо и выполнены условия $(2')$ и $(2'')$, то f имеет не менее 2 неподвижных точек. А. Пасколетти и Ф. Занолин [2] в 2011 г., заменив условие вещественной аналитичности на непрерывность f, звездообразное кольцо —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности. Второй автор поддержан РФФИ (грант № 14-01-00510).

на произвольное топологическое кольцо A и сохранив условия $(2')$ и $(2'')$, получили теорему, утверждающую существование хотя бы одной неподвижной точки при отображении f.

В докладе будет представлен следующий результат:

в теореме Пасколетти–Занолина условие вращения $(2')$ в топологическом кольце A можно заменить существенно более слабым условием

$(*)$ *существуют такие точки $P, Q \in A$ и целое число j, что $\Phi(P) < < 2\pi j < \Phi(Q)$, сохраняя заключение теоремы.*

Будет представлен результат, обобщающий теорему Динга о существовании 2 неподвижных точек. При этом формулировку теоремы Динга нужно изменить так:

а) заменить звездообразное кольцо на любое топологическое;

б) заменить условие вращения $(2')$ на более слабое условие $(*)$;

в) аналитичность отображения f заменить его непрерывностью и условием монотонности $\Phi(\rho, t)$ по ρ для любого t;

г) добавить условие $E \subset \operatorname{int} A$.

Пусть f — непрерывное отображение топологического кольца в $\mathbb{C} \setminus 0$ и выполнено условие $(*)$; в окрестности $U(A)$ кольца функция $I(\rho, t)$ непрерывно дифференцируема, а частная производная функции $\Phi(\rho, t)$ по ρ непрерывна в некоторой окрестности $U(E)$ множества E и не равна 0 на E. При этих условиях предполагается предъявить способ нахождения мощности множества неподвижных точек отображения f.

Пусть X — топологическое пространство с неподвижной точкой (ТПНТ), т.е. каждое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку в X. Теорема Брауэра утверждает, что любой компакт X из R^n, гомеоморфный замкнутому шару, является ТПНТ. Теорема Пуанкаре–Биркгофа (последняя теорема Пуанкаре) и ряд связанных с ней последующих результатов для замкнутого топологического кольца дают для непрерывного в X отображения f достаточные условия существования неподвижной точки при различных дополнительных условиях на f и на ∂X. С. Лефшец [3] получил достаточные условия (на X и f) существования неподвижной точки в X. Но его рассуждения основаны на предположении о триангулируемости X. Поэтому результаты Лефшеца, вообще говоря, не применимы к бесконечносвязным компактам.

В докладе будут представлены достаточные условия существования неподвижной точки непрерывного отображения в бесконечносвязном не триангулируемом компакте из R^n типа приведенного в ниже следующей теореме.

Определение. Пусть $B_0, B_k (k \in \mathbb{N})$ — замкнутые топологические шары из R^n, $n > 1$, $B_k \subset B_0$, $\operatorname{int} B_k \cap intB_j = \emptyset$ для всех $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$. Компакт $X = B_0 \setminus \left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{int} B_k \right)$ называется *шаровым компактом.*

Обозначим $I_0 = \partial B_0$, $I_k = \partial B_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть* X *— бесконечносвязный шаровой компакт,* Y *— его конечно- или бесконечносвязный шаровой подкомпакт (для* Y *роль* B_0 *и* B_k *в Определении играют, соответственно, топологические шары* D_0 *и* D_j*,* $j \in M \subset \mathbb{N}$). *Если* $f : X \to Y-$ *непрерывное отображение и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $j(k) \in M$ *такое, что* $f(I_k) \subset D_{j(k)}$*, причем* $B_k \cap D_{j(k)} = \emptyset$*, то* f *имеет неподвижную точку в* X.

В плоском случае в формулировке теоремы шаровые компакты будут жордановыми компактами, т. е. в Определении B_k и B_0 — замыкания соответствующих жордановых областей.

Источники: [4], [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ding T.* Approaches to the qualitative theory of ordinary differential equations // Peking University Series in Mathematics 3. Hackensack, NJ : World Scientific, 2007.

2. *Paskoletti A., Zanolin F.* A topological approach to bend-twist maps with applications // Intern. J. Differ. Equ. 2011. Art.ID 612041. 20 p.

3. *Lefschetz S.* Intersections and transformations of complexes and manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28. № 1. P. 1–49.

4.*Kirillov A., Starkov V.* Some extensions of the Poincare–Birkhoff theorem // J. of Fixed Point Theory and Applications. 2013. Vol. 13, № 2. P. 611—625.

5. *Kirillov A., Starkov V.* Fixed points of infinitely connected domain continuous mappings// Fixed Point Theory. 2014.

УДК 517.94

ОЦЕНКА СНИЗУ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В $L^2(\mathbb{R}_+)$ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ $y'(0) = 0$[1]

А. И. Козко, А. Ю. Попов (Москва, РФ)
prozerpi@yahoo.co.uk

Исследуется нижняя граница дискретного спектра оператора $\mathbf{L}_q$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, задаваемого дифференциальным выражением

[1]Работа А. И. Козко выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).

$-y'' + q(x)y$ и граничным условием $y'(0) = 0$. Предполагается, что $q \in L(\mathbb{R}_+)$. В этом случае спектр оператора $\mathbf{L}_q$ (обозначим его через σ_q) состоит из непрерывной части — луча $(0;+\infty)$ и дискретной части, которая либо пуста, либо является конечным множеством отрицательных чисел (собственных значений) [1, гл. 5, с. 129].

Ставится следующая задача. Дано положительное число V. Требуется найти

$$\inf\{\sigma_q \,:\, \|q\|_{L(\mathbb{R}_+)} \le V\}, \tag{1}$$
$$\inf\{\sigma_q \,:\, \|q_-\|_{L(\mathbb{R}_+)} \le V\}. \tag{2}$$

В. А. Марченко [2] доказал (это потребовалось ему в качестве вспомогательного утверждения), что величина (1) не меньше $-2V^2$. Нами экстремумы (1), (2) найдены точно.

Для операторов Штурма–Лиувилля в $L^2(0,1)$ с граничными условиями на концах отрезка $[0,1]$ аналогичные задачи активно изучались в работах многих математиков. Процитируем [3]–[6]. Большой литературы по этому вопросу имеется в [3].

Основным результатом работы является

Теорема 1. *При любом $V > 0$ справедливы равенства*

$$\inf\{\sigma_q \,:\, \|q\|_{L(\mathbb{R}_+)} \le V\} = -V^2,$$
$$\inf\{\sigma_q \,:\, \|q_-\|_{L(\mathbb{R}_+)} \le V\} = -V^2.$$

Из теоремы 1 можно сделать вывод, что собственные значения оператора $\mathbf{L}_q$ оцениваются снизу величиной $-\left(\int_0^{+\infty} q_-(x)\,dx\right)^2$.

В случае, когда потенциал q отрицателен и возрастает, нами получена более тонкая оценка снизу собственных чисел оператора $\mathbf{L}_q$.

Через $\mu(q)$ обозначим корень уравнения

$$\int_0^{+\infty} q_-(t)e^{-\mu t}\,dt - \mu = 0. \tag{3}$$

Корень существует и единственен, поскольку левая часть уравнения (3) положительна в точке $\mu = 0$, непрерывна и убывает на луче $0 \le \mu < +\infty$ и стремиться к $-\infty$ при $\mu \to +\infty$. Очевидно неравенство $\mu(q) < \int_0^{+\infty} q_-(t)\,dt$.

Теорема 2. *Если потенциал $q \in L(0,+\infty)$ отрицателен и возрастает на $(0,+\infty)$, то все собственные значения оператора $\mathbf{L}_q$ больше, чем $-\mu^2(q)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титчмарш Э. Ч.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка : в 2 т. Т. 1. М. : Изд-во иностр. лит., 1960.

2. *Марченко В. А.* Оценка остаточного члена в асимптотической формуле для спектральной функции оператора Штурма–Лиувилля // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 56. С. 14–29.

3. *Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.* Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // УМН. 1996. Т. 51, № 3(309). С. 73—144.

4. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* О границах изменнения собственого значения при изменении потенциала // Докл. АН. 2003. Т. 392, № 5. С. 592–597.

5. *Ежак С. С.* Об оценках минимального собственого значения одной задачи Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. С. 1577–1578.

6. *Карулина Е. С.* Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием на потенциал и краевыми условиями третьего типа // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2011. Т. 118, № 23, вып. 25. С. 60–75.

УДК 517.54

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ИНТЕГРАЛЕ КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА ДЛЯ СЧЕТНОУГОЛЬНИКА С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

И. А. Колесников (Томск, РФ)
ia.kolesnikov@mail.ru

В задачах математической физики находят приложения конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса.

Определение 1. *Счетноугольником с двойной симметрией* будем называть односвязную область Δ типа полуплоскости, с симметрией относительно прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0\}$, симметрией относительно прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \pi\}$, и такую, что часть границы области Δ от точки w_0 до точки $w_0+2\pi$ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков и лучей.

Определение 1 эквивалентно определению счетноугольника с двойной симметрией данному в [1].

Пусть Δ — счетноугольник с двойной симметрией. Конечную точку ih_1, где $h_1 = \max\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0, w \in \partial\Delta\}$, будем считать вершиной счетноугольника Δ, обозначим ее B_1^0. Если бесконечно удаленная точка — единственная вершина счетноугольника Δ на мнимой оси, то обозначим ее B_1^0. Аналогично выберем вершину на прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \pi\}$ и обозначим ее B_n^0. Если вершины B_1^0, B_n^0 являются внутренними точками отрезков прямых границы счетноугольника $\partial\Delta$, то угол при этих вершинах равен π.

Обозначим через $B_1^0, B_2^0, ..., B_{2n-2}^0, B_1^1$, $B_1^1 = B_1^0 + 2\pi$ вершины счетноугольника Δ, лежащие в полосе $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} w \le 2\pi\}$, возрастание нижнего индекса соответствует движению вдоль границы счетноугольника Δ в положительном направлении. Остальные вершины B_k^m определяются сдвигом вершин B_k^0 вдоль вещественной оси $B_k^m = B_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, 2n-2}$.

Согласно теореме Римана существует конформное однолистное отображение верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на счетноугольник Δ с двойной симметрией. Интегральная формула Кристоффеля-Шварца получила распространение для отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией [1].

Зафиксируем на границе счетноугольника Δ точки $B_*^m = B_*^0 + 2\pi m$ и $B_{**}^m = 2\pi(m+1) - \overline{B}_*^0$, $m \in \mathbb{Z}$, где $0 \le \operatorname{Re} B_*^0 \le \pi$. Из точек B_*^m и B_{**}^m проведем прямолинейные разрезы переменной длинны, зависящей от вещественного параметра $t \in [0, T]$, внутрь области Δ до точек $\Lambda_*^m(t) = \Lambda_*^0(t) + 2\pi m$ и $\Lambda_{**}^m(t) = 2\pi(m+1) - \overline{\Lambda}_*^0(t)$ соответственно, $m \in \mathbb{Z}$, $0 < \operatorname{Re} \Lambda_*^0(t) < \pi$. Обозначим через $\Delta(t)$ область Δ с разрезами, $\Delta(t)$ является счетноугольником с двойной симметрией.

Переобозначим вершины счетноугольника $\Delta(t)$, лежащие в полосе $P_{2\pi}$, через $A_1^0, A_2^0, ..., A_j^0, \Lambda_*^0(t), A_{j+1}^0, ..., A_{2n-2}^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, $1 \le j \le n-1$. Углы при этих вершинах равны соответственно $(2\alpha_1 - 1)\pi, \alpha_2\pi, ..., \alpha_j\pi, \pi, \alpha_{j+1}\pi, ..., \alpha_{n-1}\pi, (2\alpha_n - 1)\pi, \alpha_{n+1}\pi, ..., \alpha_{2n-2}\pi$, $(2\alpha_1 - 1)\pi$. При $t = 0$ вершина $\Lambda_*^0(t)$ совпадает с вершинами A_j^0, A_{j+1}^0.

Отображение $w(z,t)$, переводящее верхнюю полуплоскость на счетноугольник $\Delta(t)$, так, что $w(0,t) = A_1^0$, $w(\pi,t) = A_n^0$, $w(z+2\pi,t) = w(z,t) + 2\pi$, согласно [1] можем представить в интегральном виде

$$w(z,t) = c_1(t) \int_0^z \big(\lambda(t) - \cos\xi\big) \prod_{k=1}^n \big(a_k(t) - \cos\xi\big)^{\sigma_k} d\xi + A_1^0, \qquad (1)$$

где $a_k(t) = \cos z_k^0(t)$, z_k^0 — прообразы вершин A_k^0, $k = \overline{1,n}$, счетноугольника $\Delta(t)$, лежащих в полосе $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} w \le 2\pi\}$, $z_1^0(t) = 0$, $z_n^0(t) = \pi$; $\arccos\lambda(t)$ — прообраз подвижного конца разреза $\Lambda_*^0(t)$; $\sigma_k = \alpha_k - 1$, $k = \overline{1,n}$.

Основная трудность практического применения интегральной формулы Кристоффеля–Шварца заключается в определении акцессорных параметров (прообразов вершин и константы $c_1(t)$). К настоящему времени разработаны различные эффективные методы определения этих параметров в классической формуле Кристоффеля–Шварца. Так, в работе В. Я. Гутлянского, А. О. Зайдана [2], (см. также [3]) для отображения верхней полуплоскости на многоугольник при наличии граничной нормировки определение параметров сведено к задаче интегрировании некоторой системы дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши.

Для определения акцессорных параметров $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$, $c_1(t)$, входящих в формулу (1), получен следующий результат.

Теорема 1. *Для всех* $0 \le t \le T$ *акцессорные параметры* $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$, $c_1(t)$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered}
\frac{da_k(t)}{dt} = \frac{(\lambda(t)-1)\big(a_k^2(t)-1\big)}{2\big(a_k(t)-\lambda(t)\big)}, \quad k=\overline{2,n-1}, \\
\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\lambda(t)-1}{2}\left(\big(\lambda^2(t)-1\big)\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\frac{1}{\lambda(t)-a_k(t)}+\lambda(t)\right), \\
c_1(t) = \mathrm{const} = c_1(0),
\end{gathered} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered}
a_k(0) = \cos w^{-1}\big(A_k^0,0\big), \quad k=\overline{2,n-1}, \\
\lambda(0) = \cos w^{-1}(A_j^0,0) = \cos w^{-1}(A_{j+1}^0,0).
\end{gathered} \tag{3}$$

Система дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями (3) позволяет определить акцессорные параметры $a_k^0(t)$, $\lambda(t)$, $c_1(t)$ при всех допустимых значениях параметра t, или, иначе говоря, конформное отображение $w : \Pi^+ \to \Delta(t)$, $w = w(z,t)$, если известны значения параметров $a_k^0(0)$, $\lambda(0)$, $c_1(0)$, то есть известно конформное отображение $w : \Pi^+ \to \Delta$, $w = w(z,0)$. При доказательстве теоремы 1 использовалась [теорема 5.3, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колесников И. А.* Конформное отображение на область с двойной симметрией // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 46. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы 11-й междун. Казанск. летней науч. шк.-конф. Казань, 2013. С. 257–259.

2. *Гутлянский В. Я., Зайдан А. О.* О конформных отображениях полигональных областей // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 11. С. 1464–1467.

3. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. Т. 5. Киев : Наук. думка, 2011. 425 с.

УДК 517.538.52,517.538.7

О НАИПРОСТЕЙШИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ДРОБЯХ НАИМЕНЬШЕГО ПОРЯДКА[1]

Е. Н. Кондакова (Владимир, РФ)
kebox@mail.ru

В заметке рассматривается вопрос так называемой обобщенной интерполяции таблиц $T_n := \{(z_k, w_k)\}_{k=1}^n$ с простыми узлами посредством наипростейших дробей (н.д.) порядка не выше n вида:

$$R_n(z) = Q'_n(z)/Q_n(z), \qquad Q_n(z) = q_n z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \ldots + q_0. \tag{1}$$

Задача обобщенной интерполяции состоит в определении порождающего многочлена Q_n, удовлетворяющего системе уравнений

$$Q'_n(z_k) = w_k Q_n(z_k), \qquad k = \overline{1, n}. \tag{2}$$

В классе унитарных многочленов Q_n (т.е. с $q_n = 1$) эта задача хорошо изучена (см., напр., [1]), в частности, найдены алгебраические и геометрические критерии ее разрешимости и единственности решения. В общем случае пока остается немало неясных вопросов.

По заданной таблице T_n построим детерминантное уравнение

$$D(z, w) = 0, \qquad D(z, w) := \begin{vmatrix} w_1 & w_1 z_1 - 1 & \ldots & w_1 z_1^n - n z_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n & w_n z_n - 1 & \ldots & w_n z_n^n - n z_n^{n-1} \\ w & wz - 1 & \ldots & wz^n - nz^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Существуют таблицы, для которых все алгебраические дополнения a_k к элементам $wz^{k-1} - (k-1)z^{k-2}$ последней строки равны нулю. В данной заметке этот вырожденный случай не рассматривается. Обозначим через m наибольший номер, для которого $a_m \neq 0$.

Теорема. *Детерминантное уравнение $D(z, w) = 0$ определяет многочлен $w = Q_m(z)$ степени m, порождающий н.д. обобщенной интерполяции. Эта н.д. имеет наименьший возможный порядок среди всех н.д., интерполирующих таблицу T_n. Кроме того, эта н.д. является единственным решением в классе н.д. порядка m.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-31471).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данченко В. И. Кондакова Е. Н.* Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями // Труды МИАН. 2012. Т. 278. С. 49–58.

УДК 517.984

О СИСТЕМЕ ДИРАКА С АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

В. В. Корнев, А. П. Хромов (Саратов, РФ)
KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ систему Дирака

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x) \tag{1}$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$y_1(0) = -y_1(1), \quad y_2(0) = -y_2(1), \tag{2}$$

где q_j — непрерывные комплекснозначные функции.

Недифференцируемость потенциала вызывает значительные трудности при изучении спектральных свойств системы (1) ([1]). В работах [2] и [3] предложен достаточно элементарный и простой метод, базирующийся на формулах типа операторов преобразования, для получения уточненной асимптотики собственных значений и доказательства базисности по Риссу собственных функций системы (1) для краевых условий Дирихле и периодических краевых условий. В данной работе с помощью этого метода исследуются спектральные свойства задачи (1), (2).

Асимптотику собственных значений в первом приближении можно получить стандартным образом (см., например, доказательство теоремы 1 в [3]). В результате имеем:

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи* (1), (2) *образуют две бесконечные последовательности*

$$\lambda_n' = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n', \quad \lambda_n'' = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n'', \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где $\varepsilon_n' \to 0$ и $\varepsilon_n'' \to 0$ при $n \to \infty$. В случае $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n''$ собственные значения простые, а в случае $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$ — двукратные.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Система (1) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} q_2(t) y_2(t)\,dt,$$
$$y_2(x) = c_2 e^{-\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} q_1(t) y_1(t)\,dt,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Выполним замену $y_1(x) = e^{\lambda x} z_1(x)$, $y_2(x) = e^{-\lambda x} z_2(x)$. Получим

$$z_1(x) = c_1 + \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t)\,dt, \quad z_2(x) = c_2 + \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t)\,dt. \qquad (3)$$

Через $(z_{11}(x), z_{12}(x))^T$ обозначим решение (3) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а через $(z_{21}(x), z_{22}(x))^T$ — при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Через α_n будем обозначать различные числа, для которых $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, через β_n — такие α_n, которые можно точно вычислить. В основе метода лежат следующие леммы ([2, 3]).

Лемма 1. *Имеют место формулы*

$$z_{11}(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11}(x,\xi)\,d\xi, \quad z_{21}(x) = \int\limits_0^x e^{2\lambda\xi} K_{21}(x,\xi)\,d\xi,$$
$$z_{12}(x) = \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{12}(x,\xi)\,d\xi, \quad z_{22}(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{2\lambda\xi} K_{22}(x,\xi)\,d\xi,$$

где $K_{ij}(x,\xi)$ — непрерывные функции, не зависящие от λ.

Лемма 2. *При $\lambda = \lambda_n = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, справедливы асимптотические формулы*

$$z_{ij}(1) = \delta_{ij} + \omega_n + O(\varepsilon_n^4),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\omega_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \beta_n\varepsilon_n^2 + \beta_n\varepsilon_n^3$.

Леммы 1 и 2 позволяют получить уточненную асимптотику собственных значений.

Теорема 2. *Пусть ε_n — любое из ε'_n или ε''_n. Справедливы асимптотические формулы*

$$\varepsilon_n = \pm\beta_n^{1/2} + \alpha_n^{3/4}.$$

Для бесконечной подпоследовательности кратных собственных значений λ_n справедлива асимптотика

$$\lambda_n = (2n+1)\pi i + \beta_n + \alpha_n^2.$$

При доказательстве базисности используется следующая структура проекторов Рисса ([3]).

Лемма 3. *При достаточно больших $|n|$*

$$P_n f = \sum_k \int_{\gamma_n} s(\lambda) y_{i_1,j_1}(x)(\omega_{ij}, \overline{f}_l)\, d\lambda,$$

где γ_n — окружность, содержащая внутри только λ'_n и λ''_n, $\omega_{ij}(x)$ — элементы матрицы $(y_{ij}(x))^{-1}$, $f(x) = (f_1, f_2)^T$, через $s(\lambda)$ обозначены функции, зависящие только от λ, ограниченные по $\lambda \in \gamma_n$ при всех n (суммирование ведется по всем $k = (i_1, j_1, i, j, l)$ с компонентами, принимающими значения 1 *и* 2*).*

Леммы 1–3 позволяют получить оценку

$$\left\| \sum_{n\in N} P_n \right\| \leq c,$$

где c не зависит от набора N, и доказать по-новому следующий факт из [1].

Теорема 3. *Система собственных и присоединенных функций краевой задачи* (1), (2) *образуют базис Рисса со скобками в $L_2^2[0,1]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Djakov P., Mityagin B.* Bari—Markus property for Riesz projections of ID periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 22–30.

3. *Бурлуцкая М. Ш., Корнев В. П., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2012. Т. 52, № 9. С. 1621–1632.

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ

О. А. Королева (Саратов, РФ)
korolevaoart@yandex.ru

В работе найдены условия разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям скалярного дифференциального оператора L, где

$$L: \quad Ly = y', \quad U(y) = y(0) - y(1) + \int\limits_0^1 a(t)y(t)\,dt = 0,$$

где $a(t)$ — непрерывная функция на $[0,1]$. Как известно, для частичной суммы ряда Фурье $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$, где $R_\lambda f$ — резольвента оператора L.

Рассмотрим краевую задачу:

$$y'(x) = \lambda y(x) + f(x), \tag{1}$$

$$U(y) = 0. \tag{2}$$

Решение задачи (1),(2) $y(x,\lambda) = R_\lambda f$, имеет вид [1]:

$$R_\lambda f = -e^{\lambda x} \triangle^{-1}(\lambda) \int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt + g_\lambda f(x),$$

где $\triangle(\lambda) = U(e^\lambda)$, U_x означает, что U применяется по x,

$$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \\ \varepsilon(x,t)e^{\lambda(x-t)}, & \text{при } \operatorname{Re}\lambda < 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leqslant x, \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases}$$

$$g_\lambda f(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)f(t)dt.$$

Рассмотрим $f(x) \in C\,[0,1] \cap V\,[0,1]$. Известно, если $g(x) \in C^1\,[0,1]$, то

$$\int\limits_a^b g'(x)f(x)\,dx = g(x)f(x)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x) \tag{3}$$

Будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. (Случай $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ рассматривается аналогично.)

Лемма 1. *Имеет место формула:*

$$\int_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt = \frac{1}{\lambda}\left(f(1) - e^{\lambda} f(0)\right) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}\,df(t) -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)e^{\lambda\tau}f(0)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\int\limits_0^\tau e^{\lambda(\tau-t)}\,df(t)$$

Доказательство. В самом деле,

$$U_x(g(x,t,\lambda) = g(0,t,\lambda) - g(1,t,\lambda) + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau =$$

$$= -e^{\lambda(1-t)} + \int\limits_0^1 a(\tau)g(\tau,t,\lambda)\,d\tau.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda)f(t)\,dt = -\int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)}f(t)\,dt + \int\limits_0^1 a(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1 f(t)g(\tau,t,\lambda)\,dt.$$

Разбив внутренний интеграл второго слагаемого на два — первый от 0 до τ, а второй от τ до 1 и применив формулу (3) в каждом слагаемом, получим требуемое. Лемма доказана.

Аналогично лемме 1 можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Выполнятся равенство:*

$$g_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}f(0) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\,df(t).$$

Вернемся к решению задачи (1).

Лемма 3. *Если $f(x)$ удовлетворяет* (2), *то*

$$R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda}f(x) + \Omega_\lambda f,$$

где $\Omega_\lambda = \frac{1}{\lambda}[I_1 + I_2 + I_3]$, $I_1 = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^x e^{-\lambda t}\, df(t)$, $I_2 = \frac{e^{\lambda(x+1)}}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 e^{-\lambda t}\, df(t)$, $I_3 = -\frac{e^{\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \int\limits_0^1 a(x)\, dx \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}\, df(t)$.

Доказательство. Очевидным образом следует из лемм 1, 2.

Удалим из комплексной плоскости собственные значения оператора L вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ_0. В полученной области S_{δ_0} при $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ справедлива оценка $|\Delta(\lambda)| \geq c\left|e^{-\lambda}\right|$. Теперь можно сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[0,1]$, *имеет на нем ограниченную вариацию и удовлетворяет (2), то*

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f(x) - S_r(f,x)| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

где r *таково, что окружность* $|\lambda| = r$ *находится в* S_{δ_0}.

Доказательство. На основании предыдущей леммы достаточно показать, что

$$\max_{0\leq x\leq 1}\left|\int\limits_{|\lambda|=r} \Omega_\lambda f\, d\lambda\right| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Зададим сколь угодно малое ε. Тогда существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое что $\bigvee\limits_{1-\delta}^{1}(f) < \varepsilon$. Значит, для первого слагаемого в Ω_λ при $|\lambda| = r$:

$$\left|\frac{1}{\lambda} I_1\right| \leq \frac{\left|e^{\lambda}\right|\left|e^{\lambda x}\right|}{c\cdot r}\left\{\int\limits_0^{x-\delta}\left|e^{-\lambda t}\right||df(t)| + \int\limits_{x-\delta}^{x}\left|e^{-\lambda t}\right||df(t)|\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\left|e^{\lambda x}\right|}{c\cdot r}\int\limits_0^{x-\delta}\left|e^{-\lambda(x-\delta)}\right||df(t)| + \frac{1}{c\cdot r}\int\limits_{x-\delta}^{x}\left|e^{\lambda(x-t)}\right||df(t)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{c\cdot r}\left\{\int\limits_0^{x-\delta}\left|e^{\lambda\delta}\right||df(t)| + \int\limits_{x-\delta}^{x}|df(t)|\right\} \leq \frac{1}{c\cdot r}\left\{\left|e^{\lambda\delta}\right|\bigvee_0^1(f) + \bigvee_{1-\delta}^1(f)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{c}{r}\left\{\left|e^{\lambda\delta}\right| + \varepsilon\right\},$$

где за c обозначены разные константы. Аналогично для остальных слагаемых из Ω_λ. Поэтому $\left|\int\limits_{|\lambda|=r}{}' \,\Omega_\lambda f\, d\lambda\right| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$, где $(')$ означает часть $|\lambda| = r$, в которой $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

УДК 517.954

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ L-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ [1]

С. А. Корольков (Волгоград, РФ)
sergei.a.korolkov@gmail.com

Пусть M — связное некомпактное гладкое риманово многообразие без края, Ω — односвязная неограниченная область в M с C^1-гладкой границей $\partial\Omega$ и $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание M. В работе рассматриваются решения стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0$$

на M и Ω. Здесь $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, причем $c(x) \not\equiv \not\equiv 0$. Всюду далее решения стационарного уравнения Шрединегра будем называть L-гармоническими функциями.

Пусть f_1 и f_2 — непрерывные в Ω (на $\partial\Omega$, соотв.) функции. Будем говорить, что функции f_1 и f_2 *эквивалентны на* Ω *(на* $\partial\Omega$*, соотв.)* и использовать обозначение $f_1 \overset{\Omega}{\sim} f_2$ ($f_1 \overset{\partial\Omega}{\sim} f_2$, соотв.), если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$ ($\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{\partial\Omega\setminus B_k} |f_1 - f_2| = 0$, соотв.). Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания M (см. [3]). Будем говорить, что непрерывная на Ω функция f принадлежит *классу допустимых на* Ω *функций* и обозначать $f \in K(\Omega)$, если на Ω найдется такая L-гармоническая функция u, что $u \overset{\Omega}{\sim} f$ (см. также [2]).

Введем понятие L-потенциала некоторого компакта $B \subset M$ (с C^1-границей ∂B) относительно многообразия M. Не ограничивая общности будем считать, что $B \subset B_k$ для всех k. Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений следующих задач Дирихле в $B_k \setminus B$

$$\begin{cases} Lv_k = 0 & \text{на} \quad B_k \setminus B, \\ v_k = 1 & \text{на} \quad \partial B, \\ v_k = 0 & \text{на} \quad \partial B_k. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97038 р_поволжье_а).

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу принципа максимума монотонно возрастает и сходится к предельной функции $v_M(x) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$, которая является L-гармонической на $M \setminus B$ (при этом $0 \le v_M(x) \le 1$ на $M \setminus B$). Функция $v_M(x)$ называется *L-потенциалом компакта B относительно многообразия M* (см., напр., [3]). Следуя [3], многообразие M будем называть L-строгим, если L-потенциал некоторого компакта $B \subset M$ эквивалентен нулю. Отметим, что свойство L-строгости многообразия не зависит от выбора компакта B.

Пусть f — непрерывная на Ω функция, φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция. Будем говорить, что на Ω однозначно разрешима краевая задача (1) с граничными данными (f, φ), если на Ω существует единственное решение следующей задачи

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ на } \ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \\ u \overset{\Omega}{\sim} f. \end{cases} \tag{1}$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть M — L-строгое риманово многообразие, $\Omega \subset M$ — односвязная неограниченная область в M с C^1-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in K(\Omega)$ и φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция такая, что $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$. Тогда на Ω однозначно разрешима краевая задача (1) с граничными данными (f, φ).*

Приведем следствие полученного результата для модельных многообразий с некомпактным краем. Пусть M^* — связное некомпактное риманово многообразие с некомпактным краем ∂M^*, представимое в виде $M^* = B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт, а D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty) \times G$ с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r) d\theta^2.$$

Здесь G — односвязная область на $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1} ($\partial G \ne \emptyset$) с C^1-гладкой границей ∂G, $d\theta^2$ — метрика на S^{n-1}. Многообразие M^* будем называть модельным многообразием с некомпактным краем (см. также [1]).

Будем говорить, что на M^* однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными, если для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции $f(\theta)$ и любой непрерывной на ∂M^* функции $\varphi(y)$ такой, что $\lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{\partial G}|\varphi(r,\theta)-f(\theta)|=0$, существует единственное решение задачи

$$\begin{cases} Lu=0 \text{ в } M^*,\\ u(y)=\varphi(y) \text{ для всех } y\in\partial M^*,\\ \lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{G}|u(r,\theta)-f(\theta)|=0. \end{cases}$$

Будем говорить, что на M^* однозначно разрешима краевая задача (2) с непрерывными граничными данными, если для любой константы C и любой непрерывной на ∂M^* функции $\varphi(y)$ такой, что

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\partial G}|\varphi(r,\theta)-C|=0,$$

существует единственное решение задачи

$$\begin{cases} Lu=0 \text{ в } M^*,\\ u(y)=\varphi(y) \text{ для всех } y\in\partial M^*,\\ \lim\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{G}|u(r,\theta)-C|=0. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим

$$I=\int_{r_0}^{\infty}\frac{1}{g^{n-1}(t)}\left(\int_{r_0}^{t}c(z)g^{n-1}(z)dz\right)dt,$$

$$J=\int_{r_0}^{\infty}\frac{1}{g^{n-1}(t)}\left(\int_{r_0}^{t}g^{n-1}(z)dz\right)dt.$$

Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *1) Если $I<\infty$ и $J<\infty$, то на M^* однозначно разрешима задача Дирихле с непрерывными граничными данными.*
2) Если $I<\infty$ и $J=\infty$, то на M^* однозначно разрешима краевая задача (2) *с непрерывными граничными данными.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grigor'yan A. A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36(2). P. 135–249.

2. *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Mathematische zeitschrift. 2012. Vol. 272(1–2). P. 459–472.

3. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43(3). С. 591–599.

УДК 517.54+517.95

ТЕОРЕМА ТИПА ФРАГМЕНА–ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ РАЗНОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. В. Кочетов (Волгоград, РФ)
kochetov.alexey@mail.ru

Рассмотрим уравнение газовой динамики

$$\mathcal{A}_\gamma[f] = \mathrm{div}\ (\sigma(|\nabla f|)\,\nabla f(x)) = 0\,, \quad \sigma(t) = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}t^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\,. \qquad (1)$$

Здесь γ — постоянная, $-\infty < \gamma < +\infty$, характеризующая поток субстанции. Для различных значений γ это может быть поток газа, жидкости, пластика, электрического или химического полей в различных средах и т.п. (см, например, [1, §15 главы IV]).

В случае $\gamma = -1$ уравнение (1) есть классическое уравнение минимальных поверхностей

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) = 0$$

(газ Чаплыгина).

Положим $\Omega_\gamma = \mathbb{R}^2$ при $\gamma \le 1$ и

$$\Omega_\gamma = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < \gamma^*\right\}, \quad \gamma^* = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \quad \text{при } \gamma > 1.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\overline{D}$ — ее замыкание, ∂D — ее граница. Обозначим через $\mathrm{Lip}\,D$ множество функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x'') - f(x')| \le c\,|x'' - x'|$$

на всяком компактном подмножестве $K \subset D$ с некоторой постоянной $c < \infty$, зависящей только от K и f. Символом $\mathrm{Lip}_0 D$ обозначим множество функций класса $\mathrm{Lip}\,D$ с компактными носителями $\mathrm{supp}\,f \subset D$. В соответствии с теоремой Радемахера–Степанова [2, глава III, §3.1] функции класса $\mathrm{Lip}\,D$ имеют полный дифференциал почти всюду в области D.

Функция $h(x)$ класса $\mathrm{Lip}\, D$ является в D обобщенным решением уравнения (1) , если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_0 D$ выполнено:

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{2} \varphi_{x_i} \sigma(|\nabla h|) h_{x_i}\, dx_1 dx_2 = 0. \tag{2}$$

Пусть $0 < \lambda < 1$. Далее нам потребуются функции:

$$I_\gamma^-(a,b) = \frac{\lambda a\, \sigma(a) - b\, \sigma(b)}{\lambda a - b} \quad \text{при} \quad \lambda a \neq b$$

и

$$I_\gamma^+(a,b) = \frac{\lambda a\, \sigma(a) + b\, \sigma(b)}{\lambda a + b} \quad \text{при} \quad a^2 + b^2 > 0.$$

Введем в рассмотрение множество

$$G_\gamma(\lambda) = \{(\xi, \eta) \in \Omega_\gamma \times \Omega_\gamma : \ \lambda\sigma(|\xi|)|\xi| - \sigma(|\eta|)|\eta| < 0, \ \lambda|\xi| - |\eta| + \lambda^2 \leq 0\}.$$

Стоит отметить, что

$$\bigcup_{0<\lambda<1} G_\gamma(\lambda) = (\Omega_\gamma \times \Omega_\gamma) \setminus \{(0,0)\}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, отличная от всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\widetilde{D}$ ее пополнение простыми концами[3, §3]. Фиксируем простой конец $e_0 \in \widetilde{D}$ и непустое множество простых концов $E_\infty \subset \widetilde{D} \setminus D$, $e_0 \notin E_\infty$. Будем говорить, что функция $h : D \to (0, \infty)$ класса $\mathrm{Lip}\, D$ является *функцией исчерпания* области D, если она обладает свойствами:

(i) для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{x \in D'} |\nabla h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D'} |\nabla h(x)| < \infty\,;$$

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to e_0 \\ x \in D}} h(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to E_\infty \\ x \in D}} h(x) = +\infty$ и

$$0 < h(x) < +\infty \quad \text{при всех} \quad x \in D\,;$$

(iii) множества уровня $\{x \in D : h(x) = t\}$, $t > 0$, состоят из счетного числа простых жордановых дуг с концами на границе ∂D.

Символом E_t, $0 < t < \infty$, будем обозначать минимальную из совокупностей компонент связности указанного множества уровня, разделяющую в D простой конец e_0 и множество E_∞.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $\gamma > -1$, $\lambda \in (0,1)$ и пусть $f_1(x_1,x_2)$, $f_2(x_1,x_2)$ локально липшицевы в области D суб- и суперрешения уравнения $\mathcal{A}[f]=0$, соответственно, и пусть для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек D, не имеющей предельных точек в множестве простых концов $E_\infty \cup D$, выполнено*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(f_1(a_n)-f_2(a_n)\right)\le 0\,.$$

Предположим, что множество $U=\{x\in D : f_1(x)-f_2(x)>0\}$ не пусто. Предположим также, что если $(\nabla f_1,\nabla f_2)\in G_\gamma(\lambda)$ для почти всех $x\in U$, то

$$\int^{+\infty} dt\left(\int_{E_t}\mu(x)M^2(x)\left|\nabla h(x)\right|\left|dx\right|\right)^{-1}<\infty, \tag{3}$$

где обозначено

$$M(x)=\max\{0,\ f_1(x)-f_2(x)\},$$
$$\mu(x)=\max\{I_\gamma^-(|\nabla f_1|,|\nabla f_2|),I_\gamma^+(|\nabla f_1|,|\nabla f_2|)\}.$$

Для разности решений уравнения газовой динамики близкое утверждение получено в [4]. В этой работе, в отличие от работы [4], не предполагается выполнение структурного ограничения на дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\gamma[f]$:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sigma(|\xi|)\xi_i-\sigma(|\eta|)\eta_i\right)^2\le\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\left(\sigma(|\xi|)\xi_i-\sigma(|\eta|)\eta_i\right)(\xi_i-\eta_i),\quad \xi,\eta\in\Omega_\gamma,$$

которое справедливо при $\gamma > -1$ только на подобластях $\Omega'_\gamma\subset\Omega_\gamma$, имеющих достаточно сложную структуру. Более того, функция $t\sigma(t)$ не является монотонной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М. : Наука, 1973.

2. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М. : Наука, 1987.

3. *Суворов Г. Д.* Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск : СО АН СССР, 1965.

4. *Кочетов А. В., Миклюков В. М.* «Слабая» теорема типа Фрагмена–Линделева для разности решений уравнения газовой динамики // Сиб. журн. индустр. мат. 2006. Т. IX, № 3. С. 90–101.

УДК 517.5

СИММЕТРИЧНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ ФРЕЙМЫ ВСПЛЕСКОВ НА ОСНОВЕ ЛИФТИНГ-СХЕМЫ[1]

А. В. Кривошеин (Санкт-Петербург, РФ)
krivosheinav@gmail.com

Свойство симметрии для систем всплесков является одним из наиболее востребованных в прикладных и инженерных исследованиях. Однако для многомерного случая общих методов построения симметричных систем всплесков в настоящее время нет. Эта задача осложняется еще и тем, что в многомерном случае возможны различные виды симметрии.

На основе работы [1] и так называемой лифтинг-схемы предлагается метод построения двойственных фреймов всплесков с обеспечением свойства симметрии и хороших аппроксимационых свойств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krivoshein A. V.* On construction of multivariate symmetric MRA-based wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2013. Available online. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2013.04.001 (дата обращения 20.09.2013).

УДК 517.518.2

ОЦЕНКИ L^p-ОСЦИЛЛЯЦИЙ ФУНКЦИИ ПРИ $p > 0$

В. Г. Кротов, А. И. Порабкович (Минск, Беларусь)
krotov@bsu.by, porabkovich@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и σ-конечной борелевской мерой μ. Для $x \in X$ и $r > 0$

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

обозначает открытый шар с центром x радиуса r. При этом мы предполагаем, что мера любого шара положительна и конечна.

Для шара $B \subset X$ обозначаем r_B его радиус, кроме того, λB — шар, концентрический с B, радиуса λr_B.

Ниже предполагается, что мера μ удовлетворяет условию удвоения: существует такие числа $a_\mu > 0$ и $\gamma > 0$, что выполнено неравенство

$$\mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)), \quad x \in X, \quad 0 < r \leq R.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00216) и СПбГУ, НИР «Вещественные и -адические системы всплесков».

Для $0 \le \alpha < \beta < \infty$ определим $\Omega[\alpha, \beta)$ как множество положительных возрастающих функций $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которых $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает и $\eta(t)t^{-\beta+\delta}$ почти убывает при некотором $0 < \delta < \beta - \alpha$.

Для $\theta > 0$ и шара $B \subset X$ в

$$A_\theta(f, B) = \inf_c \left(\fint_B |f(y) - c|^\theta \, d\mu(y) \right)^{1/\theta}.$$

(перечеркнутый интеграл обозначает среднее интегральное функции по указанному множеству). Отметим, что функция $\theta \mapsto A_\theta(f, B)$ возрастает. Кроме того, при $\theta \ge 1$ справедливы неравенства

$$A_\theta(f, B) \le \left(\fint_B \left| f(y) - \fint_B f \, d\mu \right|^\theta d\mu(y) \right)^{1/\theta} \le 2A_\theta(f, B).$$

Легко видеть, что если $B \subset X$, $f \in L^\theta(B)$, $\theta > 0$, то существует такое число $I_B^{(\theta)} f \in \mathbb{R}$, что

$$A_\theta(f, B) = \left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta \, d\mu(y) \right)^{1/\theta}.$$

Конечно, $I_B^{(\theta)} f$ может определяется неоднозначно, в дальнейшем под $I_B f$ понимаем любое из его возможных значений. Важным свойством $I_B^{(\theta)} f$ является следующее: для любой функции $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$

$$\lim_{r \to +0} I_{B(x,r)}^{(\theta)} = f(x)$$

для почти всех $x \in X$. Точки, которых выполнено это соотношение, будем называть θ-точками Лебега.

Введем максимальную функцию

$$\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{A_\theta(f, B)}{\eta(r_B)}.$$

Запись $A \lesssim B$ всегда означает, что $A \le cB$, где $c > 0$ зависит, возможно, от некоторых параметров, но эти зависимости для нас несущественны (эти постоянные могут быть различными даже в пределах одной строки).

Следующая теорема дает ряд неравенств, связывающих осцилляции $A_\theta(f,B)$ при различных θ (случай $\theta = 1$ был изучен в [1]). Эти неравенства подобны неравенствам Соболева–Пуанкаре на $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть θ, $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$. Для любой θ-точки Лебега $x \in X$, то*

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)} f| \le c\eta(r) \left[\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta f(x)\right]^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}} \left(\fint_{B(x,r)} [\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta f]^p \, d\mu \right)^{\alpha/\gamma}.$$

Кроме того, для любого шара $B \subset X$

$$\left(\fint_B \left| f - I^{(\theta)}_B f \right|^q \, d\mu \right)^{1/q} \le c\eta(r_B) \left(\fint_{2B} [\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta f]^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

и для каждой θ-точки Лебега $x \in B$ функции f

$$\left(\fint_B |f - f(x)|^q \, d\mu \right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left[\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta f(x) + \left(\fint_{2B} [\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta f]^p \, d\mu \right)^{1/p} \right],$$

где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$ и постоянные в $\lesssim$ не зависят от f, x и B.

Следующая теорема выражает так называемое свойство самоулучшения неравенства Пуанкаре и обобщает результаты работ [1] (случай $\theta = 1$ и [2] (случай $\theta = 1$ и $\eta(t) = t$).

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $\sigma \ge 1$. Пусть еще пара функций $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$ и $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют $(\sigma, \eta, \theta, p)$-неравенству Пуанкаре: для любого шара $B \subset X$*

$$A_\theta(f, B) \le \eta(r) \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Тогда для любого шара $B \subset X$:

1) если $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$, то справедливо неравенство слабого типа

$$\frac{\mu\left\{x \in B : |f(x) - I^{(\theta)}_B f| > \lambda\right\}}{\mu B} \lesssim \left[\frac{\eta(r)}{\lambda} \left(\fint_{2\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p} \right]^q, \quad \lambda > 0;$$

2) если $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}$, то

$$A_q(f,B) \lesssim \eta(r) \left(\fint_{2\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

(постоянные в $\lesssim$ не зависят от f, g, λ и B).

Соответствующие результаты получены и в случаях $\alpha \geq \gamma/p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространства // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2006. Т. 14, №1. С. 51–61.

2. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Memoirs of AMS. 2000. Vol. 145. P. 1–115.

УДК 517.5

ТЕОРЕМА ШЕННОНА–КОТЕЛЬНИКОВА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НУЛЬМЕРНОЙ ГРУППЫ[1]

Ю. С. Крусс (Саратов, РФ)
KrussUS@gmail.com

Пусть $(G, \dot{+})$ — локально-компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $\ldots \supset G_{-n} \supset \ldots \supset G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ таких, что $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G), $(G_n \backslash G_{n+1})^{\#} = p_n$, где p_n — простые числа. $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ — базисная последовательность. Пусть X — совокупность характеров группы G, которая является группой относительно умножения. Обозначим через $G_n^{\perp}$ — аннулятор группы G_n, т.е. $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall\, x \in G_n, (\chi, x) = 1\}$.

Преобразование Фурье для функции $f \in L_2(G)$ задается формулой

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{(\chi, x)} d\mu(x).$$

Теорема 1. *Если $supp \hat{f} \subset G_n^{\perp}$, то функция $f(x)$ принимает постоянные значения на смежных классах по подгруппе G_n, т. е. на смежных*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

классах вида: $G_n\dot{+}j_{n-1}g_{n-1}\dot{+}...\dot{+}j_sg_s$, где g_i — базисная последовательность, $j_i=\overline{0,p_i-1}$, $s\in\mathbb{Z}$, $s\le n-1$.

Обозначим $H=\{j_{n-1}g_{n-1}\dot{+}...\dot{+}j_sg_s,\ j_i=\overline{0,p_i-1},\ s\in\mathbb{Z}, s\le n-1\}$.

Теорема 2 (Шеннона–Котельникова). *Пусть $(G,\dot{+})$ — локально-компактная нульмерная группа. Пусть $f\in L_2(G)$, и пусть $supp\hat{f}\subset G_n^{\perp}$. Тогда функцию $f(x)$ можно восстановить по ее значениям в точках $g_n\dot{+}h$, $h\in H$ с помощью следующей формулы:*

$$f(x)=\sum_{h\in H}f(g_n\dot{+}h)1_{G_n\dot{+}h}(x).$$

Для любого $x\in G$, указанный ряд содержит только один член.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-адический анализ и математическая физика: теория и приложения. М. : Физматлит, 2012. 452 с.

УДК 517.518.3

РЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕОРТОГОНАЛЬНЫМ ВСПЛЕСКАМ

А. Ю. Кудрявцев (Москва, РФ)
kudral@inbox.ru

Рассмотрим следующий рекурсивный процесс разложения.

Определение 1. Пусть L — линейное пространство, $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система линейных операторов, действующих из L в L. Для произвольного элемента $f\in L$ определим последовательность элементов $\{\widetilde{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ по индукции: 1) положим $\widetilde{f}_1=P_1(f)$; 2) если уже определены элементы $\widetilde{f}_1,\dots,\widetilde{f}_n$, то положим $\widetilde{f}_{n+1}=P_{n+1}R_n(f)$, где $R_n(f)=f-\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{f}_k$. Формальный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k$ будем называть *рекурсивным рядом* (или *рекурсивным разложением*) элемента f по системе операторов $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Если L — гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система ненулевых элементов L, а P_k — оператор ортогонального проектирования на элемент e_k, то определение 1 превращается в определение орторекурсивного разложения, данное Т. П. Лукашенко в работе [1]. В частности, для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ рекурсивное разложение совпадает с разложением в ряд Фурье.

Пусть φ — действительно- или комплекснозначная функция на вещественной прямой, принадлежащая пространству Лебега $L^2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, соответственно. Рассмотрим семейство функций

$$\Phi = \left\{\varphi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\varphi(2^k x - l) : x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+, l \in \mathbb{Z}\right\},$$

которые будем называть всплесками (вообще говоря, неортогональными), порожденными функцией φ.

Предположим, что система $\{\varphi_{0.l}(x) = \varphi(x - l) : l \in \mathbb{Z}\}$ является бесселевой, т. е. существует постоянная $B > 0$ такая, что для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |(f, \varphi_{0,l})|^2 \le B^2 \|f\|^2,$$

или, что равносильно, для любой числовой последовательности $\{c_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ из пространства l^2 выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l \varphi(x - l)\right\|^2 \le B^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l|^2.$$

Для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим оператор

$$P_k(f) = \frac{1}{B^2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (f, \varphi_{k,l})\, \varphi_{k,l}(x).$$

Рекурсивный ряд функции f по системе операторов $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ (в соответствии с определением 1) будем называть *рекурсивным рядом* (или *рекурсивным разложением*) функции f по системе функций Φ.

