Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 16-й Саратовской зимней школы
Саратов, 27 января — 3 февраля 2012 года

Издательство «Научная книга»
2012

УДК 517; 518; 533
ББК 22.161.5
С56

Современные проблемы теории функций и их приложения:
С56 Материалы 16-й Сарат. зимней школы. – Саратов: ООО «Издательство «Научная книга», 2012. – 214 с.: ил.
ISBN 978-5-9758-1374-9

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу 16-й Саратовской зимней школы, проводимой Саратовским государственным университетом им. Н. Г. Чернышевского совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика посвящена вопросам теории функций, таким как теория приближений, ряды Фурье и др., а также их приложениям.

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 11-01-06839-моб_г)

УДК 517; 518; 533
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-9758-1374-9

А. В. Абанин (Ростов-на-Дону; Владикавказ)
abanin@math.rsu.ru

НАСЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ В ШКАЛАХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Речь пойдет о «заразительности» свойств полноты систем и наличия удобных для приложений описаний сопряженных пространств в весовых функциональных шкалах. Именно, пусть $\mathcal{S}$ — некоторая шкала весовых пространств бесконечно дифференцируемых или голоморфных функций, частично упорядоченная по непрерывному вложению одного пространства шкалы в другое, в которой имеется самое широкое пространство $E_{\mathcal{S}}$. Предположим, что некоторая система функций P (например, полиномов, экспонент или простейших дробей) содержится в каждом из пространств шкалы и полна в $E_{\mathcal{S}}$. Спрашивается, будет ли P полна во всех $E \in \mathcal{S}$? Или, скажем, мы знаем, что некоторое классическое преобразование функционалов (Лапласа, Коши, Фантаппье) дает описание сопряженного с $E_{\mathcal{S}}$ пространства в виде некоторого пространства голоморфных функций. Требуется выяснить, влечет ли это автоматически, что то же самое преобразование дает аналогичное описание для каждого $E \in \mathcal{S}$.

Будут представлены новые результаты в данном направлении для шкал Данжуа – Карлемана бесконечно дифференцируемых функций и голоморфных в области функций заданного роста вблизи границы. Отметим, что развитые на этом пути методы позволяют существенно ослаблять ограничения на весовые системы и области, традиционно использовавшиеся в предшествующих исследованиях.

Н. Ю. Агафонова (Саратов)
AgafonovaNU@info.sgu.ru

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ В СРЕДНЕМ ВАРИАЦИИ[1]

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность натуральных чисел, $2 \leqslant p_n \leqslant N$, при всех $n \in \mathbb{N}$, $m_n = p_1 \dots p_n$, при $n \in \mathbb{N}$. По $\mathbf{P}$ строится ортонормированная система $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0,1)$ и вводится операция $x \ominus y$, $x, y \in [0,1)$ (см. [1, §1.5]). Пусть $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}\,dx$, $S_{m_n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $M-$ пространство борелевких мер на $[0,1)$. Если для любой $f \in A$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\chi_k(x)$ является рядом Фурье $g \in B$, то $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (A, B)$. Пусть $V(1,p)$, $1 \leqslant p < \infty$, есть множество функций из $L^p[0,1)$, таких что для любого набора непересекающихся множеств полуинтервалов $\{(\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{n} \subset [0,1)$, верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (f(\beta_i \ominus \cdot) - f(\alpha_i \ominus \cdot)) \right\|_p \leqslant M < \infty. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Тогда $f \in V(1,p)$ в том и только том случае, когда неравенство (1) выполнено для всех $S_{m_k}(f)$ с константой M, не зависящей от $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$. 1) для того, чтобы $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (M, V(1,p))$, необходимо и достаточно существование $f \in V(1,p)$ со свойством $\hat{f}(k) = \lambda_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$; 2) если $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность коэффициентов Фурье $\mu \in M$, то $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty} \in (V(1,p), V(1,p))$.*

Аналогичные результаты верны для функций, абсолютно непрерывных в среднем. Тригонометрический аналог теоремы 2 принадлежит М. Г. Скворцовой [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И.,Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.

2. *Скворцова М. Г.* К теории множителей, преобразующих ряды Фурье // Уч. зап. Кабард.-Балкар. ун-та. 1959. Т. 3. С. 307–326.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Р. Р. Акопян (Озерск, Екатеринбург)
R.Akopyan@oti.ru

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ[1]

Пусть $\Pi_Y := \{z : 0 < \operatorname{Im} z < Y\}$, $\alpha := (Y-y)/Y$, $\beta := y/Y$, $0 < y < Y$. Для числа η и функции f из $L^p(\mathbb{R}+i\eta)$, $1 \le p \le \infty$, введем обозначение $I^p_\eta(f) := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+i\eta)}$. Пусть $H^p = H^p(\Pi_Y)$ — пространство Харди функций f, аналитических в полосе Π_Y, след которых на каждой прямой $\mathbb{R}+i\eta$, $0<\eta<Y$, из $L^p(\mathbb{R}+i\eta)$ и $\sup\{I^p_\eta(f)\colon 0<\eta<Y\} < +\infty$. В H^p выделим класс $Q = Q^p_Y$ функций f с граничными значениями на $\mathbb{R}+iY$ удовлетворяющими неравенству $I^p_Y(f) \le 1$.

В докладе рассматривается частный случай задачи Стечкина, обзор истории исследования которой можно найти в работе [1].

Задача. Пусть $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}^p_y(N)$ — множество линейных ограниченных операторов из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^p(\mathbb{R}+iy)$, норма которых $\|T\| = \|T\|_{L^p(\mathbb{R})\mapsto L^p(\mathbb{R}+iy)}$ не превосходит числа $N \ge 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{I^p_y(f - Tf)\colon f \in Q\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора аналитического продолжения на классе Q. Соответственно величина

$$E(N) = \inf\{U(T)\colon T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{1}$$

есть наилучшее приближение оператора аналитического продолжения множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q.

На пространстве $L^p(\mathbb{R})$ определим оператор $A_\sigma = A_\sigma[y,Y]$

$$(A_\sigma f)(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\sigma(x-t)\, f(t)\, dt, \quad \mathcal{A}_\sigma(x) = \frac{1}{2Y}\frac{e^{i\sigma(x+iy)}\,\sin\alpha\pi}{\operatorname{ch}\frac{x\pi}{Y} + \cos\alpha\pi}.$$

Теорема. *Пусть числа y, Y удовлетворяют неравенству $0<y<Y$ и $N>0$. Тогда для величины* (1) *справедливо равенство*

$$E(N) = \beta\, \alpha^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом экстремальным оператором в задаче (1) *является A_σ, в котором параметр σ задается равенством $N = \alpha\, e^{-y\sigma}$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.

М. А. Актюрк (Стамбул),
А. Л. Лукашов (Стамбул, Саратов)
LukashovAL@info.sgu.ru

О НЕРАВЕНСТВЕ РЕМЕЗА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Пусть $[\alpha, \beta]$ — отрезок длины $l = \beta - \alpha \le \pi$, $\lambda = \theta l$, $0 < \theta < 1$.

Теорема. *Максимум в экстремальной задаче*

$$\max_{\tau \in [\alpha,\beta]} |\mathcal{T}_n(\tau)| \to \max$$

на классе тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_n(\tau)$ *порядка не выше* n*, удовлетворяющих неравенству*

$$|\mathcal{T}_n(\tau)| \le 1$$

на некотором подмножестве $S \subset [\alpha, \beta]$ *меры* $|S| \ge \lambda$*, равен*

$$T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{2l-\lambda}{4}}{\sin\frac{\lambda}{4}}\right)$$

и достигается на полиномах

$$V_n^{(1)}(\tau) = T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{2\tau-(2\alpha+\lambda)}{4}}{\sin\frac{\lambda}{4}}\right) \quad \text{и} \quad V_n^{(2)}(\tau) = T_{2n}\left(\frac{\sin\frac{2\tau-(2\beta-\lambda)}{4}}{\sin\frac{\lambda}{4}}\right).$$

Здесь $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ *— классические многочлены Чебышева.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Remes E.* Sur une propriété extrémale des polynomes de Tchebyshef // Записки науч.-иссл. ин-та мат. мех. Харьк. мат. об-ва. Сер. 4. 1936. Т. 13, вып. 1. С. 93–95.

А. А. Андреев, Е. А. Козлова (Самара)
andre@ssu.samara.ru

ЗАДАЧА О ПРИВЕДЕНИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ В ЗАДАННОЕ СОСТОЯНИЕ

В работе рассмотрена задача управления для уравнения колебаний движущегося гибкого стержня

$$u_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx} = 0,$$

заданного в прямоугольной области $Q = [0, l] \times [0, T]$, где b, c — постоянные коэффициенты, такие, что $b^2 - c > 0$. Пусть в начальный и финальный моменты времени выполнены условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$
$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, T) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Необходимо найти граничные управления (смещением) $\mu(t) = u(0, t)$, $\nu(t) = u(l, t)$.

Решение задачи построено в явном виде для произвольного T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце и при условии существования конечной энергии // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 6. С. 743–747.

2. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Система волновых уравнений с граничным управлением первого рода // Вестн. СамГТУ. Сер. Физико-математические науки. 2008. Вып. 2. С. 10–21.

3. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978.

А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева (Самара)
julia.yakovleva@mail.ru

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Известно, что классическая задача Гурса для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными с граничными условиями на двух характеристиках из различных семейств всегда является корректной по Адамару.

Рассмотрим аналог задачи Гурса для строго гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{1}$$

Задача G1. *Найти решение* $u\,(x,\,y) \in C^3(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{gathered} u\,(x,\,0) = \alpha(x), \quad -\infty < x < +\infty, \\ u\,(0,\,y) = \beta(y), \quad -\infty < y < +\infty, \\ \frac{u\,(x,\,-x) + u\,(-x,\,x)}{2} = \gamma(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{gathered}$$

где $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

Теорема. *Если* $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$*, то задача G1 корректна по Адамару.*

Видоизмененное третье условие существенно.