Введем коэффициенты $\hat{f}_{n,l} = \frac{1}{B^2}(R_{n-1}(f), \varphi_{n,l})$ при $n = 0, 1, \ldots, l \in \mathbb{Z}$, где $R_{n-1}(f) = f - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}_{k,l}\, \varphi_{k,l}(x)$ (причем $R_{-1}(f) = f$), — *рекурсивные коэффициенты* функции f по системе Φ. Формальный рекурсивный ряд функции f по системе Φ имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}_{k,l}\, \varphi_{k,l}(x)$.

Сформулируем теорему о сходимости и скорости сходимости рекурсивных разложений по системе Φ, аналогичную результату работы [2].

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{|\omega|<\delta} |\widehat{\varphi}(\omega)| > 0; \qquad (1)$$

2) $\widehat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R})$ *и выполняется неравенство*

$$\int_0^{+\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|\nu|\ge\omega} |\widehat{\varphi}(\nu)|^2 \ln(1+\omega) d\omega < \infty. \qquad (2)$$

Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ *рекурсивный ряд* f *по системе* Φ *сходится к* f *в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$.

При этом справедлива следующая оценка скорости сходимости: существует $\zeta > 0$ *и невозрастающая функция* $\bar\sigma(m) \to 0$ *при* $m \to \infty$ *такие, что для любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *и любого целого числа* $n \ge 0$ *выполняется неравенство*

$$\|R_n(f)\| \le \min_{0\le k\le n} \left\{ \left(\int_{|\omega|>2^k\zeta} \left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \right)^{1/2} + \bar\sigma(n-k)\|f\| \right\}.$$

Если $|\widehat{\varphi}(\omega)| = O(|\omega|^{-1/2-\varepsilon})$ *при* $|\omega| \to \infty$, *где* $\varepsilon > 0$, *то существует такое число* λ, $0 \le \lambda < 1$, *что* $\bar\sigma(m) = O(\lambda^{m/\ln m})$ *при* $m \to \infty$.

Имеется пример функции φ с ортогональными целочисленными сдвигами $\{\varphi(x-l) : l \in \mathbb{Z}\}$, удовлетворяющей условию (1), показывающий, что условие гладкости порождающей функции (2) существенно для сходимости рекурсивных разложений по системе Φ (см. [3]).

Рекурсивные разложения по системе Φ являются устойчивыми к широкому классу относительных и абсолютных ошибок в вычислении коэффициентов разложения.

Пример 1 ([3]). Пусть $\varphi = \chi_{[0,1)}$ — характеристическая функция единичного полуинтервала. Положим

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

— интегральный модуль непрерывности функции f в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ и любого целого числа $n \ge 0$ выполняется неравенство

$$\|R_n(f)\| \le \sqrt{2}\, \omega_2(f, 2^{-n}).$$

Пример 2 ([3]). Пусть функция φ определена равенствами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \le x < 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1) \end{cases}.$$

Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ и любого целого числа $n \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|R_n(f)\| \leq \min_{0\leq k\leq n} \left\{ \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \omega_2(f, 2^{-k}) + C\lambda^{n-k}\|f\| \right\},$$

где $\lambda = \sqrt{(5+\sqrt{153})/32} \approx 0,737$, а $C > 0$ — абсолютная постоянная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 2001. № 1. С. 6–10.

2. *Кудрявцев А. Ю.* О скорости сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Изв. РАН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 4. С. 49–64.

3. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по неортогональным всплескам : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2013.

УДК 517.984

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ[1]

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля:

$$y''(x) - q(x)y(x) = \lambda^2 y(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная непрерывная функция.

В [1] В. А. Марченко дал естественное доказательство (не связанное с методом Римана) следующей теперь хорошо известной теоремы [2, с. 17, 23].

Теорема. *Если $y(x)$ — решение уравнения* (1) *с начальными условиями*

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \lambda,$$

то справедлива формула

$$y(x) = e^{\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)e^{\lambda t}\,dt, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

где $K(x,t)$ — непрерывно дифференцируемая функция по x и t при $0 \le \le |t| \le x \le 1$ ($K(x,t)$ не зависит от λ).

В [3] этому доказательству был придан более элементарный вид. Теперь мы еще усовершенствуем доказательство. Оно будет окончательно элементарным.

Представим (1) в виде

$$(D + \lambda E)(D - \lambda E)y = q(x)y, \tag{3}$$

где $D = \dfrac{d}{dx}$, E — единичный оператор.

Положим $y_1 = y$ и $y_2 = (D - \lambda E)y_1$. Тогда (3) переходит в систему Дирака:

$$y_1'(x) - y_2(x) = \lambda y_1(x), \tag{4}$$

$$y_2'(x) - q(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x). \tag{5}$$

Система (4), (5) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} y_2(t)\, dt, \tag{6}$$

$$y_2(x) = c_2 e^{-\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} q(t) y_1(t)\, dt, \tag{7}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Положим $z_1(x) = y_1(x)e^{-\lambda x}$, $z_2(x) = y_2(x)e^{\lambda x}$. Тогда, считая, что $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, из (6), (7) получим

$$z_1(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} z_2(t)\, dt, \tag{8}$$

$$z_2(x) = \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q(t) z_1(t)\, dt. \tag{9}$$

В лемме 1 из [4] получена элементарно такая формула для $z_1(x)$, из которой сразу следует наша теорема, но при $K(x,t)$ лишь непрерывной. Нам теперь удобно получить этот результат несколько по-другому и более просто. Подставив (9) в (8), получим

$$z_1(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{-2\lambda t_1}\, dt_1 \int\limits_0^{t_1} e^{2\lambda t_2} q(t_2) z_1(t_2)\, dt_2.$$

Отсюда
$$z_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, \lambda),$$
где
$$A_n(x, \lambda) = \int_0^x e^{-2\lambda t_1}\, dt_1 \int_0^{t_1} e^{2\lambda t_2} q(t_2) A_{n-1}(t_2, \lambda)\, dt_2 \quad (n \geq 2),$$
$$A_1(x, \lambda) = \int_0^x e^{-2\lambda t_1}\, dt_1 \int_0^{t_1} e^{2\lambda t_2} q(t_2)\, dt_2.$$

Лемма 1. *Имеет место формула:*
$$A_1(x, \lambda) = \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11}(x, \xi)\, d\xi,$$
где $K_{11}(x, \xi) = \int\limits_\xi^x q(t_1 - \xi)\, dt_1$.

Доказательство. Имеем
$$A_1(x, \lambda) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} q(t_2) e^{-2\lambda(t_1 - t_2)}\, dt_2 =$$
$$= \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} q(t_1 - \xi) e^{-2\lambda\xi}\, d\xi = \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11}(x, \xi)\, d\xi. \qquad \square$$

Лемма 2. *Имеет место формула:*
$$A_2(x, \lambda) = \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{12}(x, \xi)\, d\xi, \tag{10}$$
где $K_{12}(x, \xi) = \int\limits_\xi^x dt_1 \int\limits_{t_1 - \xi}^{t_1} q(t_2) K_{11}(t_2, \xi_1)\, dt_2$, $\xi_1 = \xi - t_1 + t_2$.

Доказательство. Имеем
$$A_2(x, \lambda) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} q(t_2) e^{-2\lambda(t_1 - t_2)} A_1(t_2, \lambda)\, dt_2 =$$

$$= \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} q(t_2)\,dt_2 \int\limits_0^{t_2} e^{-2\lambda(t_1-t_2+t_3)} K_{11}(t_2,t_3)\,dt_3.$$

Выполним замену: $\xi = t_1 - t_2 + t_3$. Тогда

$$A_2(x,\lambda) = \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} q(t_2)\,dt_2 \int\limits_{t_1-t_2}^{t_1} e^{-2\lambda\xi} K_{11}(t_2,\xi_1)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} q(t_2)\,dt_2 \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi}\varepsilon(t_1,\xi)\varepsilon(\xi,t_1-t_2)K_{11}(t_2,\xi_1)\,d\xi,$$

где $\varepsilon(x,t) = 1$ при $t \le x$ и $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$. Отсюда получим (10), где $K_{12}(x,\xi) = \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} q(t_2)\varepsilon(t_1,\xi)\varepsilon(\xi,t_1-t_2)K_{11}(t_2,\xi_1)\,dt_2$. Освобождаясь здесь от функции $\varepsilon(\cdot,\cdot)$, получим требуемый вид $K_{12}(x,\xi)$. $\square$

Доказательство леммы 2 по индукции легко приводит к

Лемма 3. *Имеет место формула:*

$$A_n(x,\lambda) = \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{1n}(x,\xi)\,d\xi,$$

где $K_{1n}(x,\xi) = \int\limits_\xi^x dt_1 \int\limits_{t_1-\xi}^{t_1} q(t_2)K_{1,n-1}(t_2,\xi_1)\,dt_2$, $\xi_1 = \xi - t_1 + t_2$.

Из леммы 3 индукцией с очевидной оценкой $|K_{11}(x,\xi)| \le M$, где $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |q(x)|$, получается оценка:

$$|K_{1n}(x,\xi)| \le M^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{11}$$

Таким образом, $K_1(x,\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{1n}(x,\xi)$ непрерывна по x и t.

Переходим теперь к получению производных функции $K_1(x,\xi)$.

Лемма 4. *Имеют место формулы:*

$$\frac{d}{dx}K_{1n}(x,\xi) = \int\limits_{x-\xi}^x q(t_2)K_{1,n-1}(t_2,\xi-x+t_2)\,dt_2, \tag{12}$$

$$\frac{d}{d\xi}K_{1n}(x,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x}\left[q(t_1-\xi)K_{1,n-1}(t_1-\xi,0)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_1-\xi}^{t_1}q(t_2)\frac{d}{d\xi_1}K_{1,n-1}(t_2,\xi_1)\,dt_2\right]dt_1,$$

где $n\geq 2$ *и* $\xi_1=\xi-t_1+t_2$.

Эта лемма вытекает очевидным образом из леммы 3, если учесть еще, что $K_{1,n-1}(x,x)\equiv 0$.

Лемма 5. *Имеют место оценки:*

$$\left|\frac{d}{dx}K_{1n}(x,\xi)\right|\leq M^n\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}\quad (n=2,\ldots).$$

Эта лемма следует сразу из (12) и оценок (11).

Лемма 6. *Имеют место оценки:*

$$\left|\frac{d}{d\xi}K_{1n}(x,\xi)\right|\leq nM^n\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}\quad (n=2,\ldots). \tag{13}$$

Доказательство. Положим

$$R_n(x)=\max_{0\leq\xi\leq x}\left|\frac{d}{d\xi}K_{1n}(x,\xi)\right|.$$

Тогда из (11) и леммы 4 имеем

$$\left|\frac{d}{d\xi}K_{1n}(x,\xi)\right|\leq M\left[\int\limits_{\xi}^{x}|K_{1,n-1}(t_1-\xi,0)|\,dt_1+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\xi}^{x}dt_1\int\limits_{t_1-\xi}^{t_1}\left|\frac{d}{d\xi_1}K_{1,n-1}(t_2,\xi_1)\right|dt_2\right]\leq$$

$$\leq M\int\limits_0^x M^{n-1}\frac{t_1^{2n-4}}{(2n-4)!}\,dt_1+M\int\limits_0^x dt_1\int\limits_0^{t_1}R_{n-1}(t_2)\,dt_2=$$

$$=M^n\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}+M\int\limits_0^x dt_1\int\limits_0^{t_1}R_{n-1}(t_2)\,dt_2.$$

Отсюда

$$R_n(x) \le M^n \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + M \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} R_{n-1}(t_2)\, dt_2. \tag{14}$$

Утверждаем, что

$$R_n(x) \le nM^n \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} \quad (n = 2, \ldots). \tag{15}$$

Эту оценку получим из (14) по индукции. Имеем

$$\left| \frac{d}{d\xi} K_{11}(x, \xi) \right| = |q(x - \xi)| \le M,$$

т. е. $R_1(x) \le M$. Тогда из (14) получим

$$R_2(x) \le M^2 x + M \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} M\, dt_2 = M^2 x + M^2 \frac{x^2}{2!} \le 2M^2 x$$

и тем самым (15) при $n = 2$ получена. Допустим, что (15) верно при $n - 1$. Тогда из (14) получаем

$$R_n(x) \le M^n \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + M(n-1)M^{n-1} \int\limits_0^x dt_1 \int\limits_0^{t_1} \frac{t_2^{2(n-1)-3}}{(2(n-1)-3)!}\, dt_2 =$$
$$= M^n \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + (n-1)M^n \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} = nM^n \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!},$$

т. е. (15) верна. Из (15) следует (13). □

Из лемм 5 и 6 получаем

Лемма 7. *Ряд* $K_1(x, \xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{1n}(x, \xi)$ *допускает почленное дифференцирование по* x *и* ξ *и поэтому* $K_1(x, \xi)$ *непрерывно дифференцируема по* x *и* ξ *при* $0 \le \xi \le x \le 1$.

Приступаем к доказательству теоремы. Имеем

$$y(x) = e^{\lambda x} z_1(x) = e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, \lambda) =$$
$$= e^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-2\xi)} K_1(x, \xi)\, d\xi = e^{\lambda x} + \frac{1}{2} \int\limits_{-x}^x e^{\lambda t} K_1\left(x, \frac{x-t}{2}\right)\, dt$$

и тем самым имеет место (2), где $K(x,t) = \frac{1}{2}K_1\left(x, \frac{x-t}{2}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I // Тр. ММО. 1952. Т. 1. С. 327–420.

2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 392 с.

3. *Хромов А. П.* Операторы преобразования для дифференциальных уравнений произвольных порядков // Исследования по дифференциальным уравнениям и теории функций : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1971. Вып. 3. С. 10–23.

4. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417.

УДК 534.11

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КАНАТА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ОБЛАДАЮЩЕГО ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

В. Л. Литвинов (Самара, РФ)

vladlitvinov@rambler.ru

Рассмотрим поперечные колебания, явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью, с учетом влияния сил сопротивления среды и вязкоупругости.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания каната, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$U(0,t) = 0, \quad U_{xx}(0,t) = 0, \quad (2)$$

$$U(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t), \quad U_x(l_0(t),t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия не оказывают влияние на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются [1].

В задаче (1)–(3) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ — поперечное смещение точки каната с координатой X в момент времени t; E — модуль упругости материала каната; I — осевой момент инерции сечения каната; μ — коэффициент, характеризующий вязкоупругость объекта;λ — сила сопротивления среды, действующая на единицу длины каната при единичной скорости поперечного движения;ρ — линейная плотность массы; $a = \sqrt{T/\rho}$ — минимальная скорость распространения волн; — сила натяжения; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ — закон движения границы каната; L_0 — начальная длина каната; $W_0(z)$ — функция класса C^1; B, ω_0 — постоянные величины.

Если ввести в задачу (1)–(3) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x/a, \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}, \quad U(x,t) = Bu(\xi,\tau)$$

и новую функцию $u(\xi,\tau) = e^{-\alpha\tau}V(\xi,\tau)$, где $\alpha = \lambda/(2\omega_0\rho)$, задача примет вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \alpha^2 V(\xi,\tau) + (\beta^2 - \alpha\gamma^2)V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) + \\ +\gamma^2 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = 0, \tag{4}$$

$$V(0,\tau) = 0, \quad V_{\xi\xi}(0,\tau) = 0, \tag{5}$$

$$V(l(\varepsilon\tau),\tau) = e^{\alpha\tau}\cos W(\tau), \quad V_\xi(l(\varepsilon\tau),\tau) = 0, \tag{6}$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho}\frac{\omega_0^2}{a^4}, \quad \gamma^2 = \frac{\mu I}{\rho}\frac{\omega_0^3}{a^4}, \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau,$$

$$W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0), \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}, \quad \varepsilon = \frac{-v_0}{a}.$$

Для большинства материалов силы вязкости значительно меньше упругих сил, поэтому γможно считать малым параметром.

Для решения задачи (4)–(6) воспользуемся методом Канторовича-Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi,\varepsilon\tau). \tag{7}$$

Обозначим $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$ и $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \alpha^2$, где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ — собственные частоты задачи (4)–(6).

Из решения задачи:

$$\delta^2 X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0,$$
$$X_n(0,\varepsilon\tau) = 0, \quad X_{n\xi\xi}(0,\varepsilon\tau) = 0,$$
$$X_n(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0, \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0,$$

найдем выражение для динамических мод $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и функций $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$:

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau) = A_n\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\},$$
$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]\sqrt{1+\delta^2[\omega_{1n}(\varepsilon\tau)+d_n(\varepsilon\tau)]^2},$$

где

$$A_n = 1/\max\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\},$$
$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{-1+\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}},$$
$$k_2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{1+\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}},$$
$$c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}, \quad \omega_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)},$$
$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)}arctg\frac{\delta\omega_{1n}(\varepsilon\tau)}{\sqrt{1+\delta^2\omega_{1n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

Примем $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau)$, где функция $y_n(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до величин порядка ε^2:

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}e^{\alpha\tau}\cos W(\tau). \tag{8}$$

Производя вычисления, для функций $Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)$, A_{0n} получим:

$$Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau) = \frac{-k_1(\varepsilon\tau)\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)}\cos[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)],$$
$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\tau)},$$
$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2}l(\varepsilon\tau)[1-c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}.$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего (8), имеют вид:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau),$$

где $a_n(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}$, $w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)d\zeta$.

Амплитуда колебаний, соответствующих n-ой динамической моде, имеет следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}, \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta),$$
$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{n21}(\varepsilon\zeta)e^{\alpha\varsigma}\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta)/\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если: $W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma$, где γ — постоянная величина.

Явление прохождения через резонанс может возникнуть на любой из динамических мод, при воздействии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0, когда $W(\tau) = \tau$.

Точка резонансной области τ_0 приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\frac{2\delta^2}{-1+\sqrt{1+4\delta^2(1+\alpha^2)}}}\cdot\pi n - 1\right].$$

Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\$_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\$_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}.$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами : монография. – Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 131 с.: ил.

2. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физико-математические науки. № 1. 2009.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Т. В. Лихачева (Саратов, РФ)
iofinat@mail.ru

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — система Виленкина, построенная по $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ (см. [1, §1.5]). Для $f \in L[0,1)$ пусть $\hat{f}(k) = \int\limits_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,...\}$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Банахово пространство E измеримых по Лебегу функций называется симметричным, если

1) из неравенства $|f(x)| \le |g(x)|$ п.в. на $[0,1)$ и $g \in E$ следует, что $f \in E$ и $\|f\|_E \le \|g\|_E$.

2) если f и g равноизмеримы и $g \in E$, то $f \in E$ и $\|f\|_E = \|g\|_E$. Известно, что такое пространство $E \subset L^1[0,1)$ и что оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(t) := f(t/\tau)X_{[0,1)}(t/\tau)$ непрерывен в E. Здесь X_μ — индикатор множества μ. Пределы

$$\alpha_E := \lim_{\tau\to+0} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_{E\to E}}{\ln\tau} \quad \beta_E := \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_{E\to E}}{\ln\tau}$$

всегда существуют и называются соответственно верхним и нижним индексом Бойда пространства E. Известно, что $0 \le \alpha_E \le \beta_E \le 1$ (см. [2, глава 2]). В случае, когда $0 < \alpha_E \le \beta_E < 1$, выполняется $\lim\limits_{h\to 0}\|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_E = 0$ для любой $f \in E$ (см. [3, с. 135]). Этот факт позволяет ввести модуль непрерывности в E формулой $\omega^*(f,\delta)_E = \sup\limits_{0<h<\delta}\|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_E$, $\delta \in (0,1)$ ([1, §1.5]).

Обозначим $\omega \in \Phi$, если $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0,1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t > 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари-Стечкина B_1, если $\delta\int\limits_\delta^1 t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1)$, соответственно, $\omega \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2-условию, если $\omega(2t) \leq C\omega(t)$, $t \in [0,1/2]$. По определению, $H_E^\omega = \{f \in E : \omega^*(f,t)_E \leq C\omega(t)\}$, где $\omega \in \Phi$ и C не зависит от $t \in [0,1]$. Для $\omega \in \Phi$ пространство H_E^ω с нормой $\|f\|_{E,\omega} = \|f\|_E + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$ является банаховым. Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^\infty$ — нижнетреугольная матрица с неотрицательными элементами, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(A) = 1$, где $s_n(A) = \sum\limits_{k=1}^n a_{n,k}$.

Введем А-преобразование ряда Фурье $f \in L^1[0,1)$ формулой

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=1}^\infty a_{n,k} S_k(f)(x).$$

Везде далее E — симметричное пространство, такое что $0 < \alpha_E \leq \leq \beta_E < 1$, A — нижнетреугольная матрица с $a_{n,k} \geq 0$.

Теорема 1. *Пусть $\omega \in B_1$, $f \in H_E^\omega$, $|s_n(A) - 1| = O(\omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Если A удовлетворяет одному из условий*

1) $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ почти убывает при всех $n \in \mathbb{N}$ и $na_{n,1} = O(1)$, или

2) $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ почти возрастает при всех $n \in \mathbb{N}$ и $na_{n,[n/2]} = O(1)$, то

$$\|f - T_n(f)\|_E = O(\omega(1/n)).$$

Теорема 2. *Пусть $\omega \in B_1$, $f \in H_E^\omega$ и A такова, что $|s_n(A) - 1| = = O(\omega(1/n))$. Пусть также выполняется одно из условий:*

1) $n \sum\limits_{k=1}^n |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = O(1)$,

2) $\sum\limits_{k=1}^n k|a_{n,k} - a_{n,k+1}| = O(1)$, $\{k|a_{n,k} - a_{n,k+1}|\}_{k=1}^n$ почти возрастает и $n^2|a_{n,[n/2]} - a_{n,[n/2]+1}| = O(1)$,

3) $\{k|a_{n,k} - a_{n,k+1}|\}_{k=1}^n$ почти убывает и $|a_{n,1} - a_{n,2}| = O(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$\|f - T_n(f)\|_E = O(\omega(1/n)).$$

Теорема 3. *Пусть $\omega \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2-условию, $\mu \in \Phi$ и при этом $\lambda(t) = \omega(t)/\mu(t)$ возрастает на (0,1) и $\lambda(0) = \lim\limits_{t\to 0+0} \lambda(t) = 0$. Тогда для $f \in H_E^\omega$ справедливо соотношение*

$$\|f - T_n(f)\|_{E,\mu} = O(\mu^{-1}(1/n)\|f - T_n(f)\|_E + \lambda(1/n)(1 + \|T_n\|_{E\to E})).$$

Замечание. Теорема 1 является аналогом теоремы 1 из [4], теорема 2, по-видимому, не имеет тригонометрического аналога. Теорема 3 является обобщением теоремы 8 из [5], где рассматривается $\omega(t) = t^\alpha$, $\mu(t) = t^\beta$, $0 < \alpha < \beta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987.

2. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И, Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1987.

3. *Volosivets S.S.* On Hardy and Bellman transforms of series with respect to multiplicative systems in symmetric spaces // Analysis Math. 2009. Vol. 35, № 2. P. 131–148.

4. *Guven A.* Trigonometric approximation in reflexive Orlicz spaces // Anal. Theory Appl. 2011. Vol. 27, № 2. P. 125–137.

5. *Iofina T.V., Volosivets S.S.* On the degree on approximation by means of Fourier-Vilenkin series in Holder and L^p norm // East J. on Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.

УДК 517.95

РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА КОНУСАХ МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ[1]

А.Г. Лосев (Волгоград, РФ)
alexander.losev@volsu.ru

Данная работа посвящена изучению решений некоторых эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях с непустым краем. Традиционно одним из истоков указанной проблематики называют классификационную теорию некомпактных римановых многообразий. Отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы типа Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной.

Вопросы существования нетривиальных гармонических и супергармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая функция в $\mathbb{R}^n$ является тождественной постоянной. В настоящее время осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля.

Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Говорят, что на M выполнено обобщенное (A, L)-лиувиллево свойство, если пространство решений уравнения

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-07-97029 р_поволжье_а).

$Lu = 0$, принадлежащих функциональному классу A, имеет конечную размерность.

Вопросам выполнения лиувиллева свойства на римановых многообразиях посвящены работы А. А. Григорьяна, С. А. Королькова, А. Г. Лосева, Е. А. Мазепы, P. Li, S. T. Yau и многих других авторов.

В частности, были получены точные условия выполнения теорем типа Лиувилля, а также условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными данными на «бесконечности», для решений некоторых уравнений и неравенств на модельных римановых многообразиях, обобщающих сферически-симметричные (см., например, [1]–[3]). Отметим, что в большинстве случаев рассматривались некомпактные римановы многообразия с пустым краем.

В данной работе изучается асимптотическое поведение решиний стационарного уравнения Шредингера

$$\Delta u - c(x)u = o,$$

где $c(x) \geq 0$, на конусах модельных многообразий. Опишем их подробнее. Будем говорить, что M — конус модельного многообразия, если $M = B \bigcup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S$ (где $r_0 > 0$, S — компактное риманово многообразие с непустым краем) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2. \tag{1}$$

Здесь $q(r)$ — положительная, гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta$ — метрика на S. Отметим, что в случае S — компактное риманово многообразие с пустым краем, получаем определение модельного многообразия. Всюду далее будем считать, что $c(r, \theta) = \bar{O}(c_1(r))$ при $r \to \infty$.

Введём обозначение:

$$J = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{q^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} (q^{n-3}(\xi) + c_1(r)q^{n-1}(\xi))d\xi,$$

где $n = \dim M$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть риманово многообразие M таково, что выполнено $J = \infty$. Тогда любое ограниченное решение стационарного уравнения Шредингера, равное нулю на крае многообразия, тождественно равна нулю на M.*

Теорема 2. *Пусть риманово многообразие M таково, что выполнено $J = \infty$. Тогда конус положительных решений стационарного уравнения Шредингера на M, равных нулю на крае многообразия, имеет размерность равную единице.*

Кроме того, в работе найдены условия выполнения лиувиллева свойства для ограниченных и положительных гармонических функций и решений стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях с конечным числом концов, каждый из которых представляет собой конус модельного многообразия.

Заметим, что в случае $J < \infty$ можно доказать однозначную разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными данными. Для случая гармонических функций это следует, в частности, из результатов работ [2] и [4].

При исследовании использовались разложения решений в ряды Фурье по собственным функциям оператора Лапласа на S с нулевыми граничными данными, асимптотическое поведение соответствующих собственных чисел (асимптотика Вейля) и оценки собственных функций в $C(S)$ норме, а также асимптотическое поведение коэффициентов Фурье при $r \to \infty$. Заметим, что в следствие специфического вида оператора Лапласа–Бельтрами на данных многообразиях, коэффициенты Фурье в разложениях гармонических функций и решений стационарного уравнения Шредингера являются решениями некоторого специального обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Подробное исследование асимптотического поведения решений данного уравнения предъявлено в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1991. № 12. С. 15–24.

2. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях // Изв. вузов. Математика. 1999. № 6. С. 41–49.

3. *Лосев А. Г., Федоренко Ю. С.* О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях // Мат. заметки. 2007. Т 81, № 6. С. 867–878.

4. *Королькова Е. С., Корольков С. А.* Краевые задачи для гармонических функций в неограниченных областях римановых многообразий// Вестн. Волгогр. гос. ун-та. 2013. Сер. 1. Мат. Физ. № 1(18). С. 45.

УДК 521.75+521.73

ТОЧНЫЕ И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ МАСС МЕТЕОРНЫХ ТЕЛ

В. Т. Лукашенко (Москва, РФ)
lukashenko-vt@yandex.ru

Для определения основных газодинамических характеристик метеорного тела наблюдатели в первую очередь используют излучение. При таком подходе внеатмосферную массу метеороида можно вычислить, опираясь на предположение, что в светимость переходит часть потерь кинетической энергии. Тогда

$$m_{ph} = m_E + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{2I}{\tau v^2} dt,$$

где m_E — остаточная масса, I — светимость метеора, $[t_0; t_1]$ — временной участок светимости метеора, $\tau(v)$ — коэффициент эффективности излучения.

Однако в последние годы была показана некорректность повсеместного использования такого подхода [1]. В качестве альтернативы сотрудниками МГУ имени М.В. Ломоносова разработан новый динамический метод, основанный на точном решении уравнений метеорной физики [1, 2]. В безразмерных переменных это решение можно записать как

$$y = \ln\alpha + \beta - \ln\frac{\Delta}{2}, \quad m = \exp\left(-\frac{\beta}{1-\mu}\left(1-v^2\right)\right),$$

$$\Delta = \overline{\mathrm{Ei}}(\beta) - \overline{\mathrm{Ei}}(\beta v^2), \quad \overline{\mathrm{Ei}}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{x}\right)\frac{e^t dt}{t},$$

здесь v, m, y — соответственно скорость, масса и высота над поверхностью земли метеорного тела. При этом $0 \leqslant \mu \leqslant 2/3$ — коэффициент вращения, $\alpha > 0$ — баллистический коэффициент и $\beta > 0$ — коэффициент уноса массы полагаются постоянными.

Так как изначально коэффициенты α и β, характеризующие динамику полёта метеорного тела, неизвестны, то ставиться задача их поиска по точкам наблюдения (v_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Методы, основанные на использовании представленного решения, получили название точных.

Тем не менее, как было отмечено в монографии [3], наличие интегральной экспоненты $\overline{\mathrm{Ei}}$ значительно затрудняет быстрое получение результатов расчётов и оценок. Поэтому было разработано приближение приведённого выше решения склейкой из элементарных функций по параметру β:

$$y_i^{\text{п}} = \begin{cases} y_0, & \text{если } \beta \leqslant \beta_i, \\ y_i, & \text{если } \beta > \beta_i, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

$$\beta_1 = 2.89, \quad \beta_2 = 2.1,$$

где

$$y_0 = \ln \alpha - \ln\left(-\ln v\right) + 0.83(1 - v),$$
$$y_i = \ln\left(2\alpha\left(\beta - A_i\right) / \left(1 - e^{(\beta - A_i)\left(v^2 - 1\right)}\right)\right), \quad i = 1, 2,$$

$$A_1 = 1.1, \quad A_2 = 1.0 + (1.0 - v)\frac{2.5}{\beta}.$$

При этом для приближения $y_1^{\text{п}}$ отличие получаемых коэффициентов α, β может составлять около 10%, а для приближения $y_2^{\text{п}}$ погрешности не должны превышать 2%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грицевич М. И.* О применимости фотометрической формулы при оценке массы болидообразующих тел // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 5. С. 624–630.

2. *Грицевич М. И.* Приближение наблюдаемого движения болидов аналитическим решением уравнений метеорной физики // Астрономический вестник. 2007. Т. 41, № 6. С. 548–554.

3. *Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И.* Аэродинамика болидов. М. : Наука, Физматлит. 1995. 240 с.

УДК 517.518

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ[1]

Т. П. Лукашенко (Москва, РФ)
lukashenko@mail.ru

Последние десятилетия при приближении и представлении функций широко применяются системы сдвигов и сжатий функций. Поскольку

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №14-01-00417 и НШ–1096.2014.1, грантов Правительства РФ №11.G34.31.0054, ГК 02.G25.31.0030 и ГК 02.G36.31.0006.

сдвиг является более простой операцией (по сравнению со сжатием), то рассмотрим вопрос об ортогональных базисах и ортоподобных системах (фреймах Парсеваля) из последовательных сдвигов одной или двух функций в некоторых пространствах тригонометрических многочленов.

Пусть $\mathbb{T}_0^n$ — пространство тригонометрических многочленов степени не выше n

$$T^n(x) = T_0^n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

с действительными (или комплексными) коэффициентами a_k, b_k.

Это пространство размерности $2n+1$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (комплексных чисел $\mathbb{C}$).

Обозначим ядро Дирихле (см. [1, с. 94], [2, с. 86])

$$D^n(x) = D_0^n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

а обобщенное ядро Дирихле (с покомпонентными сдвигами s_k, $k = 1, \ldots, n$) —

$$\boldsymbol{D}^n(x) = \boldsymbol{D}_0^n(x) = \pm\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx - s_k).$$

Теорема 1. *Система последовательных сдвигов нормированного обобщенного ядра Дирихле*

$$\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}} \boldsymbol{D}_0^n \left(x - \frac{2}{2n+1} j\pi \right),$$

$j = 0, \pm1, \ldots, \pm n$, *образует ортонормированный базис в пространстве тригонометрических многочленов* $\mathbb{T}_0^n$.

Доказательство. Для доказательства ортогональности системы сдвигов нормированного обобщенного ядра Дирихле покажем, что ядра Дирихле $\boldsymbol{D}_0^n(x)$ и $\boldsymbol{D}^n\left(x - \frac{2}{2n+1} j\pi\right)$, $j = \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$, ортогональны на $[0, 2\pi]$. Действительно, используя ортогональность тригонометрической системы на $[0, 2\pi]$, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{D}_0^n(x)\boldsymbol{D}_0^n\left(x-\tfrac{2}{2n+1}j\pi\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} + \left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kx-s_k)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\tfrac{2jk\pi}{2n+1}\right)\cos(kx-s_k)\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\tfrac{2jk\pi}{2n+1}\right)\cos^2(kx-s_k)\,dx = \frac{\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\tfrac{2jk\pi}{2n+1}\right) =$$

$$= \pi D^n\left(\tfrac{2j\pi}{2n+1}\right) = \pi\frac{\sin j\pi}{2\sin\left(\tfrac{j\pi}{2n+1}\right)} = 0.$$

Система последовательных сдвигов нормированного обобщенного ядра Дирихле $\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\boldsymbol{D}_0^n\left(x-\frac{2}{2n+1}j\pi\right)$, $j=0,\pm1,\ldots,\pm n$, образует ортогональную систему, она принадлежит пространству $\mathbb{T}_0^n$ и количество элементов в ней $2n+1$, что совпадает с размерностью пространства $\mathbb{T}_0^n$. Значит, это ортонормированный базис в $\mathbb{T}_0^n$.

Примечание. При $s_k=\frac{\pi}{2}$, $k=1,\ldots,n$, обобщенное ядро Дирихле становится сопряженным ядром Дирихле (см. [1, с. 94], [2, с. 86]) с добавлением постоянной $\pm\frac{1}{2}$

$$\widetilde{D}^n(x) \pm \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sin kx.$$

Отметим, что верно и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если система последовательных сдвигов одной функции $\varphi(x-j\alpha)$, $j=0,\pm1,\ldots,\pm n$, образует ортонормированный базис в пространстве тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_0^n$, то она совпадает с системой сдвигов некоторого нормированного обобщенного ядра Дирихле $\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}}\boldsymbol{D}_0^n\left(x-\frac{2}{2n+1}j\pi\right)$, $j=0,\pm1,\ldots,\pm n$, с точностью до порядка функций системы и изменения их знаков (умножения на -1).*

Пусть $\mathbb{T}_m^n$, $1\leqslant m\leqslant n$, — пространство тригонометрических многочленов с компонентами от m до n, то есть многочленов вида

$$T_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \left(\sum_{k=-n}^{-m} + \sum_{k=m}^{n}\right)c_k e^{ikx}$$

с действительными (или комплексными) коэффициентами a_k, b_k.

Это пространство размерности $2(n-m+1)$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ (комплексных чисел $\mathbb{C}$).

Введем для $1 \leqslant m \leqslant n$ ядро

$$D_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} \cos kx = D^n(x) - D^{m-1}(x) =$$
$$= \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{2m-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n-m+1}{2}x \cos\frac{n+m}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

аналог ядра Дирихле, а аналогичное обобщенное ядро (с покомпонентными сдвигами s_k, $k = m, \ldots, n$) —

$$\boldsymbol{D}_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} \cos(kx - s_k).$$

Сопряженными к ним ядрами будут ядро

$$\widetilde{D}_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} \sin kx = \widetilde{D}^n(x) - \widetilde{D}^{m-1}(x) =$$
$$= \frac{\cos\frac{2m-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n-m+1}{2}x \sin\frac{n+m}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

и аналогичное обобщенное ядро (с покомпонентными сдвигами s_k, $k = m, \ldots, n$) —

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n(x) = \sum_{k=m}^{n} \sin(kx - s_k).$$

Примечание. При добавлении к каждому s_k, $k = m, \ldots, n$, величины $\pi/2$ из обобщенного ядра $\boldsymbol{D}_m^n(x)$ получаем обобщенное сопряженное ядро $\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n(x)$.

Теорема 3. *Система сдвигов нормированного обобщенного ядра $\boldsymbol{D}_m^n(x)$ и обобщенного сопряженного ядра $\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n(x)$ с одинаковыми покомпонентными сдвигами s_k, $k = m, \ldots, n$, то есть система*

$$\frac{1}{\sqrt{(n-m+1)\pi}} \boldsymbol{D}_m^n \left(x - \frac{2}{n-m+1} j\pi \right) \text{ и}$$
$$\frac{1}{\sqrt{(n-m+1)\pi}} \widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n \left(x - \frac{2}{n-m+1} j\pi \right), \tag{1}$$

$j = 0, 1, \ldots, n-m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *образует ортонормированный базис в пространстве тригонометрических многочленов* $\mathbb{T}_m^n$.

Доказательство. Сперва покажем, что обобщенные ядра $\boldsymbol{D}_m^n(x)$ и $\boldsymbol{D}_m^n\left(x - \frac{2}{n-m+1}j\pi\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n-m$, ортогональны на $[0, 2\pi]$. Действительно, используя ортогональность тригонометрической системы на $[0, 2\pi]$, получаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \boldsymbol{D}_m^n(x)\boldsymbol{D}_m^n\left(x - \tfrac{2}{n-m+1}j\pi\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{k=m}^{n} \cos(kx - s_k)\right) \left(\sum_{k=m}^{n} \cos\left(\tfrac{2jk\pi}{n-m+1}\right) \cos(kx - s_k)\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=m}^{n} \cos\left(\tfrac{2jk\pi}{n-m+1}\right) \cos^2(kx - s_k)\, dx = \pi \sum_{k=m}^{n} \cos\left(\tfrac{2jk\pi}{n-m+1}\right) =$$

$$= \pi D_m^n\left(\tfrac{2j\pi}{n-m+1}\right) = \pi \frac{\sin j\pi \cos\left(\frac{j(n+m)\pi}{n-m+1}\right)}{2\sin\left(\frac{j\pi}{n-m+1}\right)} = 0.$$

Значит, обобщенные ядра $\boldsymbol{D}_m^n\left(x - \frac{2}{n-m+1}j\pi\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-m$, ортогональны на $[0, 2\pi]$. Учитывая предыдущее примечание имеем, что и обобщенные сопряженные ядра $\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n\left(x - \frac{2}{n-m+1}j\pi\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-m$, ортогональны на $[0, 2\pi]$.

Теперь покажем, что обобщенное ядро $\boldsymbol{D}_m^n(x)$ и обобщенное сопряженное ядра $\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n\left(x - \frac{2}{n-m+1}j\pi\right)$, где $j = 0, 1, \ldots, n-m$, ортогональны на $[0, 2\pi]$. Используя ортогональность тригонометрической системы на $[0, 2\pi]$ получаем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \boldsymbol{D}_m^n(x)\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n\left(x - \tfrac{2}{n-m+1}j\pi\right) dx =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{k=m}^{n} \cos(kx - s_k)\right) \left(\sum_{k=m}^{n} \sin\left(\tfrac{2jk\pi}{n-m+1}\right) \cos(kx - s_k)\right) dx =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \sum_{k=m}^{n} \sin\left(\tfrac{2jk\pi}{n-m+1}\right) \cos^2(kx - s_k)\, dx = -\pi \sum_{k=m}^{n} \sin\left(\tfrac{2jk\pi}{n-m+1}\right) =$$

$$= -\pi \widetilde{D}_m^n \left(\tfrac{2j\pi}{n-m+1}\right) = -\pi \frac{\sin j\pi \sin\left(\frac{j(n+m)\pi}{n-m+1}\right)}{2\sin\left(\frac{j\pi}{n-m+1}\right)} = 0.$$

Из показанного следует, что любое сдвинутое обобщенное ядро $\boldsymbol{D}_m^n\left(x - \frac{2}{n-m+1} l\pi\right)$, где $l = 0, 1, \ldots, n-m$, и любое сдвинутое обобщенное сопряженное ядро $\widetilde{\boldsymbol{D}}_m^n\left(x - \frac{2}{n-m+1} j\pi\right)$, где $j = 0, 1, \ldots, n-m$, ортогональны на $[0, 2\pi]$.

Итак доказано, что система (1), состоящая из последовательных сдвигов нормированных обобщенных ядер и последовательных сдвигов нормированных сопряженных обобщённых ядер, образует ортогональную систему, она принадлежит пространству $\mathbb{T}_m^n$ и количество элементов в ней $2(n-m+1)$, что совпадает с размерностью пространства $\mathbb{T}_m^n$. Значит, это ортонормированный базис в $\mathbb{T}_m^n$.

Теорема 4. *В пространстве $\mathbb{T}_m^n$, $n > m > 0$, не существует ортонормированного базиса из сдвигов одной функции вида*

$$\varphi(x - j\alpha), \quad j = 0, 1, \ldots, 2(n-m)+1.$$

Примечание. *Что касается пространств $\mathbb{T}_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, то легко заметить, что в $\mathbb{T}_n^n$ функции $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n(x - \pi/2n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ (а также $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n(x + \pi/2n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$) образуют ортонормированный базис.*

Определение. Система элементов $\{\varphi_j\}$ гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *ортоподобной*, если для любого элемента $f \in H$ верно равенство $f = \sum\limits_j (f, \varphi_j)\varphi_j$.

Умножая это равенство скалярно на f получим равенство $\|f\|^2 = \sum\limits_j \|(f, \varphi_j)\|^2$, которое определяет фреймы Парсеваля. Поэтому всякая ортоподобная система является фреймом Парсеваля. Известно и что всякий фрейм Парсеваля является ортоподобной системой (см. [3]).

Теорема 4. *При $k \geqslant n \geqslant m \geqslant 1$ получающаяся из обобщенных ядер $\boldsymbol{D}_m^n(x)$ система сдвигов*

$$\sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}} \boldsymbol{D}_m^n \left(x - \frac{2}{2k+1} j\pi\right),$$

$j = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$, образует ортоподобную систему (фрейм Парсеваля) в $\mathbb{T}_m^n$.

Доказательство. Эта система является ортогональной проекцией на $\mathbb{T}_m^n$ системы сдвигов нормированных обобщенных ядер Дирихле

$$\sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}}\boldsymbol{D}_0^k\left(x - \frac{2}{2k+1}j\pi\right),$$

$j = 0, \pm 1, \ldots, \pm k$, которая по теореме 1 образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_0^k \supset \mathbb{T}_m^n$. А ортогональная проекция ортонормированного базиса из $\mathbb{T}_0^k$ — ортоподобная система в $\mathbb{T}_m^n$. Ведь любой элемент из $\mathbb{T}_m^n$ можно разложить по ортонормированному базису из $\mathbb{T}_0^k$, а потом в разложении всюду заменить элементы ортонормированного базиса из $\mathbb{T}_0^k$ на их ортогональные проекции на $\mathbb{T}_m^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ. 1961. 936 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир. 1965. Т. 1. 615 с.
3. *Лукашенко Т. П.* О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 12. С. 57–72.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ПОЛУЦЕЛОГО ПОРЯДКА НА ОТРЕЗКЕ

А. Л. Лукашов (Стамбул, Турция; Саратов, РФ), Р. Халди (Аннаба, Алжир)

LukashovAL@info.sgu.ru

Константы Лебега для интерполяционных процессов Лагранжа тригонометрическими полиномами с равноотстоящими узлами на периоде хорошо изучены в работах А. Зигмунда, В. К. Дзядыка, Х. Элиха, К. Целлера и других математиков [1–3]. Хотя вопрос о переносе таких оценок для интерполирования на подмножествах $[0, 2\pi]$ вполне естествен в рамках общей теории интерполирования на множествах, развитой в трудах А. А. Привалова и его учеников [4, 5] , простейший случай одного отрезка короче периода оставался неизученным до самого последнего времени. В недавних работах [6, 7] были рассмотрены константы Лебега для интерполяционных процессов Лагранжа по нулям тригонометрических полиномов В. С. Виденского полуцелого порядка, наименее уклоняющихся от нуля на $[-\omega, \omega]$ с определенным образом фиксированными старшими гармониками. В частности, в работе [7] было установлено, что эти константы не зависят от ω и совпадают с константами, рассмотренными в [1–3].

Цель данной работы — перенос последнего результата на случай интерполирования тригонометрическими полиномами полуцелого порядка.

Пусть ξ_j — нули многочлена Чебышева $T_{2n}(x) = \cos(2n \arccos x)$,

$$\xi_j = \cos\left(\frac{(2j-1)}{4n}\pi\right), \quad j = 1, 2, ..., 2n. \tag{1}$$

Положим $x = \frac{\sin(\theta/2)}{\alpha}, \theta \in [-\omega, \omega], 0 < \omega \le \pi, 0 < \alpha = \sin(\omega/2) \le 1$, тогда

$$\theta_j = 2 \arcsin(\alpha \xi_j), \quad j = 1, 2, .., 2n, \tag{2}$$

являются нулями тригонометрического полинома В. С. Виденского $T_{2n}(\frac{\sin(\theta/2)}{\alpha})$. Рассматривается интерполирование в пространстве тригонометрических полиномов полуцелого порядка $span\{\cos(\theta/2), \sin(\theta/2), ..., \cos((2n-1)\theta/2), \sin((2n-1)\theta/2)\}$. Соответствующие фундаментальные полиномы Лагранжа имеют вид

$$L_j(\theta) = \frac{\sin(\frac{\theta-\theta_1}{2}) ... \sin(\frac{\theta-\theta_{j-1}}{2}) \sin(\frac{\theta-\theta_{j+1}}{2}) ... \sin(\frac{\theta-\theta_{2n}}{2})}{\sin(\frac{\theta_j-\theta_1}{2}) ... \sin(\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{2}) \sin(\frac{\theta j-\theta j+1}{2}) ... \sin(\frac{\theta_j-\theta_{2n}}{2})},$$

а константы Лебега — $\Lambda_n = \max\limits_{\theta \in [-\omega, \omega]} \sum_{j=0}^{2n-1} |L_j(\theta)|$.

Теорема 1. *Максимум функций Лебега интерполяционного процесса Лагранжа с узлами* $\{\theta_j\}$ *из* (2), *то есть константа Лебега, достигается при* $\theta = \pm\omega$, *ее значение не зависит от* ω *и совпадает с константой Лебега алгебраических интерполяционных процессов Лагранжа с узлами Чебышева* (1).

Доказательство проводится методом, аналогичным использованному в [7], при этом требуется найти константу Лебега и для случая $\omega = \pi$, т. е. для четного числа равноотстоящих узлов на всем периоде при интерполировании тригонометрическими полиномами полуцелого порядка. Отметим, что даже в этом случае результат не был известен ранее, так как обычно при интерполировании с четным количеством узлов использовалась другая интерполяционная формула (М. Рисса). Для $\omega = \pi$ вывод формулы для констант Лебега проводится аналогично доказательству В. К. Дзядыка теоремы Элиха–Целлера [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1965. 538 с.

2. *Ehlich H., Zeller K.* Auswertung der Normen von Interpolationsoperatoren // Math. Ann. 1966. Bd. 164. S. 105—112.

3. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988. 304 с.

4. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. В 2-х кн. Саратов: Издательство СГУ, 1990. 430 с.

5. *Громов В. А.; Лукашов А. Л.* О работах учеников А. А. Привалова // Теория функций и приближений: тр. 7-й Сарат. зим. шк., ч.1. Саратов, 1994. С. 15–25.

6. *Bos L., Vianello M.* Subperiodic trigonometric interpolation and quadrature // Appl. Math. Comput. 2012. Vol. 218. P. 10630–10638.

7. *Da Fies G., Vianello M.* On the Lebesgue constant of subperiodic trigonometric interpolation // J. Approximation Theory. 2013. Vol. 167. P. 59-64.

УДК 517.5

КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

С. Ф. Лукомский (Саратов, РФ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Пусть $K = F^{(s)}$ — локальное поле характеристики p (p — простое). Оно состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей $a = (\dots, 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$, $a_j \in GF(p^s)$, в которых лишь конечное число элементов a_j с отрицательными номерами отличных от нуля. Символом $GF(p^s)$ обозначено конечное поле порядка p^s. В работах [1–3] предприняты попытки построения КМА на локальных полях положительной характеристики с использованием техники анализа на локальных полях, развитой в [4]. В качестве оператора растяжения используется оператор умножения на элемент $g^{-1}, g \in K_1 \setminus K_2$, а в качестве множества сдвигов — множество элементов вида $\lambda_{-1}g^{-1}\dot{+}\lambda_{-2}g^{-2}\dot{+}...\dot{+}\lambda_{-s}g^{-s}$, $\lambda_{-s} \in GF(p^s)$. Мы хотим предложить иной подход.

Через $(G, \dot{+})$ обозначим p-ичную группу Виленкина, состоящую из последовательностей $x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots)$, $x_j \in GF(p)$. Так как $a_j \in GF(p^s)$ есть вектор $a_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)})$, $a_j^{(l)} \in GF(p)$, то элемент a можно записать в виде последовательности

$$a = (\alpha_{ns+l})_{n\in\mathbb{Z}, l=\overline{0,s-1}},$$

в которой $(\alpha_{ns}, \alpha_{ns+1}, \dots, \alpha_{ns+s-1}) = a_n$. Поэтому верна

Теорема 1. *Аддитивная группа $F^{(s)+}$ локального поля $F^{(s)}$ характеристики $p > 0$ изоморфна локально компактной p-ичной группе Виленкина $(G, \dot{+})$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Множества $G_{ns+l} = \{\ldots, 0, \alpha_{ns+l}, \alpha_{ns+l+1}, \ldots\}$ образуют основную цепочку в $F^{(s)+}$, элементы $g_{ns+l} \in G_{ns+l} \setminus G_{ns+l+1}$ образуют базис в группе $F^{(s)+}$. Оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством

$$\mathcal{A}\left(\sum \beta_{ns+l} g_{ns+l}\right) = \sum \beta_{ns+l} g_{ns+l-1}$$

есть оператор растяжения, множество

$$H_0 = \{x = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-s}g_{-s} : \ s \in \mathbb{N}\}$$

есть множество сдвигов. Поэтому КМА в $F^{(s)}$ можно определять как совокупность подпространств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющих аксиомам:

1) $V_n \subset V_{n+1}$.

2) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ — плотно в $L_2(F^{(s)})$.

3) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathcal{A}x) \in V_{n+1}$.

4) Существует $\varphi \in L_2(F^{(s)})$, сдвиги которой $(\varphi(x \dot{-} h))_{h\in H_0}$ образуют ортонормированный базис в V_0.

Функцию φ называют scaling function и знание этой функции позволяет строить соответствующий КМА. В работах [5, 6] разработаны эффективные методы построения scaling function на группах Виленкина в терминах деревьев. В [6] доказано, что каждое дерево, вершины которого образуют элементы множества $\{0, 1, ..., p-1\}$ по принципу «одно число — одна вершина» порождают scaling function и указан конкретный алгоритм ее построения. В докладе предполагается подробно обсудить эту проблему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Behera B, Jahan Q.* Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic// Communications in Mathematical Analysis. 2013. Vol. 15, № 2. P. 52-–75.

2. *Behera B, Jahan Q.* Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 181-–202.

3. *Behera B, Jahan Q.* Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395. P. 1-–14.

4. *Taibleson M. H.* Fourier Analysis on Local Fields. Princeton University Press, 1975.

5. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. of Fourier Analysis and Applications. 2013. Nov., Vol. 19, № 109. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.

6. *Lukomskii S. F.* Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups // arxiv.org /abs/1303.5635.

УДК 517.521

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ[1]

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала, РФ)
rasuldev@gmail.com

В данной работе рассмотрена задача о приближении функций суммами Фурье–Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем.

Пусть $p(x)$ — измеримая на $E = [0,1]$ функция, такая что $1 \le \underline{p}(E) \le \le \overline{p}(E) < \infty$. Здесь и далее символами $\underline{p}(M)$, $\overline{p}(M)$ будем обозначать $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in M} p(x)$ и $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} p(x)$ соответственно. Пусть $w(x)$ — неотрицательная почти всюду (п.в.) положительная суммируемая функция (вес). Через $L_w^{p(x)} = L_w^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых на E функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E |f(x)|^{p(x)} w(x)\, dx < \infty.$$

Пространство $L_w^{p(x)}$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить равенством [1-3]

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf\{\lambda > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} w(x)dx \le 1\}.$$

Очевидно, что для любого суммируемого веса $w(x)$ функции Хаара $\chi_k(x)$ (см. определение в [4, с. 70]) принадлежат пространству $L_w^{p(x)}$. Тем не менее построение рядов Фурье–Хаара для функций $f \in L_w^{p(x)}$ возможно лишь при дополнительном условии: вес $w(x)$ должен быть таким, чтобы имело место вложение

$$L_w^{p(x)} \subset L^1, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

поскольку именно в этом случае становится возможным нахождение коэффициентов Фурье–Хаара $c_k = \int\limits_0^1 f(t)\chi_k(t)dt$. Можно показать, что условие (1) будет выполнено, если

$$\begin{aligned} &1) \quad w(x) \geq C_1(w) > 0, \quad \text{для п.в. } x \in E_1 = \{x : p(x) = 1\}, \\ &2) \quad \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty, \quad E_2 = E \setminus E_1. \end{aligned}$$

Множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), будем обозначать через $\mathcal{W}(p)$.

Для дальнейшего полезным будет отметить следующий результат. Пусть $\mathfrak{B}_\nu$ — множество всех двоичных интервалов (см. [4, с. 69]) из пачек с номерами $j \geq \nu$, а $\mathfrak{B}_\nu^{1,p}$ — такие двоичные интервалы $\Delta_k \in \mathfrak{B}_\nu$, что $\underline{p}(\Delta_k) = 1$:

$$\mathfrak{B}_\nu = \{\Delta_j^i : j \geq \nu, i = 1, \dots, 2^j\}, \quad \mathfrak{B}_\nu^{1,p} = \{\Delta_k \in \mathfrak{B}_\nu : \underline{p}(\Delta_k) = 1\}.$$

Множество измеримых на E функций $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию $\big|p(x) - p(y)\big| \ln \frac{1}{|x-y|} \leq C$, будем обозначать символом $\mathcal{P}^{log}$.

Теорема 1. *Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{W}(p)$. Тогда система Хаара будет базисом пространства $L_w^{p(x)}$, если для некоторого $\nu \geq 0$ выполняются следующие условия*

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_\nu^{1,p}} \frac{1}{|B|} \int\limits_B w(x)dx < C(w), \tag{2}$$

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_\nu \setminus \mathfrak{B}_\nu^{1,p}} \Big(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(B)-1}}\Big)^{\underline{p}(B)-1} < C(p,w). \tag{3}$$

Отметим, что в безвесовом случае условия базисности системы Хаара были найдены в работе [5].

Множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), обозначим через $\hat{A}_{p(\cdot)}$.

Основным результатом настоящей работы является оценка скорости сходимости сумм Фурье-Хаара $Q_n(f,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\chi_k(x)$ к исходной функции $f(x)$ в метрике пространства $L_w^{p(x)}$. Для безвесового случая исследование этого вопроса была проведено в [6]. В этой статье автор отмечает необходимость введения для пространств Лебега с переменным показателем нового модуля непрерывности $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}$, основанного на усредненном сдвиге:

$$\Omega(f,0)_{p(\cdot)}=0, \quad \Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}=\sup_{0\le h\le\delta}\|f-s_h(f)\|_{p(\cdot)},$$

где $s_h(f)=s_h(f)(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+t)dt$ — функция Стеклова. В весовом случае мы воспользуемся аналогичной конструкцией:

$$\Omega(f,0)_{p(\cdot),w}=0, \quad \Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w}=\sup_{0\le h\le\delta}\|f-s_h(f)\|_{p(\cdot),w}.$$

Лемма. *Если $p(x)\in\mathcal{P}^{log}$, $w(x)\in\mathcal{W}(p)\cap\hat{A}_{p(\cdot)}$, то $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w}\to 0$ при $\delta\to 0$.*

Теорема 2. *Пусть $p(x)\in\mathcal{P}^{log}$, $w(x)\in\mathcal{W}(p)\cap\hat{A}_{p(\cdot)}$. Тогда имеет место оценка*

$$\|f-Q_n(f)\|_{p(\cdot),w}\le c(p,w)\Omega(f,\tfrac{1}{n})_{p(\cdot),w}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.

2.*Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. С. 270.

3.*L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, Ruzicka, M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin : Springer, 2011. С. 509.

4.*Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. С. 560.

5.*Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283.

6.*Шарапудинов И. И.* Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье–Хаара // Мат. сб. (принята к печати).

УДК 517.95

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

Е. А. Мазепа (Волгоград, РФ)
lmazepa@rambler.ru

Данная работа посвящена исследованию вопроса существования целых положительных решений неравенств вида

$$Lu \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(r,u), \tag{1}$$

где функция $f(r,u) \geq 0$ при $u \geq 0$ — непрерывна по обоим аргументам, $f \not\equiv 0$ и $f(r,0)=0$ на модельных римановых многообразиях M_q.

Опишем данные многообразия подробнее. Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0,\infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1) множеством точек M_q является все $\mathbf{R}^n$;

2) в полярных координатах (r,θ) (где $r \in (0,\infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_q \setminus \{O\}$ определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{2}$$

где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в точке O является гладким продолжением метрики (2).

В неравенстве (1) полагаем:

1) функция A удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{cases} A \in C(0,\infty),\ A(p) > 0 \text{ при } \ p>0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \text{ для } p > 0; \end{cases}$$

2) правая часть рассматриваемого неравенства имеет вид $f(r,u) = \lambda f(r)$, где $\lambda = \mathrm{const} > 0$.

Введем обозначение

$$S(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r f(s)q^{n-1}(s)\,ds, \quad C_S = \sup_{[0,+\infty)} S(r).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-07-97029 р_поволжье_а).

В работе получены условия несуществования на модельных многообразиях целых положительных решений неравенства (1).

Теорема 1. *Пусть* $C_\omega = \lim\limits_{\xi \to +\infty} \xi A(\xi) < \infty$. *Тогда*

1) если многообразие M_q *таково, что* $C_S = \infty$, *то для всех* $\lambda > 0$ *на* M_q *не существуют целых положительных решений неравенства* (1);

2) если многообразие M_q *таково, что* $C_S < \infty$, *то найдется* $\lambda_0 > 0$ *такое, что для всех* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *на* M_q *существуют целые положительные решения неравенства* (1).

Теорема 2. *Пусть* $C_\omega = \lim\limits_{\xi \to +\infty} \xi A(\xi) = \infty$. *Тогда на* M_q *для любого* $\lambda > 0$ *существуют целые положительные решения неравенства* (1).

Данные результаты дополняют результаты, полученные в работе [1] для M_q, и обобщают результаты работ [2], [3] для $\mathbf{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении положительных решений некоторых квазилинейных неравенств на модельных римановых многообразиях // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5. № 1. С. 83–89.

2. *Naito Y., Usami H.* Entire solutions of the inequality div $(A(|Du|)Du) \ge$ $\ge f(u)$ // Math. Z. 1997. № 255. С. 167–175.

3. *Kusano T., Swanson C. A.* Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations // J. of Diff. Equation. 1990. № 83. P. 379–399.

УДК 517.53

ОТОБРАЖЕНИЯ С s-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ И Q-ГОМЕОМОРФИЗМ

А. Н. Малютина (Томск, РФ)

nmd@math.tsu.ru

Объект исследования — негомеоморфные пространственные отображения, заданные на произвольной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, называемые далее отображениями с s-усредненной характеристикой.

В последнее десятилетие XX века и до настоящего времени интенсивно изучаются различные отображения с конечным искажением [1]–[4], естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. Во всех этих обобщениях, как и в классической теории, модульная техника играет ключевую роль. Имея в виду такую ее значимость, О. Мартио предложил следующую общую концепцию — теорию Q-гомеоморфизмов, основы которой были заложены, начиная с работы [5], а в работе [6] концепция Q-гомеоморфизмов была распространена на отображения с ветвлением, так называемые Q-отображения. Отображения с s-усредненной характеристикой — негомеоморфные пространственные отображения, введенные в работе [7], являются естественным обобщением класса отображений с искажением, ограниченным в среднем на случай произвольной области $D \subset R^n$, $n \geqslant 3$. В то же время теорема об оценке модуля, доказанная нами, указывает на непосредственную связь исследуемых отображений с вышеназванными классами гомеоморфизмов.

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ открытое, непрерывное, изолированное, $f \in W^1_{n,\ \mathrm{loc}}(D)$. Якобиан отображения $J(x,f) \neq 0$ и сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$), $s > (n-1)^{-1}$.

Определение 1. Отображение f называется *отображением с s-усредненной характеристикой*, если 1) $f \in \widetilde{W}^1_{n,\ \mathrm{loc}}(D)$; 2) Существует постоянная $K_{0,s} \geqslant 0$ такая, что выполняется

$$K_{0,s}(f) = \left(\int\limits_D K_0^s(x,f)d\sigma_x\right)^{1/s} \leqslant K_{0,s}, \quad K_0(x,f) = L^n(x,f)|J(x,f)|^{-1}$$

— внешняя дилатация отображения f в точке x,

$$L(x,f) = |f'(x)| = \max_{|h|=1}|f'(x)h|, \quad d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \quad [7].$$

Борелевская функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\ \infty]$ называется допустимой для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишем $\rho \wedge \Gamma$, если $\int\limits_\gamma \rho(x)|dx| \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Модуль семейства Γ определяется равенством $M(\Gamma) = \inf\limits_{\rho\wedge\Gamma} \int\limits_\Gamma \rho^n(x)dm(x)$ [5], [6].

Определение 2. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q\colon D \to$ $\to [1,\ \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)dm(x), \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ρ для Γ, здесь $dm(x)$ — n-мерная мера Лебега, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая, что произвольная кривая γ семейства

Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ. Здесь непрерывность отображений понимается относительно сферической (хордальной) метрики [4]–[6].

Теорема 1 (об оценке модуля). *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ —- отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда выполняется неравенство*

$$M(\Gamma^*) \leqslant \inf_{\rho \wedge \Gamma} \int\limits_D (\rho(x))^n K_I(x,f) d\sigma_x, \tag{2}$$

где Γ — некоторое семейство кривых, в области D, Γ^* –- образ семейства Γ при отображении f.

Эта теорема доказана для отображений с s-ограниченным искажением в [9].

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to D^*$ — отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда для всякой точки $x_0 \in D$ и точки $x \in B^n(x_0,d)$, $d = \rho(x_0, \partial D)$ справедлива следующая оценка $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \leqslant \lambda R^* e^{-t(x,x_0)}$, где $R^* = R\left(f(x_0), f[B^n(x_0,d)]\right)$, λ — некоторая величина, зависящая только от $t(x,x_0) = \left[\omega_{n-1}^{-1} \int\limits_D r^n(|x-x_0|,y) K_I(y,f) d\sigma_x\right]^{\frac{1}{1-n}}$, и $r(t,y)$ — произвольная метрика, допустимая для семейства $\Gamma\left([0,\ t], S^n(s_0,d); B^n(x_0,d)\right)$, $0 < t < d$.*

Теорема 3. *Пусть f — отображение с $K_{I,s}$-усредненной характеристикой, f отображает шар B^n на себя, $f(0) = 0$ и $K_{I,f}(0,t) \leqslant \leqslant \left(\frac{\ln c}{t}\right)^{\alpha(n-1)}$, где $0 < \alpha < 1$, $0 < t < 1$, $c \geqslant e$. Тогда $|f(x)| \leqslant \lambda |x|^{g(c,|x|)}$, $g(c,|x|) = \left[\beta\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}\left(\left(\frac{\ln c}{|x|}\right)^{\beta} - (\ln c)^{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}}$, $\beta = \alpha(n-1)+1$.*

Необходимо отметить, что неравенство вида (1) является ключевым условием в определении более общего класса пространственных отображений, упоминавшегося выше, – класса Q-гомеоморфизмов.

Пример 1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — область, определенная следующим образом, где $0 < \beta \leqslant 2$. Рассмотрим отображение $f\colon D \to D^*$, $0 < \alpha < 1$,

$$f(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3;\ y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_2}{|x_1|+1},\ y_3 = x_3(|x_1|+1)^{1-\alpha} \right\},$$

где

$$D^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^3;\ -\infty < y_1 < +\infty,\ 0 \leqslant y_2 < |x_1|^{\beta},\ 0 \leqslant y_3 < +\infty \right\}.$$

Построенный нами пример, показывает, что класс отображений является отображением с s-усредненной характеристикой, следовательно, класс исследуемых отображений не пуст, и не является отображением с ограниченным искажением, а также что построенное отображение f не является Q-гомеоморфизмом, несмотря на то, что в данной работе удалось установить оценку модуля типа (2) с подходящей мажорантой $Q(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iwaniec T., Šverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 118. P. 181–188.

2. *Astala K., Iwaniec T., Koskela P., Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion // Math. Annalen. 2000. Vol. 317. P. 703–726.

3. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities // Dept. Math. Stat. University of Jyväskylä. Pre-print 257. 2002. P. 1–32.

4. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Український математичний вiсник. 2005. Т. 2, № 3. С. 395–417.

5. *Мартио О., Рязанов В., Сребро У., Якубов Э.* К теории Q-гомеоморфизмов // Докл. АН. 2001. Т. 381, № 1. С. 20–22.

6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. d'Anal. Math. 2004. Vol. 93. P. 215–236.

7. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2008. № 4(8). С. 124–129.

8. *Малютина А. Н. Елизарова М. А.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 121 с.

9. *Малютина А. Н.* Поведение s-ограниченных отображений в окрестности изолированной особой точки. Исследования по математическому анализу и алгебре : сб. статей. Томск : Томский государственный университет. 2000. Вып. 2. С. 77–86.

УДК 517.51

СВЯЗЬ РАВНОМЕРНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ И КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ С СОПРЯЖЁННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский (Минск, РБ)
mardvilko@mail.ru, pekarskii@gmail.com

Как известно (см., например, [1]), между рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями функций существует тесная связь.

Эта связь наиболее ярко проявляется при приближении в пространствах Лебега L_p при $0 < p < \infty$ с $1/p \notin \mathbb{N}$. Согласно настоящему сообщению, скорость равномерной рациональной аппрксимации функций достаточно хорошо описывается с помощью скоростей равномерных кусочно-полиномиальных приближений самой функции и её сопряжённой. Верно и обратное.

Обозначим соответсвенно через $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$, множество алгебраических полиномов и рациональных функций степени не выше n. Для n, $s \in \mathbb{N}$ через Π_n^s обозначим множество кусочно-полиномиальных функций, определённых на отрезке $[-1, 1]$, степени не выше $s-1$ с не более чем $n-1$ узлом. Именно $\varphi \in \Pi_n^s$, если φ принадлежит пространству Лебега $L_\infty[-1, 1]$ и существуют точки $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$ такие, что $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} = \mathcal{P}_{s-1}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, s-1$.

Для непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции f ($f \in C[-1, 1]$) введём наилучшие равномерные приближения множествами $\mathcal{R}_n$ и Π_n^s соответсвенно:

$$R_n(f) = \inf\{\|f - r\|_{C[-1,1]} : r \in \mathcal{R}_n\},$$
$$E_n^{(s)}(f) = \inf\{\|f - \varphi\|_{L_\infty[-1,1]} : \varphi \in \Pi_n^s\}.$$

Для функции $f(t)$ интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$ с весом $1/\sqrt{1-t^2}$, сопряжённая функция $\tilde{f}(x)$ определяется следующим образом

$$\tilde{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1],$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Теорема 1. *Пусть $f \in C[-1, 1]$, $\alpha > 1$, $s \in \mathbb{N} \cap (\alpha, \infty)$. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (R_n(f))^{\frac{1}{\alpha}} < \infty;$

(ii) $$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n^{(s)}(f)\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n^{(s)}(\tilde{f})\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty. \end{cases}$$

Отметим, что аналог теоремы 1 в периодическом случае получен вторым автором в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пекарский А. А., Шталь Г.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций в пространствах L_p при $p < 1$ // Мат. сб. 1995. Т. 186(1). С. 119–130.

2. *Пекарский А. А.* Сопряжённые функции и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями // Мат. сб. (в печати).

УДК 517.57 + 517.956.224

ЕМКОСТЬ КОМПАКТА И РАВНОВЕСНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

А. Н. Марковский (Краснодар, РФ)
mark@kubsu.ru

Рассматривается задача расположения и определения интенсивностей точечных зарядов на плоском компакте так, чтобы потенциальная энергия системы зарядов была минимальна, а сумма зарядов равна единице. Задача формулируется как отыскание наименее уклоняющейся от нуля на заданном компакте функции из определённого класса. Исследуются свойства последовательности решений, возникающих для различного количества точечных зарядов, устанавливается связь с емкостью компакта.

1. Формальные произведения. Пусть задано конечное число различных точек z_j комплексной плоскости и множество положительных чисел $a_j \in \mathbb{R}_+$, $(j = 1, 2, ..., n)$, соответствующих этим точкам. Обозначим $\alpha := \sum_{j=1}^{n} a_j$, и рассмотрим формальное произведение

$$\pi_n^{\alpha}(z) := \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{a_j} = \left(\pi_n^1(z)\right)^{\alpha}, \ z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Множество всех таких произведений обозначим $\mathfrak{M}$. В общем случае $\pi_n^{\alpha}(z)$ допускает неалгебраические особенности и, таким образом, $\mathfrak{M}$ содержит все алгебраические комплексные полиномы в качестве подкласса. Количество нулей $\sigma \in \mathfrak{M}$ будем обозначать $\mathrm{zr}(\sigma)$; так, например, $\mathrm{zr}(\pi_n^{\alpha}) = n$.

По аналогии с теорией полиномов, множество

$$L(\pi_n^{\alpha}, B) := \{z : |\pi_n^{\alpha}(z)| \leqslant B\} \tag{2}$$

будем называть лемнискатой, или лемнискатным множеством. Обозначим Θ — множество критических точек π_n^{α}; $B_2 = \max_{z \in \Theta} |\pi_n^{\alpha}(z)|$, тогда при $B > B_2$ лемнискатное множество $L(\pi_n^{\alpha}, B)$ — компакт со связной границей, содержащий все точки z_j. Далее везде будем предполагать, что $B > B_2$.

Для потенциальной энергии

$$U(z) = \ln|\pi_n^\alpha(z)| = \sum_{j=1}^{n} a_j \ln|z - z_j|$$

системы точечных зарядов z_j с интенсивностями a_j справедливо интегральное представление [1]

$$B = U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial L} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta) \ln|z - \zeta| \, dS_\zeta, \ z \in \partial L,$$

опираясь на которое можно доказать следующую лемму [2].

Лемма 1. *Если π_n^α и L определены равенствами (1) и (2), то справедливо*

$$\mathrm{cap}(L(\pi_n^\alpha, B)) = B^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Электростатически последнее равенство означает, что для компакта $L(\pi_n^\alpha, B)$ нули функции π_n^α соответствуют равновесному распределению точечных зарядов z_j с интенсивностями a_j.

2. Равновесная аппроксимация нуля на компакте. Пусть задан компакт K со связной границей Жордана S. Обозначим $\mathfrak{M}^1(K)$ — множество всевозможных произведений (1) с нулями на K таких, что $\alpha = a_1 + ... + a_n = 1$. Введем в $\mathfrak{M}^1(K)$ равномерную норму $\|f(z)\|_K :=$ $= \max_{z \in K} |f(z)|$ и рассмотрим задачу отыскания в $\mathfrak{M}^1(K)$ функции, наименее уклоняющейся от нуля на K; задача аналогична известной задаче Чебышева с тем отличием, что в задаче Чебышева решение ищется в классе алгебраических полиномов [3].

Задача $V_n(K)$. *Найти*

$$\mu_n(K) = \inf\left\{\|\pi(z)\|_K : \pi \in \mathfrak{M}^1(K), zr(\pi) \leqslant n\right\},$$

и функцию $\pi_n^*(z)$, на которой этот infimum достигается.

Геометрически задача $V_n(K)$ означает следующее. Для различных систем из m ($m \leqslant n$) точек $z_1, z_2, ..., z_m$, принадлежащих компакту K и всех вариаций положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_m$, сумма которых равна единице, необходимо выбрать такие $z_j^{(n)}$ и $a_j^{(n)}$, $(j = 1, 2, ..., m)$, для которых произведение (1) при $z_j = z_j^{(n)}$ и $a_j = a_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ имеет минимальную норму.

Решение $V_n(K)$, очевидно, существует в силу непрерывности элементов из $\mathfrak{M}^1(K)$ и замкнутости K. Константа $\mu_1(K)$ соответствует наименьшему радиусу описанной около K окружности, центр которой принадлежит K. Решение $V_n(K)$ $(n = 1, 2, ...)$, определяет *равновесно* распределённую систему узлов $z_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, ..., n)$, которая, аналогично равномерно распределенным системам (типа узлов Чебышева, Фекете, Фейера [4]), позволяет строить аппроксимации посредством интерполяции.

3. Свойства решения задачи $V_n(K)$

Лемма 2. *Пусть π_n^* и μ_n — решение и константа задачи $V_n(K)$, тогда справедливо включение*

$$K \subseteq L(\pi_n^*, \mu_n), \quad n = 1, 2, ...$$

Лемма 3. *Если π_n^* — решение задачи $V_n(K)$ и $T_n(z)$ — полином Чебышева степени n для K, то справедливо неравенство*

$$\max_{z \in L} |\pi_n^*(z)| \leqslant \max_{z \in L} |T_n(z)|^{\frac{1}{n}}.$$

4. Емкость компакта

Лемма 4. *Если μ_n — константа задачи $V_n(K)$, то*

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = \mathrm{cap}(K).$$

Фактически, предельная вариационная задача решает классическую проблему равновесия (проблема Робена [5]), но в более широком смысле, поскольку определяет положения зарядов на K и их интенсивности, в отличие от задачи Робена, в которой требуется определить лишь след плотности зарядов равновесно распределенной системы на границе K.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марковский А. Н.* Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 4. С. 49–54.

2. *Марковский А. Н.* Логарифмическая емкость эквипотенциали энергии системы точечных зарядов // Экол. вест. НЦЧЭС 2013. № 4. С. 37–41.

3. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.

4. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области : пер. с нем. М. : Мир, 1986. 216 с.

5. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М. : Наука, 1966. 516 с.

УДК 517.984

БАЗИНОСТЬ ПО РИССУ ОДНОЙ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ, СВЯЗАННОЙ С СИСТЕМОЙ ФАБЕРА–ШАУДЕРА[1]

Р. В. Мартенс (Саратов, РФ)
martensrv@rambler.ru

Определение 1. *Пусть функция* $\varphi(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет носитель на единичном отрезке* $[0,1]$. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *по стандартному представлению* $n = 2^k + j$ *положим*

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j), \qquad k \geq 0, \quad 0 \leq j \leq 2^k - 1.$$

Кроме того, пусть $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$. *Система функций* $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ *называется аффинной системой (или системой сжатий и сдвигов), порожденной функцией* φ.

Как известно, система функций Фабера-Шаудера $(1, t, G_n(t))_{n\geq 1}$ является системой сжатий и сдвигов

$$G_n(t) = G_{k,j}(t) = G(2^k t - j),$$

порожденной функцией

$$G(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1/2], \\ 2(1-t), & t \in [1/2,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \begin{cases} 8t, & t \in [0,1/4], \\ 4-8t, & t \in [1/4,3/4], \\ 8t-8, & t \in [3/4,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Сразу заметим, что $F(t) = 2(G(2t) - G(2t-1))$ и, следовательно, функции системы сжатий и сдвигов $F_{k,j} = 2^{k/2+1}(G_{k+1,2j} - G_{k+1,2j+1})$. Таким образом, функции системы $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, являются попарными разностями функций системы Фабера-Шаудера.

Теорема 1. *Система* $\{F_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис Рисса.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1).

УДК 517

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ СО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

Меач Мон (Воронеж, РФ)

В работе доказывается единственность решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - u\dfrac{dQ}{d\sigma} + f(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \\ u'_t(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых вынужденных колебаний стилтьесовской струны (расположенной вдоль отрезка $[0;\ell]$, с закрепленными концами; $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — начальное отклонение от положения равновесия и начальная скорость соответственно), помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, с произвольным распределением масс, включая случай сосредоточенных масс. Вторая производная по пространственной переменной в правой части уравнения в (1) понимается как производная по мере σ, которая включает в себя все особенности параметров модели ($M(x)$ — распределение масс, $p(x)$ — силы натяжения струны в точке x; dQ — локальный коэффициент упругости внешней среды; точки в которых приложены сосредоточенные силы внешней силы $f(x,t)$; в таких точках ξ_i уравнение в (1) понимается следующим образом

$$\Delta M(\xi_i)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_i,t) = \Delta\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\xi_i,t) - u(\xi_i,t)\Delta Q(\xi_i,t) + f(\xi_i,t),$$

где $\Delta\varphi_i(\xi_i) = \varphi(\xi+0)-\varphi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке ξ_i.

Решение $u(x,t)$ мы будем искать в классе E функций непрерывных по совокупности переменных, сама функция и ее производная u'_x при всех фиксированных x имеет непрерывные производные до второго порядка по переменной t; при каждом t $u(x,t)$ абсолютно непрерывна по переменной x на отрезке $[0;\ell]$; первая производная $u'_x(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна по переменной x для всякого фиксированного t.

Уравнение в (1) задано при всех (x,t), принадлежащих декартовому произведению множеств $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ и $[0;T]$. Первое множество строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру σ. На $[0;\ell]$ введем метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Достаточно очевидно, что $([0;\ell], \varrho)$ неполное метрическое пространство. Стандартное пополнение (с точностью до изоморфизма) приводит к множеству $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменяется на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$, причем $\xi - 0$ и $\xi + 0$ ранее были предельными.

Теорема 1. *Математическая модель* (1) *не может иметь более одного решения, определенного на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma \times [0;T]$*, в классе* E.

УДК 517.984

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ НА КОНТУРЕ С ПРЕДЕЛЬНЫМ КОНТИНУУМОМ

Б. А. Кац (Казань, РФ)
katsboris877@gmail.com
С. Р. Миронова (Казань, РФ)
srmironova@yandex.ru
А. Ю. Погодина (Саратов, РФ)
apogodina@yandex.ru

Введем класс NJ контуров Γ_0, обладающих свойствами:

1) контур $\Gamma_0 \in NJ$ есть множество точек правой полуплоскости такое что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ пересечение $\Gamma_0 \cap \{z = x + iy : x > \varepsilon\}$ непусто и является простой жордановой кусочно-гладкой дугой с концом в точке b (начало этой дуги $a(\varepsilon)$ лежит на прямой $\operatorname{Re} z = \varepsilon$);

2) множество $\overline{\Gamma}_0 \setminus \Gamma_0$ представляет собою не сводящийся к точке отрезок I^* мнимой оси;

3) существует прямолинейный отрезок I (остов Γ_0) с началом в одной из точек отрезка I^* и концом в точке b такой что $\Gamma_0 \bigcup I$ можно представить в виде объединения бесконечного семейства простых замкнутых кусочно-гладких кривых, являющихся границами не налегающих друг на друга конечных областей (эти замкнутые кривые могут быть ориентированы как в положительном, так и в отрицательном направлении).

Будем искать все аналитические в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Gamma}_0$ функции $\Phi(z)$ такие что

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma_0 \setminus b, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ суть непрерывные функции, которые являются предельными значениями $\Phi(z)$ при приближении z к точке $t \in \Gamma_0 \setminus b$ слева и справа от Γ_0 соответственно, f есть заданная на $\Gamma_0 \backslash b$ функция, $\Phi(\infty) = 0$, а вблизи конца b искомая функция $\Phi(z)$ допускает оценку

$$|\Phi(z)| \leq C|z - b|^{-\beta}, \quad \beta = \beta(\Phi) \in [0, 1). \tag{2}$$

Предположим, что скачок $f(t)$ задан и удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем $\nu \in (0, 1]$ на замыкании $\overline{\Gamma}_0$.

Введем в рассмотрение следующие характеристики контура (см. [1], [2]). С каждой конечной областью Δ, ограниченной кривой γ нулевой площади мы свяжем величины

$$S_\alpha(\Delta) := \iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{(\mathrm{dist}(z, \gamma))^\alpha}, \quad z = x + iy, \quad \alpha \in [0, 1),$$

названные в [1] α-размерами этой области. По определению класса NJ контур Γ_0 имеет остов I такой что $\Gamma_0 \bigcup I$ можно представить в виде объединения бесконечного семейства простых замкнутых кусочно-гладких кривых, являющихся границами не налегающих друг на друга конечных областей Δ_j, $j = 1, 2, \ldots$, тогда величины

$$S_\alpha(\Gamma_0, I) := \sum_{j=1}^{\infty} S_\alpha(\Delta_j),$$

зависят, вообще говоря, от выбора остова. Будем относить контур $\Gamma_0 \in$ $\in NJ$ к подклассу NJ_α, если его остов I можно было выбрать так, чтобы $S_\alpha(\Gamma_0, I) < \infty$.

Теорема. *Пусть функция f принадлежит классу $H_\nu(\overline{\Gamma}_0)$. Если $\Gamma_0 \in$ $\in NJ_{1-\nu}$, то задача о скачке* (1), (2) *в классе функций Φ, исчезающих на бесконечности, имеет решение. В частности, при $f \in H_1(\overline{\Gamma}_0)$ эта задача разрешима для любого контура $\Gamma_0 \in NJ$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кац Б. А., Миронова С. Р., Погодина А. Ю.* Об одном условии разрешимости задачи о скачке и ее приложениях // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2011. № 4. С. 110–118.

2. *Kats B. A., Mironova S. R., Pogodina A. Yu.* The Riemann-Hilbert boundary value problem for matrices on non-smooth arc // Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Известия НАН Армении. Математика). Vol. 47. № 4. 2012. P. 15–22.

УДК 517.984

АНАЛИТИЧНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров (Казань, РФ)
Anatoly.Sidorov@ksu.ru

Рассмотрим 2π-периодическую спектральную задачу для уравнения

$$\sum_{n=0}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} C_{n,m}(\mu)y^{(n)}(t+T_{n,m}(\mu))+$$

$$+\sum_{n=0}^{N_3}\sum_{m=1}^{N_4} D_{n,m}(t,\mu)y^{(n)}(S_{n,m}(t,\mu)) = \lambda y(t), \qquad t\in Q\subset R, \tag{1}$$

где множество Q содержит интервал длины 2π, $N_3 \le N_1-1$, $C_{n,m}(\mu)$ не зависят от t, $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$, $T_{n,m}(\mu)$ — вещественные числа, $S_{n,m}(t,\mu)$ — вещественнозначные функции, $D_{n,m}(t,\mu)$ — суммируемые в каждом компакте, причём функции $D_{N_1-1,m}(t,\mu)$ ограничены в существенном и все упомянутые функции измеримы по Лебегу. Пусть

$$Q_T = \{t+T_{n,m}(\mu)|t\in Q\}\cup\{S_{n,m}(t,\mu)|t\in Q\} \quad \text{при} \quad n\neq 0,$$

$$Q_{T_0} = \{t+T_{0,m}(\mu)|t\in Q\}\cup\{S_{0,m}(t,\mu)|t\in Q\}\cup Q.$$

Определение 1. Функция $y(t)$, $t\in Q_T\cup Q_{T_0}$, для которой производные $y^{(n)}(t)$, $n=0,...,N_1-1$, абсолютно непрерывны в каждом компакте из Q_T, называется *решением уравнения* (1), если при почти всех $t\in Q$ выполняется (1).

Определение 2. Решение $y(t)$ уравнения (1) называется 2π-*периодическим*, если выполняются равенства

$$y^{(n)}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j\left(\exp\left(ijt\right)\right)^{(n)}, \quad t\in R, \quad n=0,...,N_1,$$

в которых y_j не зависят от t, и ряды сходятся в пространстве $L^2(2\pi)$ по норме.

В работе даются условия, при которых собственные значения 2π-периодической задачи (1) аналитически зависят от μ и соответствующие собственные функции можно выбрать аналитически зависящими от этого параметра. Излагаемый метод основан на матричном подходе к аналитической теории возмущений линейных операторов [1]. Отметим, что результаты М. В. Келдыша [2] к изучаемой задаче, вообще говоря, не применимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мокейчев В. С., Сидоров А. М.* Матричные собственные значения в аналитической теории возмущений линейных операторов // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 154, кн. 3. С. 158–172.

2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, вып.4. С. 15–41.

УДК 517.518.85

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА–ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

К. Б. Мосина (Саратов, РФ)

Ksenia-sgu@mail.ru

Получен критерий равномерной внутри интервала сходимости процесса Лагранжа, построенного по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, непрерывной функции, если о функции известно лишь ее значение в узлах интерполяции. А также найдена оценка уклонения от функции интерполяционного полинома.

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} U'' + \big[\lambda - q\big]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где h и H — произвольные действительные числа (причем допускается возможность h, $H = \infty$), а потенциал q ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$, исчезает в нуле и не обязательно непрерывен.

Натансон предложил рассматривать интерполяционные процессы Лагранжа вида

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n(x)}{u_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=1}^{n} l_{k,n}^{SL}(x) f(x_{k,n}),$$

где $u_n(x)$ — собственная функция задачи Штурма–Лиувилля (1).

Пусть $0 < a < b < \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Положим

$$R_n(f,[a,b],\varepsilon) = \max_{p_1 \le p \le p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m+1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m-1,n})}{p-2m} \right|,$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю, а индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются из неравенств

$$x_{p_1,n} \le a+\varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad x_{k_1-1,n} \le a < x_{k_1,n}, \quad m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1,$$
$$x_{p_2,n} \le b-\varepsilon < x_{p_2+1,n}, \quad x_{k_2,n} \le b < x_{k_2+1,n}, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right],$$

после добавления к множеству нулей функции $u_n(x) : 0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n} < \pi$ точек $x_{0,n} = 0$ и $x_{n+1,n} = \pi$.

Теорема. *Пусть функция $f \in C[0,\pi]$, $0 < a < b < \pi$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Тогда условие*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f,[a,b],\varepsilon) = 0$$

необходимо и достаточно для справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} |L_n^{SL}(f,x) - f(x)| = 0.$$

Причем для всех $x \in (a,b)$

$$|f(x) - L_n^{SL}(f,x)| = \frac{|u_n(x)|}{2\pi} R_n(f,[a,b],\varepsilon) + O_x\left(\omega\left(f, \frac{\ln n}{n}\right) + \|f\| \frac{\ln n}{n}\right).$$

Оценка остаточного члена равномерна на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и зависит лишь от h, H и q в краевых условиях задачи Штурама–Лиувилля (1).

УДК 517.5

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВАЛИРОНА–ГОЛЬДБЕРГА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА УСРЕДНЁННУЮ СЧИТАЮЩУЮ ФУНКЦИЮ МНОЖЕСТВА КОРНЕЙ

Ф. С. Мышаков (Москва, РФ)
mysfed@rambler.ru

Ж. Валирон [1] рассмотрел следующую задачу. Имеется целая функция f конечного нецелого порядка. Задана «достаточно регулярная» мажоранта считающей функции $n_f(R)$ множества корней f. Требуется найти возможно лучшую асимптотическую оценку сверху величины $\ln M(f,R)$, где $M(f,R)=\max\{|f(z)| : |z|\le R\}$. Эта задача в «первом приближении» была решена самим Валироном [1], а позже А. А. Гольдберг [2] дал строгое доказательство этого результата и установил его неулучшаемость. Автором решена задача, в которой задана мажоранта усреднённой считающей функции множества корней $f(z)$, $N_f(R) = \int\limits_0^R (n_f^0(x)/x)dx$ ($n_f^0(x)$ — количество корней функции f в круге $|z|\le x$, отличных от точки $z=0$). Сформулируем теорему Валирона–Гольдберга.

Пусть $\rho(r)$ — произвольный уточнённый порядок, $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho\in(0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, f — произвольная целая функция порядка ρ, множество корней которой имеет конечную верхнюю плотность относительно этого уточнённого порядка. Тогда f имеет конечный тип при порядке $\rho(r)$ и справедливо неравенство ($S(\rho)$ — функция Валирона [1])

$$\sigma_{\rho(r)}(f)\le S(\rho)D_{\rho(r)}(f), \quad \text{где } D_{\rho(r)}(f)=\limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)}n_f(r), \tag{1}$$

и существует функция f, имеющая положительный тип при порядке $\rho(r)$, для которой неравенство (1) обращается в равенство.

Этот результат перенесён автором на случай, когда задана усреднённая верхняя плотность множества корней.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\sigma_{\rho(r)}(f)\le \rho S(\rho)D^*_{\rho(r)}(f), \quad \textit{где } D^*_{\rho(r)}(f)=\limsup_{r\to+\infty} r^{-\rho(r)}N_f(r) \tag{2}$$

и существует функция f, для которой неравенство (2) *обращается в равенство.*

Неравенство (2) было известно ранее лишь при $0<\rho<1$. При этих значениях ρ функция $S(\rho)$ допускает простое выражение: $S(\rho) = \pi\,\mathrm{cosec}(\pi\rho)$, но при $\rho>1$ функция $S(\rho)$ не элементарна. В общем случае теорема 1, по-видимому, является новой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier des fonctions a correspondance reguliere // Annales de la fac. sci. de l'univ. Toulouse. 1913. Vol. 5. Ser. 3. P. 117–257.

2. *Гольдберг А. А.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I. // Мат. сб. 1962. Т. 58. № 3. С. 289–334.

УДК 517.5

АСИМПТОТИКА МОДУЛЕЙ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ[1]

С. Р. Насыров (Казань, РФ)
snasyrov@.kpfu.ru

Рассмотрим односвязную плоскую область D с невырожденной границей. Одной из ее важнейших характеристик является конформный модуль $m(D)$. По определению, если D конформно эквивалентна кольцу $\{r_1 < |z| < r_2\}$, то

$$m(D) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Модуль можно вычислить и с помощью аппарата экстремальных длин. Так, $m(D) = \lambda(\Gamma)$, где $\lambda(\Gamma)$ — это экстремальная длина семейства кривых Γ, соединяющих в D ее граничные компоненты. Кроме того, $m(D) = 1/\lambda(\Gamma')$, где Γ' — семейство кривых, разделяющих в D граничные компоненты. Наконец, $m(D) = 1/\mathrm{Cap}(C)$, где $\mathrm{Cap}(C)$ — это конформная емкость конденсатора, полем которого является область D, а пластинами — граничные компоненты D.

Модули двусвязных областей как в случае полигональных границ, так и для произвольных областей, в последние десятилетия являются объектом интенсивного изучения (см., напр., [1], [2]).

Модуль инвариантен относительно конформных отображений, а при квазиконформных отображениях он квазиинвариантен: если f — H-квазиконфомное отображение области D на $\widetilde{D}$, то

$$\frac{1}{H}\, m(D) \le m(\widetilde{D}) \le H\, m(D).$$

Одним из простейших H-квазиконформных отображений является растяжение вдоль оси абсцисс $f_H : x + iy \mapsto Hx + iy$, $H > 1$. Проф. М. Вуоринен поставил задачу: исследовать, как конформный модуль области D искажается под действием отображения f_H, в частности, какова асимптотика модуля при $H \to \infty$?

Сначала рассмотрим произвольную двусвязную область D, удовлетворяющую условиям:

1) D имеет конечную площадь S;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00762 и 12-01-97015_р_положье.).

2) дополнение D состоит из двух компонент связности C_1 и C_2, одна из которых ограничена и содержит две точки $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ такие, что $|x_1 - x_2| = \delta$;

3) $\operatorname{dist}(C_1, C_2) = d$.

Нетрудно установить следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $D_H = f_H(D)$. *Тогда*

$$\frac{d^2}{SH} \leq m(D_H) \leq \frac{S}{4\delta^2 H}.$$

Как следствие, получаем, что в предположениях теоремы 1

$$m(D_H) \simeq H^{-1}, \quad H \to \infty.$$

Нашей задачей будет нахождение достаточно широкого класса областей D, для которых $m(D_H) \sim \mathrm{const} \cdot H^{-1}$, $H \to \infty$, и определение мультипликативной константы в этом условии через геометрические характеристики области D или ее границы.

Для решения этой задачи наряду с модулями двусвязных областей нам понадобится рассматривать конформные модули четырехсторонников, т. е. жордановых областей с четырьмя различными отмеченными точками (вершинами) на границе. Эти точки делят границу области на четыре жордановых дуги. Одна их пар противоположных (непересекающихся) дуг называется горизонтальными сторонами четырехсторонника, а другая — вертикальными. Если конформно отобразить четырехсторонник G на прямоугольник $\Pi := [0, a] \times [0, b]$ так, чтобы горизонтальные стороны перешли G в горизонтальные стороны прямоугольника, а вертикальные — в вертикальные, то по определению конформный модуль G равен

$$m(G) := \frac{b}{a}.$$

Конформный модуль G равен экстремальной длине семейства кривых, соединяющих в G вертикальные стороны и обратен величине экстремальной длины семейства кривых, соединяющих в G горизонтальные стороны. Он инвариантен относительно конформных отбражений и квазиинвариантен относительно квазиконформных, в частности, при отображении растяжения f_H.

Нетрудно видеть, что искажение модуля G при отображении f_H зависит от того, как линии, переходящие в горизонтальные отрезки, соединяющие вертикальные стороны прямоугольника Π, расположены относительно оси абсцисс, точнее, какие углы образует касательная к этим кривым с осью абсцисс. Чем горизонтальнее эти кривые, тем сильнее уменьшается модуль четырехсторонника.

В случае симметричной относительно оси абсцисс двусвязной области D, ограниченной жордановыми кривыми, ее модуль в два раза меньше модуля четырехсторонника D^+, который является верхней половиной D (вершинами D^+ являются точки пересечения границы D с осью абсцисс, а горизонтальными сторонами — отрезки этой оси, входящие в состав границы ∂D^+). Если к тому же D симметрична и относительно оси ординат, то модуль D в четыре раза меньше модуля части области D, расположенной в первой четверти; вертикальными сторонами соответствующего четырехсторонника будут отрезки положительных частей осей координат, содержащеся в D. Это можно доказать с использованием принципа симметрии.

В дальнейшем основным объектом нашего исследования будет двусвязная область D, симметричная относительно оси абсцисс, с границей, состоящей из двух кривых

$$\Gamma_1 = \{x + iy \,:\, |y| = f(x),\ a \le x \le b\},$$
$$\Gamma_2 = \{x + iy \,:\, |y| = g(x),\ c \le x \le d\},$$

$c < a < b < d$. Здесь

(i) функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$,

(ii) функция g непрерывна на отрезке $[c, d]$,

(iii) $f(x) < g(x)$, $x \in [a, b]$,

(iv) $f(x) > 0$, $x \in (a, b)$, $g(x) > 0$, $x \in (c, d)$,

(v) $f(a) = f(b) = g(c) = g(d) = 0$.

Обозначим $D_H = f_H(D)$.

Теорема 2. *При* $H \to \infty$

$$m(D_H) \sim \frac{1}{2cH}, \quad \textit{где} \quad c = \int\limits_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}\,.$$

Доказательство теоремы 2 основано на изучении асимптотики модуля четырехсторонника D^+. Сначала исследуется случай, когда D^+ ограничена ломаными. В этом случае часть $\widetilde{D}^+$ области D^+, лежащую в полосе $\{a \le x \le b\}$, можно разбить на на конечное число трапеций T^j, $1 \le j \le n$. Асимптотика модуля трапеции (как четырехсторонника с отмеченными точками — вершинами трапеции) при растяжении f_H описывает нетрудно доказываемая

Лемма 1. *Пусть трапеция T имеет вид*

$$T = \{(x, y) : \alpha_1 x + \beta \le y \le \alpha_2 x + \beta,\, x_1 \le x \le x_2\},$$

где $\alpha_1 < \alpha_2$, $0 < x_1 < x_2$. *Тогда*

$$m(f_H(T)) \sim \frac{1}{H}\ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\ln x_2 - \ln x_1}, \quad H \to \infty.$$

Следующая лемма показывает, что часть D^+, лежащая вне полосы $\{a \le x \le b\}$ не влияет на асимптотику модуля.

Лемма 2. *Пусть* $D_H^+ = f_H(D^+)$, $\widetilde{D}_H^+ = f_H(\widetilde{D}^+)$. *Тогда*

$$m(D_H^+) \sim m(\widetilde{D}_H^+), \quad H \to \infty.$$

В лемме 3 оказывается, что при больших H асиптотика модуля растянутого многоугольника $\widetilde{D}_H^+$ может быть получена из асимптотики трапеций T^j, растянутых отображением f_H.

Лемма 3. *Имеет место эквивалентность*

$$m^{-1}(\widetilde{D}_H^+) \sim \sum_{j=1}^{n} m^{-1}(T_H^j), \quad H \to \infty,$$

где $T_H^j = f_H(T^j)$.

Справедливость лемм 2 и 3 устанавливается с помощью теорем о связи сходимости последовательностей областей со сходимостью последовательностей конформных отображений, установленных Каратеодори, Радо, Г. Д. Суворовым, и их обобщений. Возможность применения этих чисто качественных результатов для изучения асимптотики модулей была впервые использована в [2].

Из лемм 1–3 следует справедливость теоремы 2 для полигональных областей. Общий случай устанавливается аппроксимацией.