Построен контрпример, т.е. приведено нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям на трех характеристиках из различных семейств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения : тр. второго междунар. семинара. 1998. С. 5–18.

2. *Андреев А. А., Яковлева Ю. О.* Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // Вестн. СамГТУ. Сер. физ.-мат. наук. 2011. Вып. 3(24). С. 35–41.

3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

Д. К. Андрейченко, К. П. Андрейченко, М. С. Комарова (Саратов)

kp_andreichenko@renet.ru, welecat@gmail.com

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследуются управляемые комбинированные динамические системы (КДС) [1] как математические модели, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, динамически связанных через граничные условия и условия связи. После линеаризации и решения модельных краевых задач динамическая модель КДС представляется матрицей передаточных функций $\Phi(\lambda, \mathbf{p}) = [\Phi_{\nu j}(\lambda, \mathbf{p})]$, $\nu = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$, где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{N_p})^T \in \mathbb{R}^{N_p}$ – набор параметров обратных связей. На основе теорем об устойчивости квазимногочленов и квазирациональных дробей [1] задача выбора в области устойчивости $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^{N_p}$ параметров $\mathbf{p}$, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, сведена к задаче минимизации функции $F : \mathbb{R}^{N_p} \to \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0)\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p})\|^{-2}\right) \int\limits_0^\infty \sum\limits_{k=0}^{2} c_k \left\| \frac{d^k R_A(\omega, \mathbf{p})}{d\omega^k} - \right. \\ \left. -R_A(0, \mathbf{p}) \frac{d^k R_A^*(\omega)}{d\omega^k} \right\|^2 d\omega, \quad \mathbf{p} \in \Omega_{st}; \\ +\infty, \quad \mathbf{p} \notin \Omega_{st}; \end{cases}$$

$$R_A(\omega, \mathbf{p}) = [R_{A_{\nu j}}(\omega, \mathbf{p})], \quad R_A^*(\omega) = \mathrm{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\}$$

$$R_{A_{\nu j}}(\omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} \mathrm{Re}\ \Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}), \quad A_j(\mathbf{p}) \neq 0; \\ \sqrt{1+\omega^2}\, \mathrm{Re}[\Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p})/(i\omega)], \quad A_j(\mathbf{p}) = 0; \end{cases}$$

$$R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} (1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), \quad A_j(\mathbf{p}) \neq 0; \\ \sqrt{1+\omega^2}(1 - (t_0\omega)^2)/(1 + (t_0\omega)^4), \quad A_j(\mathbf{p}) = 0; \end{cases}$$

$$A_j(\mathbf{p}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p})|^2\right]^{1/2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N_y; \quad j = 1, 2, \ldots, N_x.$$

В качестве примера выполнен параметрический синтез газореактивных систем стабилизации спутников с упруго деформируемыми элементами конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.

А. П. Антонов (Москва)
alt@land.ru

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ $\mathbf{H}_p^{\omega_1\omega_2}$

История вопроса подробно рассматривалась автором в работе [1].

Рассмотрим тригонометрический ряд $\sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1,n_2}e^{i(n_1x_1+n_2x_2)}$, где последовательность коэффициентов $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$ удовлетворяет некоторым условиям монотонности. Через $f(x_1,x_2)$ будем обозначать сумму данного ряда в тех точках, где он сходится.

Пусть $k_1,k_2 \in \mathbf{N}$, $1 \le p < \infty$, $f(x_1,x_2) \in \mathbf{L}_p[0,2\pi]^2$. Смешанным модулем гладкости порядков k_1,k_2 в метрике $\mathbf{L}_p$ будем называть функцию

$$\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p = \sup_{|h_1|\le\delta_1,|h_2|\le\delta_2} \left\|\Delta_{h_1}^{k_1}\left(\Delta_{h_2}^{k_2}(f)\right)\right\|_p,$$

где $\Delta_{h_1}^{k_1}(f) = \Delta_{h_1}^{1}\left(\Delta_{h_1}^{k_1-1}(f)\right)$, а $\Delta_{h_1}^{1}(f) = f(x_1+h_1,x_2) - f(x_1,x_2)$, $\Delta_{h_2}^{k_2}(f)$ определяется аналогично для переменной x_2.

Определение 1. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция ω *принадлежит классу* S_p^{α}, если она непрерывна и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega(\delta) = 0$; 2) $0 \le \omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2)$ при $0 \le \delta_1 \le \delta_2 \le 1$; 3) $\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1^{\alpha}} \le \frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2^{\alpha}}$ при $0 < \delta_2 \le \delta_1 \le 1$; 4) $\int\limits_0^{\delta}\frac{\omega^p(t)}{t}dt = O(\omega^p(\delta))$ при $\delta \to 0+$; 5) существует постоянная $C > 0$, что для любого $0 < \delta < \frac{1}{2}$ верно $\omega(2\delta) < C\omega(\delta)$.

Определение 2. Пусть $\omega_j \in S_p^{\alpha_j}$, $j = 1,2$. Обозначим $\mathbf{H}_p^{\omega_1\omega_2}$ — множество функций $f \in \mathbf{L}_p[0,2\pi]^2$ таких, что найдутся $k_1 > \alpha_1$ и $k_2 > \alpha_2$, что $\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p = O(\omega_1(\delta_1)\cdot\omega_2(\delta_2))$ при $\delta_1,\delta_2 \to 0+$.

Теорема. *Пусть $\frac{4}{3} < p < \infty$, $\alpha_j > 0$, $\omega_j \in S_p^{\alpha_j}$, $j = 1,2$, функция $f(x_1,x_2) \in \mathbf{L}[0,2\pi]^2$ и ее коэффициенты Фурье $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$ монотонно убывают по каждому направлению. Тогда для того, чтобы $f(x_1,x_2) \in \mathbf{H}_p^{\omega_1\omega_2}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$a_{n_1,n_2} = O\left(\prod_{j=1}^{2}\left(\omega_j\left(\frac{1}{n_j}\right)\cdot n_j^{\frac{1}{p}-1}\right)\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонов А. П.* Гладкость сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2007. № 4. С. 21–29.

Н. Ю. Антонов (Екатеринбург)
Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ [1]

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} = (n^1, n^2, \dots, n^d) \in \mathbb{Z}_+^d$. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции f. В случае $d = 1$ К. И. Осколков [1] доказал, что для любой функции $f \in L_{[0,2\pi)}$ и произвольной последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ подпоследовательность сумм Фурье $S_{n_k}(f, x)$ почти всюду ведет себя как $o(\ln k)$.

Пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность d-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами. Рассматривается задача о том, при каких условиях на класс Орлича $\varphi(L)_{[0,2\pi)^d}$ для функций из этого класса возможны (многомерные) аналоги оценки Осколкова, то есть оценки вида

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\lambda_k) \quad \text{п.в.}$$

где правая часть зависит лишь от k и не зависит от порядка роста координат вектора $\mathbf{n}_k$. Получено [2] следующее утверждение.

Теорема. *Пусть последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+^d$ удовлетворяет условию $\min\limits_{1 \le j \le d} n_k^j \to \infty$ при $k \to \infty$, $\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, функция $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u)$ возрастающая и выпуклая, а $\varphi(u^{1/2})$ вогнутая. Предположим, что существует функция $g \in \varphi(L)_{[0,2\pi)^d}$, у которой последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(g, \mathbf{x})$ не сходится по мере. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\mathbf{n}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ и функция $f \in \varphi(L)_{[0,2\pi)^d}$ такие, что*

$$\sup_{l \in \mathbb{N}} \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_l}}(f, \mathbf{x})|}{\lambda_l} = +\infty \quad \text{п.в.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков К. И.* Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Труды МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.

2. *Антонов Н. Ю.* Замечание об оценках порядка роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 55–59.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и УрО РАН (проект 09-Т-1-1004) в рамках программы ОМН РАН.

В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина (Екатеринбург)
Vitalii.Arestov@usu.ru, Polina.Glazyrina@usu.ru

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

Л. В. Тайков [1] доказал, что на множестве $\mathbf{T}_n$ вещественных тригонометрических полиномов $f_n(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ порядка $n \geq 1$ при $q \geq 1$ для любого целого $r \geq 1$ имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_q \leq n^r \|\cos nt\|_q \|f_n\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n. \tag{1}$$

Впрочем, как оказалось, этот результат содержится в более ранней работе [2]. Довольно продолжительное время авторов интересовал вопрос о том, справедливо ли неравенство (1) при $0 \leq q < 1$. Один из результатов сообщения будет состоять в том, что оно действительно имеет место при $0 \leq q < 1$ и не только для целых, но и для дробных производных.

Пусть $\Phi^+ = \Phi^+(0, \infty)$ есть класс функций φ, определенных, неубывающих и логарифмически выпуклых на $(0, +\infty)$, а точнее, представимых в виде $\varphi(u) = \psi(\ln u)$, где функция $\psi(v) = \varphi(e^v)$ непрерывна, не убывает и выпукла на $(-\infty, +\infty)$. Функция $\varphi \in \Phi^+$ характеризуется тем, что она на полуоси $(0, \infty)$ локально абсолютно непрерывна и произведение $u\varphi'(u)$ не убывает. Классу Φ^+ принадлежат, например, все неубывающие выпуклые функции, функции u^p при $p > 0$, $\ln u$. Класс функций Φ^+ был введен в работе [3] при изучении неравенства Бернштейна и его обобщений в пространствах L_p при $p \in [0, 1)$ (и более общих пространствах). В работе [4] была показана естественность этого класса в данной тематике.

Пусть $D^\alpha f_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha \big(a_k \cos(kt + \alpha\pi/2) + b_k \sin(kt + \alpha\pi/2)\big)$ есть операция дробного дифференцирования в смысле Вейля порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ полиномов $f_n \in \mathbf{T}_n$. При вещественном θ определим на множестве $\mathbf{T}_n$ оператор $\Lambda_\theta^\alpha f_n(t) = D^\alpha f_n(t) \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t) \sin\theta$; этот оператор впервые возник в исследованиях Г. Сеге [5].