С помощью теоремы 2 можно получить, в частности, асимптотику модуля растянутого кругового концентрического кольца при растяжении. Отметим, что при растяжении кольца граничные окружности переходят в эллипсы, которые не будут софокусными, поэтому не удается в явном виде установить конформное отображение растянутого кольца на концентрическое кольцо.

Теорема 3. *Если* $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, *то*

$$m(D_H) \sim \frac{1}{kH}, \quad H \to \infty,$$

где
$$k = \frac{1}{R^2 - r^2}\left(\pi r^2 + 2R^2 \arcsin\frac{r}{R} + 2r\sqrt{R^2 - r^2}\right).$$

Теорема 2 допускает обобщения на более широкие классы областей. Ее утверждение справедливо, когда, например, внешняя компонента границы неограничена (функция g определена на всей оси) или в случае, когда граничные кривые содержат вертикальные участки. В частных случаях, когда граничные кривые области D являются прямоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям или ромбами с вершинами на этих осях, асимптотические формулы для модуля $m(D_H)$ были получены в работах [2], [3].

Пример. В качестве тестового примера нами была рассмотрена область D, которая получается из полосы $\{|y| < 1\}$ выбрасыванием квадрата $\{|x| + |y| \le 1/2\}$. Теорема 2 дает

$$(m(D_H))^{-1} \sim (8\ln 2)H, \quad H \to \infty.$$

Использование интегралов Кристоффеля-Шварца позволяет получить приближенное значение модуля. Численные эксперимент показывает, что при H, близких к 20, значение $(m(D_H))^{-1}$ отличается от $(8\ln 2)H$ менее, чем на 1%. При этом, при нахождение модуля с помощью интегралов Кристоффеля-Шварца при больших H используются эллиптические интегралы первого рода $K(k)$ с параметром k, чрезвычайно близким к единице. Так, при H, больших 20, величина $1 - k$ становится меньше 10^{-17}, и компьютер отказывается вычислять значение модуля.

В связи с этим интересной задачей является, на наш взгляд, оценка относительной погрешности приближенной формулы

$$m(D_H) \approx \frac{1}{2cH}$$

при больших H.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kühnau R.* The conformal module of quadrilaterals and of rings // Handbook of Complex Analysis : Geometric Function Theory, Vol. 2. North Holland, Amsterdam : Elsevier, 2005. P. 99–129.

2. *Nasyrov S. R.* Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames. arXiv : 1305.6605 [math.CV]. 13 pp.

3. *Даутова Д. Н.* Асимптотика модулей ромбовидных окон // Материалы Двенадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения–2013». Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 47. Казань : Изд-во Казан. мат. общества, 2013. С. 39–40.

УДК 517.5

ОБ УСЛОВИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ТЕРМИНАХ РЯДА ФУРЬЕ–ЛЕЖАНДРА

В. В. Новиков (Саратов, РФ)
vvnovikov@yandex.ru

Пусть $f \in C_{2\pi}$, обозначим через $\sigma(f)$ тригонометрический ряд Фурье функции f, а через $L_n(T, f, x)$ — тригонометрический полином Лагранжа, интерполирующий f в узлах n-ой строки матрицы равноотстоящих узлов $T := \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1),\ k = \overline{-n, n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Хорошо известно (см., например, [1]), что из абсолютной сходимости $\sigma(f)$ следует равномерная сходимость к f полиномов $\{L_n(T, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ (отметим, что из равномерной сходимости $\sigma(f)$ это уже не следует, [1], [2]). Возникает вопрос, верно ли аналогичное утверждение для рядов Фурье по другим ортогональным системам и соответствующих им матриц узлов? Ответ является утвердительным для случая ортогональных многочленов Чебышева первого и второго рода и соответствующих интерполяционных процессов [3]. В настоящем сообщении рассматривается случай ряда Фурье по ортогональным многочленам Лежандра и интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в нулях этих многочленов.

Пусть $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. В частности, при $\alpha = \beta = 0$ функция $P_n^{(0,0)}(x)$ есть ортогональный многочлен Лежандра. Пусть, далее, $-1 < x_{n,n} < x_{n-1,n} < \ldots < x_{1,n} < 1$ — нули многочлена $P_n^{(0,0)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания, $L_n(\mathfrak{M}^{(0,0)}, f, x)$ — многочлен Лагранжа, интерполирующий функцию f в узлах n-й строки матрицы $\mathfrak{M}^{(0,0)} = \{x_{k,n}\}_{k=1,n=1}^{n,\infty}$, и $\sigma^{(0,0)}(f)$ — ряд Фурье–Лежандра функции f.

Теорема. *Если $f \in C[-1, 1]$ и ряд $\sigma^{(0,0)}(f)$ сходится абсолютно на отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$, то последовательность полиномов $\{L_n(\mathfrak{M}^{(0,0)}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на $[a, b]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т.2. М. : Мир, 1965. 537 с.

2. *Erdős P., Grünwald G.* Über einen Faber'schen Satz // Annals of Math. 1938. Vol. 39. P. 257–261.

3. *Новиков В. В.* Интерполирование и абсолютная сходимость рядов Фурье–Чебышева // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зимней школы. Саратов, 2010. С. 127–128.

УДК 517.988

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА ПО МОДУЛЯМ ФРЕЙМОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

С. Я. Новиков (Самара)
nvks@samsu.ru

В 2006 году Balan, Casazza и Edidin [1] обнаружили принципиальную возможность восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя) по модулям (абсолютным значениям) фреймовых коэффициентов.

Определение. *Пусть дано гильбертово пространство* $\mathbb{H}$ *со скалярным произведением* $\langle , \rangle$ *и счетное или конечное* $\mathbb{I}$. *Множество векторов* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ *называется фреймом, если существуют положительные константы* A, B *такие, что для всех* $x \in \mathbb{H}$,

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{I}} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Замечание. Для конечномерного $\mathbb{H}$ фреймом является любое полное множество векторов.

Определение. Фрейм Φ называется *жестким* или A-*жестким*, если $A = B$.

Задачу восстановления сигнала x по числам $|\langle x, \varphi_i\rangle|$ в англоязычных статьях называют задачей «Phase Retrieval». Умножение сигнала на унимодулярную константу не изменяет абсолютные значения, поэтому поиск сигнала в такой постановке задачи ведется с точностью до унимодулярного множителя.

Определение Множество векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$) обеспечивает восстановление сигнала по модулям (*phase retrieval*), если для любых $x, y \in \mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$) таких, что $|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|$ для всех $i = 1, \ldots, N$, имеем $x = cy$, где $c = \pm 1$ в $\mathbb{R}^M$ (и $c \in \mathbb{T}$ в $\mathbb{C}^N$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность комплексной плоскости).

В [1] было доказано, что восстановление сигнала по модулям возможно с помощью т.н. порождающих (generic) фреймов, явная конструкция которых неизвестна. В настоящее время усилия направлены на построение вычислительных алгоритмов и явные конструкции фреймов, удовлетворяющих приведенному определению.

Теорема 1 [1] *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ *фрейм для* $\mathbb{H}^M$.

В $\mathbb{H}^M = \mathbb{R}^M$ *порождающий фрейм, имеющий не менее* $2M - 1$ *векторов, обеспечивает восстановление сигнала по модулям.*

В $\mathbb{H}^M = \mathbb{C}^M$ *порождающий фрейм, имеющий не менее* $4M - 2$ *векторов, обеспечивает восстановление сигнала по модулям.*

Теорема 2 [1]. Фрейм $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ с $N \leq 2M-2$ не обеспечивает восстановление сигнала по модулям.

Определение. *Искрой* (*spark*) фрейма $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ называется количество элементов наименьшего линейно зависимого подмножества Φ. В частности, если $spark(\Phi) = M + 1$, то каждое подмножество из M элементов линейно независимо. В этом случае про фрейм Φ говорят, что он имеет *полную искру* (*full spark*).

Определение. Фрейм $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{H}^M$ *имеет свойство дополнения*, если для всех подмножеств $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$, либо $\operatorname{span}(\{\varphi_i\}_{i \in S}) = \mathbb{H}^M$, либо $\operatorname{span}(\{\varphi_i\}_{i \in S^c}) = \mathbb{H}^M$.

Замечание. Если фрейм $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2M-1}$ имеет полную искру в $\mathbb{H}^M$, то он имеет свойство дополнения.

Теорема 3 [1]. *Фрейм* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ *в* $\mathbb{R}^M$ *обеспечивает восстановление сигнала по модулям тогда и только тогда, когда он имеет свойство дополнения. В частности, фрейм с полной искрой и с* $2N-1$ *векторами обеспечивает восстановление сигнала по модулям.*

Теорема 4. *Если* M *и* N *взаимно простые числа и* $N > M$, *то каждый жесткий фрейм* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$ *с векторами единичной нормы обеспечивает восстановление почти всех сигналов по модулям.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balan R., Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction // Appl.Comput. Harmon. Anal. 2006. Vol. 20. P. 345–356.

2. *Bodmann B. G., Hammen N.* Stable phase retrieval with low-redundancy frames. arXiv : 1302.5487.

3. *Heinosaary T., Mazzarella I., Wolf M. M.* Quantum tomography. arXiv : 1206.1405.

4. *Bandeira A. S., Cahill J., Mixon D. G., Nelson A. A.* Saving phase; Injectivity and stability. arXiv : 1302.4618v1.

5. *Fickus M., Mixon D. G., Nelson A. A., Wang Ya.* Phase retrieval from very few measurements. arXiv : 1307.7176v1.

УДК 519.853

О РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА[1]

М. А. Осипцев, С. И. Дудов (Саратов, РФ)
osipcevm@gmail.com, dudovsi@info.sgu.ru

Пусть D — заданный выпуклый компакт из $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Исследуемая задача имеет вид

$$\phi(x,r) \equiv h(D,\, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1}$$

Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b), \quad \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Как показано в [1], задача (1) своими решениями при некоторых значениях r выражает решения задач о вписанном и описанном шарах, а также задач о равномерной оценке выпуклого компакта D шаром ([2], [3]) и минимальной(по толщине) шаровой оболочке границы этого компакта ([4]).

Рассмотрим вопрос о необходимых и достаточных условиях решения задачи (1) и условиях единственности её решения.

Обозначим через $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ и введём вспомогательные функции

$$R(x) = \max_{y\in D} n(x-y), \quad P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$

где $\rho_M(x) = \min_{y\in M} n(x-y)$. Функции $R(x)$ и $P(x)$ являются выпуклыми на $\mathbb{R}^p$, известны формулы их субдифференциалов ([3], [5]).

Примем также обозначения: $co\, A$ — выпуклая оболочка множества A,

$$R^* = \min_{x\in\mathbb{R}^p} R(x), \quad C_R = \{y \in \mathbb{R}^p :\, R(y) = R^*\}$$

$$\rho^* = \max_{x\in D} \rho_\Omega(x), \quad C_\rho = \{y \in D :\, \rho_\Omega(y) = \rho^*\},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00238, 13-01-00175).

$$R^{\pm} = \max_{x \in C_\rho}(\min) R(x), \quad P^{\pm} = \max_{x \in C_R}(\min) P(x),$$

$$r_R^{\pm} = (R^* - P^{\mp})/2, \quad r_P^{\pm} = (R^{\pm} + \rho^*)/2,$$

$\partial R(x)$, $\partial P(x)$ — субдифференциалы функций $R(x)$ и $P(x)$ в точке x, $0_p = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

Поскольку $R(x) \geqslant P(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^p$, то из принятых обозначений вытекает

$$0 \leqslant r_R^- \leqslant r_R^+ \leqslant r_P^- \leqslant r_P^+ < \infty \tag{2}$$

Отметим также ([1]) важную связь целевой функции $\phi(x, r)$ задачи (1) с функциями $R(x)$ и $P(x)$:

$$\phi(x, r) = \max\{R(x) - r,\ P(x) + r\}.$$

Теперь приведём критерии решения задачи (1) в соответствии с диапазоном значений r, указанными в (2).

Теорема 1. *Для того, что бы x^* была точкой минимума функции $\phi(x, r)$ на $\mathbb{R}^p$ при конкретном значении $r \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

1. $0_p \in \partial R(x^*)$, *если* $r \in [0, r_R^-]$,
2. $0_p \in \partial R(x^*)$ *и* $P(x^*) \leqslant R^* - 2r$, *если* $r \in [r_R^-, r_R^+]$,
3. $0_p \in co\{\partial R(x^*), \partial P(x^*)\}$ *и* $R(x^*) - P(x^*) = 2r$, *если* $r \in [r_R^+, r_P^-]$,
4. $0_p \in \partial P(x^*)$ *и* $R(x^*) \leqslant 2r - \rho^*$, *если* $r \in [r_P^-, r_P^+]$,
5. $0_p \in \partial P(x^*)$, *если* $r \geqslant r_P^+$.

Теорема 2. *1. Если норма $n(x)$ является строго квазивыпуклой на $\mathbb{R}^p$ функцией, то решение задачи* (1) *единственно для любого значения $r \in [0, r_P^-]$.*

2. Если D — строго выпуклый компакт, то решение задачи (1) *единственно для любого $r \geqslant r_R^+$ в случае $C_R \bigcap D \neq \emptyset$, а в случае $C_R \bigcap D = \emptyset$ для любого $r \geqslant (\min_{x \in D} R(x))/2$.*

Следствие. *Если D — строго выпуклый компакт, а норма $n(x)$ является строго квазивыпуклой, то решение задачи* (1) *единственно при любом $r \geqslant 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дудов С. И.* Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 43–58.

2. *Никольский М. С., Силин Д. Б.* Наилучшее приближение выпуклого компакта элементами аддинала // Тр. МИРАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.

3. *Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38.

4.*Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М. : Фазис, 2002.

5. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1982.

УДК 517.984

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ТИПА ЛИПШИЦА

Б. И. Пелешенко, Т. Н. Семиренко (Днепропетровск, Украина)
dsaupelesh@mail.ru

В докладе получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на коэффициенты Фурье 2π-периодической функции, для ее принадлежности классу Липшица $H_{\alpha}^{\omega_\alpha}$, $\alpha > 0$, определяемому с помощью α-й разности функции $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kt)$ и модуля непрерывности α-го порядка $\omega_\alpha(t)$.

В частности, когда $\alpha = n$, где n — целое положительное число, то $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kt)$.

Класс Липшица $H_{\alpha}^{\omega_\alpha}$ состоит из непрерывных 2π-периодических функций f, которые удовлетворяют для всякого x и t неравенству $|\Delta_t^\alpha f(x)| \le K_\alpha \omega_\alpha(t)$, где K_α зависит только от функции f и не зависит от x и t. Класс $h_{\alpha}^{\omega_\alpha}$ состоит из функций $f \in H_{\alpha}^{\omega_\alpha}$, для каждой из которых выполняется условие $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|\Delta_t^\alpha f(x)|}{\omega_\alpha(t)} = 0$ равномерно для всех x.

Пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ — такая последовательность комплексных чисел, что $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ и функция $f(x)$ — сумма Фурье ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$, т. е. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f(x)$.

Сформулируем основные утверждения работы.

Теорема 1. *Пусть модуль непрерывности $\omega_1(t)$ при всяком $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\omega_1\left(k^{-1}\right) \le M_1\omega_1\left(n^{-1}\right)$$

и последовательность комплексных чисел $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *такая, что*

$$\sum_{|k|\le n} |kc_k| = O\left(n\omega_1\left(n^{-1}\right)\right), \quad n = 1, 2, ..., \tag{1}$$

тогда $f \in H_1^{\omega_1}$.

Обратно, пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *— такая последовательность действительных чисел, что* $kc_k \ge 0$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}$ *и* $\omega_1(t)$ *- модуль непрерывности. Если* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ *и сумма ряда* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f \in H_1^{\omega_1}$, *тогда* (1) *выполняется.*

Теорема 2. *Если модуль непрерывности 2-ого порядка* $\omega_2(t)$ *при всяком* $n \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\omega_2\left(k^{-1}\right) \le M_2\omega_2\left(n^{-1}\right) \tag{2}$$

и последовательность комплексных чисел $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *такая, что*

$$\sum_{|k|\le n} k^2 |c_k| = O\left(n^2\omega_2\left(n^{-1}\right)\right), \quad n = 1, 2, ..., \tag{3}$$

тогда $f \in H_2^{\omega_2}$.

Обратно, пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *— такая последовательность действительных чисел, что* $kc_k \ge 0$ *для каждого* $k \in \mathbb{Z}$, *а модуль непрерывности 2-го порядка* $\omega_2(t)$ *удовлетворяет условию* (2) *и при всяком* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k\omega_2\left(k^{-1}\right) \le M_2\omega_2\left(n^{-1}\right)n^2. \tag{4}$$

Если $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ *и сумма ряда* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f \in H_2^{\omega_2}$, *тогда* (3) *выполняется.*

Необходимые и достаточные условия, накладываемые на коэффициенты Фурье $f \in L^1(\mathbb{R})$, принадлежности функции f соответствующим классам Зигмунда $Z(1)$, $z(1)$ $(n = 2, \omega_2(t) = t)$, Липшица $Lip\,(\alpha)$, $lip\,(\alpha)$ $(n = 1, \omega_1(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \le 1)$, получены в работе Ф. Морица.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $a \ne 2l + 1$, *где* $l \in \mathbb{N}$, *модуль непрерывности* α*-го порядка* $\omega_\alpha(t)$ *при всяком* $n \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\omega_\alpha\left(k^{-1}\right) \le M_3\omega_\alpha\left(n^{-1}\right) \tag{5}$$

и последовательность комплексных чисел $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ такая, что

$$\sum_{|k|\le n} |k|^{\alpha} |c_k| = O\left(n^{\alpha}\omega_{\alpha}\left(n^{-1}\right)\right), \quad n = 1, 2, ..., \tag{6}$$

тогда $f \in H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$.

Обратно, пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ — такая последовательность действительных чисел, что $c_k \ge 0$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и $\omega_{\alpha}(t)$- модуль непрерывности α-го порядка. Если $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ и сумма ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f \in$ $\in H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$, тогда (6) выполняется.

Замечание. Отметим, что в условиях теоремы 3 $\omega_{\alpha}(t)$ может равняться t^{α}, в частности, если $\alpha = 2$, то $\omega_2(t) = t^2$. А в теореме 2 $\omega_2(t) \ne t^2$, так как в этом случае не выполняется условие (4).

Теорема 4. *Пусть $\alpha = 2l+1$, где $l \in \mathbb{N}$, модуль непрерывности α-го порядка $\omega_{\alpha}(t)$ при всяком $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию (5) и для последовательности комплексных чисеел $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ выполняется условие (6), тогда $f \in H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$.*

Обратно, пусть $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ — такая последовательность действительных чисел, что $kc_k \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $\omega_{\alpha}(t)$ — модуль непрерывности α-го порядка. Если $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ и сумма ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} =: f \in$ $\in H_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$, тогда (6) выполняется.

Соответствующие утверждения установлены в работе и для классов $h_{\alpha}^{\omega_{\alpha}}$.

УДК 517.984

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ДЖЕКСОНА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

С. С. Платонов (Петрозаводск, РФ)
platonov@psu.karelia.ru

Пусть G — компактная абелева группа (если не оговорено противное, то операцию в G будем задавать аддитивно), dx — мера Хаара на группе G. При $1 \le p < \infty$ пусть $L_p(G)$ — лебегово пространство, состоящее из всех комплекснозначных функций $f(x)$. для которых конечна норма

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

(функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры 0). При $p = \infty$ будем считать, что нормированное пространство $L_\infty(G) = C(G)$ состоит из всех непрерывных комплекснозначных функций на G и снабжается равномерной нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_\infty := \sup_{x\in G} |f(x)|.$$

Характером группы G называется любая непрерывная комплекснозначная функция $\xi(x)$ на группе G, удовлетворяющая условиям: 1) $\xi(x+y) = \xi(x)\xi(y) \quad \forall\ x, y \in G$; 2) $|\xi(x)| = 1 \quad \forall\ x \in G$. Обозначим через $\widehat{G}$ множество всех характеров группы G. Множество $\widehat{G}$ является полной ортогональной системой в гильбертовом пространстве $L_2(G)$. Характеры служат основой для построения гармонического анализа на группе G (см., например, [1]). Линейные комбинации характеров могут использоваться в качестве средства приближения функций на группе G и на их основе можно изучать аналоги классических задач теории приближения.

Будем считать, что одномерный тор совпадает с фактор-группой $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Элемент $x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$, будем обозначать через $\bar{x}$, при этом число x будем называть представителем элемента $\bar{x}$. В частности, $\bar{0}$ — нулевой элемент группы $\mathbb{T}$.

Пусть $\mathbb{T}^\infty$ — прямое произведение счетного числа групп $\mathbb{T}$. Элементами группы $\mathbb{T}^\infty$ являются последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$, где $\bar{x}_k \in \mathbb{T}$. Снабженная тихоновской топологией группа $\mathbb{T}^\infty$ является компактной топологической группой.

Пусть $d\mathbf{x}$ — элемент группы Хаара на группе $\mathbb{T}^\infty$, нормированной условием $\int_G 1\, d\mathbf{x} = 1$. Банаховы пространства $L_p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \le p < \infty$, и $L_\infty(\mathbb{T}^\infty) = C(\mathbb{T}^\infty)$ являются частным случаем пространств $L_p(G)$ и $L_\infty(G)$, определенных выше.

Опишем характеры группы $\mathbb{T}^\infty$. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — множество всех целочисленных последовательностей. Элементы из $\mathbb{Z}^\infty$ имеют вид $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbb{Z}^\infty_{fin}$ обозначим подмножество в $\mathbb{Z}^\infty$, состоящее из всех финитных последовательностей, т. е. таких последовательностей $\mathbf{n}$ для которых $n_k = 0$ при $k > N$. Наименьшее такое число N обозначим через $\nu(\mathbf{n})$.

Характеры группы $\mathbb{T}^\infty$ задаются формулами

$$\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \exp(i(\sum_{k=1}^\infty n_k x_k)),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^\infty_{fin}$, $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$.

Для $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^\infty_{fin}$ пусть

$$|\mathbf{n}|_\infty := \max\{|n_k|, \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{P}_N$ линейную оболочку функций $\chi_\mathbf{n}$ при всех $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^\infty_{fin}$, удовлетворяющих условиям $\nu(\mathbf{n}) \le N$ и $|\mathbf{n}|_\infty \le N$. Тогда $\mathcal{P}_N$ является конечномерным линейным подпространством пространства $C(\mathbb{T}^\infty)$ размерности $(2N+1)^N$. Пусть $\mathcal{P} = \bigcup_{N=1}^\infty \mathcal{P}_N$. Функции из пространства $\mathcal{P}$ будут служить средством приближения для функций из нормированных пространств $L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Из теоремы Стоуна — Вейерштрасса легко получить, что $\mathcal{P}$ является всюду плотным подмножеством в $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ наилучшее приближение $E_N(f)_p$ определяется по формуле

$$E_N(f)_p := \sup\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{P}_N\}.$$

Для $\bar{s} \in \mathbb{T}$ пусть

$$|\bar{s}|_\mathbb{T} := \min_{m \in \mathbb{Z}} |s - 2\pi m|.$$

Если $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, то полагаем

$$|\mathbf{x}| := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} |\bar{x}_k|_\mathbb{T}.$$

Отображение $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ задает квазинорму на группе $\mathbb{T}^\infty$, т. е. выполняются условия: 1) $|\mathbf{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$; 2) $|-\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$; 3) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}^\infty$.

Для любой функции $f(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ и для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ пусть

$$(\tau_\mathbf{h} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h}).$$

Оператор $\tau_\mathbf{h}$ называется оператором сдвига.

Конечные разности от функции f с шагом $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ определяются формулами

$$\Delta^1_\mathbf{h} f = \Delta_\mathbf{h} f := f - \tau_\mathbf{h} f;$$

$$\Delta^m_\mathbf{h} f := \Delta_\mathbf{h}(\Delta^{m-1}_\mathbf{h} f) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \tau_{j\mathbf{h}} f,$$

где $m \ge 2$, $\binom{m}{j}$ — биномиальный коэффициент.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ и любого числа $m \in \mathbb{N}$ определим модуль непрерывности порядка m формулой

$$\omega_m(f;\delta)_p := \sup\{\|\Delta_{\mathbf{h}}^m f\|_p : \mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty, |\mathbf{h}| < \delta\},$$

где $\delta > 0$ — произвольное число.

Следующая теорема является аналогом теоремы Джексона классической теории приближений функций (см., например, [2]).

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит пространству $L_p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \le p \le \infty$, m — произвольное натуральное число. Тогда для любого $N = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$E_N(f)_p \le C\,\omega_m\left(f; \frac{1}{N}\right)_p,$$

где $C = C(m)$ — некоторая постоянная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1978.

2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977.

УДК 517.518

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

М. Г. Плешаков (Саратов, РФ)

pleshakovmg@gmail.com

Пусть $\mathbb{C}$ — пространство непрерывных 2π-периодических действительнозначных функций f с равномерной нормой

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

$\mathbb{T}_n$ — пространство тригонометрических полиномов порядка $\le n$, $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{Y}_{2s}$ — множество всех наборов $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ точек y_i, таких, что $-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$, и для любого целого i $y_i := y_{i+2s} + 2\pi$. Всюду предполагаем, что $Y \in \mathbb{Y}_{2s}$ при каком-нибудь $s \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, что функция $f \in \triangle^{(1)}(Y)$, если f есть непрерывная 2π-периодическая функция и f не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечётное; f не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i чётное.

Обозначим через $E_n(f) := \inf\limits_{\tau_n \in \mathbb{T}_n} \|f - T_n\|$ величину наилучшего приближения функции f, а через $E_n^{(1)}(f, Y) := \inf\limits_{\tau_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - T_n\|$ — величину наилучшего комонотонного приближения функции f по набору Y.

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$ и набор $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = Y \in \mathbb{Y}_{2s}$. В силу периодичности без потери общности будем считать, что точка 0 принадлежит набору Y, т. е. $y_{i_*} = 0$ при некотором $i_* \in \mathbb{Z}$.

При построении контрпримера было использовано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2+1)} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4$$

(см. например [1]).

Пример. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, и $n \in \mathbb{N}$ существует функция $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$ такая, что $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ и

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left(f_1; \tfrac{1}{n}\right),$$

где $B_Y = \mathrm{const}$, зависит только от Y и k, $\omega_k(f; t) = \sup\limits_{h \in [0,t]} \| \Delta_h^k (f; \cdot)\|$ — k-й модуль непрерывности функции f, $\Delta_h^k(f; x)$ — конечная разность порядка k с шагом h функции f в точке x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977.

2. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's Inequality // J. of Approx. Theory. 1999. Vol. 99. P. 409–421.

УДК 517.5 + 519.218

H-МЕРЫ И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ХААРА И МАРТИНГАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ[1]

М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова (Вологда, РФ)
mgplotnikov@mail.ru, japlotnikova@yandex.ru

Множеством единственности (*U-множеством*) для рядов по некоторой системе функций называют множество A такое, что коэффициенты любого сходящегося вне A к нулю ряда по данной системе равны

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00321 и 14-01-00417) и грантов НШ-979.2012.1 и НШ-3682.2014.1.

нулю. Для тригонометрических рядов построена разветвлённая теория множеств единственности (см. монографию [1] и содержащуюся в ней библиографию), причём описание таких множеств требует привлечения не только метрических, но и арифметических характеристик.

Иначе обстоит дело для *рядов* $\sum c_n H_n$ *по системе Хаара*, для которых $\emptyset$ и только оно является U-множеством (следствие результатов Арутюняна, Талаляна, Петровской, Скворцова, Фабера, Маклафлина и Прайса, 1910–1969 гг.; см. по этому поводу [2]).

Мушегян доказал [3], что борелевское множество $A \subset [0,1]$ является U-множеством для рядов Хаара с условием

$$c_n H_n(x) = \overline{\overline{\mathrm{o}}}_x(n), \quad n \to \infty$$

(*условие Арутюняна–Талаляна*) тогда и только тогда, когда оно не более чем счетно. Вэйд установил [4] некоторые результаты для рядов Хаара с условием

$$c_n = \overline{\overline{\mathrm{o}}}(n^{p-1/2}), \quad n \to \infty.$$

В [3] показано наличие совершенных U-множеств для таких рядов при всех $p < 1$. В [5] в терминах некоторых размерностных характеристик было получено близкое к окончательному описание U-множеств для рядов Хаара с условием Вэйда при $0 < p < 1$. В [6] было доказано, что если $0 < p < 1$, то $A \subset [0,1]$ — U-множество для рядов Хаара с условием

$$c_n = \underline{\mathrm{O}}_x(n^{p-1/2})$$

тогда и только тогда, когда A не содержит совершенных подмножеств положительной хаусдорфовой $(1-p)$-меры. Данный результат был распространен в [6] и на многомерный случай.

Приведем обобщение результата из [6] на более широкие классы рядов Хаара. Пусть задана неубывающая функция $H : (0, 1] \to (0, +\infty)$. *$H$-мерой* множества $E \subset [0, 1]$ называется величина

$$\mathrm{mes}_H E = \lim_{\delta \to 0+0} \inf \sum H(|\Delta|),$$

где infimum берется по всем не более чем счетным покрытиям множества E интервалами Δ с $|\Delta| < \delta$. Функция множества mes_H, индуцированная на борелевские подмножества $[0, 1]$, является счетно-аддитивной мерой.

Теорема 1. *Пусть задана функция $\Phi : [1, +\infty] \to [1, +\infty)$ такая, что*

$$\Phi(x) \le \Phi(q\,x) \le q\,\Phi(x)$$

для любого $q > 1$ и всех $x \geq x(q)$. Рассмотрим функцию

$$H(x) = x\,\Phi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Тогда множество $E \subset [0,\,1]$ является U-множеством для класса рядов Хаара с частичными суммами S_n, удовлетворяющими условию

$$|S_n(x)| \leq M_x\,\Phi(n),$$

тогда и только тогда, когда оно не содержит замкнутых подмножеств положительной H-меры.

Хорошо известно [7], что частичные суммы с номерами 2^k любого ряда Хаара можно рассматривать как мартингальную последовательность на некотором вероятностном пространстве. Напомним, что последовательность $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ случайных величин, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathbf{P})$ с выделенной возрастающей последовательностью σ-алгебр $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$, называется *мартингальной последовательностью* [8], если для всех $k \geq 0$ величина X_k является $\mathcal{F}_k$-измеримой, $M|X_k| < \infty$ и $M(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) = X_k$ $\mathbf{P}$-п.н.

Назовем множество $G \subset \Omega$ открытым, если для любой точки $\omega \in G$ найдется множество (интервал)

$$\Delta \in \mathcal{F}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$$

такое, что $\omega \in \Delta \subset G$. Множество Ω, наделенное топологией τ, состоящей из всех открытых множеств, является топологическим пространством.

Далее будем считать, что для любого натурального n и множества $E \subset \Omega$ найдется не более чем счетное покрытие множества E интервалами из $\mathcal{F}_\infty \setminus \mathcal{F}_{n-1}$. Назовем *рангом* интервала $\Delta \in \mathcal{F}_\infty$ величину

$$\operatorname{rank}\Delta = \min\{k:\ \Delta \in \mathcal{F}_k\}.$$

Для неубывающей функции $\Phi:\ [1,\,+\infty] \to [1,\,+\infty)$ и множества $E \subset \Omega$ рассмотрим величину

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{P},\,\Phi} E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \inf \sum \mathbf{P}(\Delta)\,\Phi(\operatorname{rank}\Delta),$$

(infimum берется по всем не более чем счетным покрытиям множества E интервалами из $\mathcal{F}_\infty \setminus \mathcal{F}_{n-1}$), которую назовем $(\mathbf{P},\,\Phi)$-*мерой* множества E.

Теорема 2. *Пусть заданы неубывающая функция* $\Phi : [1, +\infty] \to \to [1, +\infty)$, *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *с выделенной возрастающей последовательностью* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_k\}$, *компактное в топологии* τ, *и множество* $E \subset \Omega$. *Тогда нетривиальная мартингальная последовательность* X_k *на данном пространстве, всюду сходящаяся к нулю на* $\Omega \setminus E$ *и удовлетворяющая условию*

$$|X_n(\omega)| \leq M_\omega \, \Phi(n),$$

существует в том и только том случае, когда E *содержит замкнутое подмножество* U *с* $\mathrm{mes}_{\mathbf{P},\,\Phi} U > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : ГИФМЛ, 1961. 936 с.
2. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. 1970, 1971. С. 109–146.
3. *Мушегян Г. М.* О множествах единственности для системы Хаара // Изв. АН Армян. ССР. Сер. матем. 1967. Т. 2(6). С. 350–361.
4. *Wade W. R.* Sets of uniqueness for Haar series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1977. Vol. 30(3–4). P. 265–281.
5. *Плотников М. Г.* Вопросы единственности для некоторых классов рядов Хаара // Мат. заметки. 2004. Т. 75(3). С. 392–404.
6. *Плотников М. Г.* Квазимеры, хаусдорфовы *p*-меры и ряды Уолша и Хаара // Изв. РАН. Сер. математическая. 2010. Т. 74(4). С. 157–188.
7. *Gundy R. F.* Martingal theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 124(2). P. 228–248.
8. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М. : Наука, 1980. 575 с.

УДК 517.518

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ СИСТЕМЫ ХААРА[1]

А. А. Плужникова, Т. В. Родионов (Москва, Россия)
ttvvrr@yandex.ru

Рассмотрим некоторое счётное разбиение $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ отрезка $[0,1]$ с $v_0 = = 0$, $v_1 = 1$. Положим $\alpha_n = \max\{v_k \mid v_k < v_n, k < n\}$, $\beta_n = \min\{v_k \mid v_k > > v_n, k < n\}$ и определим систему функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\varphi_1(x) = 1/\sqrt{b-a} \quad \text{при} \quad x \in [0,1],$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417) и гранта Президента РФ (НШ-3682.2014.1).

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta_n - v_n}}{\sqrt{(v_n-\alpha_n)(\beta_n-\alpha_n)}}, & \text{при } x \in (\alpha_n, v_n), \\ -\frac{\sqrt{v_n - \alpha_n}}{\sqrt{(\beta_n-v_n)(\beta_n-\alpha_n)}}, & \text{при } x \in (v_n, \beta_n), \\ 0, & \text{при } x \in [0,1] \setminus (\alpha_n, \beta_n). \end{cases}$$

Значения функций φ_n в концах отрезка определяются по непрерывности, а в точках разрыва внутри интервала $(0,1)$ выбираются равными полусумме пределов слева и справа. Такая система функций была предложена в [2].

Для удобства выберем другую нумерацию точек разбиения. По аналогии с системой Хаара [1, гл. 3] распределим точки разбиения по пачкам. Нулевая пачка будет состоять из элементов $\{v_{0,i}\}_{i=0}^{1}$, где $v_{0,0} = 0$, $v_{0,1} = 1$. Первая пачка будет состоять из элементов $\{v_{1,i}\}_{i=0}^{2}$, где $v_{1,0} = v_{0,0}$, $v_{1,2} = v_{0,1}$, а элемент $v_{1,1}$ лежит между $v_{1,0}$ и $v_{1,2}$. Вторая пачка будет состоять из $\{v_{2,i}\}_{i=0}^{4}$, где $v_{2,0} = v_{1,0} = v_{0,0}$, $v_{2,4} = v_{1,2} = v_{0,1}$, $v_{2,2} = v_{1,1}$, элемент $v_{2,1}$ лежит между $v_{2,0}$ и $v_{2,2}$, а элемент $v_{2,3}$ лежит между $v_{2,2}$ и $v_{2,4}$, и т. д. Получаем, что $v_{k,2j} = v_{k-1,j}$ и $v_{k,j} \in \left(v_{k-1,\frac{j-1}{2}}, v_{k-1,\frac{j+1}{2}}\right)$, $j = 2p-1$, $p = 1, \ldots, 2^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. В случае $v_{k,n} = n2^{-k}$, $n = 0, \ldots, 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, мы получаем саму систему Хаара.

Известно, что система Хаара ортонормирована в $L^2[0,1]$, является базисом в пространствах $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, и что ряд Фурье–Хаара любой непрерывной на $[0,1]$ функции сходится к ней равномерно [1, гл. 3]. Аналогичными свойствами обладает и система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 1. *Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $L^2[0,1]$.*

Положим $r_k = \max\bigl\{|v_{k,i} - v_{k,j}| \bigm| i,j = 0, \ldots, 2^k, |i-j| \leqslant 1\bigr\}$ — максимальное расстояние между соседними точками k-й пачки.

Лемма 2. *Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$. Тогда система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной в $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Для $f \in L^1[0,1]$ определим её коэффициенты Фурье и частные суммы ряда Фурье по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$c_n(f) = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad S_N(f,x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\varphi_n(x).$$

Для функции $f \in C[0,1]$ определим её обычный модуль непрерывности $\omega(f,\delta) = \sup\bigl\{|f(x+h) - f(x)| \bigm| x, x+h \in [0,1], |h| < \delta\bigr\}$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in C[0,1]$ справедливы неравенства $|c_n(f)| \leqslant \sqrt{r_k}\,\omega(f, r_k)$ при $2^k - 1 \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$.*

Теорема 2. *Пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$. *Тогда для любой функции* $f \in C[0,1]$ *её ряд Фурье по системе* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* f *равномерно на* $[0,1]$. *Кроме того, при* $2^k - 1 \leqslant N \leqslant 2^{k+1}$ *справедлива оценка*

$$\|f(x) - S_N(f,x)\|_{C[0,1]} \leqslant 3\omega(f, r_k).$$

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$ *и* $p \in [1,\infty)$. *Тогда система* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом в пространстве* $L^p[0,1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999.

2. *Лукашенко Т. П.* Рекурсивные ряды Фурье–Стилтьеса // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 108–109.

УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ РАЗНОСТИ ДВУХ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Е. С. Половинкин (Долгопрудный, Россия)

polovinkin@mail.mipt.ru

Введение. При исследовании негладких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}^1$ на локальный минимум или максимум в некоторой точке $x_0 \in X$ приходим к тому, что необходимое условие экстремума принимает вид включения: $0 \in \partial_C f(x_0)$, где $\partial_C f(x_0)$ означает субдифференциал Кларка. В более сложных задачах математической теории управления также возникает необходимость вычисления субдифференциалов типа субдифференциала Кларка. Однако вычисление этих субдифференциалов для негладкой и невыпуклой функции является не простой задачей. В докладе, опираясь на аппарат вычисления производных от многозначных отображений, получены формулы различных производных по направлениям первого порядка, а с ними и различных субдифференциалов, включая субдифференциал Кларка, для липшицевых функций, которые представимы в виде разности двух сильно регулярных выпуклых функций.

1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $B_r(x_0)$ обозначаем открытый шар с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$ в пространстве

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. и РФФИ (проект 13-01-00295).

X. Разностью Минковского двух множеств из X называется множество вида $A \stackrel{*}{-} B \doteq \{x \in X \mid x + B \subset A\}$. Обозначим через $\mathcal{P}(Y)$ ($\mathcal{F}(Y)$) множество всех непустых (замкнутых) подмножеств из Y. Следуя [1], [2], для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в заданной точке его графика $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ определим производную как многозначное отображение $DF(z_0)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, графиком которого является некоторый касательный конус к графику данного отображения в точке (x_0, y_0). Известно несколько видов касательных конусов для невыпуклых множеств. Среди них следует отметить *нижний касательный конус* $T_L(A; a)$ (см. [3]), *верхний касательный конус (иначе называют: контингентный конус* $T_U(A; a)$ (см. [1])) и *касательный конус Кларка* $T_C(A; a)$ (см. [4]). Также нам потребуются следующие касательные конусы, определенные в работе [5].

Первым асимптотическим нижним (первым асимптотическим верхним) касательным конусом ко множеству $A \subset X$ *в точке* $a \in \in \overline{A}$ *назовем множество* $T_{AL1}(A; a) \doteq T_L(A; a) \stackrel{*}{-} T_L(A; a)$ $(T_{AU1}(A; a) \doteq \doteq T_U(A; a) \stackrel{*}{-} T_U(A; a))$.

Вторым асимптотическим нижним касательным конусом ко множеству A *в точке* $a \in \overline{A}$ *назовем множество* $T_{AL2}(A; a) \doteq \doteq T_{AL1}(A; a) \bigcap T_{AU1}(A; a)$.

Вторым асимптотическим верхним касательным конусом ко множеству A *в точке* $a \in \overline{A}$ *назовем множество*

$$T_{AU2}(A; a) \doteq \overline{T_{AL1}(A; a) + T_{AU1}(A; a)}.$$

Теорема 1. [6] *Конусы* $T_C(A; a)$, $T_{AL1}(A; a)$, $T_{AL2}(A; a)$, $T_{AU1}(A; a)$ *и* $T_{AU2}(A; a)$ *выпуклы, замкнуты и справедливы включения*

$$T_C(A; a) \subset T_{AL2}(A; a) \subset T_{AL1}(A; a) \subset T_{AU2}(A; a) \subset T_U(A; a).$$

Определение 1. [5] *M-производной, где* $M \in \{U, L, C, AL1, AL2, AU1, AU2\}$, *отображения* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ *в точке замыкания его графика* $z_0 \in \overline{\operatorname{graph} F} \subset Z \doteq X \times Y$ *назовём отображение* $D_M F(z_0)$: $X \to \mathcal{F}(Y)$ *вида*

$$D_M F(z_0)(u) \doteq \{v \in Y \mid (u, v) \in T_M(\operatorname{graph} F; z_0)\}, \quad \forall\, u \in X.$$

2. Для функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ определим его *эффективное множества* $\operatorname{dom} f \doteq \{x \in X \mid f(x) \neq \pm\infty\}$ и *надграфик* $\operatorname{epi} f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f(x),\ x \in \operatorname{dom} f\}$.

Определение 2. [5] *M-эпипроизводной*, где $M \in \{U, L, C, AL1, AL2, AU1, AU2\}$, *функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$* назовем

$$D_M^+ f(x_0)(u) \doteq \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid (u, \alpha) \in T_M(\operatorname{epi} f; (x_0, f(x_0)))\}.$$

Теорема 2. [6] *Для липшицевой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ справедливы формулы:*

$$D_U^+ f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)),$$

$$D_L^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)),$$

$$D_C^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\substack{\lambda, x: \\ \lambda \to 0, x \to x_0}} \lambda^{-1}(f(x + \lambda u) - f(x)),$$

$$D_{AL1}^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(D_L^+ f(x_0)(u + w) - D_L^+ f(x_0)(w)),$$

$$D_{AU1}^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(D_U^+ f(x_0)(u + w) - D_U^+ f(x_0)(w)),$$

$$D_{AL2}^+ f(x_0)(u) = \max(D_{AL1}^+ f(x_0)(u); D_{AU1}^+ f(x_0)(u)),$$

$$D_{AU2}^+ f(x_0)(u) = \inf_{v \in X}(D_{AU1}^+ f(x_0)(v) + D_{AL1}^+ f(x_0)(u - v)).$$

Кроме этого, также известна эпипроизводная П. Мишель и Ж.-П. Пено (см. [7]), которая определяется по формуле

$$D_{MP}^+ f(x_0)(u) \doteq \sup_{w \in X}\{\limsup_{\lambda \to 0}(\lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda(u + w)) - f(x_0 + \lambda w)))\}.$$

Лемма 1. *Пусть функция $f: X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ локально липшицева в окрестности точки $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Тогда для любого $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ функция $u \to D_M^+ f(x_0)(u)$ является выпуклой положительно однородной функцией.*

Лемма 2. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$+\infty \geqslant D_C^+ f(x_0)(u) \geqslant D_{MP}^+ f(x_0)(u) \geqslant D_{AL2}^+ f(x_0)(u) \geqslant$$

$$\geqslant D_{AL1}^+ f(x_0)(u) \geqslant D_{AU2}^+ f(x_0)(u) \geqslant D_U^+ f(x_0)(u) \geqslant -\infty,$$

причем неравенства могут быть строгими.

Определение 3. Для любого $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ *M-субдифференциалом функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$* называется следующее множество в сопряжённом с X пространстве X^*

$$\partial_M^+ f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant D_M^+ f(x_0)(x),\ \forall\, x \in X\}$$

Лемма 3. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$\partial_C^+ f(x_0) \supset \partial_{MP}^+ f(x_0) \supset \partial_{AL2}^+ f(x_0) \supset \partial_{AL1}^+ f(x_0) \supset \partial_{AU2}^+ f(x_0),$$

причем включения могут быть строгими.

Теорема 3 [6]. *Для липшицевой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ с константой Липшица $l > 0$ и для любого $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ функция $u \to D_M^+ f(x_0)(u)$ является положительно однородной, выпуклой, конечной при всех $u \in X$ и удовлетворяющей условию Липшица на пространстве X с той же константой $l > 0$.*

Предложение 1 [Ф. Кларк] (см. [4]) *Пусть функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ выпукла и липшицева. Тогда эписубдифференциал Кларка этой функции в точке x_0 совпадает с субдифференциалом этой функции в смысле выпуклого анализа, а ее эпипроизводная Кларка $D_C^+ f(x_0)(\cdot)$ совпадает с классической производной по направлениям $f'(x_0, \cdot)$.*

Теорема 4 [6]. *Пусть непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ имеет конечную классическую производную по направлениям, т.е.*

$$f'(x_0, u) = D_L^+\ f(x_0)(u) = D_U^+\ f(x_0)(u), \quad \forall u \in X.$$

Тогда эпипроизводные $D_M^+\ f(x_0)(u)$ при $M \in \{MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$ совпадают между собой при каждом $u \in X$, и для них справедлива формула

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X} (f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)).$$

Теорема 5 [6]. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ локально липшицева в окрестности точки $x_0 \in X$ и представима в этой окрестности в виде разности локально липшицевых выпуклых функций, т. е. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1, f_2 : B_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}^1$ - ограниченные выпуклые функции, причем для некоторого $u \in X$ одна из функций f_k, $k \in \overline{1, 2}$, удовлетворяет равенству $f_k'(x_0, u) + f_k'(x_0, -u) = 0$ (например, эта функция дифференцируема в точке x_0 по Гато). Тогда при этом $u \in X$ эпипроизводные $D_M^+\ f(x_0)(u)$ при всех $M \in \{C, MP, AL1, AL2,\ AU1, AU2\}$ совпадают между собой, и справедлива формула*

$$D_M^+ f(x_0)(u) = f_1'(x_0, u) + f_2'(x_0, -u).$$

Лемма 4. *Пусть задана положительно однородная липшицева (быть может невыпуклая) функция $h : X \to \mathbb{R}^1$. Тогда справедливо равенство эпипроизводных $D^+_M\, h(0)(u)$ при всех $M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1, AU2\}$, а именно справедлива формула их вычисления*

$$D^+_M h(0)(u) = \sup_{w \in X}(h(u+w) - h(w)),\ \forall u \in X.$$

Следствие 1. *Пусть заданы две выпуклые ограниченные функции $f_k : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, $k \in \overline{1,2}$. Определим функцию $f(x) \doteq f_1(x) - f_2(x)$ при $x \in B_r(x_0)$ и функции $g_k(x) \doteq f_k(x_0) + f'_k(x_0, x - x_0)$ и $g(x) \doteq g_1(x) - g_2(x)$ при $x \in X$. Тогда справедливо равенство всех $M-$ эпипроизводных функции g в точке x_0 при $M \in \{C, MP, AL1, AL2,\ AU1, AU2\}$, причем*

$$D^+_M g(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)),\ \forall u \in X.$$

Для произвольной непрерывной функции $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, имеющей конечные производные по направлениям в некоторой точке x_0, определим функции g и φ по формулам

$$g(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \quad \varphi(x) \doteq f(x) - g(x), \tag{1}$$

Определение 4. Непрерывная функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ называется *сильно регулярной в точке* x_0, если она имеет конечные производные по направлениям в точке x_0 и для соответствующей функции φ (см. (1)) справедливо равенство $\partial^+_C \varphi(x_0) = \{0\}$.