Теорема 1. *Пусть $n \geq 1$, $\varphi \in \Phi^+$, $\alpha \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда для всех $f_n \in \mathbf{T}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right) dt \leq \int_0^{2\pi} \varphi(n^\alpha \|f_n\|_{C_{2\pi}} |\cos t|)\, dt;$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

на полиномах $A\cos(nt+a)$, $A, a \in \mathbb{R}$, *оно обращается в равенство.*

Следствие 1. *Для всех* $n \geq 1$, $\alpha \geq 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $q \in [0,\infty]$ *имеет место точное неравенство*

$$\left\| D^\alpha f_n \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n \sin\theta \right\|_q \leq n^\alpha \left\|\cos t\right\|_q \left\|f_n\right\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n, \tag{2}$$

и, в частности, точные неравенства

$$\left\| D^\alpha f_n \right\|_q \leq n^\alpha \left\|\cos t\right\|_q \left\|f_n\right\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n, \tag{3}$$

$$\left\| D^\alpha \widetilde{f}_n \right\|_q \leq n^\alpha \left\|\cos t\right\|_q \left\|f_n\right\|_\infty, \quad f_n \in \mathbf{T}_n. \tag{4}$$

Неравенство (2) при $q = \infty$ для целых $\alpha \geq 1$ получил Г. Сеге [5]. Как уже было сказано ранее, при $1 \leq q < \infty$ для целых $\alpha \geq 1$ неравенство (3) доказал Л. В. Тайков [1]; однако, оно фактически содержалось в более ранней работе [2]. При $q = \infty$ для вещественных $\alpha \geq 1$ неравенство (3) обосновал П. И. Лизоркин (1965). Неравенство (2), а значит и (4), при $q = \infty$ для дробных производных порядка $\alpha \geq 1$ установил А. И. Козко [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 43–47.

2. *Calderon A. P., Klein G.* On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials // Studia Math. 1951. Vol. 12. P. 166–169.

3. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.

4. *Glazyrina P. Yu.* Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, № 6. P. 1204–1210.

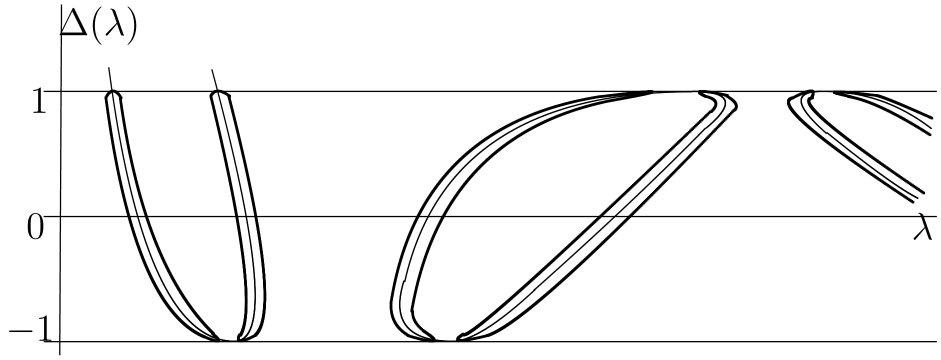
5. *Szegö G* Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften Königsberg. 1928. B. 5. S. 59–70.

6. *Kozko A. I.* The exact constants in the Bernstein – Zygmund – Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson – Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, № 3. P. 391–416.

А. В. Баданин, Л. А. Баданина (Архангельск)
a.badanin@mail.ru, agtu_kaf_mat@mail.ru

ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ 2×2 МАТРИЧНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ δ-ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Рассмотрим оператор Шредингера $Hy = -y'' + Qy$ в $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, где $Q = \begin{pmatrix} p & q_1 + q_2 \\ \bar{q}_1 + \bar{q}_2 & -p \end{pmatrix}$, $q_j(x) = \gamma_j \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n - x_j)$, $j = 1, 2$, $0 < x_1 < x_2 < 1$, $p \in \mathbb{R}$, $\gamma_j \in \mathbb{C}$. Введем матрицу $L = \frac{1}{2}(M + M^{-1})$, где $M(\lambda) = \begin{pmatrix} \vartheta & \varphi \\ \vartheta' & \varphi' \end{pmatrix}(1, \lambda)$ — матрица монодромии, $\vartheta(t, \lambda)$, $\varphi(t, \lambda)$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ — фундаментальные решения уравнения $-y'' + Qy = \lambda y$, удовлетворяющие условиям $\vartheta(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = 1$, $\vartheta'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = 0$. Известно, см. [1], что если γ_1, γ_2 вещественны, то при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ 4×4-матрица $L(\lambda)$ имеет два двукратных собственных значения. В случае $\gamma_1, \gamma_2 \notin \mathbb{R}$ матрица $L(\lambda)$ имеет четыре собственных значения $\Delta_j(\lambda)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Эти собственные значения являются ветвями функции, аналитической на 4-листной римановой поверхности. Спектр оператора H абсолютно непрерывен и равен $\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \Delta_j(\lambda) \in [-1, 1]$ для $j = 1, 2, 3$ или $4\}$. Примерный вид функции Ляпунова для оператора H показан на рисунке. Тонкими линиями показана функция Ляпунова при вещественных γ_1, γ_2.



Авторы благодарят Е. Л. Коротяева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Badanin A., Brüning J., Korotyaev E.* The Lyapunov function for Schrödinger operators with a periodic 2×2 matrix potential // J. Funct. Anal. 2006. P. 106–126.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования (ГК 14.740.11.0581).

А. В. Баданин (Архангельск), Е. Л. Коротяев (С.-Петербург)
a.badanin@mail.ru, korotyaev@gmail.com

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Мы рассматриваем самосопряженный оператор

$$H = i\partial^3 + ip\partial + i\partial p + q$$

в $L^2(\mathbb{R})$ с вещественными 1-периодическими коэффициентами $p, q \in \in L^1(0,1)$. Оператор H используется в методе обратной задачи интегрирования уравнения Буссинеска («bad Boussinesq») на окружности, см. [1].

Мы доказываем, что спектр оператора H абсолютно непрерывен и заполняет всю ось. Спектр имеет кратность 1 или 3. Спектр кратности 3 состоит из конечного ($\geqslant 0$) числа ограниченных интервалов, отделенных интервалами со спектром кратности 1. Края спектральных интервалов кратности 3 являются вещественными точками ветвления трехлистной римановой поверхности функции $\tau(\lambda)$, заданной равенством $\det(M(\lambda) - \tau I_3) = 0$, где M — матрица монодромии оператора H, являющаяся целой матричнозначной функцией спектрального параметра λ.

Мы определяем высокоэнергетические асимптотики собственных значений периодической и антипериодической задач для оператора H и точек ветвления функции τ. Кроме того, в случае малых коэффициентов мы показываем, что весь спектр имеет кратность 1 за возможным исключением единственного малого непустого спектрального интервала со спектром кратности 3. В последнем случае мы находим асимптотику этого интервала.

В доказательствах мы используем технику, развитую при исследовании операторов четного порядка, см. [2–4]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McKean H.* Boussinesq's equation on the circle // Com. Pure and Appl. Math. 1981. Vol. 34. P. 599–691.

2. *Badanin A., Korotyaev E.* Spectral asymptotics for periodic fourth-order operators // Int. Math. Res. Not. 2005. Vol. 45. P. 2775–2814.

3. *Баданин А. В., Коротяев Е. Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22(5) С. 1–48.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки (государственный контракт № 14.740.11.0581).

4. *Badanin A., Korotyaev E.* Even order periodic operator on the real line// Int. Math. Res. Not. 2011. rnr057. 53 p.

А. В. Баданин, Е. А. Смоленская (Архангельск)
a.badanin@mail.ru, e.smolenskaya@agtu.ru

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С 2×2 МАТРИЧНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ДЕЛЬТА-ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Рассмотрим оператор Шредингера $-y'' + Qy$ в $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, где

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p & \beta\delta_{per}(x) \\ \bar{\beta}\delta_{per}(x) & -p \end{pmatrix}, \quad \delta_{per}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x + n + \frac{1}{2}\right),$$

$p \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$. Следуя [1], занумеруем собственные значения $\lambda^{\pm}_{2n,j}$ $(n \geqslant 0, j = 1,2)$ периодической задачи $y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$ и собственные значения $\lambda^{\pm}_{2n+1,j}$ $(n \geqslant 0,\ j = 1,2)$ антипериодической задачи $y(0) = -y(1), y'(0) = -y'(1)$ для уравнения

$$-y'' + Qy = \lambda y \tag{1}$$

так, что

$$\lambda^-_{0,2} \leqslant \lambda^+_{0,2} \leqslant \lambda^-_{2,1} \leqslant \lambda^+_{2,1} \leqslant \lambda^-_{2,2} \leqslant \lambda^+_{2,2} \leqslant \lambda^-_{4,1} \leqslant \lambda^+_{4,1} \leqslant \lambda^-_{4,2} \leqslant \lambda^+_{4,2} \leqslant \ldots$$
$$\lambda^-_{1,1} \leqslant \lambda^+_{1,1} \leqslant \lambda^-_{1,2} \leqslant \lambda^+_{1,2} \leqslant \lambda^-_{3,1} \leqslant \lambda^+_{3,1} \leqslant \lambda^-_{3,2} \leqslant \lambda^+_{3,2} \leqslant \lambda^-_{5,1} \leqslant \lambda^+_{5,1} \leqslant \ldots$$

Обозначим $\mu_{n,j}(t)$ $(n \geqslant 1, j = 1,2)$ – собственные значения задачи Дирихле $y(0) = y(1) = 0$ для уравнения (1) с потенциалом $Q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема. *i) В каждом интервале* $[\lambda^-_{n,j}, \lambda^+_{n,j}]$ $(n \geqslant 1, j = 1,2)$ *при любом* $t \in \mathbb{R}$ *существует ровно одно собственное значение* $\mu_{n,j}(t)$.

ii) При изменении t *от* 0 *до* 1 *каждое собственное значение* $\mu_{n,j}(t)$ $(n \geqslant 1, j = 1,2)$ *движется монотонно между краями интервала* $[\lambda^-_{n,j}, \lambda^+_{n,j}]$, *заметая весь интервал* $2n$ *раз.*

Авторы благодарят Е. Л. Коротяева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Badanin A., Brüning J., Korotyaev E.* The Lyapunov function for Schrödinger operators with a periodic 2×2 matrix potential // J. Funct. Anal. 2006. P. 106–126.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования (ГК 14.740.11.0581).

В. М. Бадков (Екатеринбург)
Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

РАВНОСХОДИМОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ФУРЬЕ – ЯКОБИ СО ВЗВЕШЕННЫМИ ОБЫЧНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ ВЗВЕШЕННОЙ ФУНКЦИИ[1]

Пусть $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации методом Шмидта на $[0, 2\pi]$ с весом $\varphi(\tau)$ последовательности $1, \sin\tau, \cos\tau, \sin 2\tau, \cos 2\tau \ldots$;

$$s_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\tau)\sum_{k=0}^{2n}\Phi_k(\theta)\Phi_k(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \quad (n \in \mathbb{Z}_+, \theta \in \mathbb{R})$$

— последовательность сумм Фурье функции F по системе $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$. Если $\varphi(\tau) \equiv 1$, то $s_{\varphi,n}(F;\theta)$— обычная сумма Фурье $s_n(F;\theta)$. Если $F\varphi \in$ $\in L^1$, то $s_{\varphi,n}(F;\theta)$ и $s_n(F\varphi;\theta)$ существуют, при этом $s_n(F;\theta)$ может и не существовать.

Для сумм Фурье – Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ $(\alpha,\beta > -1)$ Г. Сегё [1] установил, что если $f(t)(1-t)^{\min\{\alpha,\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\}}(1+t)^{\min\{\beta,\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\}} \in L^1[-1,1]$, то $(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}((1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}f(t);x)$ и $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ при $n \to \infty$ равномерно равносходятся внутри $(-1,1)$.

Основным результатом сообщения является

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(\tau) = (1-\cos\tau)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\cos\tau)^{\beta+\frac{1}{2}}$ $(\alpha,\beta > -1)$, $A = \min\{\alpha+\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\}$, $B = \min\{\beta+\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}\}$ *и выполняется условие* $F(\tau)(1-\cos\tau)^A(1+\cos\tau)^B \in L^1$. *Тогда последовательности* $[\varphi(\theta)]^{-1}s_n(F\varphi;\theta)$ *и* $[\varphi(\theta)]^{-\frac{1}{2}}s_n(F\varphi^{\frac{1}{2}};\theta)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно равносходятся с* $s_{\varphi,n}(F;\theta)$ *внутри интервалов* $(-\pi,0)$ *и* $(0,\pi)$.

Из теоремы 1 следует приведенный выше результат Г. Сегё.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сегё Г.* Оргогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

2. *Бадков В.М.* Равносходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 3. С. 285–295.

3. *Badkov V.M.* Equiconvergence of Fourier sums in orthogonal polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S101–S127.

[1]Работа выполнена в рамках программы ОМН РАН «Современные проблемы теоретической математики» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-Т-1-1004), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

Н. В. Байдакова (Екатеринбург)
baidakova@imm.uran.ru

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТРИАНГУЛЯЦИИ НА ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГЛАДКИХ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Для широкого класса интерполяционных условий, включая классические, задающих многочлен P_n на треугольнике с углами $\alpha < \beta < \theta$, построен пример функции f^*, для которой доказано, что найдутся $C > 0$, $\alpha_0 > 0$, натуральное $s_0 \geq 2m+1$ и единичные векторы $\xi_{s1}, \ldots, \xi_{ss}$, $s = \overline{1, n}$, такие что для $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки

$$\left\| D^s_{\xi_{s1}\ldots\xi_{ss}}(f^* - P_n)\right\|_\infty \geq \frac{CMH^{n+1-s}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{\min\{s-1, s_0-1\}}} \ .$$

Если, кроме того, $m \geq 1$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = 0$, то найдутся $\widetilde{\alpha}_0 > 0$, натуральные числа $\{r_i\}_{i=0}^{m+1}$, $2m+1 = r_0 < r_1 < \cdots < r_{m+1} \leq n$ и единичные векторы $\zeta_{r1}, \ldots, \zeta_{rr}$, $r = \overline{2m+2, n}$, такие что для $\alpha < \widetilde{\alpha}_0$ имеют место оценки

$$\left\| D^r_{\zeta_{r1}\ldots\zeta_{rr}}(f^* - P_n)\right\|_\infty \geq \frac{CMH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r-2m-1}} \ , \ r = \overline{r_1, r_{m+1}};$$

$$\left\| D^r_{\zeta_{r1}\ldots\zeta_{rr}}(f^* - P_n)\right\|_\infty \geq \frac{CMH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r_{m+1}-2m-1}} \ , \ r = \overline{r_{m+1}+1, n};$$

$$\left\| D^r_{\zeta_{r1}\ldots\zeta_{rr}}(f^* - P_n)\right\|_\infty \geq \max\left\{\frac{CMH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{p_r}(\operatorname{tg}\beta)^{q_r}} \ , \right.$$

$$\left. \frac{CMH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r_{i-1}-2m-1}}\right\}, \quad r = \overline{r_{i-1}+1, r_i - 1}, \ i = \overline{1, m+1},$$

где $p_r = \max\{0, 2m - r_i + r\}$, $q_r = \min\{r_i - 2m, r\} - 1$.

Данный пример показывает, что задача выбора таких интерполяционных условий, которые одновременно обеспечивали бы независимость оценок сверху аппроксимации производных от синуса наименьшего угла треугольника в знаменателе и высокую гладкость результирующей кусочно-полиномиальной функции при локальных способах интерполирования на триангулированной области, не может быть полностью решена положительно.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00347).

М. В. Балашов (Москва)
balashov73@mail.ru

БЛИЖАЙШИЕ И НАИБОЛЕЕ УДАЛЕННЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВ[1]

При решении многих задач аппроксимации и условной оптимизации используется оператор метрической проекции точки на множество, который заданной точке ставит в соответствие ближайшую к ней точку заданного множества [1, 2]. Если заданное множество замкнуто, но не выпукло, то метрическая проекция точки может быть не единственной, а в бесконечномерном случае и не существовать. Аналогичные вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от параметров возникают и про наиболее удаленные точки (выпуклого) замкнутого множества от данной точки пространства [3]. Основные вопросы про ближайшие и наиболее удаленные точки (выпуклых) множеств — существование и непрерывная зависимость от параметров задачи, оценка модуля непрерывности. Основной результат про ближайшие [4] и наиболее удаленные [5] точки в равномерно выпуклых пространствах — существование для всякого ограниченного замкнутого множества всюду плотного подмножества G_δ-типа, на котором существует непрерывно зависящая от точек указанного G_δ-множества единственная ближайшая/наиболее удаленная точка данного замкнутого ограниченного множества.

В докладе будут обсуждаться свойства множества, гарантирующие существование и единственность ближайшей/наиболее удаленной точки для всех точек из некоторой окрестности/вне некоторой окрестности указанного множества. Работы [6–13] посвящены указанной проблематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. Т. 28, № 6(174) (1973. С. 3-66.

2. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышёвских множеств // УМН. 1996. Т. 51, № 6. С. 125–188.

3. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. Приложение II.

4. *Стечкин С. Б.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Roum. Math. Pur. et Appl. 1963. № 8(1). P. 5–18.

5. *Edelstein M.* Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces // Israel J. Math. 1966. № 4(3). P. 171–176.

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00139-а, программой «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/11133 и ФЦП «Кадры» программа 1.2.1.

6. *Vial J.-P.* Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8, № 2. P. 231–259.

7. *Borwein J. M., Strojwas H. M.* Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, I. Theory // Canad. J. Math. 1986. Vol. 38. P. 431–452.

8. *Bernard F., Thibault L., Zlateva N.* Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. 2006. Vol. 13, № 3–4. P. 525–559.

9. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal smoothness and lower–C^2 property // J. Convex Anal. 1995. Vol. 2, № 1–2. P. 117-144.

10. *Балашов М. В., Иванов Г. Е.* Об удаленных точках множеств // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 2. С. 163–170.

11.*Balashov M. V., Ivanov G. E.* Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces // Izvestiya: Mathematics. 2009. Vol. 73, № 3. P. 455–499.

12. *Иванов Г. Е.* Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 382–395.

13. *Balashov M. V., Repovš D.* Weakly convex sets and modulus of nonconvexity // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 371. P. 113–127.

А. Н. Бахвалов (Москва)
an-bakh@yandex.ru

О ЛОКАЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ДЛЯ КРЕСТООБРАЗНЫХ ОКРЕСТНОСТЕЙ[1]

Д. Ватерманом [1] было доказано, что если $\alpha \in (-1,0)$, функция непрерывна по $\{n^{\alpha+1}\}$-вариации на $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$, то ее ряд Фурье суммируется методом (C,α) в каждой точке.

В работах автора [2, 3] (где можно найти соответствующие определения) этот результат перенесен на многомерный случай, и показано, что условие непрерывности по вариации существенно, в отличие от одномерного случая, даже для локализации средних. В частности, имеет место (см. [3, теорема 3])

Теорема. *Пусть $\alpha_j \in (-1,0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1,2$, причем эти числа таковы, что $\beta_1+\beta_2 \le 1$. Тогда существует непрерывная функция из класса $(\{n^{\beta_1}\},\{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$, равная тождественно нулю вне $(\frac{\pi}{2},\pi)^2$, ряд Фурье которой $(C,\boldsymbol{\alpha})$-не суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.*

Оказывается, что условие непрерывности по вариации можно заменить более слабым, если локализацию понимать в смысле крестообразных окрестностей. Пусть $\{n^\beta\}_N = \{n^\beta\}_{n=N+1}^{\infty}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00169) и программы «Ведущие научные школы» (проект НШ-979.2012.1).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_j \in (-1, 0)$ *и* $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, 2$, *Тогда для любой функции из класса* $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$, 2π*-периодической по каждой переменной, равной тождественно нулю вне* $(\delta, 2\pi - \delta)^2$ *при некотором* $\delta > 0$ *и удовлетворяющей условию*

$$\lim_{N\to\infty} V^{x,y}_{\{n^{\beta_1}\}_N, \{n^{\beta_2}\}_N}(f; \mathbb{T}^2) = 0,$$

ее ряд Фурье $(C, \boldsymbol{\alpha})$*-суммируется к нулю в нуле.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Waterman D.* On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Studia math. 1976. Vol. 55(1). P. 87–95.