Теорема 6 [6]. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ представима в виде разности двух выпуклых сильно регулярных в точке x_0 функций f_1 и f_2, т.е. $f = f_1 - f_2$. Тогда справедливо равенство всех эпипроизводных, т. е. $\forall\ M \in \{C, MP, AL1, AL2, AU1,\ AU2\}$*

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X,$$

что равносильно равенству всех эписубдифференциалов

$$\partial^+_C f(x_0) = ... = \partial^+_{AU2} f(x_0).$$

Пример 1. На полосе $P \doteq \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_2| \leqslant 1\}$ определим функции $h : P \to \mathbb{R}^1$ вида $h(x) \doteq |x_1| - \sqrt{1 - x_2^2}$ и $f(x) = \max\{h(x); 0\}$. Пусть $x_0 \doteq (1, 0)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) \doteq f(x) - f(x_0) - f\,'(x_0, x - x_0).$$

Очевидно, что $\varphi'(x_0,u)=0$ и $D^+_{MP}\varphi(x_0)(u)=0$ при всех u. Пусть $v\doteq$ $\doteq(1,0)$.

$$D^+_C\varphi(x_0)(v)=\limsup_{y\to x_0,\,t\to 0}\left(\frac{\varphi(y+tv)-\varphi(y)}{t}\right)=$$

$$=\limsup_{y\to x_0,\,t\to 0}\left(\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}-\frac{f'(x_0,y+tv-x_0)-f'(x_0,y-x_0)}{t}\right).$$

Заметим, что $f(x)=0$ при любом $x\in B_1(0)$. Поэтому $f'(x_0,u-x_0)=0$ для всех u таких, что $\langle x_0,u-x_0\rangle<0$. Определим последовательность

$$y_k\doteq\left(1-\frac{1}{2k^2},\ \sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2k^2}\right)^2}\right).$$

Очевидно, что при $t_k\doteq\frac{1}{4k^2}$ справедливо $\langle x_0,y_k+t_kv-x_0\rangle<0$. Поэтому для любого $k\in\mathbb{N}$

$$f'(x_0,y_k+t_k\,v-x_0)=0;\quad f'(x_0,y_k-x_0)=0;\quad \frac{f(y_k+t_k\,v)-f(y_k)}{t_k}=1.$$

Отсюда

$$D^+_C\varphi(x_0)(v)\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(y_k+t_k\,v)-\varphi(y_k)}{t_k}=1>D^+_{MP}\varphi(x_0)(v)=0.$$

Это доказывает, что выпуклая функция f не является сильно регулярной в точке $x_0=(1,0)$.

Следствие 1. *Последний пример показывает, что условие сильной регулярности в теореме 5 по существу. Если для построенной в примере 1 функции f рассмотреть выпуклые функции $f_1\doteq f$ и $f_2(x)\doteq f(x_0)+f'(x_0,x-x_0)$, то получаем пример, в котором эпипроизводная (субдифференциал) Кларка в точке x_0 функции $\varphi(x)$, являющейся разностью этих двух выпуклых функций, не совпадает с эпипроизводной (субдифференциалом) Мишеля–Пено этой функции.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aubin J.P.* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // Advances in Math. Suppl. Studies. Acad. Press, 1981. P. 160–272.

2. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений. М. : Изд-во МФТИ, 1983. 108 с.

3. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

4. *Clarke F.H.* Optimization and nonsmooth analysis. N.Y. : Wiley–Interscience, 1983.

5. *Половинкин Е.С.* О необходимых условиях оптимальности решений дифференциальных включений на отрезке // Совр. матем. в физ.-техн. задачах. М. : Изд-во МФТИ, 1986. С. 87–94.

6. *Половинкин Е.С.* О некоторых свойствах производных многозначных отображений // Тр. МФТИ. 2012. Т. 4, № 4. С. 141–154.

7. *Michel P., Penot J.-P.* Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et non-lipschitziennes // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I. 1984. Vol. 298. P. 269–272.

УДК 514.772.2+517.97

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ[1]

Н. М. Полубоярова (Волгоград, РФ)
nmedv@mail.ru

В современной практике проектирования и производства существует ряд изделий и сооружений, такие как тентовые конструкции, полимерные конструкции, которые имеют неоспоримое преимущество при перекрытии больших открытых площадей (корты, бассейны, кафе и пр.). Но они чрезвычайно трудно поддаются проектированию и анализу в силу слабой разработанности соответствующего математического аппарата. Рядом авторов подчеркивалось, что наиболее предпочтительной формой поверхностей для тентовых тканевых конструкций, являются поверхности минимальной площади [1]. Такие архитектурные сооружения имеют привлекательный внешний вид, они оптимальны в минимальном расходе материалов при строительстве и в уменьшении теплообмена с окружающей средой.

Задача, которая стоит перед математиками — это обеспечить архитекторов и проектировщиков удобными методами нахождения областей устойчивости описанных поверхностей, учитывая при этом как нагрузки на них извне, так и процессы возникающие внутри, например, как в [2]. Для этого потребовалось рассматривать поверхности, «минимальные» с точки зрения более сложных функционалов, чем давно изучаемые функционалы площади. Например, функционал (энергия) может быть комбинацией энергии поверхностного натяжения, гравитационной энергии, энергии изгибной деформации. С помощью таких «обобщенных»

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97034 — р_поволжье_а).

функционалов есть возможность оценить устойчивые и неустойчивые состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тентовых покрытий, магнитных жидкостей, капиллярных поверхностей. С этой целью в работе [3] рассматривался функционал типа площади, а в [4] — функционал с подынтегральной функцией, описывающей объемную плотность сил. Применяя методы и результаты исследований этих работ, были получены вариации функционала потенциальной энергии, представленные в теореме 1, а также некоторые следствия, полезные при дальнейших исследованиях устойчивости и неустойчивости.

Пусть M — n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; Φ, $\Psi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — C^2-гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

которая не зависит от выбора нормали ξ. Функционал (1) назовем функционалом потенциальной энергии.

Пусть V — C^2-гладкое векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$, такое что $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$, где $h \in C^1_0(\mathcal{M})$, при этом предполагается, что интегральные кривые поля V лежат на прямых линиях и вдоль них выполнено $|V| = \mathrm{const}$.

Пусть $U(\mathcal{M})$ — окрестность поверхности $\mathcal{M}$, в которой определено поле V и однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов $g_t(x) : U(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}^{n+1}$, порожденная векторным полем V. То есть $g_t(x)$ есть решение задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)),\ g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$.

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ *устойчива*, если вторая вариация функционала (1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$, иначе — *неустойчива*.

Обозначим

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle), \tag{2}$$

где $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}} \right)$, δ_{ij} — символ Кронекера; k_i — главные кривизны; E_i — главные направления поверхности.

Теорема 1. *Если* $W(t) = W(\mathcal{M}_t)$, *то*

$$W'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\mathrm{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x)\, d\mathcal{M},$$

где div *— дивергенция в метрике поверхности* $\mathcal{M}$, $H = \langle \vec{H}, \xi \rangle$ *— средняя кривизна поверхности* $\mathcal{M}$ *относительно нормали* ξ. *Более того, если* $W'(0) = 0$ *для любой функции* $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, *то выполнено*

$$W''(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) + h^2 \left(\langle \overline{\nabla} \Psi(x), \xi \rangle - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) \right\} d\mathcal{M},$$

где G *— квадратичная форма, соответствующая матрице (2).*

Следствие 1.1. *Поверхность* $\mathcal{M}$ *класса* C^2 *является экстремалью функционала (1) тогда и только тогда* $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = \Psi(x)$.

Следствие 1.2. *Если экстремальная поверхность* $\mathcal{M}$ *является плоскостью, то* $\Psi(x) = 0$.

Теорема 2. *Если* $f = x_{n+1}$ *и* $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{n+1})$, *то выполнено равенство* $\mathrm{div}((\xi_{n+1}\Phi' - \Phi)\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}$.

Замечание 1. *Очевидно, что при* $\Psi(x) = 0$ *теорема 2 обобщает хорошо известное свойство гармоничности координатных функций минимальных поверхностей. В работе [5] для p-минимальных поверхностей аналогичное равенство было положено в основу их определения.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов В. Е.* Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций с помощью метода натянутых сеток // GraphiCon. 2001. С. 140–144.

2 *Полубоярова Н. М.* Некоторые оценки G-емкости экстремальных поверхностей и следствия из них // Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1: Мат. Физ. 2011. № 2 (15). С. 64–75.

3. *Клячин В. А., Медведева Н. М.* Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади // Сиб. электрон. мат. изв. Статьи. 2007. Т. 4. С. 113–132.

4. *Клячин В. А.* О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны // Изв. РАН. Сер. математическая. 2006. Т. 70, № 4. С. 77–90.

5. *Tkachev V. G.* External geometry of p-minimal surfaces // Geometry from the Pacific Rim (Singapore, 1994). Berlin : de Gruyter, 1997. P. 363–375.

УДК 517.984

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЫ

Н. С. Полякова (Саратов, РФ)
Tehhi-N@yandex.ru

Пусть $(G, \dot{+}, \mathcal{N})$ — компактная топологическая группа и существует счетная последовательность вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

такая, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \Theta$ и такая, что сдвиги $G_n \dot{+} g$ образуют базу топологии $\mathcal{N}$. В дальнейшем, при необходимости, когда нас будет интересовать некий сдвиг $G_n \dot{+} g$. Пусть p_n есть порядок фактор-группы G_n/G_{n+1}. Будем считать, что числа p_n простые. Обозначим

$$m_0 = 1, \quad m_{n+1} = m_n p_n.$$

Пусть $\{\chi(t)\}$ — совокупность всех характеров группы G. Пусть

$$G^{\perp} = G_0^{\perp} \subset G_1^{\perp} \subset \dots \subset G_n^{\perp} \subset G_{n+1}^{\perp} \subset \dots$$

возрастающая последовательность аннуляторов. При каждом натуральном n выберем характер $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ и зафиксируем эту последовательность. Систему $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ будем называть системой Радемахера

Рассмотрим произвольную фиксированную точку $t \in G$. Пусть

$$t = t_n \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \dot{+} \dots \dot{+} a_0 g_0,$$

где $t_n \in G_n$, $0 \leqslant a_j < p_j$ для $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Рассмотрим натуральное число k такое, что

$$k = b_{n-1} m_{n-1} + b_{n-2} m_{n-2} + \dots + b_0 m_0.$$

Пусть

$$\delta_{t,k}^{(n)} = \begin{cases} 1, & a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, \\ 0, & \exists j, 0 \leqslant j \leqslant n-1, a_j \neq b_j, \end{cases}$$

Будем определять функции Хаара следующим образом:

$$H_0(t) \equiv 1,$$

$$H_{jm_n+k}(t) = (r_n^j(t \dot{-} (\underbrace{a_{n-1}g_{n-1} \dot{+} \ldots \dot{+} g_0x_0}_{q}))\delta_{t,k}^{(n)}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t),$$

где

$$F_0(t) \equiv c_0,\ F_{n+1}(t) = \sum_{\chi \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}} c_{\chi}\chi(t).$$

Преобразовывая его, получим

$$F_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{\alpha=1}^{p_n-1} c_{n,\alpha,q} r_n^{\alpha}(t \dot{-} q)\delta_{q,k}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{\alpha=1}^{p_n-1} c_{n,\alpha,q} H_{\alpha m_n+k}(t).$$

Заметим, что в последней формуле лишь для одного числа k (для которого $\delta_{q,k}^{(n)} \neq 0$)

$$\sum_{\alpha=1}^{p_n-1} c_{n,\alpha,q} H_{jm_n+k}(t) \neq 0.$$

Поэтому будем писать

$$F_{n+1}(t) = \sum_{\alpha=1}^{p_n-1} c_{n,\alpha,q} H_{\alpha m_n+k}(t).$$

Определение. Пусть $E \subset G$ — конечное или счетное множество. Множество

$$I_E = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists t, g \in E, \quad g \in G_k \dot{+} t, \quad g \notin G_{k+1} \dot{+} t\}$$

будем называть *индексным множеством* для множества E.

Теорема 1. *Пусть*

1) *$E \subset G$ конечное или счетное непустое множество, I_E индексное множество для E;*

2) *ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ сходится к нулю всюду на $G \setminus E$;*

3) *$F_0 \equiv 0, \quad F_{k+1}(t) \equiv 0, \forall\ k \in I_E$.*

Тогда $F_n(t) \equiv 0$ для всех остальных n.

Доказанная теорема полна в том смысле, что ни от одного условия в формулировке теоремы отказаться нельзя.

Теорема 2. *Для любого непустого конечного или счетного множества $I \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует множество $E \subset G$ такое, что*

1) *его индексное множество совпадает с указанным множеством I.*

2) *$\forall\ k_0 \in I$ — фиксированного найдется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ такой, что $F_{k_0+1} \not\equiv 0$, $F_0 \equiv 0$ и $F_{k+1}(t) \equiv 0$, $\forall k \in I$, $k \neq k_0$, сходящийся к нулю всюду на $G \setminus E$ и расходящийся во всех точках множества E и при этом неверно, что все остальные $F_n(t) \equiv 0$.*

3) *найдется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ такой, что $F_0 \not\equiv 0$, $F_{k+1}(t) \equiv 0$, $\forall\ k \in I$, сходящийся к нулю всюду на $G \setminus E$ и расходящийся во всех точках множества E и при этом неверно, что все остальные $F_n(t) \equiv 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. 1. Баку : Элм, 1981

2. *Морева Н. С.* О множествах единственности кратных рядов Уолша для сходимости по двоичным кубам // Мат. заметки. 2007. Т. 81(4). С. 586–598.

3. *Lukomskii S. F.* Lebesgue constants for characters of the compact zero-dimensional Abelian group // East journal on approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 219–231.

4. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19.

УДК 517.518

ОЦЕНКА ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛА ОТНОШЕНИЯ СУММЫ РЯДА ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ЕЁ МАЖОРАНТЕ [1]

А. Ю. Попов, А. П. Солодов (Москва, РФ)

Изучается асимптотическое поведение при $x \to 0+$ суммы ряда по синусам $g(b,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, последовательность коэффициентов которого $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ монотонно стремится к нулю. В [1] доказано, что функ-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Ведущие научные школы» (проект НШ-3682.2014.1).

ция $v(b,x) = x\sum\limits_{k=1}^{[\pi/x]} kb_k$ является мажорантой $g(b,x)$ на интервале $(0,\pi)$. Это означает, что

$$\bar{l}(b) = \varlimsup_{x\to 0+} \frac{g(b,x)}{v(b,x)} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Очевидно, что в случае $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k < +\infty$ верно равенство $\bar{l}(b) = 1$ и в (1) существует обычный предел. Вопрос же о точной нижней грани $\bar{l}(b)$ до сих пор оставался открытым. Из результатов работы [2] следует, что верно неравенство: $\inf\left\{\bar{l}(b)\right\} \leqslant 2\pi^{-2}$. Мы доказали, что на самом деле имеет место равенство: $\min\left\{\bar{l}(b)\right\} = 2\pi^{-2}$. Более того, нами установлена следующая оценка снизу.

Теорема. *Для любой монотонной последовательности b существует такая последовательность положительных чисел $\{x_p\}$, $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = 0$, что при всех $p \in \mathbb{N}$ верны неравенства:*

$$g\left(b, x_p\right) > 2\pi^{-2} v\left(b, x_p\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Мат. заметки. 2003. Т. 74 (6). С. 877–888.

2. *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients mono-tones // Publl. Inst. Math. Serbe Sci. 1956. Vol. 10. P. 101–120.

УДК 517.518.2

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДЖОНА–НИРЕНБЕРГА

А. И. Порабкович, (Минск, Беларусь),
Р. В. Шанин (Одесса, Украина)
porabkovich@bsu.by, ruslanshanin@gmail.com

Пусть (X, d, μ) — пространство с квазиметрикой d (неравенство треугольника заменяется более слабым неравенством

$$d(x,y) \leqslant a_d[d(x,z) + d(z,y)]$$

с некоторой постоянной $a_d \geqslant 1$) и σ-конечной борелевской мерой μ. Для $x \in X$ и $r > 0$

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

обозначает открытый шар с центром x радиуса r. При этом мы предполагаем, что мера любого шара положительна и конечна.

Ниже считаем, что мера μ удовлетворяет условию удвоения: существует такая постоянная $a_\mu > 0$, что

$$\mu B(x, 2t) \leqslant a_\mu \mu B(x, t), \quad x \in X, \quad t > 0.$$

Обозначим Φ — класс непрерывных строго возрастающих функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ со свойствами $\varphi(0) = \varphi(+0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$ и с каждой функцией $\varphi \in \Phi$ свяжем класс $\varphi(L)(E)$, состоящий из функций, для которых $\varphi \circ f \in L^1(E)$, Φ_1 — подкласс в Φ, состоящий из функций $\varphi \in \Phi$ со свойством: существует такая постоянная a_φ, что

$$\varphi(t+s) \leqslant a_\varphi[\varphi(t) + \varphi(s)], \quad t, s > 0.$$

Введем среднюю φ-осцилляцию функции $f \in \varphi(L)(B)$ по шару $B \subset X$

$$A_\varphi(f, B) = \inf_c \varphi^{-1} \left(⨍_B \varphi(|f(x) - c|) \, d\mu(x) \right),$$

классы

$$BMO_\varphi(B_0) = \left\{ f \in \varphi(L)(B_0) : \|f\|^*_\varphi \equiv \sup_{B \subset B_0} A_\varphi(f, B) < +\infty \right\},$$

и функцию

$$\mu_\varphi(f, t) \equiv \sup \left\{ A_\varphi(f, B) : B \subset B_0, \ 0 < r_B \leqslant t \right\}.$$

В случае $\varphi(t) = t^p$, $p > 0$, будем писать просто $BMO_p(B_0)$, $\|f\|^*_p$ и $\mu_p(f, t)$, кроме того, $BMO(B_0) = BMO_1(B_0)$ и $\|f\|^* = \|f\|^*_1$. Из неравенства Гельдера следует, что $BMO_q(B_0) \subset BMO_p(B_0)$ при $0 < p < q < \infty$. На самом деле $BMO_p(B_0) = BMO(B_0)$ при $p > 0$ и полунорма $\|f\|^*_p$ эквивалентна полунорме $\|f\|^*$.

Легко видеть, существует такое число $I_B f = I^\varphi_B f \in \mathbb{R}$, что

$$A_\varphi(f, B) = \varphi^{-1} \left(⨍_B \varphi(|f(x) - I^\varphi_B f|) \, d\mu(x) \right).$$

Теорема 1. *Пусть заданы функция $\varphi \in \Phi_1$, шар $B_0 \subset X$, $f \in BMO_\varphi(B_0)$, $\Lambda > 1$. Тогда справедливы неравенства*

$$\mu\{x \in B_0 : \ |f(x) - I^\varphi_{B_0}| > \lambda\} \leqslant A\mu(B_0) \exp(-a\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Здесь

$$a = \frac{\ln \Lambda}{\varphi^{-1}\left(a_\varphi(1+c\Lambda)\varphi(\|f\|_\varphi^*)\right)}, \quad A = c\Lambda,$$

где c зависит лишь от a_d и a_μ.

Теорема 1 обобщает известное неравенство Джона–Ниренберга [1] (случай $\varphi(t) = t$ нашей теоремы).

Следствие 1. *Пусть функция $\varphi \in \Phi_1$, шар $B_0 \subset \mathbb{R}$ и функция $f \in \in BMO_\varphi(B_0)$. Тогда $f \in BMO(B_0)$ и*

$$\|f\|^* \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\ln \Lambda}\right)\varphi^{-1}(a_\varphi\,(1+c\Lambda)\,\varphi(\|f\|_\varphi^*)).$$

На самом деле, если не заботиться об оценке для $\|f\|^*$, то утверждение следствия 1 справедливо при более широких условиях на функцию φ.

Следствие 2. *Пусть $B_0 \subset X$ и возрастающая функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$. Тогда*

$$BMO_\varphi(B_0) \subset BMO(B_0).$$

Близкие результаты, но при более жестких ограничениях на функцию φ, были доказаны в [2].

Во время работы над результатами, приведенными выше, появилась также статья [3]. В ней рассматривался случай $X = \mathbb{R}^n$, μ — мера Лебега и $d(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ и были получены результаты, близкие к следствиям 1 и 2. Метод работы [3] отличен от нашего и не связан с неравенством Джона–Ниренберга. Существенным отличием наших результатов от утверждений работы [3] является то, что в ней роль $A_\varphi(f, B)$ играет величина

$$\varphi^{-1}\left(\fint_B \varphi\left(\left|f(x) - \fint_B f(y)\,dy\right|\right)\,dx\right).$$

Поэтому в [3] рассматривались лишь функции $f \in L^1(B_0)$.

Следствие 3. *Пусть функция $\varphi \in \Phi_1$, шар $B_0 \subset \mathbb{R}$ и функция $f \in \in BMO_\varphi(B_0)$. Тогда $f \in BMO(B_0)$ и*

$$\mu_1(f,t) \leqslant 2\left(1 + \frac{1}{\ln \Lambda}\right)\varphi^{-1}(a_\varphi\,(1+c\Lambda)\,\varphi(\mu_\varphi(f,t))),$$

В частности, здесь можно взять функцию $\varphi(t) = t^p$, $0 < p \leqslant 1$, тогда из следствия 3 легко вывести усиление ряда результатов типа теорем Кампанато–Мейерса (см. [4] и библиографию в этой работе) и Спанне [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14, № 2. P. 415–426.

2. *Long R., Yang L.* BMO functions in spaces of homogeneous type // Sci. Sinica, Ser. A. 1984. Vol. 27, № 7. P. 695–708.

3. *Logunov A. A., Slavin D., Stolyarov V. V., Vasyunin V., Zatitskiy P. B.* Weak integral conditions for BMO // ArXiv : 1309.6780.

4. *Иванишко И.А., Кротов В.Г., Порабкович А.И.* Обобщение теоремы Кампанато–Мейерса // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 30–35.

5. *Spanne S.* Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1965. Vol. 19, № 4. P. 593–608.

УДК 517.54

ОЦЕНКА ШВАРЦИАНА НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Пчелинцев (Томск, РФ)

VPchelintsev@vtomske.ru

Пусть S_M — класс голоморфных однолистных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $w = f(z)$ таких, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $|f(z)| < M$, $M \geqslant 1$.

Требуется найти множество D значений функционала

$$\{f, z_0\} = \frac{f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2$$

при фиксированном z_0, $z_0 \in U$, на классе S_M.

Известно, что множество D связно замкнуто ограничено [1, 2]. В отличие от работы [3], здесь задача решается параметрическим методом в основе которого лежит следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta\frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta},\ \zeta\big|_{\tau=0} = z,\ z \in U,$$

где $0 \leqslant \tau < M < \infty$, $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, — кусочно-непрерывная функция. Функция $\zeta(\tau, z) = e^{-\tau}z + ...$ однолистно и конформно отображает единичный круг в единичный круг.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f(z) \in S_M$ *и* z_0 *— фиксированная точка из круга* U. *Тогда в круге* U *справедлива точная оценка*

$$|\{f, z_0\}| + \frac{6M^2|f'(z_0)|^2}{(M^2 - |f(z_0)|^2)^2} \leqslant \frac{6}{(1 - |z_0|^2)^2},$$

где знак равенства имеет место только для функций, отображающих круг U *на круг* $W = \{w \in \mathbb{C} : |w| < M\}$ *с надлежащими разрезами.*

Граничной функцией для $\{f, z_0\} \neq 0$ в точке $z_0 = 0$ является функция

$$f_M(z, \varphi, \lambda) = \frac{2z}{h(z, \varphi, \lambda) + \sqrt{h^2(z, \varphi, \lambda) - \dfrac{4}{M^2} e^{2i\varphi} z^2}},$$

где

$$h(z, \varphi, \lambda) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) \cos\lambda \, e^{i\varphi} z + e^{2i\varphi} z^2$$

при $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Под радикалом понимается та непрерывная ветвь, которая обращается в единицу при $z \to 0$.

Из способа построения функции $f_M(z, \varphi, \lambda)$ следует, что она отображает круг U на круг W, из которого удалены два отрезка от точек

$$e^{-i\varphi} M^2 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cos\lambda \; - \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cos\lambda \right)^2 - \frac{1}{M^2}} \right\}$$

и

$$-e^{-i\varphi} M^2 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{M}\right) \cos\lambda \; - \sqrt{\left(1 - \left(1 + \frac{1}{M}\right) \cos\lambda \right)^2 - \frac{1}{M^2}} \right\}$$

до точек $e^{-i\varphi} M$ и $-e^{-i\varphi} M$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск : Том. гос. ун-т, 2001. 220 с.

2. *Александров И. А., Пчелинцев В. А.* Множество значений производной Шварца // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2010. № 3(11). С. 5–12.

3. *Аленицын Ю. Е.* Об однолистных функциях в многосвязных областях // Матем. сб. 1956. Т. 39(81), № 3. С. 315–336.

УДК 517.53

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ОЦЕНКА ОСТАТКА[1]

А. К. Рамазанов (Калуга, РФ)
akramazanov@mail.ru

Пусть функция $f(z)$ определена на системе попарно различных узлов $z_0, z_1, \ldots$ Тогда её значения в этих узлах назовем обратными разностями нулевого порядка и обозначим их через $f^{-}(z_k) = f(z_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, а через $f^{-}(z_k, \ldots, z_s, z_n, z_l)$ обратные разности функции $f(z)$ более высокого порядка, которые определяются по рекуррентным соотношениям (см. [1]).

Рассмотрим следующую задачу: для попарно различных узлов $z_0, z_1, \ldots, z_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и заданных в них значений $f(z_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, найти рациональную функцию $R(z)$ в виде подходящей дроби n-го порядка

$$R(z) = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} \underset{}{+} \frac{z - z_1}{b_2} + \cdots + \frac{z - z_{k-1}}{b_k},$$

непрерывной дроби Тиле, для которой выполняются равенства

$$R(z_\nu) = f(z_\nu)\ (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Достаточное условие существования такой рациональной функции доказано [1], а необходимое условие — в [2], при этом $b_j = f^{-}(z_0, z_1, \ldots, z_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$. Для попарно различных узлов $z_0, z_1, \ldots, z_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ в [2] получено выражение для остатка от замены функции $f(z)$ её интерполяционной рациональной функцией $R(z)$ в виде подходящей дроби n-го порядка непрерывной дроби Тиле.

Рассмотрим теперь случай, когда все узлы интерполирования совпадают между собой.

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z = 0$ комплексной плоскости и пусть для произвольных $z_0, z_1, \ldots, z_n$ из этой окрестности определена обратная разность $f^{-}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Для краткости введем обозначения предела и повторных пределов следующих видов:

$$f_n^{-} = \lim_{z_n \to 0} \lim_{z_{n-1} \to 0} \ldots \lim_{z_0 \to 0} f^{-}(z_0, z_1, \ldots, z_n);$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952).

$$f_n^-(z) = \lim_{z_{n-1}\to 0} \lim_{z_{n-2}\to 0} \dots \lim_{z_0\to 0} f^-(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z)$$

Значит, при каждом n $(n = 0, 1, \dots)$ выполняется равенство

$$\lim_{z\to 0} f_n^-(z) = f_n^-,$$

а поэтому при условии существования $f_n^- \neq 0$ существует $\lim\limits_{z\to 0} f_n^-(z) \neq 0$.

В принятых выше обозначениях имеет место

Теорема. *Пусть для функции $f(z)$, определенной в некоторой окрестности G нуля $z = 0$, существуют отличные от нуля предельные значения обратных разностей в нуле $f_0^-, f_1^-, \dots, f_n^-, \dots$ и пусть $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ — подходящая дробь порядка n $(n = 0, 1, \dots)$ непрерывной дроби*

$$f_0^- + \frac{z}{f_1^-} + \frac{z}{f_2^-} + \dots + \frac{z}{f_n^-} + \dots \tag{1}$$

Тогда при каждом n $(n = 0, 1, \dots)$ в каждой точке $z \in G$, в которой существует отличное от нуля значение $f_{n+1}^-(z)$, выполняется равенство

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{z^{n+1}}{f_1^-(z) \sum\limits_{m=0}^{n} (-1)^m z^{n-m} \prod\limits_{\nu=1}^{m} f_\nu^-(z) f_{\nu+1}^-(z)}. \tag{2}$$

Непостредственно из равенства (2) вытекает

Следствие. *В условиях теоремы выполняется соотношение эквивалентности*

$$f(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \sim (-1)^n \frac{f(0)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu^- f_{\nu+1}^-} z^{n+1} \quad (z \to 0). \tag{3}$$

Отметим также, что при любом $m = 0, 1, \dots$ у подходящей дроби $\dfrac{P_{2m}(z)}{Q_{2m}(z)}$ порядка $2m$ непрерывной дроби (1) числитель $P_{2m}(z)$ и знаменатель $Q_{2m}(z)$ — полиномы относительно z степени m, а у подходящей дроби $\dfrac{P_{2m+1}(z)}{Q_{2m+1}(z)}$ порядка $2m + 1$ числитель $P_{2m+1}(z)$ — полином степени $m + 1$, а знаменатель $Q_{2m+1}(z)$ — полином степени m.

Следовательно, из соотношения (3) вытекает, что последовательности $\dfrac{P_{2m}(z)}{Q_{2m}(z)}$ и $\dfrac{P_{2m+1}(z)}{Q_{2m+1}(z)}$ подходящих дробей четных и нечетных порядков непрерывной дроби (3) в условиях теоремы представляют собой соответственно диагональную $\pi_{m,m}(z;f)$ и наддиагональную $\pi_{m+1,m}(z;f)$ последовательности аппроксимаций Паде функции $f(z)$ относительно точки $z=0$; при этом выполняются соотношения:

$$f(z)-\pi_{m,m}(z;f)\sim\frac{f(0)}{\prod\limits_{\nu=0}^{2m} f_\nu^- f_{\nu+1}^-}z^{2m+1}\quad(z\to 0),$$

$$f(z)-\pi_{m+1,m}(z;f)\sim-\frac{f(0)}{\prod\limits_{\nu=0}^{2m+1} f_\nu^- f_{\nu+1}^-}z^{2m+2}\quad(z\to 0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М. : Мир, 1985.

2.*Рамазанов А.К.* О существовании интерполяционной рациональной дроби// Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2013. Т. 46. С. 378–380.

УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. М. Расулов (Смоленск, РФ)
kahrimanr@yandex.ru

Пусть T^+ — конечная, односвязная область на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная замкнутым контуром Ляпунова L.

Класс аналитических в области T^+ функций $F(z)$, непрерывно (в смысле Гельдера) продолжающихся на контур L, будем обозначать символом $A(T^+)\cap H(L)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. *Требуется найти все аналитические в области T^+ функции $F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ класса $A(T^+)\cap H(L)$, удовлетворяющие на L условию*

$$F^+[\alpha(t)]=A(t)F^+(t)+B(t)\overline{F^+(t)}+h(t),\tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ — заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера), $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)]=t,\tag{2}$$

причем $\alpha'(t)\neq 0$ и *$\alpha'(t)\in H(L)$.*

Сформулированную задачу (1), (2) будем называть *задачей* $\mathbf{K}_3$.

В монографии Г.С. Литвинчука [1] (с. 294–318) построена теория Нетера для трехэлементной задачи $\mathbf{K}_3$ при различных предположениях относительно коэффициентов $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ и функции сдвига $\alpha(t)$. В частности, в [1] установлено, что краевое условие (1) задачи $\mathbf{K}_3$ легко приводится к виду

$$A_1(t)F^+(t) = B_1(t)\overline{F^+(t)} + h_1(t), \tag{3}$$

где

$$A_1(t) = 1 - A(t) \cdot A[\alpha(t)] - \overline{B(t)} \cdot B[\alpha(t)], \tag{4}$$

$$B_1(t) = A[\alpha(t)] \cdot B(t) + \overline{A(t)} \cdot B[\alpha(t)], \tag{5}$$

$$h_1(t) = A[\alpha(t)] \cdot h(t) + B[\alpha(t)] \cdot \overline{h(t)} + h[\alpha(t)]. \tag{6}$$

Следовательно, если на контуре L *выполняются* условия

$$A_1(t) \neq 0,\ B_1(t) \neq 0,\ h_1(t) \neq 0, \tag{7}$$

то *трехэлементная задача* $\mathbf{K}_3$ «вырождается» в хорошо исследованную *двухэлементную* краевую задачу вида (3).

Предположим теперь, что на контуре L выполняются тождества

$$A_1(t) \equiv 0,\ B_1(t) \equiv 0,\ h_1(t) \equiv 0. \tag{8}$$

Известно (см., например, [1, с. 296]), что из условий (8) следует, что коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ всюду на контуре L удовлетворяют одному из следующих неравенств:

$$|B(t)| > |A(t)| \text{ или } |A(t)| > |B(t)|\,. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что, при выполнении условий (8), каждое из неравенств (9) может реализоваться в следующих трех вариантах:

$$|B(t)| > |A(t)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{а) } |B(t)| > 0 \text{ и } A(t) \equiv 0, \\ \text{б) } |B(t)| > |A(t)| > 0, \\ \text{в) } |B(t)| > 0 \text{ и } A(t) \text{ обращается в нуль} \\ \text{в некоторых точках контура } L; \end{array}\right.$$

$$|A(t)| > |B(t)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{а) } |A(t)| > 0 \text{ и } B(t) \equiv 0, \\ \text{б) } |A(t)| > |B(t)| > 0, \\ \text{в) } |A(t)| > 0 \text{ и } B(t) \text{ обращается в нуль} \\ \text{в некоторых точках контура } L; \end{array} \right.$$

Ясно, что когда в предыдущих неравенствах реализуется вариант а) задача $\mathbf{K}_3$ также сводится к хорошо изученным (см., например, [1]) *двух-элементным* краевым задачам вида

$$F^+[\alpha(t)] = B(t)\overline{F^+(t)} + h(t) \quad \text{или} \quad F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + h(t).$$

Насколько нам известно, до сих пор не был получен общий метод решения задачи $\mathbf{K}_3$ в *невырожденном случае* (т.е. при выполнении условий (8)) и когда неравенства (9) реализуются в вариантах б) или в). Поэтому основной целью настоящего сообщения является *разработка общего метода решения задачи* $\mathbf{K}_3$ *в невырожденном случае* (который мы называем «*методом интегральных ловушек*»).

В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $L = \{t : |t| = 1\}$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, так как общий случай с помощью конформного отображения всегда можно привести к этому.

Один из основных результатов, полученных в данном сообщении, можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема А. *Пусть* $\alpha(t)$ *— прямой сдвиг контура* L*, удовлетворяющий условию* (2)*, всюду на этом контуре выполняются условия* (8) *и одно из неравенств*

$$|A(t)| > |B(t)| > 0 \quad \textit{или} \quad |B(t)| > |A(t)| > 0. \tag{10}$$

Тогда решение задачи $\mathbf{K}_3$ сводится к решению системы интегральных уравнений типа Фредгольма

$$\begin{cases} (N\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int\limits_L n_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_L \overline{n_2(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau} = q(t), \\ (M\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int\limits_L m(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \omega(t), \end{cases} \tag{11}$$

где $n_1(t,\tau)$*,* $n_2(t,\tau)$*,* $m(t,\tau)$ *— фредгольмовы ядра, а* $q(t)$ *и* $\omega(t)$ *— функции, удовлетворяющие условию Гельдера, которые вполне определяются по коэффициентам краевого условия задачи* $\mathbf{K}_3$*. При этом, если* $\chi_2 \geqslant \chi_1$*,* *где $\chi_1 = Ind\,A(t)$ и $\chi_2 = Ind\,B(t)$, то для разрешимости задачи $\mathbf{K}_3$ необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений* (11)*; если же $\chi_2 < \chi_1$, то для разрешимости задачи $\mathbf{K}_3$ необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система интегральных уравнений* (11) *и для решений $\varphi(t)$ этой системы выполнялись $\chi_1 - \chi_2 - 1$ условий вида*

$$\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{A(t)X^+(t)} t^{k-1} dt = -\int\limits_L \frac{h(t)}{A(t)X^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, ..., \chi_1 - \chi_2 - 1, \quad (14)$$

где $X^+(t)$ — граничное значение канонической функции однородной задачи Римана вида $F^+(t) = -\dfrac{B(t)}{A(t)} F^-(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.

УДК 517.984

О НОРМАХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий, Е. В. Дирвук
(Гродно, Беларусь)
rovba@grsu.by, k_smotritski@mail.ru, dirvuk@gmail.com

Использование интерполяционных функций в качестве аппарата приближения является одним из классических методов теории рациональной аппроксимации как со свободными так и с фиксированными полюсами. При этом, как следует из неравенства Лебега, исследование существенным образом опирается на норму соответствующего оператора. Отдельной проблемой является проблема описания свойств интерполяционных функций, когда некоторые узлы заранее фиксируются. Ранее авторами была найдена норма интерполяционной функции Лагранжа в пространстве квадратично суммируемых функций с фиксированными узлами на обоих концах отрезка интерполирования [1]. В данной работе исследуются подобные задачи, когда фиксируется лишь один из концов отрезка.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l, что $a_l = \overline{a_k}$; 3) $a_1 = 0$.

При указанном выборе параметров синус-дробь Чебышёва–Маркова

$$N_n(x) = \frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1;1],$$

$$\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x},$$

имеет $n-1$ нуль x_k, $k = 1, \ldots, n-1$, на отрезке $[-1, 1]$.

Для произвольной функции $f \in C[-1;1]$ через $L_n^{(1)}(x;f)$ обозначим интерполяционную функцию Лагранжа с узлами в точках x_k, $k = 1, \ldots, n-1$ и $x_0 = 1$. Несложные вычисления позволяют показать, что

$$L_n^{(1)}(x;f) = \frac{f(1)N_n(x)}{\lambda_n(1)} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} f(x_k) \frac{(1+x_k)(1-x)N_n(x)}{\lambda_n(x_k)(x-x_k)}.$$

Теорема. *Для любой функции $f \in C[-1;1]$ имеет место соотношение:*

$$\int_{-1}^{1} |L_n^{(1)}(x;f)|^2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \pi \left(\frac{f^2(1)}{\lambda_n(1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^2(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \right).$$

На основании указанной теоремы вычислена норма оператора $L_n^{-1} : C[-1,1] \to L_2(\rho; [-1,1])$, где $\rho(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$, а также доказана сходимость соответствующего интерполяционного процесса.

Аналогичные результаты получены и для некоторых других интерполяционных процессов с фиксированными узлами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышёва–Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.

УДК 517.938

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ

А. И. Рубинштейн, Д. С. Теляковский (Москва, РФ)
dtelyakov@mail.ru

В ряде статей и монографий (см. например [1–4], там же можно найти и обширную библиографию) рассматриваются динамические системы, являющиеся траекториями в биллиардах различной формы. Ещё в тридцатых годах двадцатого века используя экстремальные свойства длин биллиардных траекторий Дж. Биркгоф показал ([2], стр. 97–98), что в любом выпуклом плоском биллиарде с гладкой границей при каждом натуральном $n \geqslant 2$ существует периодическая n-звенная биллиардная траектория. Пример такой траектории даёт вписанная в границу области замкнутая ломаная наибольшей длины с $k \leqslant n$ звеньями. Решением же задачи Фаньяно ([2], стр. 99) о нахождении в треугольнике (необходимо остроугольном) трёхзвенной биллиардной траектории, является вписанный треугольник наименьшего периметра. С ростом n число периодических траекторий растёт даже для простейших биллиардов типа эллиптических. Вместе с тем вопрос о числе таких траекторий и об их длине остался в стороне даже при малых n.

Рассмотрим биллиардные траектории в эллипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ при $a \neq b$. Для $n=3$ элементарными способами устанавливается, что переодическими оказываются четыре траектории равной длины, являющиеся равнобедренными треугольниками и только они. Вершины одного из этих треугольников находятся в точках с координатами $(-a;0)$, $(x_0;y_0)$, $(x_0;-y_0)$, где $x_0:=\dfrac{a^3}{b^2+\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}$; $y_0:=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$, вершины другого в точках, симметричных этим относительно оси Oy и ещё два треугольника имеют вершины в точках, полученных из вершин этих двух треугольников при замене a на b и b на a.

Если $n=4$, то при любых соотношениях между a и b очевидными биллиардными траекториями являются ромб с вершинами в вершинах эллипса и прямоугольник с вершинами в точках касания эллипса со сторонами описанного вокруг эллипса квадрата, диагонали которого лежат на осях эллипса. Длина этих траекторий одинакова. Но при $a>\sqrt{2}b$, т.е. если радиус кривизны эллипса в вершинах малой оси прехосходит её длину, появляются ещё две симметричные возвратные V-образные траектории. У этих траекторий каждое звено проходится 2 раза в противоположных направлениях, а начальное и конечное звенья ортогональны границе области. Длина этих траекторий уже другая (она меньше, чем у ромба или у прямоугольника). При $a \leqslant \sqrt{2}b$ эти V-образные траектории вырождаются в двухзвенную траекторию минимальной длины, совпадающую с малой осью эллипса.

Радиус кривизны R эллипса в вершинах его малой оси (считаем, что $a>b$) равен $\dfrac{a^2}{b}$. Показано, что если $R>kb$, $k \in \mathbb{N}$, то для каждого натурального $n \leqslant k$ в эллипсе существуют возвратные траектории с $2n$ звеньями.

Некоторые аналогичные результаты установлены и для выпуклых гладких биллиардов с двумя перпендикулярными осями симметрии.

Получены элементарные решения задачи Фаньяно, не использующие свойство экстремальности длины биллиардных траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биркгоф Г.* Динамические системы. М.; Л. : ОГИЗ, 1941.

2. *Гальперин Г. А., Земляков А. Н.* Математические бильярды. М. : Наука, ГРФМЛ, 1990. (Библиотечка журнала «Квант», выпуск 77).

3. *Табачников С.* Геометрия и биллиарды. М.; Ижевск, 2011. Библиотека журнала «Регулярная и хаотическая динамика».

4. *Чернов Н., Маркарян Р.* Хаотические биллиарды. М.; Ижевск, 2012. Библиотека журнала «Регулярная и хаотическая динамика».

УДК 517.927.25

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, РФ)
RykhlovVS@yandex.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями вида

$$\sum_{s+k\leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{s+k\leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\leqslant \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная $(1 \leqslant m \leqslant n)$ полнота системы собственных и присоединенных или, по-другому, корневых функций (к.ф.) этого пучка в пространстве $L_2[0,1]$. Историю вопроса можно посмотреть, например, в [1]–[2].

Отметим, что краевые условия (2)–(3) в случае $2l < n$ не являются полураспадающими.

Будем называть i-ое краевое условие (2) однородным, если в сумме участвуют только слагаемые с номерами s и k, для которых $s+k = \varkappa_{i0}$.

Пусть краевые условия (2)–(3) упорядочены таким образом (это не нарушает общность), что при $s_0 = l$, $s_{r+1} = n$ справедливы неравенства

$$\varkappa_{s_0+1,1} - \varkappa_{s_0+1,0} = \dots = \varkappa_{s_1 1} - \varkappa_{s_1 0} < \dots <$$
$$< \varkappa_{s_r+1,1} - \varkappa_{s_r+1,0} = \ldots = \varkappa_{s_{r+1}1} - \varkappa_{s_{r+1}0}$$

и γ, δ таковы, что

$$s_\gamma + 1 \leqslant h+1 \leqslant s_{\gamma+1}, \qquad s_\delta + 1 \leqslant n-h+1 \leqslant s_{\delta+1}. \tag{4}$$

Предположим, что $\omega_j = r_j e^{i\psi_j}$, $j=\overline{1,n}$, — корни характеристического уравнения $\sum\limits_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$ и при этом

$$0 \leqslant \psi_{\nu_0+1} = \dots = \psi_{\nu_1} < \psi_{\nu_1+1} = \dots = \psi_{\nu_2} < \dots$$
$$\dots < \psi_{\nu_{\eta-1}+1} = \dots = \psi_{\nu_\eta} < 2\pi,$$

где $\nu_0 = 0$, $\nu_\eta = n$. Пусть корни $\{\omega_j\}$ простые и отличны от нуля.

Введем следующее условие

1°. *Для фиксированного $\alpha \in [0,2\pi)$ пусть π — перестановка множества $\{1,2,\dots,n\}$ и $h \in \{1,2,\dots,n\}$ такие, что*

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\omega_{\pi(1)}\right) < \dots < \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\omega_{\pi(h)}\right) < 0 <$$
$$< \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\omega_{\pi(h+1)}\right) < \dots < \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\omega_{\pi(n)}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega^k_{\pi(j)},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n};$$
$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega^k_{\pi(j)},\ i=\overline{l+1,n},\ j=\overline{1,n};$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \quad i = \overline{l+1, n};$$
$$[n]_+ = \max\{n, 0\}, \quad [n, m]_- = \min\{n, m\},$$

$$a_1 = \det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}}, \quad a_2 = \det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}},$$
$$b_1 = \det(a_{ij})_{i=\overline{l+1,l}}^{j=\overline{l+1,n}}, \quad b_2 = \det(a_{ij})_{i=\overline{l+1,l}}^{j=\overline{1,n-l}},$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \\ a_{s_\gamma,1} & \dots & a_{s_\gamma,h} & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_\gamma+1,1} & \dots & a_{s_\gamma+1,h} & b_{s_\gamma+1,h+1} & \dots & b_{s_\gamma+1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nh} & b_{n,h+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,h+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_\delta,h+1} & \dots & a_{s_\delta,n} \\ b_{s_\delta+1,1} & \dots & b_{s_\delta+1,h} & a_{s_\delta+1,h+1} & \dots & a_{s_\delta+1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nh} & a_{n,h+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Наряду с условием 1°, введем еще одно условие

2°. а) *При* $h \leqslant l$ *пусть* $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$;

б) *При* $h > l$ *пусть* $A \neq 0$;

в) *При* $h \geqslant n - l$ *пусть* $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$;

г) *При* $h < n - l$ *пусть* $B \neq 0$.

Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda) d_j = 0, \quad i = \overline{1, l}.$$

отнсительно вектора $(d_1, \dots, d_n)^T$.

Это система полного ранга, если выполняется условие 2°. Пусть базис пространства решений системы есть $(d_{s1}(\lambda), d_{s2}(\lambda), \dots, d_{sn}(\lambda))^T$, $s = \overline{1, n-l}$. Не нарушая общности можно считать $d_{sj}(\lambda)$ многочленами по λ.

Составим матрицы

$$D_j(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{1,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \dots & d_{1,\nu_j}(\lambda) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ d_{n-l,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \dots & d_{n-l,\nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \eta}.$$

Очевидно, что если краевые условия (2) однородны, то матрицы $D_j(\lambda)$ не зависят от λ. Обозначим через $m = \sum\limits_{j=1}^{\eta} \operatorname{rank} D_j$.

Теорема 1. *Если при некотором* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *выполняются предположения* $1^\circ - 2^\circ$ *и* $m = n$, *то система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [n - 1 - \varkappa_i]_+$.

Очевидно, что $m = n$ только тогда, когда $\operatorname{rank} D_j = \nu_j - \nu_{j-1}$.

Теорема 2. *Если при некотором* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *выполняются предположения* $1^\circ - 2^\circ$, $m = n$ *и краевые условия* (2) *однородны, то система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$.

Теорема 3. *Если при некотором* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *выполняются предположения* $1^\circ - 2^\circ$, $m < n$ *и краевые условия* (2) *однородны, то система к.ф. пучка* $L(\lambda)$ k*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *при* $k \leqslant m$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [k - 1 - \varkappa_i]_+$.

Список литературы

1. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота собственных функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка // Исследования по теории операторов: сб. статей / БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1988. С. 128–140.

2. *Рыхлов В. С., Парфилова О. В.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 45–58.

УДК 517.54

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА И ГАРМОНИЧЕСКИЕ МЕРЫ РАЗРЕЗА ОБЛАСТИ

К. А. Самсонова (Саратов, РФ)
kris_ruzhik@mail.ru

На протяжении многих лет дифференциальное уравнение Левнера служило мощным средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. Обнаруженные связи теории Левнера со многими разделами математики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях. Уравнение Левнера для верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ появилось значительно позднее и стало особенно популярным в последние десятилетия. Пусть функция $w = f(z,t)$, $z \in \mathbb{H}$, $t \geqslant 0$, имеющая в окрестности бесконечно удаленной точки представление

$$f(z,t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty, \tag{1}$$

отображает $\mathbb{H} \setminus K_t$, $K_t \subset \mathbb{H}$, на $\mathbb{H}$ и является решением обыкновенного дифференциального уравнения Левнера для верхней полуплоскости

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \lambda(t)}, \quad f(z,0) = z, \quad z \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией $\lambda(t)$.

Конформные отображения $f(z,t)$ допускают непрерывное продолжение на множество всех точек $z \in \mathbb{R}$, не принадлежащих замыканию множества K_t. Продолженные таким образом отображения $f(z,t)$ удовлетворяют уравнению (2). Давняя задача заключается в том, чтобы определить в терминах λ случаи, когда K_t оказывается жордановой дугой $\gamma(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, с начальной точкой $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. В этом случае $\gamma(t)$ является разрезом полуплоскости $\mathbb{H}$, а $f(z,t)$ непрерывно продолжается на множество достижимых граничных точек на обеих сторонах разреза $\gamma(t)$,

$$\lambda(t) = f(\gamma(t),t), \quad \gamma(t) = f^{-1}(\lambda(t),t).$$

Точки $\gamma(t)$ рассматриваются как носители простых концов, различных на разных сторонах дуги. Известны примеры управляющих функций в уравнении Левнера, которые генерируют отображения $\mathbb{H} \setminus K_t \to \mathbb{H}$ с круговыми двуугольниками K_t. Для классического уравнения Левнера подобный пример построен Куфаревым. Его аналог (2) для верхней полуплоскости возникает при $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$.

Линейным преобразованиям управляющей функции $\lambda(t)$ соответствуют определенные преобразования решений уравнения (2). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda(0) = 0$.