2. *Бахвалов А.Н.* Суммирование методами Чезаро рядов Фурье функций из многомерных классов Ватермана. //Докл. АН. 2011. Т. 437(6). С. 731–733.

3. *Бахвалов А.Н.* Непрерывность по Λ-вариации и суммирование методами Чезаро кратных рядов Фурье. // Мат. заметки. 2011. Т. 90(4). С. 483–500.

В. И. Бердышев (Екатеринбург)
bvi@imm.uran.ru

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОБЛЕМОЙ НАВИГАЦИИ[1]

Навигация автономно движущегося аппарата по геофизическим полям (ГФП) означает определение его местоположения по информации о ГФП в целом, хранящейся на борту, и фрагменту ГФП, снятому аппаратом в процессе движения. В докладе предполагается сделать обзор задач, связанных с проблемой навигации по ГФП:

- экономное хранение информации о ГФП в целом;
- определение степени информативности ГФП, обеспечивающей привязку объекта по фрагменту поля;
- выбор траектории движения над наиболее информативной частью поверхности;
- восстановление реализованной траектории по точечным измерениям;
- определение степени видимости объекта наблюдателем;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00445) и программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» (проект 09-П-1-1013).

- задача сопровождения объекта наблюдателем или группой наблюдателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев В. И., Костоусов В. Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 270 с.

Е. И. Бережной (Ярославль), А. А. Перфильев (Москва)
ber@uniyar.ac.ru

О КОМПАКТНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Пусть Q_0 есть единичный куб в $\mathbf{R}^n$ с обычной мерой Лебега, $\mathbf{B}$ дифференциальный базис в Q_0 и

$$M_{\mathbf{B}}f(t) = \sup\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(\tau)|d\tau : \ t \in B \in \mathbf{B}\}$$

порожденный $\mathbf{B}$ оператор максимальной функции.

Теорема 1. *Пусть задан квазиплотностной дифференциальный базис* $\mathbf{B}$. *Пусть* X *правильное идеальное пространство на* Q_0. *Тогда оператор максимальной функции, порожденный дифференциальным базисом* $\mathbf{B}$, *не может быть компактным, если его рассматривать как* $M_{\mathbf{B}} : X \to X$.

Эта теорема является широким обобщением основных результатов из $[1, 2]$ об отсутствии компактности $M_{\mathbf{B}}$.

Теорема 2. *Существует квазиплотностной дифференциальный базис* $\mathbf{B}_0$ *такой, что оператор* $M_{\mathbf{B}}$ *является компактным, если его рассматривать как* $M_{\mathbf{B}_0} : L^\infty \to L^\infty$.

В конструкции $\mathbf{B}_0$ используются идеи и построения из [3–5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oniani G. G.* On the non-compactness of maximal operators // Real Analysis Exchange. 2002/2003. Vol. 28, № 2. P. 139–146.

2. *Meshi A.* Measure of non-compactness for integral operators in weighted Lebesque spaces. N.Y.: Nova, 2009. 120 p.

3. *Бережной Е. И.* О дифференцировании интегралов от функций из симметричных пространств дифференциальными базисами. // Analysis Mathematica. 1996. Vol. 22. P. 267–288.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

4. *Бережной Е. И., Новиков А. В.* О проблеме окаймления из теории дифференцирования интегралов. // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 4. С. 3–26.

5. *Бережной Е. И., Перфильев А. А.* Различение симметричных пространств и L^∞ с помощью дифференциального базиса // Мат. заметки. 2001. Т. 68(3).

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева (Москва)
ig.bloshn@gmail.com, ov-lifantseva@yandex.ru

СТРУКТУРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ И СИСТЕМЕ УОЛША – ПЭЛИ[1]

В работе рассматриваются две ортонормированные системы $\Psi = \mathcal{E}$ и $\Psi = W$, где $\mathcal{E} = \{e^{i2\pi nx}\}_{n\in\mathbb{Z}^N}$, $x \in \mathbb{I}^N = [0,1)^N$, $N \geq 1$, — тригонометрическая система, а $W = \{w_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_0^N}$, $x \in \mathbb{I}^N$, — система Уолша – Пэли (здесь $\mathbb{Z}_0^N = \{n \in \mathbb{Z}^N : n_j \geq 0,\ j = 1,\dots,N\}$).

Пусть E — произвольное измеримое множество, $E \subset \mathbb{I}^N$, $\mu E > 0$ ($\mu = \mu_N$ — N-мерная мера Лебега), и пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{I}^N)$ — некоторое линейное подпространство $L_1(\mathbb{I}^N)$.

В работе рассматривается следующая задача: как ведут себя прямоугольные частичные суммы $S_n(x,f;\Psi)$ кратных рядов Фурье по системе Ψ (здесь $x \in \mathbb{I}^N, f \in \mathcal{A}(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на E и $n \in \mathbb{Z}_0^N$) при $n \to \infty$, т.е. $\min\limits_{1\leq j\leq N} n_j \to \infty$, на множествах E и $\mathbb{I}^N \setminus E$ в зависимости: от гладкости функции f (т. е. от вида пространства $\mathcal{A}$), от структурных и геометрических характеристик множества E (СГХ(E)), а также от ограничений, накладываемых на компоненты $n_1,\dots,n_N$ вектора n («номера» частичной суммы $S_n(x,f;\Psi)$).

Для широкого класса измеримых множеств $\{E\}$, $E \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 3$, сформулирован критерий справедливости (в терминах СГХ(E)) слабой обобщенной локализации почти всюду для рассматриваемых рядов Фурье (т. е. необходимые и достаточные условия сходимости почти всюду на некотором множестве E_1, $E_1 \subset E, \mu E_1 > 0$, указанных рядов, когда разлагаемая в ряд Фурье по системе Ψ функция равна нулю на E), в случае, если $\mathcal{A}(\mathbb{I}^N) = L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, а частичные суммы $S_n(x,f;\Psi)$ имеют «номер» $n = (n_1,\dots,n_N)$, в котором некоторые компоненты являются

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

элементами (однократных) лакунарных последовательностей (т. е. для некоторых компонент n_j вектора n выполняются условия $\frac{n_j^{(s+1)}}{n_j^{(s)}} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \ldots$).

В работе показано также, как сформулированные выше результаты «стыкуются» с результатами, полученными ранее, см. [1–4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блошанский И. Л.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271(6). С. 1294–1298.

2. *Блошанская С. К., Блошанский И. Л.* // Докл. АН России. 1993. Т. 332(5). С. 549–552.

3. *Bloshanskii I. L.* // Intern. J. of Wavelets, Multiresolution and Inform. Processing. 2004. Vol. 2(2). P. 187–195.

4. *Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.* // Докл. АН. 2008. Т. 423(4). С. 439–442.

И. Л. Блошанский, З. Н. Цукарева (Москва)

ig.bloshn@gmail.com, zoyatsukareva@gmail.com

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ С «J_k-ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ» В КЛАССАХ ОРЛИЧА

Пусть $M = \{1, \ldots, N\}, N \geq 2$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset M$, $j_1 < \ldots < j_k$, при $1 \leq k \leq N$ или $J_k = \emptyset$ при $k = 0$. Обозначим $\mathbb{R}[J_k] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \colon x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$, $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k]\colon -\pi \leq x_j \leq \pi$ при $j \in J_k\}$, и, в частности, $\mathbb{T}[J_N] \equiv \mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$.

Пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}^k_+$, $j_v \in J_k$, $v = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N_+$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j = n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)} \geq q > 1$, $\lambda_j = 1, 2, \ldots$, и $n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$).

Далее, пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_s] = \Omega[J_s] \times \mathbb{T}[M \setminus J_s]$, $s = 1, 2$, где $\Omega[J_s] = pr_{(J_s)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на пространство $\mathbb{R}[J_s]$. Определим множества $W_s = W_s(J_k) = \bigcup\limits_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]$ и $W_s^0 = W_s^0(J_k) = \bigcap\limits_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]$.

Пусть $E \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu < (2\pi)^N$. Как известно (см. [1]), для сходимости почти всюду (п.в.) к нулю кратного ряда Фурье (суммируемого по прямоугольникам) функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$ на E достаточно равенства нулю функции $f(x)$ на множестве $W_2(J_0)$ (таком, что $\mu(E \setminus W_2^0(J_0)) = 0$) при $p > 1$, и на множестве $W_1(J_0)$ (таком, что $\mu(E \setminus W_1^0(J_0)) = 0$) при $p = 1$.

С другой стороны (см. [2]), если «номер» частичной суммы $S_n(x;f)$ $n = n^{(\lambda)}[J_k]$ $(1 \le k \le N-2,\ N \ge 3)$, то для сходимости п.в. к нулю на множестве E такой «J_k-лакунарной последовательности частичных сумм» $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)$ (при $n^{(\lambda)}[J_k] \to \infty$, т.е. при $\lambda_j \to \infty$, $j \in J_k$, $n_j \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$) в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, достаточно, чтобы $f(x) = 0$ на множестве $W_2(J_k)$ (таком, что $\mu(E \setminus W_2^0(J_k)) = 0$), вообще говоря, «меньшем», чем $W_2(J_0)$. И аналогичный результат не справедлив в $L_1(\mathbb{T}^N)$ (см. [3]).

Таким образом, возникает вопрос, что будет в классах Орлича?