В настоящей работе исследуется качественное асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения (2), генерируемых управлениями, обратными к степенной функции с натуральной степенью. Управляющая функция $\lambda(t) = \sqrt[N]{t}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$, выбрана как типичный представитель класса $\mathrm{Lip}(1/N)$. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{df(z,t)}{dt} = \frac{2}{f(z,t) - \sqrt[N]{t}}, \quad f(z,0) = z, \quad \mathrm{Im}\, z \geqslant 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \geqslant 3. \tag{3}$$

Тогда для достаточно малых $t>0$ $f(\cdot,t)$ отображает область $D(t)=$ $=\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ на $\mathbb{H}$, где $\gamma(t)$ является C^1-кривой, лежащей в $\mathbb{H}$, за исключением, быть может, точки $\gamma(0)=0$.

Если сделать замену переменных $t\to\tau^N$, $g(z,\tau):=f(z,\tau^N)$, тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{dg(z,\tau)}{d\tau}=\frac{2N\tau^{N-1}}{g(z,\tau)-\tau},\ \ g(z,0)=z,\ \operatorname{Im}z\geqslant 0. \tag{4}$$

Если $z\neq 0$, то $g(z,0)\neq 0$ и существует регулярное решение $g(z,\tau)$ уравнения (4), голоморфное относительно τ при достаточно малых $|\tau|$, единственное для каждого $z\neq 0$. Сингулярные решения уравнения (4) не удовлетворяют условиям единственности. Каждая точка $(g(z_0,\tau_0),\tau_0)$ такая, что $g(z_0,\tau_0)=\tau_0$, является сингулярной точкой для уравнения (4). Если $\tau_0\neq 0$, то точка $(g(z_0,\tau_0),\tau_0)$ называется алгебраической критической точкой решения $g(z,\tau)$. В этом случае соответствующие сингулярные решения уравнения (4) разложимы в ряды по степеням $(\tau-\tau_0)^{\frac{1}{m}}$, $m\in\mathbb{N}$, в окрестности точки $\tau=\tau_0$.

Точка $(g(z_0,\tau_0),\tau_0)=(0,0)$ является единственной сингулярной точкой неопределенного характера, для которой числитель и знаменатель в правой части уравнения (4) обращаются в нуль одновременно.

Будем искать решения уравнения (4), которые бесконечно дифференцируемы относительно действительной переменной τ. Рекуррентные оценки тейлоровских коэффициентов позволяют отыскать сингулярные решения при условии, что получившийся ряд будет иметь положительный радиус сходимости.

Функция $f(z,t)$, являющаяся решением уравнения (3), отображает область $\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ на $\mathbb{H}$. Точки двух сторон разреза $\gamma(t)$ считаются различными граничными точками области. Обозначим через $\gamma_1=\gamma_1(t)$ ту сторону γ, которая отображается продолженной функцией $f(z,t)$ на сегмент $I_1=[\sqrt[N]{t},f_1(0,t)]$, а через $\gamma_2=\gamma_2(t)$ – сторону γ, которая является прообразом $I_2=[f_2(0,t),\ \sqrt[N]{t}]$ при отображении функцией $f(z,t)$.

Напомним, что гармонические меры $\omega(f^{-1}(i,t);\gamma_k,\mathbb{H}\setminus\gamma(t),t)$ дуг γ_k в точке $f^{-1}(i,t)$ относительно области $\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ определяются функциями ω_k, которые являются гармоническими в области $\mathbb{H}\setminus\gamma(t)$ и непрерывно продолжаются на ее замыкание, за исключением концевых точек кривой γ, $\omega_k|_{\gamma_k(t)}=1$, $\omega_k|_{\mathbb{R}\bigcup(\gamma(t)\setminus\gamma_k(t))}=0$, $k=1,2,$. Обозначим

$$m_k(t):=\omega(f^{-1}(i,t);\gamma_k,\mathbb{H}\setminus\gamma(t),t),\quad k=1,2.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 *Пусть функция $f(z,t)$ является решением уравнения Левнера* (3). *Тогда справедливо асимптотическое соотношение*

$$\lim_{t\to+0}\frac{m_1(t)}{m_2^{N-1}(t)}=2N\pi^{N-2}. \qquad (5)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // J. Math. Ann. 1923. Vol. 89, № 1–2. P. 103-–121.

2. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М. : Наука. 1976.

3. *Lind J., Marshall D. E., Rohde S.* Collisions and spirals of Loewner traces // Duke Math. J. 2010. Vol. 154(3). P. 527-–573.

4. *Прохоров Д. В., Захаров А. М.* Интегрируемость частного вида уравнения Лёвнера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 19–23.

5. *Marshall D. E., Rohde S.* The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 18, № 4. P. 763–778.

6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М. : Наука. 1966.

УДК 517.95

КРИТЕРИЙ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

А. В. Светлов (Волгоград, РФ)
a.v.svetlov@gmail.com

Рассмотрим полное риманово многообразие M, представимое в виде $B\cup D$, где B — компактное мноогообразие, а конец D изометричен произведению $\mathbf{I}\times \mathrm{S}_1\times \mathrm{S}_2\times\dots\times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{I}=(r_0,d)$ — конечный или бесконечный интервал, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2=q_0^2(r)dr^2+q_1^2(r)d\theta_1^2+\dots+q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97038-р_поволжье_а).

где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — C^1-гладкие положительные на $\mathbf{I}$ функции, причем $q_0(r)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{r_0}^{d} q_0(r)dr = +\infty$$

для обеспечения полноты многообразия D. Считаем, что размерность $\dim \mathrm{S}_i = n_i$, и введем обозначение $s(r) = q_1^{n_1}(r) \cdot \dots \cdot q_k^{n_k}(r)$. Заметим, что такие многообразия являются простым обобщением искривленных произведений порядка k, поведение решений различных эллиптических уравнений на которых достаточно подробно изучено А. Г. Лосевым, Е. А. Мазепой (см., напр., [1, 2]) и другими авторами.

Рассмотрим на многообразии M оператор Шредингера

$$L = -\mathrm{div}\nabla + c(r).$$

Для полуограниченности оператора L будем считать, что существует некоторая $K = \mathrm{const}$, такая что $c(r) \geqslant -K$. Кроме того, потребуем, чтобы функция $c(r)$ была абсолютно интегрируемой на любом (конечном) интервале из $\mathbf{I}$.

Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности. Для случая оператора Шредингера на обычном искривленном произведении порядка k известен критерий дискретности спектра при наложении некоторых условий на потенциал и метрику многообразия, в том числе, на весовых многообразиях — см. [3, 4]. В настоящей работе получен аналогичный результат на несколько ином классе многообразий.

Далее нам потребуется еще одно обозначение:

$$F(r) = c(r) + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Если $F(r) > -C$ $(C = \mathrm{const} > 0)$, то для дискретности спектра оператора Шредингера L на многообразии M необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r \to d} \int\limits_{r(\rho)}^{r(\rho+\omega)} q_0(t)F(t)dt = +\infty,$$

где функция $r(\rho)$ определяется из соотношения $\rho(r) = \int\limits_{r_0}^{r} q_0(t)dt$.

Нетрудно видеть, что в случае обычного искривленного произведения порядка k, т. е. $d = +\infty$, $q_0(r) = 1$, теорема утверждает, что для дискретности спектра оператора Шредингера необходимо и достаточно, чтобы среднее значение функции $F(r)$ на бесконечности стремилось к бесконечности, что совпадает с результатами [3, 4], а также соответствует известному критерию дискретности спектра А. М. Молчанова на прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87—93.

2. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шредингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, вып. 1. С. 84—110.

3. *Светлов А. В.* Условия дискретности спектра оператора Шредингера // Труды по геометрии и анализу. Новосибирск : Изд-во ин-та математики, 2003. С. 376-–383.

4. *Svetlov A. V.* Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds // IJPAM. 2013 (в печати).

УДК 517.982

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЕСОВОГО КЛАССА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ[1]

Т. Ю. Семенова (Москва, РФ)
station@list.ru

Пусть ϕ — измеримая неотрицательная функция, определенная на отрезке $[0,1]$. Введем следующие обозначения: $W^1_{\infty,\phi}$ — класс функций, определенных на отрезке $[0,1]$, абсолютно непрерывных и удовлетворяющих условию $|f'(x)| \leqslant \phi(x)$ почти всюду на $[0,1]$; $M_{N,k}$ — класс непрерывных N-звенных ломаных, удовлетворяющих условию $|l'(x)| \leqslant k$ почти всюду на $[0,1]$; $M_{N,k,T}$ — подмножество $M_{N,k}$, содержащее ломаные с фиксированным набором узлов $T = \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1\}$.

Рассмотрим задачу приближения функций весового класса Соболева $W^1_{\infty,\phi}$ функциями из множества $M_{N,k}$ и из множества $M_{N,k,T}$. То есть оценим величины $E_{N,k} = E(W^1_{\infty,\phi}, M_{N,k}) = \sup\limits_{f\in W^1_\infty} \inf\limits_{l\in M_{N,k}} \|f-l\|_\infty$ и $E_{N,k,T}$, определяемую аналогичным образом.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).

Теорема. *Пусть $\phi \in L_1[0,1] \cap L_\infty[0,1]$ и пусть $k \geqslant \|\phi\|_\infty$. Тогда выполнены неравенства*

$$E_{N,k} \leqslant \frac{\|\phi\|_1}{N} \quad \text{и} \quad E_{N,k,T} \leqslant \max_{i=1,\dots,N} \{\|\phi\|_{1,[x_{i-1},x_i]}\}.$$

Данная задача тесно связана с задачами оценки поперечников Колмогорова и поперечников Коновалова, рассмотренных в работах [1]–[3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 3. С. 369–380.

2. *Субботин Ю. Н., Теляковский С. А.* Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 871–879.

3. *Васильева А. А.* Оценки поперечников весовых соболевских классов // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 7. С. 15–52.

УДК 517.51

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МЕТОДОВ, СОХРАНЯЮЩИХ K-ВЫПУКЛОСТЬ[1]

С. П. Сидоров (Саратов, РФ)

SidorovSP@info.sgu.ru

Пусть D^i означает оператор дифференцирования порядка i, $D^i f(x) = \frac{d^i f}{dx^i}$, и $D^0 = I$ есть тождественный оператор.

Обозначим $C^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, пространство всех действительнозначных k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[0,1]$, с субнормой

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \frac{1}{i!} \sup_{x\in[0,1]} |D^i f(x)|, \tag{1}$$

где производные являются правосторонними в точке 0 и левосторонними в точке 1. $B^k[0,1]$, $k \geqslant 0$, будет означать пространство всех действительнозначных функций, определенных на $[0,1]$, имеющих ограниченную производную порядка k, с субнормой (1).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Говорят, что функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ является k-выпуклой, $k \geqslant 1$, на $[0,1]$, если для произвольно выбранных $k+1$ различных точек $t_0, \ldots, t_k$ из $[0,1]$, имеет место неравенство

$$[t_0, \ldots, t_k]f \geqslant 0,$$

где $[t_0, \ldots, t_k]f$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_k \leqslant 1$.

Класс всех k-выпуклых функций на $[0,1]$ обозначим $\Delta^k[0,1]$. Если $f \in C^k[0,1]$, тогда $f \in \Delta^k[0,1]$ в том и только том случае, когда $f^{(k)}(t) \geqslant 0$, $t \in [0,1]$. Положим $\Delta^0[0,1] := \{f \in C[0,1] : \ f(t) \geqslant 0, \ t \in [0,1]\}$. Обозначим $e_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \ldots$, $\Pi_m := \operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$, $P_m := \{f \in \Pi_m : \ \|f\|_{B^m[0,1]} \leqslant 1\}$.

Напомним, что линейный оператор, отображающий $C[0,1]$ в линейное пространство конечной размерности n, называется *оператором конечного ранга n*.

Следующее утверждение рассматривает задачу оценки ошибки одновременного приближения функций из $\operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_{k+2}\}$ и их производных конечномерными линейными операторами, сохраняющими k-выпуклость.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant k+2$. Существуют такие числа $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, что*

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \ \sup_{f \in P_{k+2}} \|f - L_n f\|_{B^k[0,1]} < c_2 n^{-2}, \tag{1}$$

где инфимум ищется среди всех линейных непрерывных операторов $L_n : C^k[0,1] \to B^k[0,1]$ конечного ранга n, удовлетворяющих $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$.

Вместе с тем $\inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \ \sup_{f \in P_{k+1}} \ \|f - L_n f\|_{B^k[0,1]} = 0$. При $k = 0$ получаем результат [1].

Построен оптимальный линейный оператор $\Lambda_{k,n}$ для оценки в утверждении теоремы 1, который представляет собой оператор сплайн-интерполяции степени $k+1$ гладкости k. Оптимальность $\Lambda_{k,n}$ связана с тем фактом, что $\Lambda_{k,n}$ представляет собой минимальную формосохраняющую проекцию (the minimal shape-preserving projection, [2]) на интервале $[0, \frac{1}{n-1}]$, которая затем гладко продолжена на последующие интервалы.

Из полученных результатов следует, что если линейный оператор конечного ранга n сохраняет k-выпуклость, то порядок приближения производных порядка $0 \leqslant i \leqslant k$ непрерывных функций производными этого оператора не может быть лучше чем n^{-2} на некотором подмножестве $\operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_{k+2}\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev R. K., Guendouz F.* On the order of approximation of continuous functions by positive linear operators of finite rank// J. Approx. Theory. 1992. Vol. 69 (2). P. 133–140.

2. *Lewicki G., Prophet M. P.* Minimal Shape-Preserving Projections Onto $\prod_n$: Generalizations and Extensions // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2006. Vol. 27. P. 847–873.

3. *Muñoz-Delgado F. J., Ram´ırez-González V., Cárdenas-Morales D.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation// J. Approx. Theory. 1998. Vol. 94. P. 144–159.

УДК 517.518.862

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ГЕРОНИМУСА ДЛЯ НОРМ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА МНОЖЕСТВЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

И. Е. Симонов (Екатеринбург, РФ)

isimonov@k66.ru

1. Пусть $\mathcal{T}_m$ есть множество тригонометрических полиномов

$$G(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{m} \overline{\gamma_k} e^{ik\theta}\right),$$

$$\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k,\ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},$$

порядка m с вещественными коэффициентами, $\mathcal{C}_m$ есть подмножество четных полиномов из $\mathcal{T}_m$. На множестве $\mathcal{T}_m$ определим норму

$$\|G\|_1 = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta.$$

Каждому набору $c = (c_0, \ldots, c_m)$, $c_k = a_k + ib_k$, $b_0 = 0$, из $m+1$ комплексного числа сопоставим линейный функционал на множестве $\mathcal{T}_m$:

$$\Phi(G, c) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_k + \beta_k b_k = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{m} \overline{\gamma_k} c_k.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1.1544.2011) и РФФИ (проект 12-01-31495).

Для $c = (0, \dots 0, c_m)$ задача о нахождении нормы функционала $\Phi(\cdot, c)$ сводится к задаче о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля по норме $\|\cdot\|_1$, с фиксированым старшим коэффициентом. В общем случае норма функционала $\Phi(\cdot, c)$ в терминах коэффициентов c была найдена Я. Л. Геронимусом [1, теорема 1].

Зафиксируем набор $a^* = (a_0^*, \dots, a_m^*)$, $a_k^* \geqslant 0$, и рассмотрим связанный с ним класс

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_m(a^*) = \{a = (a_0, \dots, a_m) : \ |a_k| \leqslant a_k^*, \ k = 0, \dots, m\}$$

упорядоченных наборов из $m+1$ вещественного числа.

В докладе будет рассмотрена задача о максимуме норм функционалов $\Phi(\cdot, a)$ по классу $\mathbb{A}$:

$$\max_{a \in \mathbb{A}} \|\Phi(\cdot, a)\|. \tag{1}$$

Нетрудно показать, что норма $\Phi(\cdot, a)$, $a \in \mathbb{A}$, на пространстве $\mathcal{T}_m$ обязательно достигается на четном полиноме, поэтому для задачи (1) имеют место равенства

$$\max_{a \in \mathbb{A}} \|\Phi(\cdot, a)\| = \max_{a \in \mathbb{A}} \max_{G \in \mathcal{T}_m} \frac{|\Phi(G, a)|}{\|G\|_1} = \max_{a \in \mathbb{A}} \max_{G \in \mathcal{C}_m} \frac{|\Phi(G, a)|}{\|G\|_1}.$$

Справедлива следующая теорема, существенную роль в доказательстве которой играет результат Я. Л. Геронимуса [1].

Теорема 1. *Для любого $a \in \mathbb{A}$ выполняется неравенство*

$$\|\Phi(\cdot, a)\| \leqslant \|\Phi(\cdot, a^*)\| = L_0^*,$$

где L_0^* — наибольший корень уравнения $\det(\mathbf{M}(L) - L\mathbf{E_{m+1}}) = 0$,

$$\mathbf{M}(L) = \begin{pmatrix} \mu_m^*(L) & \mu_{m-1}^*(L) & \cdots & \mu_0^*(L) \\ \mu_{m-1}^*(L) & \mu_{m-2}^*(L) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_0^*(L) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

числа $\mu_0^*(L)$, $\mu_1^*(L)$, $\dots$, $\mu_m^*(L)$ определяются из разложения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4L}\sum_{k=0}^{m} a_k^* z^k\right) = \mu_0^*(L) + \mu_1^*(L) z + \dots + \mu_m^*(L) z^m,$$

$\mathbf{E_{m+1}}$ — *единичная матрица размера* $(m+1) \times (m+1)$.

2. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Для $P \in \mathcal{P}_n$ положим

$$\|P\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |P(t)|; \quad \|P\|_{1,-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |P(t)|(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Используя теорему 1, можно получить точную константу в неравенстве

$$\|P^{(\ell)}\|_\infty \leqslant C(n,\ell)\|P\|_{1,-\frac{1}{2}}, \quad P\in\mathcal{P}_n, \quad 0\leqslant \ell < n. \tag{2}$$

Обозначим $v_k = T_k^{(\ell)}(1)$, $k = 0,\ldots,n$, где $T_k(t) = \cos(n\arccos t)$, $t \in$ $\in [-1,1]$, — многочлен Чебышева первого рода,

$$\mathbf{V}(L) = \begin{pmatrix} \mu_n(L) & \mu_{n-1}(L) & \cdots & \mu_\ell(L) \\ \mu_{n-1}(L) & \mu_{n-2}(L) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_\ell(L) & 0 & \cdots & \end{pmatrix},$$

числа $\mu(L) = (\mu_0(L),\ldots,\mu_n(L))$ определяются из разложения

$$\operatorname{tg}\left\{\frac{1}{L}\left[\frac{v_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} v_k z^k\right]\right\} = \mu_0(L) + \mu_1(L)z + \cdots + \mu_n(L)z^n \cdots$$

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Точная константа в неравенстве* (2) *равна наибольшему корню* L^* *уравнения*

$$\det(\mathbf{V}(L) - \mathbf{E}_{n-\ell+1}) = 0,$$

т. е. $C(n,\ell) = L^*$.

2. *Число* 1 *является наибольшим собственным числом матрицы* $\mathbf{V}(L^*)$, *имеет алгебраическую кратность* 1, *и ему соответствует собственный вектор* $h = (h_0, h_1, \ldots, h_{n-\ell})^\top$ *с положительными координатами.*

3. *Экстремальными в неравенстве* (2) *являются многочлены* $\omega P^*(t)$, $\omega P^*(-t)$, $\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$P^*(t) = \sum_{j=0}^{n-\ell}\sum_{k=0}^{n-\ell} h_j h_k T_{|n-j-k|}(t).$$

Следствие 2. *Алгебраический многочлен с двумя фиксированными старшими коэффициентами, наименее уклоняющийся от нуля по норме* $\|\cdot\|_{1,-1/2}$, *есть*

$$P_n^*(t) = T_n(t) + \tau T_{n-1}(t) + \frac{\tau^2}{4}T_{n-2}(t), \quad \text{при } |\tau|\leqslant 2,$$
$$P_n^*(t) = T_n(t) + \tau T_{n-1}(t) + T_{n-2}(t), \quad \text{при } |\tau|\geqslant 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Геронимус Я. Л. Об одной экстремальной задаче Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1938. Т. 2, вып. 4. С. 445–456.

УДК 517.51

ТЕОРЕМА О ВЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА

Е. С. Смаилов (Караганда, Казахстан)
esmailov@mail.ru

Пусть U — множество непрерывных, возрастающих функций на $[0,1]$ таких, что $\varphi(0)=0$.

$\varphi \in (s)$ означает, что функция $\varphi \in U$ удовлетворяет условию С. Б. Стечкина, а $\varphi \in (\mathcal{L}_1)$ означает, что $\varphi \in U$ удовлетворяет условию Лозинского [1], [2].

Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$ и $L_{p\theta}[0,2\pi)$ — пространство Лоренца 2π-периодических функций. При $p=\theta$ будем писать $L_p[0,2\pi)$.

$\|f\|_{p\theta}$ — норма элементов пространства $L_{p\theta}[0,2\pi)$, $\|f\|_p$ — норма элементов пространства Лебега $L_p[0,2\pi)$.

Через

$$E_n(f)_p = \inf\Bigg\{ \|f-T_k\|_p : \text{ inf берется по всевозможным тригонометрическим многочленам } T_k(x) = \frac{a_0}{2} + \\ + \sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x \text{ порядка } k,\ k \leqslant n \Bigg\}$$

обозначим наилучшее тригонометрическое приближение функции $f \in \in L_p[0,2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Пусть $E_{2^\nu}\left(B^{r,\varphi}_{p\theta}[0,2\pi)\right)_{q\tau} = \sup\left\{E_{2^\nu}(f)_{q\tau} : |f; B^{r,\varphi}_{p\theta\theta}| \leqslant 1\right\}$

Определение 1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $0 < \theta \leqslant +\infty$ и $\varphi \in U$, $r \geqslant 0$ — некоторое фиксированное число. Будем говорить, что функция $f \in B^{r,\varphi}_{p\theta}[0,2\pi)$, если $f \in L_p[0,1)$ и конечна величина

$$|f; B^{r,\varphi}_{p\theta}[0,2\pi)| = \|f\|_p + \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \left((\varphi(2^{-k}))^{-1} 2^{kr} E_{2^k}(f)_p \right)^\theta \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

при $1 \leqslant \theta < +\infty$;

$$|f; B^{r,\varphi}_{p\infty}[0,2\pi)| = \|f\|_p + \sup_{k\in\mathbb{Z}^+} \left\{ (\varphi(2^{-k}))^{-1} 2^{kr} E_{2^k}(f)_p \right\},$$

при $\theta = +\infty$.

$\mathbb{Z}^+$ — множество неотрицательных целых чисел.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p < q < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant +\infty$, $r > 0$, $\varphi \in (s)$. *Для того, чтобы* $B^{r,\varphi}_{p\theta}[0,2\pi) \hookrightarrow L_{q\tau}[0,2\pi)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_{pq\theta\tau r} = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-r\right)} \varphi(2^{-k}) \right)^{\lambda} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} < +\infty,$$

где $\lambda = \frac{\theta\tau}{\theta-\tau}$ *при* $1 \leqslant \tau < \theta < +\infty$; $\lambda = \tau$ *при* $\theta = +\infty$; $A_{pq\theta\tau r} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^+} \left\{ \varphi(2^{-k}) 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-r\right)} \right\} < +\infty$ *при* $1 \leqslant \theta \leqslant \tau$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p < q < +\infty$, $r \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant +\infty$, $\varphi \in (\mathcal{L}_1)$. *Тогда справедливо соотношение*

$$E_{2^\nu}\left(B^{r,\varphi}_{p\theta}[0,2\pi)\right)_{q\tau} \asymp \left\{ 2^{\nu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-r\right)} \varphi(2^{-\nu}) \right\}, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}^+.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. общества. 1956. № 5. С. 483–521.

2. *Гольдман М. Л.* О вложении обобщенных гельдеровых классов // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 325–336.

УДК 517.538.52+517.518.84

О ДВУХ ТИПАХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ[1]

А. П. Старовойтов, А. В. Астафьева (Гомель, Беларусь)

svoitov@gsu.by, avastafeva@mail.ru

Будем рассматривать два типа аппроксимаций Эрмита-Паде экспоненциальных функций. Один из этих типов (German type) состоит из совместных рациональных аппроксимаций $\pi^j_{kn,\,kn}(z; e^{\lambda_j \xi}) = P^j_{kn}(z)/Q_{kn}(z)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$, где λ_j, $j = 1, 2, ..., k$, — различные и отличные от нуля действительные числа, а многочлены $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^{j}(z)$, $deg\, Q_{kn} \leqslant kn$, $deg\, P_{kn}^{j} \leqslant kn$ определяются из условий

$$Q_{kn}(z)e^{\lambda_j z} - P_{kn}^{j}(z) = A_j z^{kn+n+1} + \ldots .$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей (для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^{k}$) рассматривал Ш. Эрмит в связи с доказательством трансцендентности числа e. А. И. Аптекарев [1] доказал, что $\pi_{kn,\,kn}^{j}(z; e^{\lambda_j \xi})$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$. В работах [2] и [3] найдена асимптотика этой сходимости.

В 1883 году Эрмит ввёл другой тип аппроксимаций (Latin type), с помощью которых также можно доказать трансцендентность числа e. Для набора функций $\{e^{jz}\}_{j=0}^{k}$ эти аппроксимации совпадают с многочленами $A_0(z), A_1(z), ..., A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^{k} A_p(z)\, e^{p\, z} = B_j z^{kn+n-1} + \ldots .$$

Предполагается, что хотя бы один из многочленов $A_p(z)$ тождественно не равен нулю. В [4] доказана сходимость нормированных многочленов $A_p(z)/A_p(0)$ и остатка $R_n(z)$ при $n \to \infty$ и найдена асимптотика этой сходимости.

В данном сообщении получено обобщение результатов работы [4]. Мы рассматриваем многочлены $A_0^{\lambda}(z), A_1^{\lambda}(z), ..., A_k^{\lambda}(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$R_n^{\lambda}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_p^{\lambda}(z)\, e^{\lambda_p z} = B_j^{\lambda} z^{kn+n-1} + \ldots ,$$

где λ_j, $j = 1, 2, ..., k$ — различные и отличные от нуля положительные действительные числа, доказываем сходимость нормированных многочленов $A_p^{\lambda}(z)/A_p^{\lambda}(0)$ и остатка $R_n^{\lambda}(z)$ и находим асимптотику этой сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.

2. *Старовойтов А. П.* О свойствах аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг–Леффлера //Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 1. С. 5–10.

3. *Старовойтов А. П.* Асимптотика эрмитовой аппроксимации экспонент // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2012. № 5(74). С. 163–171.

4. *Wiellonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite–Pade Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90. C. 283–298.

УДК 517.518.82

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ, И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА[1]

М. С. Султанахмедов (Махачкала, Россия)
sultanakhmedov@gmail.com

Пусть отрезок $[-1,1]$ разбит на части точками $-1=\eta_0<\eta_1<\eta_2<$ $<\cdots<\eta_{N-1}<\eta_N=1$. Рассмотрим сетку $\Omega_N=\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, в которой узлы t_j попарно различны и удовлетворяют условию $\eta_j\leqslant t_j\leqslant\eta_{j+1}$ $(0\leqslant j\leqslant$ $\leqslant N-1)$.

Ранее автором были исследованы асимптотические свойства полиномов $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$, образующих ортонормированную систему с весом Якоби $\kappa^{\alpha,\beta}(t)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ на сетке Ω_N, в случае целых $\alpha,\beta\geqslant 0$ (см. [1]). С помощью полученной асимптотической формулы и выведенных из нее весовых оценок, в статье [2] изучены аппроксимативные свойства сумм Фурье по полиномам $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$.

Шарапудиновым И. И. в работе [3] были введены новые ряды специального вида, названные им предельными ультрасферическими. Общий член в таких рядах получается в результате предельного перехода $f_k^{-1}\hat P_k^{-1}(t)=\lim_{\alpha\to-1}f_k^\alpha\hat P_k^\alpha(t)$ из общего члена ряда Фурье $\sum_{k=0}^\infty f_k^\alpha\hat P_k^{\alpha,\alpha}(x)$ по ультрасферическим полиномам Якоби $\hat P_k^{\alpha,\alpha}(t)$, образующим при $\alpha>-1$ ортонормированную систему с весом $(1-t^2)^\alpha$ на $[-1,1]$.

В настоящей работе автором предпринимается попытка построения аналогичных по конструкции конечных предельных рядов по полиномам $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$, ортогональным на неравномерных сетках. Проводится исследование аппроксимативных свойств таких специальных конечных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Султанахмедов М. С.* Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на неравномерной сетке с весом Якоби // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика (принята в печать).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

2. *Султанахмедов М. С.* О сходимости метода наименьших квадратов с неравномерными узлами // (подготовлена к печати)

3. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 295–309.

УДК 517.5

О РЯДАХ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ РЯДА ПО СИСТЕМЕ УОЛША[1]

С. А. Теляковский, Н. Н. Холщевникова (Москва, РФ)
sergeyaltel@yandex.ru, kholshchevnikova@gmail.com

Известна серия результатов о рядах из модулей блоков членов тригонометрического ряда. Рассмотрим подобные вопросы для рядов по системе Уолша.

Обозначим число слагаемых в двоичном представлении

$$n = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_s}, \qquad 0 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_s,$$

через $S(n)$. Заметим, что $S(1) = 1$, $1 \leqslant S(n) \leqslant \log_2 n$ при $n > 1$.

Теорема. *Пусть*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k w_k(x) \tag{1}$$

— ряд Фурье–Уолша в нумерации Пэли функции ограниченной вариации. Если для строго возрастающей последовательности чисел $\{n_j\}$ *сходится ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{S(n_j)}{n_j}$, *то сумма ряда* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left| \sum\limits_{k=n_j}^{n_{j+1}} c_k w_k(x) \right|$ *принадлежит* $L[0,1]$.

Пусть x_0 — точка, в которой все функции системы Уолша отличны от нуля. Выделим бесконечный набор натуральных чисел, которые обозначим через i^*.

Пусть (1) — ряд Фурье-Уолша характеристической функции отрезка $[0, 1/3]$. Для каждого i^* члены ряда (1) при $k = 2^{i^*}, 2^{i^*}+1, \ldots, 2^{i^*}+2^{i^*}-1$ можно переставить так, что будет неограниченно расходиться ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}} \tilde{c}_k \tilde{w}_k(x) \right|,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00417 и 11-01-00321).

где $\{n_j\}$ — возрастающая последовательность, состоящая из всех чисел 2^i, к которым добавлены числа $2^{i^*}+2^{i^*-1}$, $\tilde{c}_k\tilde{w}_k(x_0)$ — члены ряда (1) после сделанной перестановки, и будет расходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{c}_k\tilde{w}_k(x_0).$$

УДК 517.518

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ[1]

П. А. Терехин (Саратов, РФ)
TerekhinPA@info.sgu.ru

Пусть функция $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi\subset[0,1]$ на единичном отрезке. Для натурального числа $n\in\mathbb{N}$ по представлению $n=2^k+j$, где $k=0,1,\ldots$ и $j=0,\ldots,2^k-1$, положим

$$\varphi_n(t)=\varphi_{k,j}(t)=2^{k/2}\varphi(2^kt-j).$$

Кроме того, пусть $\varphi_0=\chi_{[0,1]}$. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой функций* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ.

Предположим, что порождающая функция аффинной системы является тригонометрическим полиномом следующего специального вида

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{N}a_k\sin(2\pi 2^kt),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Теорема. *Для того, чтобы аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ была полной в пространстве $L^2(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы алгебраический многочлен*

$$P(z)=\sum_{k=0}^{N}a_kz^k$$

не обращался в нуль в замкнутом единичном круге ($|z|\leqslant 1$).

Для рассматриваемых тригонометрических аффинных систем, при выполнении условия Теоремы, доказана их базисность по Риссу и получены прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике пространства $L^2(0,1)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00120) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин П. А.* О наилучшем приближении функций в метрике L^p полиномами по аффинной системе // Мат. сб. 2011. Т. 202(2). С. 131—158.

УДК 517.518.82

ПРОБЛЕМА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ ЯВНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАПИСИ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков (Москва, РФ)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0,1]$ вводятся по правилу

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Понятно, что $B_n(f,x)$ есть обычный полином переменной x степени $\leqslant n$. Возникает естественный вопрос: зная конкретную функцию $f \in C[0,1]$, получить явную алгебраическую запись вида

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}(f)\, x^k, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Формула коэффициентов

$$a_{n,k}(f) = C_n^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, C_k^j\, f\left(\frac{k-j}{n}\right) \tag{3}$$

впервые появилась в работе Вигерта [1], заметившего, кстати, что сумма в (3) есть в точности конечная разность $\Delta_{1/n}^k f(0)$ порядка k с шагом $1/n$. Именно через конечные разности формулу Вигерта обычно подают в литературе (см. [2, с. 108–109]).

Несмотря на наличие универсальных выражений (3), итоговые значения коэффициентов $a_{n,k}(f)$ в конкретных примерах отнюдь не очевидны, и для установления соответствующей явной записи (2) приходится использовать дополнительные соображения комбинаторного и аналитического характера.

[1]При частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).

Отметим, например, что явная алгебраическая запись полиномов $B_n(f,x)$ для элементарной степенной функции $f(x)=x^p$ с произвольным $p\in\mathbb{N}$ найдена лишь совсем недавно Попом и Фаркашем [3], [4]. Обнаруженный ответ использует числа Стирлинга.

Другой принципиальный пример симметричного модуля

$$f(x)=|2x-1|, \qquad x\in[0,1], \tag{4}$$

подробно изучен в работе авторов [5]. Полиномы Бернштейна функции (4) коротко обозначим $B_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$. Для них выполняется свойство склеивания: $B_{2m+1}(x)=B_{2m}(x)$, $m\in\mathbb{N}$ (см. [5], [6]). Поэтому далее рассматриваем полиномы лишь с четными номерами. Приведем результат [5] о явной алгебраической записи полиномов $B_{2m}(x)$.

Теорема 1. *При любом $m\in\mathbb{N}$ справедливо представление*

$$B_{2m}(x)=1-2x+2m\,C_{2m}^m\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k\,\frac{(-1)^k\,x^{m+k+1}}{(m+k)\,(m+k+1)}. \tag{5}$$

Коэффициенты

$$\beta_{2m}(m+k+1)=2m\,C_{2m}^m\,C_{m-1}^k\,\frac{1}{(m+k)\,(m+k+1)} \tag{6}$$

при степенях $(-1)^k\,x^{m+k+1}$, $k=0,\,\ldots,\,m-1$, являются четными натуральными числами.

Из формулы (5) следует, что

$$B_{2m}''(x)=2m\,C_{2m}^m\big(x(1-x)\big)^{m-1}, \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Основываясь на (7), нетрудно проверить, что полиномы $B_{2m}''(x)$ образуют на $[0,1]$ типичную δ-образную последовательность, сходящуюся к $4\delta(x-1/2)$, т. е. к формальной производной $f''(x)$ функции (4).

При непосредственной записи первых полиномов $B_{2m}(x)$ возникает проблема стремительного роста коэффициентов в главной части (5), следующей за $1-2x$. Так, среди коэффициентов полинома $B_{12}(x)$ встретится число $\beta_{12}(9)=1\,540$, а среди коэффициентов $B_{20}(x)$ будет уже число $\beta_{20}(15)=2\,217\,072$. Используя явные выражения (6), рост коэффициентов можно оценить точно.

Зафиксируем $m\in\mathbb{N}$ и рассмотрим, например, наибольший среди коэффициентов (6). Обозначим

$$\mu_{2m}=\max_{m+1\leqslant j\leqslant 2m}\beta_{2m}(j). \tag{8}$$

Можно показать (см. [5]), что значение μ_{2m} достигается на коэффициенте, находящемся в середине главной части полинома (5). Точнее, $\mu_{2m} = \beta_{2m}(3m/2)$, если m четное, и $\mu_{2m} = \beta_{2m}((3m+1)/2)$, если m нечетное. Последующим анализом получается такое утверждение.

Теорема 2. *Для величины* (8) *независимо от четности* $m \in \mathbb{N}$ *верна асимптотика*

$$\mu_{2m} \sim \frac{4\sqrt{2}}{9\pi}\,\frac{2^{3m}}{m^2}, \qquad m \to \infty, \tag{9}$$

и справедлива оценка

$$\frac{0.8}{(2m)^2}\,2^{3m} \leqslant \mu_{2m} \leqslant \frac{1}{(2m)^2}\,2^{3m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

локализующая значение μ_{2m} *при каждом* $m \in \mathbb{N}$.

Согласно (9), (10), рост максимального коэффициента полинома $B_{2m}(x)$ оказывается экспоненциальным. Так, максимальный коэффициент $\beta_{100}(75)$ полинома $B_{100}(x)$ содержит в десятичной записи сорок два знака. Соседние коэффициенты имеют, разумеется, схожие порядки. Расчеты показывают, что для приближения функции (4) с погрешностью меньшей, чем 10^{-2}, потребуется полином $B_{6366}(x)$. Коэффициенты этого полинома невообразимы.

Означенный феномен можно трактовать, как «эффект неустойчивости», состоящий в том, что при определенных малых шевелениях порождающей функции $f \in C[0,1]$ коэффициенты полиномов Бернштейна в записи (2) могут сколь угодно сильно измениться. Например, для функции $f_0(x) \equiv 0$ все полиномы Бернштейна равны нулю, а для малого возмущения $f(x) = 10^{-3}|2x-1|$ полиномы Бернштейна даже при не очень больших номерах будут содержать огромные коэффициенты, экспоненциально растущие при увеличении номера.

Итак, обсуждая вопрос о приближении непрерывных функций полиномами Бернштейна, следует иметь в виду не только их медленную сходимость, но и возможный стремительный рост коэффициентов в алгебраической записи (2). Представляется, что такой рост связан с потерей гладкости у функции $f \in C[0,1]$. Было бы полезно получить полное описание данного феномена в точных математических терминах. Стоит для начала изучить проблему коэффициентов для гёльдерова модуля $|2x-1|^\alpha$ с фиксированным $\alpha \in (0,1)$ и для несимметричного модуля $|x-c|$ с фиксированным $c \in (0,1)$, $c \neq 1/2$. Некоторые численные примеры полиномов Бернштейна для функции Больцано приводятся в статье Козловой [7]; рост коэффициентов там виден непосредственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wigert S.* Réflexions sur le polynome d'approximation

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right) x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}$$

// Arkiv för matematik, astronomi och fysik. 1927. Bd. 20. Häfte 2. S. 1–15.

2. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation. N.Y. : Dover Publications, 1975. xvi+393 pp.

3. *Pop O. T., Farcaş M.* About Bernstein polynomial and the Stirling's numbers of second type // Creative Mathematics and Informatics. 2005. Vol. 14. P. 53–56.

4. *Farcaş M.* Approximation by linear operators of functions of one or several variables // Abstract of PHD Thesis. Baia Mare, 2008.

5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

6. *Kocić Lj. M., Della Veccia B.* Degeneracy of positive linear operators // Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics. 1998. Vol. 13. P. 59–72.

7. *Козлова И. А.* Приближение функции Больцано многочленами Бернштейна // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 56–59.

УДК 517.97

ГЛОБАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ[1]

Е. А. Трушкова (Москва, РФ)

katerinatr@mail.ru

Рассматривается обобщенная задача оптимального управления для случая разрывов траектории $x(t)$ в точках $t = 0$, $t = \xi$ и $t = T$:

$$\begin{aligned}
&J(m) = F(x(T)) \to \min,\\
&x(0) = x_0, \quad x(0+) = \omega(\tau(0), 0, x(0)),\\
&\dot{x}(t) = g\,(t, x(t)) + h\,(t, x(t))\,u(t), \quad t \in (0, \xi) \cup (\xi, T),\\
&x(\xi+) = \omega(\tau(\xi), \xi, x(\xi-)), \quad x(T) = \omega(\tau(T), T, x(T-)),
\end{aligned} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00256а).

где $x(t)$ — n-мерная непрерывная на $(0,\xi)\cup(\xi,T)$ кусочно–дифференцируемая функция; управление $u(t)$ — скалярная кусочно–непрерывная функция, $\tau(0)$, $\tau(\xi)$, $\tau(T)\in\mathbb{R}$, $\omega(\tau,t,x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d\omega}{d\tau}=h(t,\omega),\quad \omega(0,t,x)=x. \tag{2}$$

Непрерывно–дифференцируемые функции $F(x)$, $g(t,x)$, $h(t,x)$, состояние x_0 и момент T заданы. По аналогии с обобщенной задачей из [1], где рассматривались разрывы лишь в точках $t=0$ и $t=T$, обозначим через E множество допустимых обобщенных процессов

$$m=(x(t),u(t),\tau(0),\tau(\xi),\tau(T)).$$

Величины $\tau(0)$, $\tau(\xi)$ и $\tau(T)$ играют роль управляющих параметров. Обобщенное управление $(u(t),\ \tau(0),\tau(\xi),\tau(T))$ будем называть *импульсным.* Таким образом, каждому обобщенному управлению соответствует обобщенная траектория $x(t)$, разрывная по t в точках $t=0$, $t=\xi$ и $t=T$.

Поставим *задачу улучшения* для обобщенной постановки: задан процесс $m^0\in E$; требуется получить процесс $m\in E$ такой, что $J(m)<J(m^0)$. На эту задачу здесь доопределяется метод глобального улучшения, предложенный и исследованный в [1—3].

Введем в рассмотрение функционал

$$L(m)=G\left(\tau(T),x(T-)\right)+G^0(\tau(0))-\int\limits_0^T R(t,x,u)dt+G^1(\tau(\xi),x(\xi-)),$$

где $\varphi(t,x)$ непрерывно-дифференцируема по (t,x) при $t\neq\xi$,

$$G(\tau,x)=F\left(\omega(\tau,T,x)\right)+\varphi(T,x),\quad G^0(\tau)=-\varphi\left(0,\omega(\tau,0,x_0)\right),$$

$$G^1(\tau,x)=\varphi\left(\xi-,x\right)-\varphi\left(\xi+,\omega(\tau,\xi,x)\right),$$

$$R(t,x,u)=\varphi_x^T\left(g(t,x)+h(t,x)u\right)+\varphi_t,\quad t\in(0,T).$$

Функционал L является обобщенным лагранжианом для обобщенной задачи (1), т. е. $L(m)=J(m)$, $m\in E$.

Опишем одну итерацию *глобального алгоритма улучшения* для рассматриваемой обощенной задачи.

0. Задаем обобщенное управление $(u^0(t),\tau^0(0),\tau^0(\xi),\tau^0(T))$. Находим соответствующую траекторию $x^0(t)$ и вычисляем значение функционала $F\left(x^0(T)\right)=F\left(\omega(\tau^0(T),T,x^0(T-))\right)$.

1. Находим функцию $\varphi(t,x)$ из условий

$$G\left(\tau^0(T), x^0(T-)\right) \geqslant G(\tau^0(T), x) \ \ \forall\, x,$$
$$G^1\left(\tau^0(\xi), x^0(\xi-)\right) \geqslant G^1(\tau^0(\xi), x) \ \ \forall\, x,$$
$$R(t, x^0(t), u^0(t)) \leqslant R(t, x, u^0(t)) \ \ \forall\, x,\, t \in (0,\xi) \cup (\xi, T).$$

2. Построение улучшенного режима проводим последовательно для $t=0$, $t \in (0,\xi)$, $t=\xi$, $t \in (\xi, T)$, и $t=T$. А именно, разрывная трактория допустимого процесса строится следующим образом:

1) интегрируем уравнение (2) при $t=0$, $x=x_0$ и находим значение $\tau(0)$ из условия
$$\tau(0) \in \operatorname{Arg}\min_{\tau} G^0(\tau);$$

2) находим решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = g\,(t,x) + h\,(t,x)\,u(t,x),\ t \in (0,\xi),\ x(0+) = \omega(\tau(0), 0, x_0),$$

где $u(t,x)$ вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1];

3) интегрируем уравнение (2) при $t=\xi$, $x=x(\xi-)$ и находим значение $\tau(\xi)$ из условия
$$\tau(\xi) \in \operatorname{Arg}\min_{\tau} G^1(\tau, x(\xi-)).$$

4) находим решение $x(t)$ задачи Коши

$$\dot{x} = g\,(t,x) + h\,(t,x)\,u(t,x),\ t \in (\xi,T),\ x(\xi+) = \omega(\tau(\xi), \xi, x(\xi-)),$$

где $u(t,x)$ вычисляется по формуле, аналогичной формуле особого режима, представленной в [1];

5) интегрируем уравнение (2) при $t=T$, $x=x(T-)$ и находим значение $\tau(T)$ из условия

$$\tau(T) \in \operatorname{Arg}\min_{\tau} G(\tau, x(T-));$$

6) вычисляем новое значение функционала

$$F\left(x(T)\right) = F\left(\omega(\tau(T), T, x(T-))\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Описанная выше процедура гарантирует выполнение неравенства $L(m) \leqslant L(m^0)$ и, как следствие, выполнение неравенства*

$J(m) \leqslant J(m^0)$. При этом, если выполняется хотя бы одно из следующих неравенств:

$$G(\tau(T), x(T-)) < G(\tau^0(T), x(T-)),$$

$$G(\tau^0(T), x(T-)) < G(\tau^0(T), x^0(T-)),$$

$$G^0(\tau(0)) < G^0(\tau^0(0)), \quad \int\limits_0^T \big(R(t, x(t), u^0(t)) - R(t, x^0(t), u^0(t))\big)\, dt > 0,$$

то справедливо строгое неравенство $L(m) < L(m^0)$ и, как следствие, строгое неравенство $J(m) < J(m^0)$.

Замечание. *Все вышеизложенное легко обобщается на случай конечного числа s разрывов траектории (импульсов управления) при $t = 0$, $t = \xi_k$, $k = 1, \ldots, s$, $t = T$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кротов В. Ф., Моржин О. В., Трушкова Е. А.* Разрывные решения задач оптимального управления. Итерационный метод оптимизации // АиТ. 2013. № 12.

2. *Кротов В. Ф., Фельдман Н. Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.

3. *Krotov V. F.* Global methods in optimal control theory. N. Y. : Marcel Dekker, 1996.

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ[1]

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

Пусть $q \in L[0, \pi]$, и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ — n-е собственное значение задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \hat{y}'' + [\lambda - q]\hat{y} = 0, \\ \sin\alpha\hat{y}'(0) + \cos\alpha\hat{y}(0) = 0, \\ \sin\beta\hat{y}'(\pi) + \cos\beta\hat{y}(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$, а $\hat{y}(x, q, \lambda_n) \equiv \hat{y}_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|\hat{y}(\cdot, q, \lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Будем

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102)

нумеровать нули функции $\hat{y}_n$ таким образом $0 \leqslant x_{0,n} < x_{1,n} < \ldots < < x_{n,n} \leqslant \pi$. Зафиксируем некоторые $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant k \leqslant n$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q $(k+1)$-й нуль слева n-й собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$. Договоримся обозначать через

$$D\phi[q, w] = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(q + tw) - \phi(q)}{t}$$

дифференциал Гато функционала $\phi : L[0, \pi] \to \mathbb{R}$ при приращении $w \in \in L[0, \pi]$.

Изменение потенциала $q \in L[0, \pi]$ задачи (1) на аддитивную константу $q + C$ приводит к сдвигу спектра $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ на ту же константу $\{\lambda_n + C\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому считаем, что выполнено условие нормировки

$$\int_0^{\pi} q(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

Определим $\delta[f](x)$-дельта функцию Дирака как функционал, ставящий в соответствие всякой суммируемой на отрезке $[0, \pi]$ функции f действительное число по правилу

$$\delta[f](x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\pi} f(\tau) \Psi(\tau, x, \varepsilon)\, d\tau,$$

где

$$E(x, \varepsilon) = [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap [0, \pi],$$

$$\Psi(\tau, x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{mesE(x,\varepsilon)}, & \text{при } \tau \in E(x, \varepsilon), \\ 0, & \text{при } \tau \in [0, \pi] \setminus E(x, \varepsilon). \end{cases}$$

Будем обозначать дифференциал Гато функционала ϕ на элементе $q \in L[0, \pi]$ при приращении $\delta[1](x)$

$$D\phi[q, \delta[1](x)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{\phi(q + t\Psi(\cdot, x, \varepsilon)) - \phi(q)}{t}.$$

А через

$$\frac{d^k D\phi[q, \delta[1](x)]}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k} \Big\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{\phi(q + t\Psi(\cdot, x, \varepsilon)) - \phi(q)}{t} \Big\}$$

его k-ю производную по x. Эта производная, вообще говоря, может пониматься как обобщённая производная. Но в случае, когда функция

$$\frac{d^k}{dx^k} \Big\{ \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to 0} \frac{\phi(q + t\Psi(\cdot, x, \varepsilon)) - \phi(q)}{t} \Big\},$$

как функция переменного x, непрерывна, считаем, что обобщённая производная совпадает с классической производной.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}$ произвольное плотное в отрезке $[0,\pi]$ множество,*

$$x_{k,n} \in (0,\pi) \tag{3}$$

некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1), и дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ на элементе $q \in L[0,\pi]$ при приращении $\delta[1](x)$ принимает в каждой точке x множества $\mathbb{M}$ значение $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$.