Теорема. *Пусть $N \ge 2$ и $J_k \subset M$, $1 \le k \le N-1$, тогда существует множество $W_1(J_k)$: для любых $\{n_j{}^{(\lambda_j)}\}$, $j \in J_k$, существует функция $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^N)$ (где $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $\varphi(u) = o(u \ln\ln u)$) такая, что $f(x) = 0$ на $W_1(J_k)$, но «J_k-лакунарная последовательность частичных сумм» $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)$ неограниченно расходится почти всюду на $\mathbb{T}^N$ при $n^{(\lambda)}[J_k] \to \infty$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блошанский И. Л.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49(2). С. 243–282.

2. *Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.* // Мат. заметки. 2008. Т. 84(3). С. 334–347.

3. *Блошанский И. Л., Лифанцева О. В.* // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 15-й Сарат. зимней школы, посвящ. 125-летию со дня рождения В.В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 29–30.

Н. Н. Богданова (Смоленск)

nadingioia@yandex.ru

О РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть T^+ — конечная, односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой L, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$.

В дальнейшем в основном будем пользоваться терминологией, принятой в монографии [1].

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z),\ \ F^-(z)\}$ класса*

$A_2\,(T^{\pm}) \cap H^2\,(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L условиям:

$$A_{k1}(t)\frac{\overline{\partial F^{+}(t)}}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} + (-1)^{k-1}A_{k2}(t)\frac{\partial F^{+}[\alpha(t)]}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} = G_{k1}(t)\frac{\overline{\partial F^{-}(t)}}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} +$$

$$+(-1)^{k-1}G_{k2}(t)\frac{\partial F^{-}[\alpha(t)]}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} + (-i)^{k-1}g_k(t), \quad k = 1, 2,$$

где $A_{kj}(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1, 2;\ j = 1, 2)$ — заданные на L функции класса $H(L)$ (Гельдера), $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана:

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t.$$

Следуя работе авторов [2], сформулированную задачу будем называть *первой четырехэлементной краевой задачей типа Карлемана в классах бианалитических функций* или, короче, *задачей* $\boldsymbol{K}_{41}$, а соответствующую однородную задачу $(g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0)$ назовем *задачей* $\boldsymbol{K}_{41}^0$.

В случае, когда $L = \{t : |t| = 1\}$, задача $\boldsymbol{K}_{41}$ исследована в работе [3].

В настоящем сообщении предлагается конструктивный метод решения задачи $\boldsymbol{K}_{41}$ в случае, когда T^{+} — произвольная односвязная область, ограниченная достаточно гладкой кривой L.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.

2. *Расулов К. М.* О некоторых случаях эффективного решения основных четырехэлементных краевых задач типа Карлемана в классах бианалитических функций // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленский гос. ун-т. Смоленск, 2007. Вып. 8. С. 71–75.

3. *Богданова Н. Н., Расулов К. М.* О решении невырожденной четырёхэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 6–12.

Н. П. Бондаренко (Саратов)
BondarenkoNP@info.sgu.ru

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПУЧКА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рассмотрим краевую задачу $L = L(Q_0, Q_1, h_0, h_1, H_0, H_1)$

$$Y'' + (\rho^2 \cdot I + 2i\rho Q_1(x) + Q_0(x))Y = 0, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U(Y) &:= Y'(0) + (i\rho h_1 + h_0)Y(0) = 0, \\ V(Y) &:= Y'(\pi) + (i\rho H_1 + H_0)Y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

с нелинейной зависимостью от спектрального параметра ρ. Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ — вектор-столбец, I — единичная матрица размера $m \times m$, $Q_s(x) = [Q_{s,jk}(x)]_{j,k=\overline{1,m}}$ — $m \times m$ матрицы с элементами $Q_{s,jk}(x) \in W_1^s[0, \pi]$, $s = 0, 1$, h_s и H_s — комплекснозначные $m \times m$ матрицы, $\det(I \pm h_1) \neq 0$, $\det(I \pm H_1) \neq 0$.

Будем называть *решением Вейля* пучка L матричное решение уравнения (1) $\Phi(x, \rho)$, удовлетворяющее условиям $U(\Phi) = I$, $V(\Phi) = 0$, и *матрицей Вейля* матрицу $M(\rho) := \Phi(0, \rho)$.

Исследуется *обратная задача*: по матрице Вейля $M(\rho)$ построить коэффициенты $Q_s(x)$, h_s, H_s, $s = 0, 1$, пучка L.

Рассмотрим пучок $\tilde{L} = L(\tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1)$ того же вида, что и L, но с другими коэффициентами. Пусть $\tilde{M}(\rho)$ — матрица Вейля пучка $\tilde{L}$. Доказана теорема единственности решения поставленной обратной задачи:

Теорема 1. *Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание матрицы Вейля однозначно определяет пучок L.*

Для доказательства теоремы используется развитие идей метода спектральных отображений [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС) и Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

А. В. Болучевская (Волгоград)
a.v.boluch@gmail.com

СОХРАНЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ СИМПЛЕКСА ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ[1]

При построении расчетных сеток путем отображения стандартной сетки на заданную область важно контролировать искажение исходных ячеек, чтобы не допустить их вырождения при отображении. Для частного случая нерегулярных сеток — триангуляций — в [1, 2] показано, что одним из наиболее важных условий сохранения триангуляции является сохранение ориентации каждого симплекса.

Пусть задана область $D \subset \mathbb{R}^n$ и ориентированный симплекс $S \Subset D$, образованный точками $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n \in D$. Будем говорить, что S положительно ориентирован, если $\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \ldots, P_n - P_0) > 0$.

Пусть отображение $f\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо п. в. и квазиизометрично, то есть существуют такие L, l, $l \le L$, что для любых $x, y \in D$ выполнено $l|x-y| \le |f(x) - f(y)| \le L|x-y|$.

Пусть f дифференцируемо в точке P_0. Через $J_f(P_0)$ обозначим якобиан f в этой точке, через $\omega(t)$ — модуль непрерывности дифференциала f, d_m — длина максимальной стороны симплекса S и $g(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega(t)dt$. Тогда выполнена

Теорема. *Если якобиан отображения f в точке p_0 симплекса S удовлетворяет неравенству*

$$J_f(P_0) > \frac{L^n}{Vn!}\left(\left(1 + \frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^{n}|P_i - P_0|,$$

где V — объем симплекса S, то симплекс S' с вершинами $P'_0 = f(P_0), P'_1 = f(P_1), \ldots, P'_n = f(P_n)$ имеет ту же ориентацию, что и симплекс S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прохорова М. В.* Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории сеток // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. 2008. Т. 14(1). С. 112–129.

2. *Клячин В. А.* О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». Волгоград: Изд-во ВолГУ 2009. Вып. 4. С. 169–182.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-97021-р_поволжье_а).

А. П. Буланов (Обнинск)

О РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ЛАМБЕРТА

Функцией Ламберта $y = l(x)$ называется обратная функция по отношению к функции $x = y \cdot e^y$. О гиперфункциях Ламберта, имеющих существенные приложения см. [1–3]. Используя обозначения цепных экспонент запишем функции $l(x)$ и $y \cdot e^y$ в виде

$$y = l(x) = x \cdot e^{-1 \cdot x \cdot e^{-1 \cdot x \cdot e^{\cdots}}} = x \cdot \langle e^x;\ -1,\ -1,\ \ldots\rangle;$$

$$x = y \cdot e^{1 \cdot y \cdot e^{0 \cdot y \cdot e^{0 \cdot y \cdot e^{\cdots}}}} = y \cdot \langle e^y;\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle$$

На Десятой международной Казанской летней научной школе-конференции (Казань, 1–7 июля 2011 г.) автор, подражая И. Галидакису, предложил называть функции вида

$$y = x \cdot e^{a_1 \cdot x \cdot e^{a_2 \cdot x \cdot e^{\cdots}}} = x \cdot \langle e^x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle, \tag{1}$$

где $a_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ или $k = 1, 2, \ldots, m$, *функциями Ламберта.* При этом цепная экспонента $\langle e^x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle$ может быть бесконечной, как, например, $\langle e^x;\ -1,\ -1,\ \ldots\rangle$ в определении первоначальной функции Ламберта, или конечной $\langle e^x;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\rangle$, как, например, $e^y = \langle e^y;\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle = \langle e^y; 1\rangle$.

В работе [4] рассматриваются две цепные экспоненты

$$B(z) = \langle e^z;\ b_1,\ b_2,\ \ldots\rangle; \quad A(w) = \langle e^w;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle, \tag{2}$$

где в последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |b_n| = \bar{b} < \infty$, а показатели $a_1,\ a_2, \ldots$ определяются рекуррентной формулой посредством $b_1,\ b_2, \ldots$ (в работе [4, с. 69] см. формулу (16)). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта

$$L_b(z) = z \cdot B(z) \qquad L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{3}$$

которые могут быть взаимно обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z;\ -1,\ -1,\ \ldots\rangle$$

есть частный случай, когда в формулах (2) и (3) $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = -1$. Здесь, мы видим, $b_1 = b_2$. Включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта.