Тогда потенциал задачи Штурма–Лиувилля (1), удовлетворяющий условию нормировки (2), может быть почти всюду представлен следующим образом

$$q(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1}\right\}dx,$$

где $\{x_p\}_{p=1}^\infty$ — любая, стремящаяся к x вдоль множества $\mathbb{M}$ последовательность, т.е. $x_p \in \mathbb{M}$, $x_p \to x$.

Теорема 2. *Пусть (3) некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1), и дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ на элементе $q \in L[0,\pi]$ при приращении $\delta[1](x)$ принимает в почти каждой точке x отрезка $[0,\pi]$ значение $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$.*

Тогда потенциал задачи Штурма–Лиувилля (1), удовлетворяющий условию нормировки (2), имеет вид

$$q(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{d^2\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}\right)^{-1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{\frac{d^2\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}\right)^{-1}\right\}dx.$$

Теорема 3. *Пусть (3) — некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (1), и дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ на элементе $q \in L[0,\pi]$ при прираще-*

нии $\delta[1](x)$ *вместе с его производной по* x *принимают на концах отрезка* $[0,\pi]$ *значения* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]$, $Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]$, $\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=0}$ *и* $\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=\pi}$.

Тогда параметры краевых условий задачи Штурма–Лиувилля (1) *могут быть найдены из соотношений*

$$\alpha = \begin{cases} -\operatorname{arcctg}\Big\{\Big(\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=0}\Big)\Big(Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]\Big)^{-1}\Big\} + \pi p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)] \neq 0, \\ \pi p, \quad p \in \mathbb{Z}, \ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)] = 0, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} -\operatorname{arcctg}\Big\{\Big(\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=\pi}\Big)\Big(Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]\Big)^{-1}\Big\} + \pi r, \quad r \in \mathbb{Z}, \\ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)] \neq 0, \\ \pi r, \quad r \in \mathbb{Z}, \ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)] = 0. \end{cases}$$

Утверждение теоремы 1 окончательно в том смысле, что отказаться от плотности множества $\mathbb{M}$ в отрезке $[0,\pi]$ нельзя.

УДК 517.51

ОБОБЩЕННАЯ АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ

А. А. Тюленева (Саратов, РФ)
aatuleneva@km.ru

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, 2π-периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p-вариационную сумму $\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum\limits_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$, и p-вариацию $V_p(f) = \sup_\xi \varkappa_\xi^p(f)$. Пространство V_p функций ограниченной p-вариации с конечной нормой $\|f\|_{V_p} = \max(\|f\|_\infty, V_p(f))$ является банаховым. Пусть далее f имеет ряд Фурье

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

и $\rho_k^2 = a_k^2 + b_k^2$. Пусть T_n — пространство тригонометрических полиномов степени не выше n. Тогда $E_n(f)_{V_p} = \inf\limits_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$

(их свойства см. в [1]). Пусть $\alpha \geqslant 1$. Будем говорить, что последовательность $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $A(\alpha)$, если $\gamma_k > 0$ при всех k и

$$\left(\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \gamma_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant C2^{n(1-\alpha)/\alpha} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \gamma_k = C2^{n(1-\alpha)/\alpha}\Gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это определение см. в [2], где установлено близкое к теореме 1 утверждение в терминах наилучших приближений в $L_{2\pi}^p$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in V_p$, $1/p + 1/q = 1$, $s = \max(q, 2)$, $0 < \beta < s$ *и* $\gamma \in A(s/(s-\beta))$. *Тогда из условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{-\beta/s-\beta/p} E_k^{\beta}(f)_{V_p} < \infty$$

следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k \rho_k^{\beta}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in V_p$, $1/p + 1/q = 1$, $s = \max(q, 2)$, $\delta \geqslant 0$, $\varphi(u)$ *— возрастающая вогнутая функция на* $\mathbb{R}_+$, *такая что* $\varphi(0) = 0$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta} \varphi(n^{-1/s-1/p} E_n(f)_{V_p}) < \infty.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\delta}(\varphi(|a_n|) + \varphi(|b_n|))$ *сходится.*

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $s = \max(q, 2)$, $0 < \beta < s$, $\gamma \in A(s/(s-\beta))$ *и существует* $\alpha \in (0, 1)$, *такое что* $(1-\alpha)\Gamma_{n+1} 2^{-\beta/s-\beta/p} \geqslant \Gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\varepsilon_n \downarrow 0$ *такова, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k k^{-\beta/s-\beta/p} \varepsilon_k^{\beta} = \infty,$$

то существует $f \in V_p$ *со свойством* $E_n(f)_{V_p} \leqslant C\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, *для которой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k \rho_k^{\beta}$ *расходится.*

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in V_p$, $1/p + 1/q = 1$, $s = \max(q, 2)$, $\delta \geqslant 0$, $\varphi(u)$ *— возрастающая вогнутая функция на* $\mathbb{R}_+$, *такая что* $\varphi(0) = 0$. *Пусть* $\varepsilon_n \downarrow 0$ *такова, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta} \varphi(n^{-1/s-1/p} \varepsilon_n) < \infty$$

и последовательность $\{n^{\delta+1} \varphi(n^{-1/s-1/p} \varepsilon_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена.*

Тогда существует $f \in V_p$, *для которой* $E_n(f)_{V_p} \leqslant C\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\delta(\varphi(|a_n|) + \varphi(|b_n|))$ *расходится.*

Теоремы 1–4 обобщают результаты из [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика., 1965, № 2, С. 171-187.

2. *Gogoladze L., Meskhia R.*, On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmadze Math. Inst., 2006, V. 141, P. 29-40.

3. *Volosivets S. S.* Convergence of series of Fourier coefficients of p-absolutely continuous functions // Analysis Math., 2000, V. 26, № 1, P. 63-80.

УДК 519.651, 519.652, 517.518.85, 519.852

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТЬЮ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p [1]

Н. С. Узенцова, С. П. Сидоров (Саратов, РФ)
uzentsovans@gmail.com

Определение и детальное описание основных понятий теории нейронных сетей (а именно понятие многослойной нейронной сети прямого распространения с различными функциями активации), а также подробное изложение используемых понятий и архитектур сетей можно найти, например, в [1], [2].

Для решения многих прикладных задач используется способность нейронных сетей аппроксимировать полиномиальную функцию. В статье [3] полиномиальная функция используется как мера емкости искусственной нейронной сети прямого распространения с конечным числом скрытых узлов, при этом под емкостью сети понимается наибольшая степень полиномов, которые данная нейронная сеть приближает с наперед заданной точностью.

Рассмотрим архитектуру нейронной сети F с одним скрытым слоем. Пусть вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ есть вектор входа нейронной сети, m есть количество узлов входного слоя сети F. Обозначим N количество узлов скрытого слоя сети. Количество входов в скрытый слой равно числу компонент вектора x. Обозначим $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ выходной вектор сети F. Вес связи между i-м узлом входного слоя и j-м

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

скрытым узлом обозначим w_{ji}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Вес связи между j-м узлом скрытого слоя и k-м узлом выходного слоя обозначим c_{kj}. Выход скрытого узла j определяется следующим образом:

$$\sigma(\theta_j) = \frac{\theta_j}{\alpha + |\theta_j|}, \quad \theta_j = \sum_{i=1}^{m} w_{ji} x_i + b_j,$$

где $j = 1, \ldots, N$, b_j — пороговое значение j-го узла скрытого слоя, m — количество входов, α — положительная константа.

Компонентами выходного вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ нейронной сети F являются числа

$$y_k = \sum_{j}^{N} c_{kj} \sigma(\theta_j), \quad k = 1, \ldots, n.$$

В настоящей статье, следуя идеям работы [3], мы находим алгоритм настройки весов сети для одновременного приближения в метрике L^p с заданной ошибкой полиномиальной функции фиксированной степени и ее производных. В отличие от работы [3], мы рассматриваем нейронную сеть прямого распространения сигнала с рациональной сигмоидой в качестве функции активации, в то время как в работе [3] изучалась нейронная сеть с экспоненциальной сигмоидальной функцией активации. Мы покажем, что результаты, аналогичные результатам работы [3], будут справедливы и для задачи приближения алгебраического многочлена совместно с его производными в метрике L^p.

Рассмотрим нейронную сеть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ прямого распространения с одним входом и одним выходом:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \sigma(w_j x + b_j),$$

где $c_j, w_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$, есть параметры сети. Обозначим множество всех таких отображений $\mathcal{F}_N(\sigma)$.

Полиномиальная функция $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ степени r имеет вид:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_r x^r,$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, r$.

В следующей теореме показывается, что сеть с одним скрытым слоем, содержащем N узлов, может аппроксимировать любой алгебраический многочлен степени $N-1$ совместно с его производными с любой степенью точности в метрике L^p.

Теорема 1. Пусть $x_{max} > 0$ — произвольное число. Тогда $\forall f \in \mathcal{P}_{N-1}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F(x) \in \mathcal{F}_N(\sigma)$ такая, что:

$$\sum_{s=0}^{N-1} \left(\int_{-x_{max}}^{x_{max}} (F^{(s)}(x) - f^{(s)}(x))^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

где ε является ошибкой равномерного приближения на $[-x_{max}, x_{max}]$ в метрике L^p.

Доказательство. Доказательство данной теоремы следует из основного результата работы [5], где показано, что для произвольного ε_0 найдется $F(x) \in \mathcal{F}_N(\sigma)$ такая, что

$$\sup_{x \in [-x_{max}, x_{max}]} \sum_{s=0}^{N-1} |F^{(s)}(x) - f^{(s)}(x)| < \varepsilon_0.$$

Имеем

$$\sum_{s=0}^{N-1} \left(\int_{-x_{max}}^{x_{max}} (F^{(s)}(x) - f^{(s)}(x))^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \sum_{s=0}^{N-1} \left(\int_{-x_{max}}^{x_{max}} \varepsilon_0^p dx \right)^{1/p}.$$

Взяв число ε_0 таким образом, чтобы $\varepsilon_0 (2x_{max})^{1/p} N < \varepsilon$, получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение, аналогичное теореме, не будет справедливым, если в скрытом слое содержится не N, а $N-1$ узлов, т. е. нейронные сети с $N-1$ узлами в скрытом слое не способны с любой степенью точности приближать полиномы степени $N-1$. Это означает, что существует неустранимая ошибка приближения многочленов степени $N-1$ нейронными сетями с $N-1$ узлами в скрытом слое. В работе [4] находится оценка этой ошибки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галушкин А.* Нейронные сети. Основы теории. М.: Горячая Линия – Телеком, 2012.

2. *Haykin S.* Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Second ed. NJ : Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.

3. *Malakooti B., Zhou Y. Q.* Approximating Polynomial Functions by Feedforward Artificial Neural Networks: Capacity Analysis and Design // Appl. Math. and Comp. 1998. Vol. 90. P. 27–52.

4. *Сидоров С. П.* Об ошибке приближения алгебраических полиномов нейронными сетями прямого распространения // Нейрокомпьютеры : разработка, применение. 2005. № 5. С. 11–17.

5. *Узенцова Н. С., Сидоров С. П.* Об одновременном приближении алгебраических многочленов и их производных нейронными сетями прямого распространиия сигнала с одним скрытым слоем. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 78–82.

УДК 517.984

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ИЗМЕРЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ[1]

А. В. Фоминых (Санкт-Петербург, РФ)
alexfomster@mail.ru

Доклад посвящён нелинейной системе, характерезующей непрерывный закон изменения ковариационной матрицы наблюдаемого объекта [1]

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A^T(t) - D(t)V(t)D(t) + K(t),$$
$$D(0) = D_0, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

Здесь $K(t)$ характеризует возмущения, действующие на систему (если они отсутствуют, то $K(t) \equiv 0$). $V(t)$ характеризует процесс наблюдения и зависит только от состояния измерителей. Если можно изменять выбор наблюдаемых параметров или точность измерения, то $V(t)$ играет роль управления.

Рассмотрим функционал $I = \int_0^T f_0(V,t)dt$, где $f_0(V,t) \equiv 1$. Тогда $I = T$ представляет собой длительность наблюдения. Теперь можно сформулировать задачу оптимального по быстродействию управления наблюдением V

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A^T(t) - D(t)V(t)D(t) + K(t),$$
$$D(0) = D_0, \quad D(T) = D_T, \quad I = T \to \min_V, \quad V \in U, \tag{2}$$

где D_0 — начальное условие, D_T — значение матрицы D в конечный момент времени T, U — класс допустимых управлений.

Сведём задачу быстродействия (2) к задаче оптимального управления в смысле демпфирования функции W, которая характеризует расстояние от текущего значения $D(t)$ до заданного D_T. Тогда для решения

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00752).

задачи необходимо подобрать такое управление, при котором W убывает за кратчайшее время. В качестве функции W можно взять

$$W = ||D(t) - D(T)||^2. \tag{3}$$

Тогда $W|_{D(T)} = 0$, $W > 0 \ \ \forall\ D(t) \neq D(T)$.

К рассматриваемой задаче попытаемся применить метод динамического программирования [2]. Перейдём от матричного дифференциального уравнения (1) к векторному и перепишем задачу в новых обозначениях

$$\dot{\delta}_{j+n(i-1)} \rightleftharpoons \dot{d}_i^j = a_i d^j + d_i a_j - d_i \sum_{l=1}^{n} v^l d_l^j + k_i^j, \tag{4}$$

$$\delta(0) = \delta_0, \quad \delta(T) = \delta_T,$$

$$I = T \to \min_u, \quad u \in U, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

где a_i — i-я строка матрицы , d_i — i-я строка матрицы D, d^j — j-й столбец матрицы D, k_i — i-я строка матрицы K, k^j — j-й столбец матрицы K, v^l — l-й столбец матрицы V, $u = (u_1, \ldots, u_{2n})$, $u_{j+n(i-1)} \rightleftharpoons v_i^j(t)$, $i,j = \overline{1,n}$.

Найдём

$$\dot{W}|_{(4)} = \sum_{i=1}^{2n} 2(\delta_i - \delta_{iT})\dot{\delta}_i = \sum_{i=1}^{2n} 2\delta_i((u, g_i^1(\delta)) + c^1(a,\delta,k)) =$$

$$= (u, g(\delta)) + c(a,\delta,k). \tag{5}$$

Рассмотрим множество управлений $U = \{u \in R^{2n} \mid ||u|| \leqslant \frac{1}{||g||}\}$. Используя тождество $\max\limits_{||u|| \leqslant \frac{1}{||g||}} (u,g) = 1$, получаем

$$\min_{||u|| \leqslant \frac{1}{||g||}} (u, g(\delta)) + c(a,\delta,k) = (u^*, g(\delta)) + c(a,\delta,k) = -1 + c(a,\delta,k), \tag{6}$$

$$u^* = \frac{-g(\delta)}{||g||^2}. \tag{7}$$

По лемме [3] управление (7) оптимально в смысле демпфирования функции W. Кроме того, как было отмечено выше, $W|_{\delta(T)} = 0$, $W > 0$ $\forall\ \delta \neq \delta(T)$. Очевидно также, что эта функция вещественна и непрерывна $\forall\ t \in [0,T]$, $\delta \in R^{2n}$. Тогда с учётом (3) по теореме Зубова [3] если

$$\dot{W}|_{u^*} = -1, \tag{8}$$

то это управление u^* оптимально по быстродействию.

Подставим найденное управление (7) в (4). Получим нелинейную систему дифференциальных уравнений, правая часть которой зависит только от известных элементов a, k и от δ.

Это позволяет использовать численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Воспользуемся, например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Известны начальное значение $\delta(0) = \delta_0$ и конечное $\delta(T) = \delta_T$. Получив приближённые решения $\delta(t_m)$ системы в моменты t_m, подставим их в зависимость (7), таким образом найдём оптимальное управление $u^*(t_m)$ в моменты $t_m,\ m = \overline{0, M}, Mh = T, h > 0$.

Используем соотношение (8) для нахождения минимального времени T перехода системы из начального положения в конечное. Интегрируя (8) на промежутке времени от t_0 до T, будем иметь соотношение $W(T) - W(t_0) = -T + t_0$. Здесь $t_0 = 0, W(T) = 0$, поэтому

$$||\delta(t_0) - \delta(T)||^2 = ||\delta_0 - \delta_T||^2 = T. \qquad (9)$$

Рассматривается пример реализации построенного алгоритма, в котором выполнены условия теоремы Зубова и удалось построить приближённое решение системы и оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему в заданную точку. Конечный момент времени T вычислен аналитически.

Таким образом, в данном докладе демонстрируется возможность применения принципа динамического программирования Беллмана к задаче быстродействия с нелинейной системой (1). При рассмотренных ограничениях на управления получены необходимые и достаточные условия оптимального управления, аналитически найден конечный момент времени T. Рассмотренный пример и другие численные эксперименты дают ожидаемые результаты попадания точки из начального положения в конечное за вычисленное время T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф. А., Колмановский В. Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М. : Наука, 1978. 352 с.

2. *Беллман Р.* Динамическое программирование / пер. с англ. И. М. Андреевой и др.; под ред. Н. Н. Воробьева. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.

3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М. : Наука, 1975. 495 с.

УДК 517.51

О ПРОМЕЖУТОЧНОМ СЛУЧАЕ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ [1]

Д. В. Фуфаев (Москва, РФ)
fufaevdv@rambler.ru

В многомерной ситуации задача дифференцирования неопредленного интеграла приобретает дополнительную специфику, которой нет в одно мерной ситуации, что приводит к необходимости рассмотрения разных случаев. Эта специфика связана с регулярностью системы множеств, по которым происходит дифференцирование. В работе получен результат для случая регулярности, промежуточного по отношению к известным классическим.

Определение 1. Пусть $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ее *неопределенным интегралом* назовем функцию множества:

$$F(I) := \int\limits_I f(x)dx,$$

где I — измеримое множество, а интеграл понимается в смысле Лебега по мере Лебега.

Под брусом Δ будем понимать множество $(a^1; b^1) \times (a^2; b^2) \times \ldots \times (a^N; b^N)$ (где $-\infty < a^i < b^i < +\infty$), в которое, быть может, добавлены некоторые точки границы или содержащие всю свою границу. В дальнейшем в качестве множеств I будем рассматривать только брусы. Их диаметром будем называть число $\mathrm{diam}\Delta = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}(b^k - a^k)^2}$. Пусть $\Xi = \{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность (или система) брусов. Будем рассматривать такие системы брусов, для которых выполнено условие сходимости к любой точке $x \in \mathbb{R}^N$, то есть $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta \in \Xi : x \in \Delta,\ \mathrm{diam}\Delta < \varepsilon$.

Скажем, что система Ξ регулярная, если существует такое число $L > 0$, называемое параметром регулярности системы, что для любого бруса $\Delta = (a^1; b^1) \times \cdots \times (a^N; b^N)$, $\Delta \in \Xi$, справедливо неравенство:

$$\frac{\max\{b^1 - a^1, \ldots, b^N - a^N\}}{\min\{b^1 - a^1, \ldots, b^N - a^N\}} \leqslant L < \infty.$$

[1]Работа поддержана РФФИ 14-01-00417 и НШ 1096.2014.1.

Например, в качестве системы брусов можно взять все брусы, вершины которых имеют рациональные координаты, а в качестве регулярной системы — те из этих брусов, для которых выполнено условие регулярности для некоторого числа L.

Определение 2. Функция $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ называется *дифференцируемой по системе брусов* Ξ *в точке* x, если существует следующий предел:

$$D_\Xi F(x) := \lim_{\operatorname{diam}\Delta \to 0} \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} f(x)dx < \infty,$$

где предел берется по всем $\Delta \ni x, \Delta \in \Xi$. Число $D_\Xi F(x)$ называется производной интеграла F по системе Ξ в точке x. Будем говорить, что функция слабо дифференцируема (в точке x), если она дифференцируема по некоторой регулярной системе брусов, и сильно дифференцируема, если она дифференцируема по некоторой нерегулярной системе. Очевидно, сильная дифференцируемоть влечет слабую.

Тогда верны следующие давно известные теоремы (см. [3, гл. IV, § 6] и [3, гл. IV, § 13]):

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Тогда* $D_\Xi F(x) = f(x)$ *для почти всех точек* $x \in \mathbb{R}^N$, *где* Ξ *— любая регулярная система брусов.*

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f(x) \cdot \ln^{N-1}(|f(x)| + 1) \in \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Тогда* $D_\Xi F(x) = f(x)$ *для почти всех точек* $x \in \mathbb{R}^N$, *где* Ξ *— любая система брусов.*

Наложим промежуточные условия на систему брусов, чтобы получить промежуточные условия на функцию. Пусть $\mathbb{R}^N$ представлено в виде произведения D сомножителей: $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M_1+\dots+M_D}$(где M_i — натуральные числа), и пусть $\Xi = \{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\Delta_k^1 \times \Delta_k^2 \times \dots \times \Delta_k^D\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\Delta_k^i = (a_k^{i,1}; b_k^{i,1}) \times (a_k^{i,2}; b_k^{i,2}) \times \dots \times (a_k^{i,M_i}; b_k^{i,M_i})$, причем все системы $\Xi_i = \{\Delta_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ — регулярны, при этом система Ξ не обязана быть регулярной. Назовем такую систему D-регулярной. Был получен следующий результат:

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N), f(x) \cdot \ln^{D-1}(|f(x)| + 1) \in \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Тогда* $D_\Xi F(x) = f(x)$ *для почти всех точек* $x \in \mathbb{R}^N$, *где* Ξ *— любая* D*-регулярная система брусов.*

При решении использовались следующие технические средства:

Определение 3. Пусть функция $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, Ξ — регулярная система брусов. Тогда *регулярной функцией Харди–Литтлвуда* называется следующая функция:

$$f^\beta(x) := \sup_{\Xi \ni \Delta \ni x} \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} f(x)\, dx.$$

Заметим, что данная функция эквивалентна кубической функции Харди–Литтлвуда (чтобы ее получить из указанного определения, надо в качестве брусов брать кубы), в том смысле, что одна оценивается через другую с константами, зависящими только от размерности и параметра регулярности L.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x) \in L^1([0;1]^N)$, $f(x) \cdot \ln^{N-1}(|f(x)|+1) \in \in L^1([0;1]^N)$, $f \geqslant 0$ и задано $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_{[0;1]^N} f^\beta(x) dx \leqslant A \int\limits_{[0;1]^N} f(x) \cdot \ln(f(x)+1)\, dx + B \int\limits_{[0;1]^N} f(x)\, dx + \varepsilon,$$

где A и B суть константы, зависящие от ε, размерности и параметра регулярности, но не от f.

Примером применения данного результата может быть следующее: пусть D-регулярная система $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ покрывает некоторую область $G \subset \mathbb{R}^N$ в смысле Витали, $\chi_k(x) = \chi_{\Delta_k}(x)$ — характеристическая функция Δ_k, f — локально интегрируемая на G функция. Рассмотрим орторекурсивное разложение функции f по системе функций $\{\chi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ (см. [1] и [2]).

Предложение 1. *Частичная сумма разложения имеет вид:*
1) $S_n(x) = 0$, если но один из Δ_i с $i \leqslant n$ не содержит точки x;
2) $S_n(x) = \frac{1}{|\Delta_k|} \int\limits_{\Delta_k} f(x)\, dx$ иначе, $k = \max\{k = 1, \ldots, n : \Delta_k \ni x\}$.

Теорема 4. *Пусть функции $f(x)$, $f(x) \cdot \ln^{D-1}(|f(x)|+1)$ локально интегрируемы на области $G \subset \mathbb{R}^N$. Тогда $S_n(x)$, построенные выше, сходятся к f почти всюду.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоусов К. В., Лукашенко Т. П.* О некоторых свойствах орторекурсивных разложений функций многих переменных по системе характеристических

функций брусов // Совр. проблемы математики и механики. М. : Изд-во МГУ, 2011. Т. 6(1). С. 52–60.

2. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2001. № 1. С. 6–10.

3. *Сакс С.* Теория интеграла. М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2004. 496 с.

УДК 517.984

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ[1]

В. А. Халова, А. П. Хромов (Саратов, РФ)
HalovaVA@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим оператор

$$Af = \int_0^x M(x,t)f(t)\,dt + g(x)\int_0^1 M(1,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1]. \tag{1}$$

Операторы такого вида рассматривались ранее А. П. Хромовым [1] и его учениками. В [2], например, даже брались конечномерные возмущения операторов с инволюцией. В данной работе мы рассмотрим операторы с областью значений, удовлетворяющей условиям периодичности. Будут найдены простые условия, обеспечивающие равносходимость на всем отрезке [0,1] разложений по собственным и присоединенным функциям таких операторов и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Подобный результат для более общего, чем (1) интегрального уравнения, получен в [3], но условия на оператор здесь труднопроверяемы.

Предположим, что $M(x,t)$, $M_x(x,t)$, $M_t(x,t)$, $M_{xt}(x,t)$, $M_{x^2}(x,t)$ $\left(M_{x^jt^k}(x,t) = \dfrac{\partial M(x,t)}{\partial x^j \partial t^k}\right)$ непрерывны при $t \leqslant x$, $M(x,x) \equiv 1$, $g(x) \in C^1[0,1]$, $g(0) - g(1) = 1$.

Лемма 1. *Область значений оператора A удовлетворяет периодическим краевым условиям.*

Обозначим $(g,v) = \int\limits_0^1 g(t)v(t)\,dt$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Лемма 2. *Положим* $g_1(x) = (E+M_x)^{-1}g'(x)$, *где* E — *единичный оператор,* $M_x f = \int\limits_0^x M_x(x,t)f(t)\,dt$. *Если выполняется условие* $1+(g_1, v) \neq 0$, *то* A^{-1} *существует и имеет вид*

$$A^{-1}y = (E+M_x)^{-1}y'(x) - \frac{((E+M_x)^{-1}y', v)}{1+(g_1,v)}, \tag{2}$$

$$y(0) = y(1). \tag{3}$$

Лемма 3. *Если выполняется условие* $g(0) \neq 0$, *то* A^{-1} *существует и имеет вид*

$$A^{-1}y = (E+M_x)^{-1}y'(x) - \frac{g_1(x)}{g(0)}y(0), \tag{4}$$

$$y(0) = y(1). \tag{5}$$

Теорема 1. *Оператор* A^{-1} *существует тогда и только тогда, когда*

$$|g(0)| + |(g_1, v) + 1| > 0.$$

Доказательство. Докажем *необходимость.* Допустим противное, т. е. пусть

$$|g(0)| + |(g_1, v) + 1| = 0.$$

Тогда $g(0) = 0$. Но в этом случае $g'(x) \not\equiv 0$, так как если бы $g'(x) \equiv 0$, то $g(x) = c$ и $c = 0$, а такой случай неинтересен. Значит, $g'(x) \not\equiv 0$, тогда и $g_1(x) \not\equiv 0$.

Возьмем $f_0(x) = g_1(x)$. Покажем, что $Af_0 = 0$. В самом деле, обозначим $Af_0 = F(x)$. Отсюда

$$f_0(x) + M_x f_0(x) + g'(x)(f_0, v) = F'(x), \tag{6}$$

$$F(0) = 0. \tag{7}$$

Из (6) имеем

$$f_0(x) + g_1(x)(f_0, v) = (E+M_x)^{-1}F'(x). \tag{8}$$

Но $(f_0, v) = (g_1, v) = -1$. Значит, из (8) получаем

$$(E+M_x)^{-1}F'(x) = 0.$$

Тогда и $F'(x) = 0$, т. е. $F(x) = c$, но в силу (7) $c = 0$, т. е. $F(x) = 0$. Следовательно, A^{-1} не существует. □

Теорема 2. *Для того, чтобы для оператора A имело место*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)| = 0 \tag{9}$$

для любой $f(x) \in L[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$g(0) \neq 0.$$

Здесь $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма её тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{-\infty}^{+\infty}$ для тех k, для которых $|2k\pi| < r$.

Доказательство. *Достаточность.* Если $g(0) \neq 0$, то имеет место $|g(0)| + |1 + (g_1, v)| > 0$ и утверждение теоремы следует из теоремы 1 и лемм 2 и 3 также как и в [3].

Докажем *необходимость.* Допустим противное, т. е. пусть $g(0) = 0$. Тогда $g(1) = -1$ и поэтому $(Af)(0) = (Af)(1) = 0$ для любой функции $f(x)$, т. е. область значения оператора A состоит из функций $y(x)$, для которых $y(0) = y(1) = 0$. Но все собственные и присоединенные функции оператора A удовлетворяют условию $y(0) = y(1) = 0$, а тогда и

$$S_r(f,0) = S_r(f,1) = 0.$$

Таким образом, если $\lim\limits_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$, то $f(0) = f(1) = 0$. Но $\lim\limits_{r\to\infty} \|\sigma_r(f,x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$ и тогда, когда $f(x) \in C'[0,1]$ и $f(0) = f(1) \neq 0$, т. е. существует f, когда (9) не имеет место. Противоречие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Функциональный анализ. СМФН. Т. 10. М. : МАИ, 2004. С. 3–163.

2. *Халова В. А.* Конечномерные возмущения интегральных операторов с ядрами, имеющими скачки производных на диагоналях : дис. …канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2006. 123 с.

3. Хромов А. П. Интегральный оператор с периодическими краевыми условиями // Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій : Збірник праць Ін-ту математики НАН України. 2009. Т. 6, № 1. С. 321–329.

УДК 517.512

ОБ ОТКЛОНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ИХ ЗНАЧЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ

Ю. Х. Хасанов (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

Напомним [1], что непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

Пространство равномерных почти-периодических функций (его обозначим через $\mathbf{B}$) есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}, \quad a_k \in C, \quad \lambda_k, x \in R, n \in N$$

по норме

$$\|f(x)\|_B = \sup_{x\in R} |f(x)|.$$

Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция с рядом Фурье

$$A + \sum_k A_k \cos\lambda_k x + B_k \sin\lambda_k x.$$

Покажем, что существует гармоническая регулярная и непрерывная для $\sigma \geqslant 0$ функция $U(\sigma, x)$, совпадающая с $f(x)$ при $\sigma = 0$ и удовлетворяющая равномерно по условию

$$\|U(\sigma, x)\|_B = \sup_x |U(\sigma, x)|.$$

Рассмотрим функцию

$$U(\sigma, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\sigma}{\sigma^2 + (t-x)^2} dt \quad (\sigma > 0).$$

Легко непосредственно проверяется, что функция

$$u(\sigma, x) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + (t-x)^2}$$

при фиксированном t и $\sigma > 0$ гармоническая, то есть выполняется условие
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Теперь покажем, что при $\sigma > 0$ и $U(\sigma, x)$ по переменному x является почти-периодической функцией и притом равномерно для всех $\sigma > 0$. С помощью подстановки $t - x = \sigma u$ получим
$$U(\sigma, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + \sigma u)}{1 + u^2} du. \tag{1}$$

Если τ есть ε — почти-период $f(x)$, то
$$|U(\sigma, x + \tau) - U(\sigma, x)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x + \sigma u + \tau) - f(x + \sigma u)|}{1 + u^2} \, du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \varepsilon,$$

что и доказывает почти-периодичность функции $U(\sigma, x)$.

Теперь построим ряд Фурье функции $U(\sigma, x)$. Имеем
$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} U(\sigma, x) \cos \lambda x \, dx = M_x\{U(\sigma, x) \cos \lambda x\} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} M_x\{f(x + \sigma u) \cos \lambda x\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda \sigma u du}{1 + u^2} M_x\{f(x) \cos \lambda x\} =$$
$$= M_x\{f(x) \cos \lambda x\} \exp(-|\lambda| \sigma).$$

Аналогично
$$M_x\{U(\sigma, x) \sin \lambda x\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda \sigma u \, du}{1 + u^2} M_x\{f(x) \sin \lambda x\} =$$
$$= M_x\{f(x) \sin \lambda x\} \exp(-|\lambda| \sigma).$$

Поэтому
$$U(\sigma, x) \sim A + \sum_k (A_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x) \exp(-\lambda_k \sigma).$$

Из представления (1) следует, что при $\sigma \to 0$ и $U(\sigma, x) \to f(x)$, притом равномерно по x.

Наряду с функцией $f(x)$ рассмотрим функцию
$$q(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} \, dt,$$

которая (см. [2]) при условии

$$\int_0^1 t^{-1}\omega(f;t)\,dt < \infty. \tag{2}$$

будет функцией непрерывной на всей вещественной оси, где $\omega(f;t)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ в равномерной метрике.

Известно [1], что если равномерно по x

$$\left|\int_0^1 f(x+t)dt\right| < M, \tag{3}$$

то $q(x)$ будет также равномерной почти-периодической функцией. Кроме того, функция $V(\sigma,x)$ $(\sigma > 0)$, сопряженная к гармонической функции $U(\sigma,x)$, при выполнении условия (3) будет также равномерной почти-периодической с рядом Фурье

$$\sum_k (B_k \cos\lambda_k x + A_k \sin\lambda_k x)\exp(-\lambda_k\sigma).$$

Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция. За меру отклонения функции $U(\sigma,x)$ от ее граничных значений $f(x)$ примем величину

$$\Delta(f;\sigma)_B = \|U(\sigma,x) - f(x)\|_B,$$

где

$$U(\sigma,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+\sigma u)}{1+u^2}du.$$

Величины $\Delta(f;\sigma)_B$ обладает следующими свойствами

Лемма. *Если $U(\sigma,x)$ — гармоническая функция и имеет своими граничными значениями функцию $f(x)\in B$, то*

$$\Delta(f;\sigma_1+\sigma_2)_B \leqslant \Delta(f;\sigma_1)_B + \Delta(f;\sigma_2)_B,$$
$$\Delta(f;n\sigma)_B \leqslant n\Delta(f;\sigma)_B,$$

где n — любое натуральное число.

Далее приводим ряд утверждений, которые обеспечивают возможность оценивать поведение величины $\Delta(f,\sigma)_B$ в зависимости от свойств их граничных значений $f(x)\in B$. В качестве характеристики свойств граничных функций рассматриваются модули непрерывности. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция. Тогда справедлива оценка*

$$\Delta(f,\sigma)_B \leqslant C\sigma \left\{1 + \int_0^1 \frac{\omega_k(f;t)}{t^2}dt\right\},$$

где C не зависит от σ.

При $f(x) \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ результаты аналогичного характера получены в работе [4]. В качестве характеристики свойств граничных функций использованы наилучшие приближения целыми функциями экспоненциального типа.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — равномерная почти-периодическая функция и для нее выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда*

$$\Delta(g,\sigma)_B \leqslant C\sigma \left\{1 + \int_0^\sigma \frac{\omega_k(f;t)}{t}dt + \int_\sigma^1 \frac{\omega_k(f;t)}{t^2}dt\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М. : ГИТТЛ, 1953. 396 с.

2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.

3. *Hill E., Tamarkin I.* On the absolute integrability of Fourier transforms // Fundam. Math. 1935. Vol. 25. P. 329–352.

4. *Тиман М. Ф.* Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1969. № 2. С. 89–101.

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИИ ВМЕСТЕ С ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ НА ОТРЕЗКЕ[1]

А. А. Хромов (Саратов, РФ)

В данном сообщении на базе оператора, приведенного в [1], строятся семейства интегральных операторов, позволяющие получать равномерные приближения к фунции и ее непрерывной производной на отрезке.

1. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$.

Из операторов $S_{\alpha 1}f = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $S_{\alpha 2}f = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt$ построим операторы:

$$S_\alpha^{(2)}f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 f & \text{при} \quad x \in [0,1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 f & \text{при} \quad x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

и
$$DS_\alpha^{(2)}f = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 f & \text{при} \quad x \in [0,1/2], \\ DS_{\alpha 1}^2 f & \text{при} \quad x \in [1/2,1]. \end{cases},$$
где D – оператор дифференцирования по x. Из-за разрывности функций $S_\alpha^{(2)}f$ и $DS_\alpha^{(2)}f$ в точке $x = 1/2$ будем использовать метрику пространства $L_\infty[0,1]$, норма в котором в нашем случае будет определяться по формуле:
$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

Лемма 1. *Операторы* $S_{\alpha 1}^2$ *и* $S_{\alpha 2}^2$ *имеют вид:*
$$S_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha}(2\alpha-(x-t))f(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x}(x-t)f(t)\,dt\right],$$
$$S_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x}^{x+\alpha}(t-x)f(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(2\alpha-(t-x))f(t)\,dt\right],$$
$(\alpha < 1/4)$.

Лемма 2. *Операторы* $DS_{\alpha 1}^2$ *и* $DS_{\alpha 2}^2$ *имеют вид:*
$$DS_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha}f(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x}f(t)\,dt\right],$$
$$DS_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x}^{x+\alpha}f(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}f(t)\,dt\right].$$

Теорема 1. *Для любой непрерывной функции* $f(x)$ *выполняется сходимость:*
$$\|S_\alpha^{(2)}f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

Теорема 2. *Для* $f(x) \in C^1[0,1]$ *выполняется сходимость:*
$$\|DS_\alpha^{(2)}f - f'\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \text{ при } \alpha \to 0.$$

2. Пусть $f(x)$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в среднеквадратичной метрике. Найдем приближения к $f(x)$ с помощью построенных выше операторов.

Введем в рассмотрение величины:
$$\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) = \sup\{\|S_\alpha^{(2)}f - f\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}$$

и
$$\Delta^{(1)}(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)}f - f'\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}.$$

Теорема 3. *Для сходимости* $\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно выбрать* $\alpha = \alpha(\delta)$ *так, чтобы* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-1/2} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 4. *Для сходимости* $\Delta^{(1)}(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно выбрать* $\alpha = \alpha(\delta)$ *так, чтобы* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-3/2} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зим. школы. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. 2010. С. 181.

УДК 517.51:571.968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА[1]

Г. В. Хромова (Саратов, РФ)
KhromovAP@info.sgu.ru

В данном сообщении для нахождения равномерных приближений к точному решению уравнения Абеля с приближенно заданной правой частью предложено простое по конструкции семейство интегральных операторов, базирующихся на модификации оператора Стеклова из [1]

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)dt = f(x), \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (1)$$

Пусть известно, что при данной $f(x)$ существует непрерывная функция $u(x)$, являющаяся решением уравнения (1), но сама функция $f(x)$ нам неизвестна — вместо нее известна $f_\delta(x)$, такая, что $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta$. Поставим задачу: по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $u(x)$.

Возьмем модифицированный оператор Стеклова из [1]:

$$\hat{S}_\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int\limits_x^{x+\alpha} u(t)\mathrm{dt}, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)\mathrm{dt}, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Построим семейство операторов $R_\alpha = \hat{S}_\alpha A^{-1}$.

Теорема 1. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид:*

$$R_\alpha(x,t) = \begin{cases} (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 2}(x,t), & x \in [0,1/2], \\ (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 1}(x,t), & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

$$R_{\alpha 1}(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{-\beta} - (x-\alpha-t)^{-\beta}, & 0 \leqslant t \leqslant x-\alpha, \\ (x-t)^{-\beta}, & x-\alpha \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & x < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$R_{\alpha 2}(x,t) = \begin{cases} (x+\alpha-t)^{-\beta} - (x-t)^{-\beta}, & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ (x+\alpha-t)^{-\beta}, & x \leqslant t \leqslant x+\alpha, \\ 0, & x+\alpha < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство основано на том, что в данном случае вид оператора A^{-1} известен:

$$A^{-1} f = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t)\, dt.$$

Теорема 2. *Операторы R_{α_j}, $j = 1,2$, при $0 < \beta < 1/2$ являются линейными, ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из пространства $L_2[0,1]$ в $C[1/2,1]$ при $j=1$ и в $C[0,1/2]$ при $j=2$. При этом справедлива двусторонняя оценка*

$$[(1-2\beta)\Gamma(1-\beta)]^{-1} \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}} \leqslant \|R_\alpha\|_{L_2 \to L_\infty} \leqslant$$
$$\leqslant 2\,[(1-2\beta)\Gamma(1-\beta)]^{-1} \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}$$

$(\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\})$.

Пусть $u(x) \in Lip_M 1$. Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_\alpha, Lip_M 1) = \sup\left\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{L_\infty} : u \in Lip_M 1, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\right\}.$$

Теорема 3. *Справедлива не улучшаемая по порядку δ оценка:*

$$\frac{1}{2} C_1(\beta) \delta^{\frac{2}{3+2\beta}} \leqslant \Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, Lip_M 1) \leqslant C_2(\beta) \delta^{\frac{2}{3+2\beta}},$$

$$\alpha(\delta) = D(\beta) \delta^{\frac{2}{3+2\beta}},$$

$$C_1(\beta) = \frac{M}{2} D(\beta) + \left[(1-2\beta)^{\frac{1}{2}} \Gamma(1-\beta)\right]^{-1} (D(\beta))^{-\frac{2\beta+1}{2}},$$

$C_2(\beta)$ отличается от $C_1(\beta)$ множителем 2 во втором слагаемом,

$$D(\beta) = 2(2\beta+1)\left[M(1-2\beta)\Gamma(1-\beta)\right]^{-1}.$$

Сравнение регуляризации, проведенной здесь, с регуляризацией уравнения Абеля из [2] показывает, что в данном случае и семейство регуляризирующих операторов, и доказательства соответствующих теорем являются более простыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зим. школы. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.

2. *Хромова Г. В.* О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5–9.

УДК 517.984

ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ ПЛОСКОСТЯМИ КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ[1]

И. Г. Царьков (Москва, РФ)

tsar@mech.math.msu.su

В работе изучаются выпуклые замкнутые ограниченные множества A в гильбертовых пространствах H, для которых равны нулю колмогоровские поперечники

$$d_{-n}(A,H) = \inf_{\ell_{-n}\in\mathcal{L}_{-n}} \sup_{x\in A} E(x,\ell_{-n}),$$

где $\mathcal{L}_{-n}$ — множество всех плоскостей коразмерности n в пространстве H, а

$$E(x,\ell_{-n}) = \inf_{y\in\ell_{-n}} \|x-y\|$$

— наилучшее приближение точки x плоскостью $\ell_{-n}\in\mathcal{L}_{-n}$.

Через $B(x,r)$ обозначим шар радиуса r с центром x.

Теорема 1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, H – действительное гильбертово пространство, $A\subset H$ – ограниченное замкнутое выпуклое множество. Тогда $d_{-n}(A,H)=0$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup\{r\geqslant 0 \mid B(x,r)\cap\ell\subset A\cap\ell,\ \ell\in\mathcal{L}_{-n+1},\ x\in A\} = 0.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-01-00022).

УДК 591.65

ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА

И. А. Шакиров (Набережные Челны, РФ)
iskander@tatngpi.ru

На практике в качестве приближенного выражения функции $x(t) \in$ $\in C_{2\pi} = C[0, 2\pi]$ часто используют полином Лагранжа

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k) D_n^*(t_k - t) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^*(t_k - t) \quad \left(D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2tg0,5u}\right), \tag{1}$$

определенный в четном числе $N = 2n$ узлов вида $t_k = \pi k/n$ $(k = \overline{0, 2n-1} \vee k = \overline{1, 2n},\ n \in N)$. При этом норма отклонения полинома (1) от заданной функции оценивается согласно фундаментальному неравенству $\|x - \Phi_n^* x\|_{C[0,2\pi]} \leqslant (1 + \lambda_n^*) E_n(x)$ $(\Phi_n^* : C_{2\pi} \to C_{2\pi})$, где константа Лебега имеет следующий вид:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi \ \ (N = 2n). \tag{2}$$

Формула (2) была декларирована в работе немецких математиков Элиха и Целлера [1]. В [2, с. 43–46] она доказана с некоторыми издержками, т.е. без установления достаточного условия экстремума соответствующей (2) функции Лебега $\lambda_n^*(t)$. В работе автора [3] проведено полное доказательство формулы (2) с использованием производных до второго порядка включительно от безмодульного выражения функции $\lambda_n^*(t)$ (см. также [4]).

Первоначально интерполяционная характеристика (2) оценивалась сверху как $\lambda_n^* \leqslant O(\ln n)$ либо $\lambda_n^* \leqslant A + B \ln n$, например, $\lambda_n^* \leqslant 4 + \lg n$ [5], $\lambda_n^* \leqslant 8 + (4/\pi)\ln n$ [6]. Затем коэффициенты A, B многократно уточнялись, например, в [7, с.106] верхняя оценка для константы Лебега $\lambda_n^* \leqslant 4/\pi + (2/\pi)\ln(4n/\pi)$ установлена на основе формулы (2). В [8, с.215] приведено представление $\lambda_{2n-1}^* \leqslant (2/\pi)\ln n + 2(1 - 1/\pi)\theta_n$ $(\theta_n \in (0,1))$, содержащее некоторое уточнение поведения неопределенной константы $O(1)$ в асимптотическом равенстве

$$\lambda_n^* \cong \frac{2}{\pi}\ln n + O(1) \quad (N = 2n,\ n \to \infty). \tag{3}$$

Отметим, что в (3) до сих пор не определено конкретное значение константы $O(1)$, которое сохраняло бы хорошую близость его левой и правой частей при произвольно взятых значениях параметра n. В связи с этим в данной работе ставится и решается следующая

Задача. *Определить* ***наименьшее*** *значение A^* неопределенной константы $O(1)$ в (3) так, чтобы для всех натуральных значений параметра n было выполнено неравенство $\lambda_n^* \leqslant A^* + (2/\pi)\ln n\ \ (n \in N)$, и оценить допущенную при этом погрешность $\varepsilon^* = \sup\{A^* + (2/\pi)\ln n - \lambda_n^* \mid n \in N\}$.*

Определение. Строго монотонную функцию $\varphi = \varphi(n)\ \ (n \in D(\varphi) \subseteq \subseteq N)$ дискретного аргумента, имеющую малое изменение δ ($\delta \in (0, 0.1)$) области значений $R(\varphi)$, назовем *функцией, имеющей малую монотонную вариацию*, и класс таких функций обозначим через $V_\delta^\pm$ («$\pm$» — в случае возрастания и убывания функции в $D(\varphi)$ соответственно).

Теорема 1. *Для константы Лебега (2) справедлива следующая двусторонняя оценка:*

$$\frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n < \lambda_n^* <$$
$$< \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n \ \forall\ n \geqslant 2, \tag{4}$$

где $\alpha_n = \alpha(n) = \frac{1}{n}\operatorname{cosec}(\pi/2n) \in V_\delta^-$.

Доказательство. Функциональная зависимость $\alpha_n = \alpha(n)$ $(n \geqslant 2)$ является дискретным аналогом равномерно убывающей на промежутке $[2, +\infty]$ непрерывно дифференцируемой функции $y = \frac{1}{x}\operatorname{cosec}(\pi/2x)$, имеющей малое изменение области значения $R(y) = (2/\pi, \sqrt{2}/2] \subset \subset (0.636, 0.708)$. Следовательно, $\alpha_n \in V_\delta^-$ с достаточно малой вариацией $\delta = \sqrt{2}/2 - 2/\pi < 0.071$.

Оценим константу Лебега сверху и снизу, максимально используя при этом геометрические свойства определенного интеграла и котангенса:

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{t_1 - \pi/2n}{2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{t_k - \pi/2n}{2}\right] <$$

$$< \frac{1}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}\,dt = \frac{2\cos^2(\pi/4n)}{n\sin(\pi/2n)} + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\mathrm{ctg}\,t\,dt =$$

$$= \alpha_n(1+\cos(\pi/2n)) + \frac{2}{\pi}\ln\frac{n}{n\sin(\pi/2n)} = \alpha_n(1+\cos(\pi/2n)) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n \quad \left(\frac{1}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} = \alpha_n(1+\cos(\pi/2n))\right);$$

$$\lambda_n^* = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} + \left[\frac{1}{4}\frac{\pi}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{t_k-\pi/2n}{2}\right]\right\} >$$

$$> \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3\pi}{4n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} + \left[(\frac{\pi}{4n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n})\cdot\frac{1}{2} + (\frac{\pi}{4n}\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{4n})\cdot\frac{1}{2} + \int_{t_1}^{\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{t}{2}dt\right]\right\} =$$

$$= \frac{3}{4n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{8n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{8n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n}\cdot\frac{4\cos^2(\pi/4n)-3}{3-4\sin^2(\pi/4n)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2n}^{\pi/2}\mathrm{ctg}\,t\,dt > (\frac{7}{8} + \frac{3-2\sqrt{2}}{8})\frac{1}{n}\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4n} + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n =$$

$$= \frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n$$

(дополнительно использовано неравенство $\dfrac{4\cos^2(\pi/4n)-3}{3-4\sin^2(\pi/4n)} \geqslant 3-2\sqrt{2}$, $n \geqslant 2$).

Замечание 1. Значению параметра $n=1$ в формуле (2) соответствует тривиальный случай: $\lambda_1^* = 1,\ \lambda_1^*(t) \equiv 1$ [3]. Если же в неравенстве (4) положим $n=1$, то противоречия не получим, а имеем лишь его нестрогий вариант: $(5-\sqrt{2})/4 < \lambda_1^* \leqslant 1$.