В общем случае легко определяются первые три показателя

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, \quad a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3). \tag{4}$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot \Bigg\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} \cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1! k_2! \cdots k_{n-1}!} \times$$

$$\times \left[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} \right] + b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \Bigg\}. \tag{5}$$

В этом сообщении предлагается в развернутом виде представить формулы для определения показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

Прежде заметим, что цепная экспонента $B(z)$ в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд (см. [5] и [6])

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n$$

сходится в круге $K = \left\{ z : \ |z| < \frac{1}{be} \right\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд $w = z \cdot B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} B^{(n)}(0) \cdot z^{n+1}$. В работе [5] есть вывод о том, что

$$B^{(n)}(0) = H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} \times$$

$$\times b_1^{k_1} (k_1 b_2)^{k_2} (k_2 b_3)^{k_3} \cdots (k_{n-1} b_n)^{k_n}. \tag{6}$$

Для определения показателя a_4 распишем форму $H^{(4)}(b_1, b_2, b_3, b_4)$ с соответствующими числовыми коэффициентами. Имеем из (6) восемь ненулевых комбинаций, которые дают эти коэффициенты при условии $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4$:

$$\frac{4! k_1^{k_2} k_2^{k_3} k_3^{k_4}}{k_1! k_2! k_3! k_4!} = \{1, 12, 24, 4, 24, 24, 12, 4!\}$$

Получаем форму 4-й степени

$$H^{(4)}(b_1, b_2, b_3, b_4) = b_1^4 + 12 b_1^3 b_2 + 24 b_1^2 b_2^2 + 4 b_1 b_2^3 +$$

$$+24b_1^2b_2b_3+24b_1b_2^2b_3+12b_1b_2b_3^2+4!b_1b_2b_3b_4.$$

Теперь, полагая в формуле (5) $n=4$, имеем

$$a_4=\frac{-1}{4!a_1a_2a_3}\Bigg\{\sum_{k_1+k_2+k_3=4}\frac{4!k_1^{k_2}k_2^{k_3}}{k_1!k_2!k_3!}[(-5)^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}+a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}]+$$

$$+4!b_1b_2b_3b_4\Bigg\}=\frac{-1}{b_1^2-2b_1b_2+b_2b_3}\cdot\Bigg\{(b_1^3-3b_1^2b_2+b_1b_2^2+b_1b_2b_3-b_2b_3b_4)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{b_2^2-b_3^2}{b_2-b_1}\cdot b_1\cdot b_2+\frac{b_3-b_1}{b_2-b_1}\cdot b_1b_2b_3\Bigg\}. \qquad (7)$$

Для определения показателя a_5 из формы (6), полагая там $n=5$, имеем 16 ненулевых комбинаций, которые дают числовые коэффициенты формы $H^{(5)}(b_1,\ldots,b_5)$ при условии $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=5$:

$$\frac{5!k_1^{k_2}k_2^{k_3}k_3^{k_4}k_4^{k_5}}{k_1!k_2!k_3!k_4!k_5!}=\{1,20,90,80,5,60,240,60,60,120,20,120,120,120,60,5!\}.$$

Заметим, что последняя ненулевая комбинация получается тогда, когда $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=1$, и она дает числовой коэффициент 5!. Распишем теперь сумму формулы (5), полагая там $n=5$, отделяя последнее слагаемое с числовым коэффициентом 5!:

$$a_5=\frac{-1}{5!a_1a_2a_3a_4}\Bigg\{\sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=5}\frac{5!k_1^{k_2}k_2^{k_3}k_3^{k_4}}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\times$$

$$\times[(-6)^{k_1-1}b_1^{k_1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}b_4^{k_4}+a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}]+5!b_1b_2b_3b_4b_5\Bigg\}=$$

$$=\frac{-1}{5!a_1a_2a_3a_4}\cdot\Bigg\{1\cdot[(-6)^4b_1^5+a_1^5]+20\cdot[(-6)^3b_1^4b_2+a_1^4a_2]+$$

$$+90\cdot[(-6)^2b_1^3b_2^2+a_1^3a_2^2]+80\cdot[(-6)b_1^2b_2^3+a_1^2a_2^3]+5\cdot[b_1b_2^4+a_1a_2^4]+$$

$$+60\cdot[(-6)^2b_1^3b_2b_3+a_1^3a_2a_3]+240\cdot[(-6)b_1^2b_2^2b_3+a_1^2a_2^2a_3]+$$

$$+60\cdot[(-6)b_1^2b_2b_3^2+a_1^2a_2a_3^2]+60[b_1b_2^3b_3+a_1a_2^3a_3]+$$

$$+120[b_1b_2^2b_3^2+a_1a_2^2a_3^2]+20[b_1b_2b_3^3+a_1a_2a_3^3]+$$

$$+120[(-6)b_1^2b_2b_3b_4+a_1^2a_2a_3a_4]+120[b_1b_2^2b_3b_4+a_1a_2^2a_3a_4]+$$

$$+120[b_1b_2b_3^2b_4+a_1a_2a_3^2a_4]+60[b_1b_2b_3b_4^2+a_1a_2a_3a_4^2]+5!b_1b_2b_3b_4b_5\Bigg\}. \qquad (8)$$

Здесь без доказательства приведем две (простые, но не тривиальные) последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: $b_1 \neq b_2 = b_3 = b_4 = \ldots = b$; $a_1 = -b_1$, $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \ldots = b - b_1$. В единичном квадрате без диагонали $\{1 \leq b \leq 2; 1 \leq b_1 \leq 2\} \setminus \{b = b_1\}$ количество различных точек — континуум. Поэтому количество конкретных пар взаимно обратных числовых последовательностей, соответствующих точкам квадрата также континуум. В другом случае (вне квадрата), если $b_1 = 1, b = 0$, имеем тривиальную точку. Тогда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = -1$, как показатели первоначальной функции Ламберта.

Если взять простейшую циклическую последовательность показателей $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_{2k-1} = \beta$, $b_{2k} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (как в работе [1]), то в обратной последовательности имеем

$$a_1 = -\beta, \quad a_2 = 1 - \beta, \quad a_3 = -\beta, \quad a_4 = \frac{1}{2} - \beta, \quad a_5 = \frac{24\beta^2 - 20\beta + 1}{12(1 - 2\beta)}.$$

Далее показатели $a_6, a_7, \ldots$ будут выражаться посредством рациональных функций одного переменного β. При определении a_4 ожидалось, что a_4 будет таким же, как $a_2 = 1 - \beta$, но формула (7) дает $a_4 = \frac{1}{2} - \beta$, и этот показатель отверг предположение о том, что обратная последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ циклическая, как и последовательность исходная $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Отметим первые пять показателей обратной последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ при двух конкретных значениях $\beta = -1$ и $\beta = 2$. Если $\beta =$ $= -1$ имеем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3/2$, $a_5 = 5/4$. Если $\beta = 2$ имеем $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$, $a_4 = -3/2$, $a_5 = -19/12$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370

2. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.

3. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol. 50, № 13. P. 977–997.

4. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т.43. С. 64–71.

5. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. АНРФ. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 49–78.

6. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Мат. сб. 2001.Т.192.- №11. С. 3–34.

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж)
bmsh2001@mail.ru

УТОЧНЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

На отрезке $[0,1]$ изучается краевая задача (1)–(2) для системы Дирака (см. [1]).

Получены уточненные асимптотические формулы для собственных функций (фактически полные асимптотические разложения) в трудном случае $q_j(x) \in C[0,1]$.

Так как

$$\int_0^x e^{\lambda(x-2\xi)} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\int_{-x}^x e^{\lambda\tau} f((x-\tau)/2)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^x e^{\lambda\tau} f((x-\tau)/2)\, d\tau + \int_0^x e^{-\lambda\tau} f((x+\tau)/2)\, d\tau\right],$$

то для фундаментальной матрицы $y(x) = (y_{ij}(x))_1^2$ решений системы (1)–(2) из [1] с условием $y(0) = E$ (E— единичная матрица) на основании результатов из [1] получим

Теорема 1. *Имеют место формулы*

$$y(x) = \mathrm{diag}(e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}) + \int_0^x M(x,\tau) e^{\lambda\tau} d\tau + \int_0^x N(x,\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau,$$

где $M(x,\tau) = (M_{ij}(x,\tau))_1^2$, $N(x,\tau) = (N_{ij}(x,\tau))_1^2$,

$$M_{ij} = \frac{1}{2} K_{ij}(x,\xi_i), \quad \xi_1 = \frac{x-\tau}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x+\tau}{2},$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2} K_{ij}(x,\xi_i^*), \quad \xi_1^* = \frac{x+\tau}{2}, \quad \xi_2^* = \frac{x-\tau}{2},$$

и K_{ij} *определены в* [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Если λ_n собственное значение задачи (1)–(2) из [1], то $\varphi_n(x) = (\varphi_{n1}(x), \varphi_{n2}(x))^T$ (T — знак транспонирования), где $\varphi_{n1}(x) = y_{11}(x) + y_{12}(x)$, $\varphi_{n2}(x) = y_{21}(x) + y_{22}(x)$, есть собственная функция. Так как при $\lambda = \lambda_n = n\pi i + \beta_n + \alpha_n^2$ (см. [1]) имеем

$$\int_0^x e^{\pm\lambda\tau} f(x,\tau)d\tau = \int_0^x e^{\pm n\pi i\tau} f(x,\tau)d\tau \pm \beta_n \int_0^x e^{\pm n\pi i\tau} f(x,\tau)\tau d\tau + O(\alpha_n^2), \qquad (1)$$

где $f(x,\tau)$ — ограниченная функция, то по теореме 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$\varphi_{nj}(x) = e^{p_j n\pi i x}\left(1 + p_j\beta_n x\right) + \int_0^x S_j(x,\tau)\left(1 + \beta_n\tau\right)e^{n\pi i\tau}d\tau +$$

$$+ \int_0^x T_j(x,\tau)\left(1 - \beta_n\tau\right)e^{-n\pi i\tau}d\tau + O(\alpha_n^2), \quad j = 1,2,$$

где $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $S_j(x,\tau) = M_{j1}(x,\tau) + M_{j2}(x,\tau)$, $T_j(x,\tau) = N_{j1}(x,\tau) + N_{j2}(x,\tau)$, $j = 1,2$. *Оценка* $O(\alpha_n^2)$ *равномерна по* $x \in [0,1]$.

Замечание. Если взять $\varepsilon_n = \gamma_{nm} + \alpha_n^{m+1}$ из замечания к теореме в [1], то получим более точную асимптотику для $\varphi_n(x)$ с остаточным членом $O(\alpha_n^{m+1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* // (настоящий сборник)

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж),
В. П. Курдюмов, А. П. Хромов (Саратов)
bmsh2001@mail.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу (1)–(2) для системы Дирака (см. [1]) в случае $q_j \in L_2[0,1]$ ($q_j(x)$ — комплекснозначные). Все результаты из [1–3] сохраняются и в этом случае. При этом следует учесть,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

что теперь оценка (8) из [1] для $K_{11,n}(x,\xi)$ имеет вид

$$|K_{11,n}(x,\xi)| \le \frac{\|q_1\|\cdot\|q_2\|}{(2n-2)!}\left(\int\limits_0^x (|q_1(t)|+|q_2(t)|)\,dt\right)^{2n-2}$$

($\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$), функции $K_{11}(x,\xi)$, $K_{22}(x,\xi)$, $K_{12}(x,\xi)-q_2(\xi)$, $K_{21}(x,\xi)-q_1(\xi)$ ограничены, а формула (1) из [2] остается справедливой и когда $f(x,\tau)$ есть $q((x+\tau)/2)$ или $q((x-\tau)/2)$, $q(x)\in L_2[0,1]$.