Участвующие в неравенстве (4) функции $\varphi_1(n) = \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n})$, $\varphi_2(n) = (2/\pi)\ln\alpha_n$ и их линейные комбинации, как нетрудно в этом убедиться, принадлежат классам $V_\delta^{\pm}$. Сказанное позволяет в (4) за точное значение константы λ_n^* с небольшой погрешностью взять полусумму ее верхней и нижней оценок, замененную затем с некоторой погрешностью выражением $\mu_n^* = \mu^*(n) = 1 + (2/\pi)\ln n$ $(n \geqslant 2)$, т.е.

$$\lambda_n^* \approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{5-\sqrt{2}}{4}\right)\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln n =$$

$$= \left(\frac{9-\sqrt{2}}{8}\alpha_n + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n\right) + \frac{9-\sqrt{2}}{8}\alpha_n\cos\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi}\ln n \approx$$

$$\approx 1 + \frac{2}{\pi}\ln n = \mu_n^* \quad (n \geqslant 2).$$

Теорема 2. *Асимптотическое равенство* (3) *при* $A^* = 1$ *и произвольно выбранных значениях параметра* n *ведет себя как неравенство*

$$\lambda_n^* \leqslant 1 + \frac{2}{\pi}\ln n = \mu_n^*, \ \ n \in N \ (\Longleftrightarrow \lambda_n^* \approx \mu_n^*, \ n \in N). \tag{5}$$

а для допущенной при конкретных значениях n *погрешности* $\varepsilon_n^* = \mu_n^* - \lambda_n^*$ *равномерно относительно параметра верна оценка:*

$$\varepsilon^* = \sup\{\varepsilon_n^* \mid n \in N\} = \sup\{\mu_n^* - \lambda_n^* \mid n \in N\} < 0.147. \tag{6}$$

Доказательство. Если значение параметра $n = 1$, то в неравенстве (5) левая и правая его части совпадают, т.е. имеем случай $\lambda_1^* = \mu_1^* = 1$.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Тогда для оценки допущенной в (5) погрешности ε_n^* в неравенстве (4) вычтем всюду $\mu_n^* = 1 + \frac{2}{\pi}\ln n$ и после некоторых преобразований получим:

$$\frac{5-\sqrt{2}}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n - 1 < \lambda_n^* - \mu_n^* <$$
$$< \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) + \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n - 1 \Leftrightarrow$$
$$1 - \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) - \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n < \mu_n^* - \lambda_n^* <$$
$$< 1 - \alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) - \frac{2}{\pi}\ln\alpha_n - \frac{\sqrt{2}-1}{4}\alpha_n(1+\cos\frac{\pi}{2n}) \quad \Leftrightarrow$$
$$1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) < \varepsilon_n^* < 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n) + ((\sqrt{2}-1)/4)\varphi_1(n) \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_3(n) < \varepsilon_n^* < \varphi_4(n) \quad (\varphi_3(n) \equiv 1 - \varphi_1(n) - \varphi_2(n),$$
$$\varphi_4(n) \equiv \varphi_3(n) + ((\sqrt{2}-1)/4)\varphi_1(n), \ n \geqslant 2). \tag{7}$$

Для введенных в (7) функций $\varphi_k = \varphi_k(n)$ $(k = 3, 4)$ верны соотношения:

$$\varphi_3 \in V_\delta^+, \quad R(\varphi_3) = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset (0.013, 0.015);$$
$$\varphi_4 \in V_\delta^+, \quad R(\varphi_4) = \left[\frac{5-4\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{\pi}\ln 2, 1 - \frac{5-\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2}\right) \subset$$
$$\subset (0.138, 0.147).$$

Переходя в двойном неравенстве (7) к точной верхней грани по аргументу n $(n \geqslant 2)$ и используя полученные сведения о функциях

$\varphi_3(n), \varphi_4(n)$, имеем: $0 < \sup\{\mu_n^* - \lambda_n^* \mid n \geqslant 2\} < 1 - (5-\sqrt{2})/\pi + \frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi}{2} <$ < 0.147. С учетом случая $n = 1$ полученное неравенство перепишем в виде $0 \leqslant \sup\{\varepsilon_n^* \mid n \in N\} < 0.147$, откуда автоматически следует справедливость соотношений (5) и (6).

Замечание 2. В координатной системе nOY графики монотонно возрастающих и непрерывно продолженных на промежуток $[1, +\infty)$ функций $y = \mu_n^* = \mu^*(n)$, $y = \lambda_n^* = \lambda^*(n)$ при значении аргумента $n = 1$ имеют общую вершину $M^* = M^*(1, 1)$. Для остальных значений аргумента справедливо неравенство $\lambda^*(n) < \mu^*(n)$ $(n \geqslant 2)$ (см. теорему 2). Ясно, что вариация коэффициента A^* перемещает вершину графика функции $y = \mu^*(n, A^*) = A^* + \frac{2}{\pi}\ln n$ по прямой $n - 1 = 0$ параллельно оси OY. Поэтому увеличение $(A^* > 1)$ коэффициента A^* сохраняет строгий вариант неравенства (5), но одновременно увеличивает соответствующую погрешность $\varepsilon^*(A^*)$ вида (6); а его уменьшение $(A^* < 1)$ нарушает выполнение неравенства (5), но при этом погрешность $\varepsilon^*(A^*)$ может быть несколько уменьшена относительно установленной в теореме 2 погрешности ε^* из соотношения (6). Следовательно, $A^* = 1$ в неравенстве (5) является единственным решением поставленной в работе *задачи*, т. е. является наименьшим значением всевозможных констант, для которых справедливо неравенство (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ehlich H., Zeller K.* Auswertung der Normen von Interpolations operatoren // Math. Ann. 1966. Vol. 164.

2. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988.

3. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88.

4. *Шакиров И. А.* О фундаментальных характеристиках семейства интерполяционных полиномов Лагранжа// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 99–104.

5. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.; Л. : ГТТИ, 1934.

6. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л. : Гостехиздат, 1949.

7. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980.

8. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»S, 2002.

УДК 517.53/.54

УСЛОВИЕ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ[2]

Ф. А. Шамоян, Е. Г. Родикова (Брянск, РФ)
shamoyanfa@yandex.ru, evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $\mathbb{T}$ — его граница, $H(\mathbb{D})$ — множество всех аналитических в $\mathbb{D}$ функций, $E = \{e^{i\tau_k}\}_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{T}$ — n точек на единичной окружности $\mathbb{D}$. Обозначим $\rho(z, E) = dist(z, E)$ — расстояние от произвольной точки $z \in \mathbb{D}$ до множества E. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ символом x_+ будем обозначать $\max(x, 0)$. Рассмотрим класс

$$H_\varphi(E) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \ln |f(z)| \leqslant c_f \varphi\left(\frac{1}{\rho(z, E)}\right),\ z \in \mathbb{D} \right\}.$$

В работе [1] было установлено следующее утверждение:

Теорема А. *Если $f \in H_\varphi(E)$, $\varphi(t) = t^q$, $q \geqslant 0$, $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — последовательность нулей функции f, то сходится ряд:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho(z_k, E))^{(q-1+\varepsilon)_+}(1 - |z_k|) < +\infty, \tag{1}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Подобные результаты имеют ряд важных приложений в теории операторов, теории аппроксимации и других разделах комплексного и функционального анализа (см. там же). Естественным образом возникает вопрос, насколько точным является условие (1), а также задача получения аналогов теоремы А для более общих классов функций, в частности, для класса $H_\varphi(E)$ с нестепенным весом $\varphi(t)$.

В том случае, когда $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = t^q$, $0 < q \leqslant 1$, теоремы типа А были установлены в работах М. М. Джрбашяна [2], Х. Шапиро и А. Шилдса [3]. Для случая $E = \mathbb{T}$, $\varphi(t) = t^q$, $q > 1$ и для более общих весов полное описание корневых множеств получено Ф. А. Шамояном (см. [4]).

Нами установлен следующий результат:

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97508)

Теорема 1. *Пусть $f \in H_\varphi(E)$, где $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая положительная функция, $\varphi \in C^{(1)}(1, +\infty)$, такая что*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi \geqslant 1,$$

$\psi(x) \downarrow 0$ при $x \to 0+$, такая что $\psi \in C^{(1)}(0, +\infty)$, и при этом

$$\lim_{R \to +\infty} \psi\left(\frac{1}{R}\right) \frac{\varphi(R)}{R} < +\infty.$$

Тогда если $\int\limits_{r_E}^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\varphi(x)}{x^3} dx < +\infty$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi(\rho(z_k, E))(1 - |z_k|) < +\infty. \tag{2}$$

Обратно, если $\int\limits_{r_E}^{+\infty} \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\varphi(x)}{x^3} dx = +\infty$, то существует тождественно отличная от нуля функция $g \in H_\varphi(E)$, такая что $g(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой ряд (2) расходится.

Замечание 1. Если в формулировке теоремы 1 положить $0 < \alpha_\varphi < 1$, то ряд (2) будет сходиться даже в том случае, когда $\psi(x) > \delta > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ (см. [2]–[4]). Аналог теоремы 1 в случае, когда $E = \mathbb{T}$, получен в работе [5]. Отметим также, что метод доказательства теоремы 1 существенно отличается от методов, используемых в работе [1].

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что оценка (1) теоремы А близка к точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borichev A., Golinskii L., Kupin S.* A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices // Bulletin of the London Math. Soc. 2009. Vol. 41. P. 117–123.

2. *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Ин-та мат. и мех. АН Арм. ССР. 1948. Т. 2. С. 3-–40.

3. *Shapiro H., Shields A.* On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces // Math. Z. 1962. Vol. 80. P. 217–229.

4. *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the Theory of A^p_α Spaces. Teubner-Texte zur Math. 1988. Vol. 105.

5. *Шамоян Ф. А.* О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи его границы // Изв. АН АрмССР, Сер. Математика. 1983. Т. 18, № 1. С. 215–228.

УДК 517.984

ДВУМЕРНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА[1]

И. И. Шарапудинов (Махачкала, РФ)
sharapud@mail.ru

Пусть $f(x,y)$ — четная 2π-периодическая по каждой из переменных x и y и интегрируемая на квадрате $[0,\pi]^2$ функция, которая в точках $(i\pi, j\pi)$, $i,j \in \mathbb{Z}$ принимает конечные значения. Положим

$$S(f) = S(f)(u,v) = f(u,v) - \frac{f(0,v)+f(\pi,v)}{2} - \frac{f(0,v)-f(\pi,v)}{2}\cos u,$$

$$H(f) = H(f)(u,v) = f(u,v) - \frac{f(u,0)+f(u,\pi)}{2} - \frac{f(u,0)-f(u,\pi)}{2}\cos v,$$

$$O(f) = O(f)(u,v) = S(u,v) - \frac{S(u,0)+S(u,\pi)}{2} - \frac{S(u,0)-S(u,\pi)}{2}\cos v,$$

$$\Theta(f) = \Theta(f)(u,v) = \frac{f(0,0)-f(0,\pi)-f(\pi,0)+f(\pi,\pi)}{4}\cos u\cos v+$$
$$+\frac{f(0,0)+f(0,\pi)-f(\pi,0)-f(\pi,\pi)}{4}\cos u+$$
$$+\frac{f(0,0)-f(0,\pi)+f(\pi,0)-f(\pi,\pi)}{4}\cos v+$$
$$+\frac{f(0,0)+f(0,\pi)+f(\pi,0)+f(\pi,\pi)}{4}$$

и заметим, что

$$f(x,y) = \Theta(f)(x,y) + O(f)(x,y) + A(f)(x)+$$
$$+B(f)(x)\cos y + c(f)(y) + D(f)(y)\cos x,$$

где

$$A(f)(u) = \frac{S(f)(u,0)+S(f)(u,\pi)}{2}, \quad B(f)(u) = \frac{S(f)(u,0)-S(f)(u,\pi)}{2},$$
$$C(f)(u) = \frac{H(f)(0,v)+H(f)(\pi,v)}{2}, \quad D(f)(u) = \frac{H(f)(0,v)-H(f)(\pi,v)}{2}.$$

Определим следующие коэффициенты

$$o_{k,l}(f) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} O(f)(u,v)\frac{\sin ku \sin lv}{\sin u \sin v}\,du\,dv,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191).

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi A(f)(u) \frac{\sin ku}{\sin u}\, du, \quad b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi B(f)(u) \frac{\sin ku}{\sin u}\, du,$$

$$c_l(f) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi C(f)(u) \frac{\sin lv}{\sin v} dv, \quad d_l(f) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi D(f)(u) \frac{\sin lv}{\sin v} dv$$

и рассмотрим ряды

$$O(f)(x,y) \sim \sin x \sin y \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly,$$

$$A(f)(x) \sim \sin x \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \sin kx,$$

$$B(f)(x) \sim \sin x \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin kx,$$

$$C(f)(y) \sim \sin y \sum_{l=1}^{\infty} c_l(f) \sin ly,$$

$$D(f)(y) \sim \sin y \sum_{l=1}^{\infty} d_l(f) \sin ly.$$

Тогда мы можем сопоставить функции $f(x,y)$ следующий специальный ряд

$$f(x,y) \sim \Theta(f)(x,y) + \sin x \sin y \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly +$$
$$+ \sin x \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) + b_k(f) \cos y) \sin kx +$$
$$+ \sin y \sum_{l=1}^{\infty} (c_l(f) + d_l(f) \cos x) \sin ly. \tag{1}$$

Ряд (1) будем называть двумерным специальным рядом по системе $\{\sin x \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. В работе исследованы аппроксимативные свойства таких рядов. Показано, что специальные ряды вида (1) выгодно отличаются от двумерных косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вида

$$S_{n,m}^{\nu,\mu} = \Theta(f)(x,y) + \sin x \sin y \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly +$$

$$+\sin x\sum_{k=1}^{\nu-1}(a_k(f)+b_k(f)\cos y)\sin kx+$$

$$+\sin y\sum_{l=1}^{\mu-1}(c_l(f)+d_l(f)\cos x)\sin ly. \quad (2)$$

вблизи границы квадрата $[0,\pi]^2$ обладают значительно лучшими, чем суммы Фурье вида

$$S_{n,m}(f)(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}a_{k,l}(f)\cos kx\cos ly.$$

аппроксимативными свойствами

УДК 517.52

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА, СО СВОЙСТВОМ ПРИЛИПАНИЯ

И. И. Шарапудинов, Г. Г. Акниев (Махачкала, РФ)
hasan.akniyev@gmail.com

Дискретное косинусное преобразование Фурье (ДКП) используется в различных областях приложений: в таких, например, как обработка изображений и временных рядов и др. В приложениях, как правило, вместо полного разложения используют приближенное равенство, полученное отбрасыванием части членов ряда Фурье.

Заданный «длинный» ряд аппроксимируется следующим образом: разбивается на части и аппроксимируется каждая часть отдельно. Но, в силу того, что каждая часть аппроксимируется независимо, после восстановления ряда в местах «стыка», как правило, возникают нежелательные разрывы. Указанные разрывы в точках стыка возникают из-за того, что суммы, фигурирующие в правых частях приближенных равенств заметно отклоняются от исходной функции $f(x)$ в окрестностях концевых точек.

В настоящей работе рассмотрена задача о конструировании аппроксимирующих операторов, обладающих тем важным свойством, что в окрестностях концевых точек $x=0$ и $x=\pi$ приближают $f(x)$ значительно лучше, чем на всем отрезке $[0,\pi]$, а в самих точках совпадают с исходной функцией. Это свойство мы будем называть свойством «прилипания». Кроме того, требуется, чтобы полученные операторы приближали функцию $f(x)$ на всем отрезке $[0, \pi]$ не хуже, чем частичные суммы ДКП.

Рассмотрим сетку $\Omega_{N-1} = \{\frac{j\pi}{N}\}_{j=1}^{N-1}$. Через $l_2(\Omega_{N-1})$ мы обозначим евклидово пространство дискретных функций (для непрерывного случая результаты получены в [1]) $f(x)$ вида $f : \Omega_{N-1} \to \mathbb{R}$, в котором скалярное произведение определено с помощью равенства

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) g\left(\frac{j\pi}{N}\right). \tag{1}$$

Функции $\sin x, \sin 2x, ..., \sin(N-1)x$ образуют полную ортонормированную систему в $l_2(\Omega_{N-1})$, то есть

$$\frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sin k\frac{j\pi}{N} \sin n\frac{j\pi}{N} = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Из (2), а также из того, что эти функции образуют в $l_2(\Omega_{N-1})$ базис, следует, что произвольная функция $\psi \in l_2(\Omega_{N-1})$ допускает представление

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k \sin kx, \quad x \in \Omega_{N-1}, \tag{3}$$

где

$$\psi_k = \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \psi\left(\frac{j\pi}{N}\right) \sin\frac{kj\pi}{N}. \tag{4}$$

Пусть теперь $f(x)$ произвольная функция из $l_2(\Omega_{N-1})$. Доопределим ее в точках $x = 0$ и $x = \pi$. Положим

$$a_f(x) = \frac{f(0) + f(\pi)}{2} + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \cos x,$$
$$h(x) = f(x) - a_f(x) \tag{5}$$

и заметим, что $h(0) = h(\pi) = 0$. Для функции $\psi(x) = \dfrac{h(x)}{\sin x}$ коэффициенты ψ_k из (4) принимают следующий вид:

$$\psi_k = \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h(j\pi) - a_f\left(\frac{j\pi}{N}\right)}{\sin\frac{j\pi}{N}} \sin\frac{kj\pi}{N} = \hat{h}_k. \tag{6}$$

Из (3)–(6) выводим

$$f(x)=a_f(x)+\sin x\sum_{k=1}^{N-1}h_k\sin kx,\quad x\in\left\{\frac{j\pi}{N}\right\}_{j=0}^{N}. \tag{7}$$

Обозначим через $\tau_{n,N}(f,x)$ частичную сумму ряда (7) следующего вида

$$\tau_{n,N}(f,x)=a_f(x)+\sin x\sum_{k=1}^{n-1}h_k\sin kx,\quad 1\leqslant n\leqslant N-1. \tag{8}$$

Можно показать, что для произвольного четного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n\leqslant N-1$ имеет место тождество

$$\tau_{n,N}(T_n,x)\equiv T_n(x). \tag{9}$$

Дискретную функцию $f(x)$, заданную на конечной сетке $\{\frac{j\pi}{N}\}_{j=0}^{N}$ мы продолжим на бесконечную сетку $\mathbb{Z}_{n/N}=\left\{\frac{j\pi}{N}\right\}_{j=-\infty}^{\infty}$ так, чтобы продолженная функция была четной и 2π-периодической при $x\in\mathbb{Z}_{n/N}$. Множество всех таких функций мы обозначим $C^e(\mathbb{Z}_{n/N})$, которое мы превратим в нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{n/N}=\max_{x\in\mathbb{Z}_{n/N}}|f(x)|.$$

Обозначим $E_{n,N/\pi}$ наилучшее приближение функции $f\in C^e(\mathbb{Z}_{n/N})$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n, удовлетворяющим условиям $f(0)=T_n(f,0), f(\pi)=T_n(f,\pi)$:

$$E_{n,\pi/N}(f)=\|f-T_n(f)\|_{\pi/N}. \tag{10}$$

Можно показать, что

$$|f(x)-\tau_{n,N}(f,x)|\leqslant E_{n,\pi/N}(f)(1+L_{n,\pi/N}(x)), \tag{11}$$

где

$$L_{n,\pi/N}(x)=\frac{2}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\left|\sin x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kx\sin\frac{jk\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}\right|. \tag{12}$$

Возникает задача об оценке величины $L_{n,\pi/N}(x)$ при $n,N\to\infty$.

Теорема 1. *Имеет место следующая оценка:*

$$L_{n,\pi/N}(x)\leqslant C(1+\ln(n\sin x+1)),\quad 1\leqslant n\leqslant N-1. \tag{13}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. математическая (принята к печати).

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ И ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О. И. Шаталина (Саратов, РФ)
olja170788@mail.ru

В работе приведено семейство интегральных операторов, с помощью которых получаются равномерные приближения к непрерывной функции, удовлетворяющей краевым условиям (при этом указанные приближения удовлетворяют тем же условиям) и решена задача типа Колмогорова – Никольского на некотором компактном классе на отрезке $[0, 1]$

1. Пусть непрерывная функция $\overline{u}(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\cup(\overline{u}) \equiv \beta_1 \overline{u}(0) + \beta_2 \overline{u}(1) = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \tag{1}$$

Получим равномерные приближения к $\bar{u}(x)$, используя модификацию функционала Тихонова, известного в теории некорректно поставленных задач [1, 2], а именно – рассмотрим функционал

$$M^{\alpha}[u, \overline{u}] = \|u - \overline{u}\|_{L_2}^2 + \alpha \|u\|_{W_2}^2, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — парметр, $\|u\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_0^1 (pu^2 + qu^2)\, dx \right)^{1/2}$, p, q — положительные константы. При этом будем считать допустимыми функциями функции, удовлетворяющие условию (1).

Обозначим через $u^{\alpha}(x)$ — функции, минимизирующие функционал (2) при каждом фиксированном значении α. Тогда, переходя к уравнению Эйлера для этого функционала, получим:

Лемма 1. *Минимизирующие функции $u_{\alpha}(x)$ при каждом фиксированном α являются решением краевой задачи:*

$$\begin{cases} -qy'' + (p + \frac{1}{\alpha})y = \frac{1}{\alpha}\overline{u}, \\ \beta_1 y(0) + \beta_2 y(1) = 0, \\ \beta_2 y'(0) + \beta_1 y'(1) = 0. \end{cases}$$

Хромовой Г. В. в [3] доказано, что в рассматриваемом нами случае последовательность функций $u^{\alpha}(x)$, минимизирующих функционал (2), равномерно сходится к $\overline{u}(x)$, для любой непрерывной функции $\overline{u}(x)$, удовлетворяющей условию (1).

Отсюда и из леммы 1 вытекает

Теорема 1. *Для любой непрерывной функции $\overline{u}(x)$, удовлетворяющей условию* (1), *и семейства интегральных операторов*

$$T_{\alpha}u = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{0}^{1} K_{\alpha}(x,t)u(t)dt,$$

где

$$K_{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\alpha_1 q}\left[\pm \operatorname{sh}\alpha_1(x-t) + \frac{\mathcal{D}(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}{B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}\right],$$
$$B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = (\beta_1^2+\beta_2^2)\operatorname{ch}\alpha_1 + 2\beta_1\beta_2,$$
$$\mathcal{D}(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = (\beta_1^2-\beta_2^2)\operatorname{ch}\alpha_1\operatorname{sh}\alpha_1(x+t)+$$
$$+(\beta_1^2+\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_1(x-t) - (\beta_1^2-\beta_2^2)\operatorname{ch}\alpha_1(x+t)\operatorname{sh}\alpha_1',$$
$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{p}{q}+\frac{1}{\alpha q}},$$

выполняется сходимость:

$$\|T_{\alpha}\overline{u}-\overline{u}\|_{C[0,1]} \to 0 \quad \text{при } \alpha\to 0.$$

2. Введем в рассмотрение класс функций

$$M_B = \left\{u\in C[0,1] : U(u)=0,\ u=B\vartheta,\ \|\vartheta\|_{L_2}\leqslant 1\right\},$$

где B — интегральный оператор с ядром $B(x,t)$, причем ядро $B(x,t)$ имеет вид:

$$B(x,t) = \begin{cases}\beta_1, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ -\beta_2, & x<t\leqslant 1,\end{cases} \tag{3}$$

и величину

$$\Delta_1(T_{\alpha},M_B) = \sup\left\{\|T_{\alpha}u-u\|_{C[0,1]} : u\in M_B\right\}.$$

Теорема 2. *Для класса функций M_B, в котором ядро $B(x,t)$ имеет вид (3) справедлива двусторонняя оценка:*

$$\frac{\tilde{\tilde{\beta}}^4(\beta_1+\beta_2)^2 q^{\frac12}\alpha^{\frac12}}{2(\beta_1^2+\beta_2^2)^2} - \psi_2(\alpha) \leqslant \Delta_1(T_{\alpha},M_B) \leqslant \frac{\tilde{\beta}^4(\beta_1+\beta_2)^2 q^{\frac12}\alpha^{\frac12}}{(\beta_1^2+\beta_2^2)^2} + \psi_2(\alpha).$$

где

$$\psi_1(\alpha) = O(\alpha), \quad \psi_2(\alpha) = O(\alpha);$$

$$\tilde{\tilde{\beta}} = \begin{cases} \min(\beta_1, \beta_2), & \beta_1, \beta_2 \neq 0, \\ 1, & \beta_1 = 0 \text{ *или* } \beta_2 = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\beta} = \max(\beta_1, \beta_2).$$

Для $\beta_1 = 0$ и $p = q = 1$ теорема 2 доказана в [4].

3. Рассмотрим случай, когда вместо $\overline{u}(x)$ нам известна функция $u_\delta(x)$, такая что $\|u_\delta - u\| \leqslant \delta$. Поставим задачу получения по u_δ и δ равномерных приближений к $\overline{u}(x)$. Это известная задача из теории некорректно поставленных задач (так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному δ-приближению).

Справедлива

Теорема 3. *Для нормы интегрального оператора T_α имеет место равенство*

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \to C} = \frac{\tilde{\beta}^2 \alpha^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} q^{\frac{1}{4}}} + O(\alpha^{\frac{3}{4}}),$$

асимптотическое по α, при $\alpha \to 0$, где $\tilde{\beta} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

Из теоремы 1 и 3 вытекает.

Следствие 1. *Семейство операторов T_α является регуляризирующим для задачи восстановления.*

Введем в рассмотрение величину:

$$\Delta(\delta, T_\alpha, M_B) = \sup\left\{\|T_\alpha u_\delta - u\|_{C[0,1]} : u \in M_B, \|u - u_\delta\|_{L_2} \leqslant \delta\right\}.$$

Теорема 4. *Справедлива двусторонняя ассимптотическая по δ, при $\delta \to 0$ оценка:*

$$C_2 \delta^{\frac{1}{3}} - \psi_2(\delta^{\frac{2}{3}}) \leqslant \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M_B) \leqslant C_1 \delta^{\frac{2}{3}} + \psi_1(\delta^{\frac{2}{3}}),$$

где

$$\alpha(\delta) = \frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{8}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} \beta_1^{\frac{8}{3}} (\beta_1 + \beta_2)^{\frac{8}{3}} q} \delta^{\frac{4}{3}},$$

$$C_1 = \frac{3\beta_1^{\frac{8}{3}} (\beta_1 + \beta_2)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad C_2 = \frac{3\beta_1^{\frac{8}{3}} (\beta_1 + \beta_2)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{7}{3}} (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{2}{3}}}, \quad \psi_j(\delta) = o(\delta^{\frac{2}{3}}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

2. *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 7, № 5. С. 1161–1171.

3. *Хромова Г. В., Шаталина О. И.* Решение задачи типа Колмогорова–Никольского для операторов Тихоновской регуляризации // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 111–112.

4. *Шаталина О. И.* Оценка погрешности приближенного решения задачи восстановления функции на некотором компактном классе // Алгоритмический анализ неустойчивых задач : материалы междунар. конф., посвящ. памяти В. К. Иванова. Екатеринбург : Изд-во Уральск. фед. ун-та, 2011. С. 97–98.

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ[1]

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, РФ)

tadgius@gmail.com

Пусть $p = p(x)$ — 2π-периодическая измеримая и существенно ограниченная функция такая, что $1 \leqslant \underline{p}([-\pi,\pi]) \leqslant \overline{p}([-\pi,\pi]) < \infty$ ($\underline{p}(B) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} p(x)$, $\overline{p}(B) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} p(x)$), а $w(x)$ — почти всюду положительная 2π-периодическая суммируемая функция. Через $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)} w(x)dx < \infty.$$

Пространство $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ нормируемо ([1]) при $p(x) \geqslant 1$ и одна из эквивалентных норм вводится следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \inf\{\alpha > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\frac{f(x)}{\alpha}\Big|^{p(x)} w(x)dx \leqslant 1\}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

Разобьем отрезок $E=[-\pi,\pi]$ на множества $E_1=\{x : p(x)=1\}$ и $E_2=E\backslash E_1$. Через $\mathcal{W}(E,p)$ обозначим класс весовых функций w, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\quad w(x)\geqslant C_1(w)>0, \quad x\in E_1(\text{п.в.}),\\ &2)\quad \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2)<\infty. \end{aligned}$$

Класс переменных показателей, для которых выполнено условие Дини-Липшица:

$$\big|p(x)-p(y)\big|\ln\frac{1}{|x-y|}\leqslant C \quad (x,y\in E),$$

обозначим через $\mathcal{P}$.

Пусть для каждого $\lambda\geqslant 1$ задана измеримая 2π-периодическая и существенно ограниченная функция (ядро) $k_\lambda=k_\lambda(x)$ и $w\in\mathcal{W}(E,p)$. Тогда для любой функции $f(x)\in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ мы можем определить линейный оператор $\mathcal{K}_\lambda(f)(x)$:

$$K_\lambda(f)(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x)dt.$$

Будем говорить, что семейство ядер $\{k_\lambda(x)\}_{1\leqslant\lambda<\infty}$ удовлетворяет, соответственно, условиям $A)$, $B)$, $C)$, если имеют место следующие оценки:

$A)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|k_\lambda(x)|dx\leqslant c_1,$

$B)\sup\limits_x|k_\lambda(x)|\leqslant c_2\lambda^\nu,$

$C)|k_\lambda(x)|\leqslant c_3$ при $\lambda^{-\gamma}\leqslant|x|\leqslant\pi,$

где $\nu,\gamma,c_j>0$ и не зависят от λ.

Для $h=\lambda^{-\gamma}$ положим

$$\mathfrak{B}^h=\{\Delta^h_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\ \Delta^h_k=[(kh-1)\pi,((k+1)h-1)\pi],$$

$$\mathfrak{B}_\varepsilon=\bigcup_{h<\varepsilon}\mathfrak{B}^h_\varepsilon,$$

$$\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon=\{\Delta^h_k\in\mathfrak{B}_\varepsilon : \underline{p}(\Delta^h_k)=1\}.$$

Теорема 1. *Пусть $p(x)\in\mathcal{P}$, $w\in\mathcal{W}(E,p)$ и $k_\lambda=k_\lambda(x)$ $(1\leqslant\lambda<\infty)$ удовлетворяет условиям $A)$–$C)$. Тогда семейство операторов*

$\{K_\lambda\}_{1\leqslant\lambda<\infty}$ *будет равномерно ограничено в пространстве* $L^{p(x)}_{2\pi,w}$, *если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполняются следующие условия:*

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon} \frac{1}{|B|^{\frac{v}{\gamma}}} \int\limits_B w(x)dx < C,$$

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}_\varepsilon\setminus\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon} \Big(\frac{1}{|B|^{\frac{v}{\gamma}}} \int\limits_B w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|B|^{\frac{v}{\gamma}}} \int\limits_B w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(B)-1}}dx\Big)^{\underline{p}(B)-1} < C.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}[0,1]$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26(4). С. 613–632.

УДК 517.52

ПРИЗНАК ДИНИ–ЛИПШИЦА ПО ОБОБЩЕННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА

В. И. Щербаков (Жуковский, МО, РФ)
ShcherbakovV.I@info.mtuci.ru

Пусть $p_0 = 1; \{p_n\}_{n=1}^\infty$ — целочисленная последовательность с $p_n \geqslant 2$ и $\sup\limits_n p_n = \infty$; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' целые с $0 \leqslant a_k < p_{k+1}$, $1 \leqslant a_s < p_{s+1}$, $0 \leqslant n' < m_s$ (т. е. $m_s \leqslant n < m_{s+1}$), а любое число $x \in [0,1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \tag{2}$$

где x_k целые с $0 \leqslant x_k < p_k$. Если $x \in (0,1) - \{p_n\}$ — иррационально, то его представление по формуле (2) единственно; для $x = \frac{1}{m_n}$ $(l = 1, 2, \ldots, m_n - 1;\ n = 1, 2 \ldots)$ имеется две его записи в виде равенства (2), одна из которых конечна ($x_k = 0$ для k>n); ее мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другая бесконечна ($x_k = p_k - 1$ при $k > n$), которую будем записывать как $\frac{l}{m_n}-$. Таким образом, отрезок [0,1] перешел в абелеву группу последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n и $\dot{-}$ — обратной операцией, где $\{p_n\}$ — рациональные точки (кроме $X = 0$ и $X = 1$) «раздвоились».

Рассмотрим следующую ортонормированную систему функций (обобщенную систему Хаара) $X = \{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $\chi_0(x) \equiv 1$; $\chi_{m_k} = \sqrt{m_k} \exp(\frac{2i\pi l}{p_{k+1}})$, если $x \in [\frac{l}{m_{k+1}}; \frac{l+1}{m_{k+1}} -]$; $1 = 0, 1, \ldots, p_{k+1} - 1$; $k = 0, 1, 2 \ldots$ (т. е. $\chi_{m_k}(x) = 0$ для $x \in [\frac{l}{m_k}; 1]$); $\chi_n(x) = \chi_{a_s m_s + n'}(x) = (\chi_{m_s}(x \dot{-} \frac{n'}{m_s}))^{a_s}$, где s, a_s и n' определены формулой (1).

С. Ф. Лукомский [1] доказал, что справедлива следующая

Теорема L. *Если выполнено условие*

$$\sup_{t \in G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| = o\left(\frac{l}{p_{n+1}}\right), \tag{3}$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится к ней в точке x. Причем, если условие (3) выполнено равномерно по x, то сходимость ряда Фурье к $f(t)$ будет равномерной на группе G.

Отметим, что условие (3) можно улучшить, однако полностью его отменить нельзя, что показывают следующие теоремы:

Теорема 1. *Если выполнено условие*

$$\sup_{t \in G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| = o\left(\frac{l}{\ln p_{n+1}}\right), \tag{4}$$

то ряд Фурье функции $f(t)$ сходится к ней в точке x. Если условие (4) выполнено равномерно на G, то сходимость ряда Фурье к $f(t)$ будет равномерной на группе G.

Теорема 2. *Существует непрерывная на группе G функция $f(t)$, для которой*

$$\sup_{t \in G_n} |f(x \dot{+} t) - f(x)| = O\left(\frac{l}{\ln p_{n+1}}\right).$$

Однако ее ряд Фурье по обобщенным системам Хаара расходится в точке $x \in G_n$

Автор благодарит студента МТУСИ И. М. Безрукова за набор, компиляцию и пересылку по электронной почте данной статьи

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19.

УДК 517.547.22

МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ С НУЛЯМИ ЗАДАННЫХ ПЛОТНОСТЕЙ, ЛЕЖАЩИМИ В УГЛЕ[1]

В. Б. Шерстюков (Москва, РФ)
shervb73@gmail.com

Пусть $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$. Пусть далее $f(z)$ — целая функция, все корни которой расположены в некотором угле с вершиной в нуле раствора $\leqslant \pi$ и образуют последовательность $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ с ρ-плотностями

$$\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} = \beta, \qquad \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \equiv \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} \geqslant \alpha.$$

Требуется найти наименьшее возможное при указанных условиях значение для ρ-типа

$$\sigma_{\rho}(f) \equiv \overline{\lim_{R\to+\infty}} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|$$

функции $f(z)$. Без ограничения общности считаем, что

$$\Lambda \subset \Gamma_{\theta} \equiv \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \theta\},$$

где $\theta \in [0,\pi/2]$, сводя задачу к нахождению экстремальной величины

$$s_{\theta}(\alpha,\beta;\rho) \equiv \inf\left\{\sigma_{\rho}(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \Gamma_{\theta},\ \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \beta,\ \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \geqslant \alpha\right\}.$$

При $\theta = 0$ получаем задачу для функций с нулями на луче, решенную ранее А. Ю. Поповым [1] (для $\alpha = 0$) и автором [2] (для любого $\alpha \in [0,\beta]$). В сообщении обсуждается результат о вычислении величины $s_{\theta}(\alpha,\beta;\rho)$ при всех $\theta \in [0,\pi/2]$.

Теорема. *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0,\beta]$, $\theta \in [0,\pi/2]$. *Тогда справедлива формула*

$$s_{\theta}(\alpha,\beta;\rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\rho)} \cos(\rho\theta) +$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).

$$+\max_{a>0} \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a} \left(\beta\, a^{-\rho} - \alpha\, t^{-\rho}\right) \frac{t+\cos\theta}{t^2+2t\cos\theta+1}\, dt.$$

Точная нижняя грань $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ достигается для некоторой функции с последовательностью корней $\tilde{\Lambda}$, расположенных на лучах $\arg\lambda = \pm\,\theta$, *причем* $\overline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \alpha$.

Задачу о вычислении $s_\theta(\alpha,\beta;\rho)$ поставил и при $\alpha = 0$ (т. е. без учета нижней ρ-плотности) решил А. Ю. Попов [3], отыскав величину

$$s_\theta(0,\beta;\rho) = \frac{\beta}{2} \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1+2a\cos\theta+a^2).$$

Для функций, последовательности корней $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ которых измеримы, т. е. имеют ρ-плотность

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho},$$

из теоремы получаем

$$s_\theta(\beta,\beta;\rho) = \frac{\pi\beta}{\sin(\pi\rho)} \cos(\rho\,\theta).$$

Отметим, что экстремальная величина $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ достигается, если все корни функции расположены на лучах $\arg\lambda = \pm\,\theta$ и на каждом из них образуют измеримые последовательности с равными ρ-плотностями $(=\beta/2)$, и $s_\theta(\beta,\beta;\rho)$ заведомо не достигается, если эти ρ-плотности различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 1. С. 31–36.

2. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 3–28.

3. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней // СМФН. 2013. Т. 49. С. 132–164.

УДК 517.547.22

ЗАВИСИМОСТЬ ВЕЛИЧИНЫ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ОТ ПЛОТНОСТЕЙ И ШАГА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЕЕ НУЛЕЙ

О. В. Шерстюкова (Москва, РФ)
sherov73@mail.ru

Обсуждается точность полученных ранее автором [1], [2] оценок для типа целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, имеющими заданные плотности и шаг:

$$\sigma_\rho(f) \geqslant h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+a\,\nu^{-1/\rho})^{\nu}} + \int\limits_a^{a\nu^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \right\},$$

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\rho} +$$

$$+ \sup_{a>0} \left\{ \int\limits_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{a\mu^{1/\rho}} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + h^{-1} \int\limits_a^{a\mu^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}\, d\tau \right\}.$$

В этих оценках β, α, h — заданные числа, связанные соотношениями $\beta > 0,\ \alpha \in [0,\beta],\ h \in [0,\beta^{-1}]$, и обозначено $\nu = 1 - \beta h$ и $\mu = \dfrac{1-\alpha h}{1-\beta h}$. Как обычно, тип функции $f(z)$ при порядке ρ, верхняя, нижняя плотности и шаг последовательности Λ ее нулей при показателе ρ определяются соответственно формулами

$$\sigma_\rho(f) \equiv \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho}, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho},$$

$$h_\rho(\Lambda) \equiv \varliminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho).$$

При этом приняты естественные ограничения

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geqslant \alpha, \quad h_\rho(\Lambda) \geqslant h.$$

Разработана общая схема построения экстремальных примеров функций, доставляющих равенства в приведенных выше оценках для типа.

Отметим, что без учета шага последовательности нулей точные оценки снизу типа целой функции получены ранее в работах [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шерстюкова О. В.* О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа // Наука в вузах : математика, информатика, физика, образование. М. : МПГУ. 2010. С. 192–195.

2. *Шерстюкова О. В.* Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага // Уфимский мат. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 161–165.

3. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 1. С. 31–36.

4. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 3–28.

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ГРАФАХ С ЦИКЛОМ[1]

В. А. Юрко (Саратов, РФ)

YurkoVA@info.sgu.ru

Рассмотрим компактный граф T in $\mathbf{R^m}$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$, $r \geqslant 1$, и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где $v_1, \dots, v_r$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина, $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,r}$, $e_0 \cap \ldots \cap e_r = \{v_0\}$, и e_0 — цикл. Пусть T_j, $j = \overline{0,r}$ — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$. Удобно выбрать следующую ориентацию: для $j = \overline{1,r}$ вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а вершина v_0 соответствует $x_j = T_j$; для $j = 0$, оба конца $x_0 = +0$ и $x_0 = T_0 - 0$ соответствуют v_0. Функция Y на T имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$ определена на ребре e_j. Положим $U_j(Y) := y_j'(0) - (i\rho h_{j1} + h_{j0})y_j(0)$, $j = \overline{0,r}$, где ρ — спектральный параметр, h_{jk} — комплексные числа и $h_{j1} \neq \pm 1$ при $j = \overline{1,r}$. Обозначим $h_k = \{h_{jk}\}_{j=\overline{0,r}}$, $k = 0, 1$. Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ и $p = \{p_j\}_{j=\overline{0,r}}$ — комплекснозначные функции на T; пара (q, p) называется потенциалом. Предположим, что $q_j(x_j) \in L(0, T_j)$, а $p_j(x_j) \in AC[0, T_j]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x_j) + q_j(x_j))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in (0, T_j), \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

где $j=\overline{0,r}$, функции $y_j(x_j)$, $y'_j(x_j)$ абсолютно непрерывны на $[0,T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в вершине v_0:

$$y_0(0)=\alpha_j y_j(T_j),\ j=\overline{0,r}, \qquad U_0(Y)=\sum_{j=0}^{r}\beta_j y'_j(T_j). \tag{2}$$

Здесь $\alpha_j\beta_j\neq 0,\ 1+\alpha_0\beta_0\neq 0$. Пусть $z_0^{\pm}z_r^{\pm}\neq 0$, где

$$z_0^{\pm}=\alpha_0(1\mp h_{01})+\beta_0, \quad z_{k+1}^{\pm}=\alpha_{k+1}z_k^{\pm}+\beta_{k+1}\prod_{j=0}^{k}\alpha_j, \quad k=\overline{0,r-1}.$$

Рассмотрим краевую задачу $B_0:=B_0(q,p,h_1,h_0)$ на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$U_j(Y)=0, \quad j=\overline{1,r}. \tag{3}$$

Рассмотрим также краевые задачи $B_k:=B_k(q,p,h_1,h_0)$, $k=\overline{1,r}$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями $y_k(0)=$ $=0$, $U_j(Y)=0$, $j=\overline{1,r}\setminus k$. Обозначим через $\Lambda_k:=\{\rho_{kn}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ собственные значения (с учетом кратностей) задач $B_k(q)$, $k=\overline{0,r}$. В отличие от случая деревьев (см. [1]), здесь задание спектров Λ_k, $k=\overline{0,r}$ не определяет однозначно потенциал, и нам нужна дополнительная информация. Пусть B — краевая задача на ребре e_0 для уравнения (1) с $j=0$, при условиях $y_0(0)=\alpha_0 y_0(T_0)$, $U_0(y_0)=\beta_0 y'_0(T_0)$. Пусть $\Omega=\{\omega_n\}$ — Ω-последовательность для B (см. [2]), и пусть коэффициенты α_j, β_j из (2) известны априори.

Обратная задача 1. Даны Λ_k, $k=\overline{0,r}$, и Ω, построить потенциал (q,p) на T и коэффициенты h_1, h_0.

Теорема 1. *Задание Λ_k, $k=\overline{0,r}$ и Ω однозначно определяет потенциал (q,p) на T и коэффициенты h_1, h_0.*

Пусть $S_j(x_j,\rho)$, $\varphi_j(x_j,\rho)$, $j=\overline{0,r}$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при условиях $S_j(0,\rho)=0$, $S'_j(0,\rho)=\varphi_j(0,\rho)=1$, $\varphi_j(0,\rho)=i\rho h_{j1}+h_{j0}$. Зафиксируем $k=\overline{1,r}$. Пусть $\Phi_k=\{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0,r}}$ — решение уравнения (1) при условиях склейки (2) и краевых условиях

$$U_j(\Phi_k)=\delta_{jk}, \quad j=\overline{1,r}, \tag{4}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Положим $M_k(\rho):=\Phi_{kk}(0,\rho)$, $k=\overline{1,r}$. Функция $M_k(\rho)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k. Обозначим $M^1_{kj}(\rho):=\Phi_{kj}(0,\rho)$, $M^0_{kj}(\rho):=\Phi'_{kj}(0,\rho)-(i\rho h_{j1}+$ $+h_{j0})\Phi_{kj}(0,\rho)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j,\rho)=M^0_{kj}(\rho)S_j(x_j,\rho)+M^1_{kj}(\rho)\varphi_j(x_j,\rho), \quad j=\overline{0,r}, \quad k=\overline{1,r}. \tag{5}$$

Имеем $M_{kk}^0(\rho) = 1$, $M_{kk}^1(\rho) = M_k(\rho)$, и $M_{kj}^0(\rho) = 0$ при $j = \overline{1,r} \setminus k$. Подставляя (5) в (2) и (4), получаем линейную алгебраическую систему s_k относительно $M_{kj}^\nu(\rho)$, $\nu = 0,1$, $j = \overline{0,r}$. Определитель $\Delta_0(\rho)$ системы s_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\rho) = d(\rho) \prod_{j=1}^{r} \alpha_j \varphi_j(T_j,\rho) + d_0(\rho) \sum_{i=1}^{r} \beta_i \varphi_i'(T_i,\rho) \prod_{j=1,\, j\neq i}^{r} \alpha_j \varphi_j(T_j,\rho),$$

$$d(\rho) = \alpha_0 \varphi_0(T_0,\rho) + \beta_0 S_0'(T_0,\rho) - (1+\alpha_0\beta_0), \quad d_0(\rho) = \alpha_0 S_0(T_0,\rho).$$

Функция $\Delta_0(\rho)$ является целой по ρ, и ее нули совпадают с собственными значениями задачи B_0. Решая систему s_k по правилу Крамера, получаем $M_{kj}^s(\rho) = \Delta_{kj}^s(\rho)/\Delta_0(\rho)$, $s = 0,1$, $j = \overline{0,r}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\rho)$ получается из $\Delta_0(\rho)$ заменой соответствующего $M_{kj}^s(\rho)$ столбца на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\rho) = -\Delta_k(\rho)/\Delta_0(\rho), \quad k = \overline{1,r},$$

$$\Delta_k(\rho) = d(\rho)(\alpha_k S_k(T_k,\rho)) \prod_{j=1,\, j\neq k}^{r} (\alpha_j \varphi_j(T_j,\rho)) + d_0(\rho)\Big(\beta_k S_k'(T_k,\rho) \times$$

$$\prod_{j=1,\, j\neq k}^{r} \alpha_j \varphi_j(T_j,\rho) + \alpha_k S_k(T_k,\rho) \sum_{i=1,\, i\neq k}^{r} \beta_i \varphi_i'(T_i,\rho) \prod_{j=1,\, j\neq i,k}^{r} \alpha_j \varphi_j(T_j,\rho)\Big).$$

Зафиксируем $k = \overline{1,r}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_k, которую назовем IP(k).

IP(k). Даны два спектра Λ_0 и Λ_k, построить $q_k(x_k)$, $p_k(x_k)$, $x_k \in [0,T_k]$, h_{k1}, h_{k0}.

Теорема 2. *Фиксируем $k = \overline{1,r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет функцию Вейля $M_k(\rho)$ и коэффициент h_{k1}.*

Теорема 3. *Фиксируем $k = \overline{1,r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет потенциал (q_k,p_k) на ребре e_k и h_{k1},h_{k0}.*

Используя метод спектральных отображений [4] для уравнения (1) на ребре e_k, можно получить конструктивную процедуру решения обратной задачи IP(k) (подробнее см. [3]). Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм. *Пусть заданы Λ_k, $k = \overline{0,r}$ и Ω.*

1. При каждом фиксированном $k = \overline{1,r}$ решаем обратную задачу $IP(k)$ и находим функции $q_k(x_k)$, $p_k(x_k)$, $x_k \in (0,T_k)$ на ребре e_k, и коэффициент h_{k0}.

2. Вычисляем функции $\varphi_k^{(\nu)}(T_k, \rho)$, $S_k^{(\nu)}(T_k, \rho)$.

3. Строим функции $d_0(\rho)$ *и* $d(\rho)$ *по алгоритму 1 из* [3].

4. Находим $q_0(x_0)$, $p_0(x_0)$, $x_0 \in (0, T_k)$ *и* h_{00}, h_{01} *по* $d_0(\rho)$, $d(\rho)$ *и* Ω, *используя алгоритм 2 из [2].*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

2. *Yurko V. A.* Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Analysis and Math. Physics. 2012 Vol. 2, № 3. P. 215–230.

3. *Yurko V. A.* Differential pensils on graphs with a cycle. Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM-DUE-758, Uni. Duisburg-Essen, 2013. 12 p.

4. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

Содержание

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 17-й международной Саратовской зимней школы

Подготовка оригинал-макета: Д. Ю. Калькаев, В. А. Халова

Подписано в печать 20.01.2014. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 18,83(20,25). Тираж 225 экз. Заказ 39.

ООО Издательство «Научная книга».
410031, Саратов, ул. Московская, 35.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
ООО «Типография ТИСАР».
410044, Саратов, пр-т Строителей, 1.