В качестве приложения этих результатов получается теорема П. Джакова, Б.С. Митягина из [4].

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций задачи* (1)–(2) *образует базис Рисса в* $L_2^2[0,1]$.

Схема доказательства. По теореме 2 [2] для любой $f\in L_2^2[0,1]$ очевидно, что $(f,\varphi_n)=\alpha_n$ (φ_n, α_n из [1, 2]). Для собственных функций φ_n^* сопряженной краевой задачи имеет место результат, схожий с теоремой 2 [2], и поэтому $(f,\varphi_n^*)=\alpha_n$, при этом $(\varphi_n,\varphi_n^*)=2+o(1)$. Системы собственных и присоединенных функций задачи (1)–(2) (из [1]) и сопряженной задачи полны в $L_2^2[0,1]$. Эти факты стандартно (см. [5, с.117–129]) получаются из [3]. По теореме Бари ([6, с. 374–375]) получаем утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А.П.* // (настоящий сборник)

2. *Бурлуцкая М.Ш.* // (настоящий сборник)

3. *Бурлуцкая М.Ш.* // Материалы Воронежской весенней мат. школы "Понтрягинские чтения XXI": сб. статей. 2010. С. 3–9.

4. *P.Djakov, B.Mityagin* // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.

5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 445 с.

А. В. Буробин (Обнинск)
burobin@iate.obninsk.ru

ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются уравнения движения [1]

$$m_i\ddot{r}_i=\gamma{\sum_{j=1}^{n}}'\frac{m_im_j(r_j-r_i)}{|r_j-r_i|^3}+I_i,\quad i=\overline{1,n},$$

материальных точек p_i, $i = \overline{1, n}$, имеющих массы m_i, радиус-векторы r_i и взаимодействующих по закону Ньютона с постоянной тяготения γ. Предполагается, что на обозримом промежутке времени точки p_i не покидают некоторого шара B_R достаточно большого радиуса R, а влияние на их движение материальных точек, находящихся вне этого шара, если таковые имеются, учитывается интегральными членами

$$I_i = \gamma m_i \int\limits_{R^3 \setminus B_R} \frac{r_* - r_i}{|r_* - r_i|^3} \, dm_*, \quad i = \overline{1, n}.$$

В условиях неопределенности интегральные операторы I_i расширяются до многозначных отображений в пространстве функций, интегрируемых в обобщенном смысле. При определенной симметрии в нулевом приближении эти отображения характеризуются силовой функцией Гука. Показывается, что в шаре B_R могут возникать области с доминирующими центробежными силами, при попадании точек p_i в которые происходит их ускоренное движение к периферии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М.* Лекции по небесной механике. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. 160 с.

А. П. Буслаев, М. Г. Городничев (Москва)
Gorodnichev@hotmail.com

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ В МОДЕЛИ СЛЕДОВАНИЯ ЗА ЛИДЕРОМ

Рассматривается система дифференциальных неравенств

$$x_{n+1} - x_n \geq f(\dot{x}_n), \tag{1}$$

где $x_n = x_n(t)$ — траектория движения частицы с номером n по прямой, $\dot{x}_n$ — абсолютно непрерывна и ограничена,

$$|\dot{x}_n(t)| \leq M_1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ . \tag{2}$$

$\ddot{x}_n$ существует почти всюду и ограничена

$$|\ddot{x}_n(t)| \leq M_2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ . \tag{3}$$

При этом будем предполагать однонаправленность движения $\dot{x}_n(t) \geq$ ≥ 0 и, значит, $x_{n+1}(t) - x_n(t) \geq d_0 > 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Поток $\{x_n(t)\}$ называются *тотально связным*, если в (1) все нестрогие неравенства суть равенства и *частично связным*, если некоторые неравенства в разное время являются строгими неравенствами, а другие — равенствами.

Рассматриваемая задача относится к классу задач «следования за лидером» (CFM). Имеется обширная литература по этому направлению и, прежде всего, физического плана [1], где различные постановки сопровождаются комментариями и численными экспериментами.

Однако точных постановок, сформулированных и доказанных результатов значительно меньше. Представляется, что наряду с прикладной актуальностью предмета исследования необходимо, наконец, перейти на язык математики. Этому научному аспекту и посвящена настоящая работа. Для некоторых постановок краевых задач для цепочек из конечного числа звеньев исследуются качественные свойства [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Treiber M., Hennecke A., Helbing D.* Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulatios // Physical Rev. E. 2000. Vol. 62, iss. 2. P. 1805–1824

2. *Buslaev A. P., Gasnikov A. V., Yashina M. V.* Selected Mathematical Problems of Traffic Flow Theory // Intern. J. of Computer Mathematics. Published By: Taylor & Francis. 24 p. DOI: 10.1080/00207160.
2011.611241

Я. А. Васильев (Смоленск)
Vasiliev.Yaroslav.A@yandex.ru

ОБОБЩЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Далее в основном будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в монографии [1].

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $L \in C^2_\mu$, а T^- — область, дополняющая $T^+ \cup L$ до полной комплексной плоскости, причем точка $z = 0$ принадлежит области T^+.

Рассматривается следующая краевая задача.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ *класса* $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, *исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на* L *следующим краевым условиям*:

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int\limits_L A_1(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x}d\tau +$$

$$+\int\limits_L B_1(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x}d\tau = g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int\limits_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y}d\tau +$$

$$+\int\limits_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y}d\tau = ig_2(t), \tag{2}$$

где i — мнимая единица, $G_k(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1,2)$ — заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(1)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ на L; $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ — заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(3-k)}(L \times L)$.

Сформулированную задачу будем называть *первой обобщенной краевой задачей типа Римана в классах кусочно бианалитических функций*, или, короче, *задачей* $\mathbf{GR_{1,2}}$.

Основной целью настоящего сообщения является построение конструктивного метода решения задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: СГПУ, 1998. 343 с.

А. А. Васильева (Москва)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ БЕСОВА[1]

Через $|x|$ будем обозначать произвольную норму на $\mathbb{R}^d$. Пусть s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p_1$, $q_1 < +\infty$, $1 < p_2$, $q_2 < +\infty$, $\delta := s_1 - s_2 + \frac{d}{p_2} - \frac{d}{p_1} > 0$, β_g, β_v, γ_g, $\gamma_v \in \mathbb{R}$, $\beta_g + \beta_v = \delta$, $\gamma_g + \gamma_v > \delta$, $\beta_g > -\frac{d}{p_1}$, $\beta_v < \frac{d}{p_2}$, $\gamma_g > -\frac{d}{p_1}$, $\gamma_v < \frac{d}{p_2}$, $\alpha_g + \alpha_v > 0$, ρ_g, $\rho_v : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ — абсолютно непрерывные функции такие, что

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y\rho_g'(y)}{\rho_g(y)} = 0, \quad \lim_{y\to+\infty}\frac{y\rho_v'(y)}{\rho_v(y)} = 0,$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta_g}|\log_2|x||^{-\alpha_g}\rho_g(|\log_2|x||), \text{ если } |x| \le \frac{1}{2}, \\ |x|^{-\gamma_g}, \text{ если } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00442).

$$v(x) = \begin{cases} |x|^{-\beta_v} |\log_2 |x||^{-\alpha_v} \rho_v(|\log_2 |x||), \text{ если } |x| \le \dfrac{1}{2}, \\ |x|^{-\gamma_g}, \text{ если } |x| > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Положим $w_1(x) = g^{-p_1}(x)$, $w_2(x) = v^{p_2}(x)$, $\alpha = \alpha_g + \alpha_v$, $\rho(y) = \rho_g(y)\rho_v(y)$. Пусть

$$J_* = \begin{cases} \{1, 2, 3, 4\}, \text{ если } \min\{p_2, p_1'\} > 2, \min\{q_2, q_1'\} > 2, \\ \{1, 2, 3\}, \text{ если } \min\{p_2, p_1'\} > 2, \min\{q_2, q_1'\} = 2, \\ \{2, 3, 4\}, \text{ если } \min\{p_2, p_1'\} = 2, \min\{q_2, q_1'\} > 2. \end{cases}$$

Определение и свойства весовых пространств Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d, w)$ можно найти, например, в статье [1]. Через $\lambda_n(\mathrm{Id} : X \to Y)$ будем обозначать линейный поперечник единичного шара B_X в пространстве Y (см. [2]).

Теорема. *Пусть* $1 < p_1 \le 2 \le p_2 < \infty$, $1 < q_1 \le 2 \le q_2 < \infty$, $\tilde\theta_1 = \dfrac{\delta}{d} + \min\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p_2}, \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{2}\right\}$, $\tilde\theta_2 = \dfrac{\min\{p_2, p_1'\}\delta}{2d}$, $\tilde\theta_3 = \alpha + \min\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q_2}, \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{2}\right\}$, $\tilde\theta_4 = \dfrac{\min\{q_2, q_1'\}\alpha}{2}$, $\tilde\sigma_1 = \tilde\sigma_2 = 0$, $\tilde\sigma_3 = 1$, $\tilde\sigma_4 = \dfrac{\min\{q_2, q_1'\}}{2}$. *Пусть найдется такое* $j_* \in J_*$, *что* $\tilde\theta_{j_*} < \min_{j \in J_* \setminus \{j_*\}} \tilde\theta_j$. *Тогда*

$$\lambda_n(\mathrm{Id} : B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^d, w_1) \to B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R}^d, w_2)) \overset{n}{\asymp} n^{-\tilde\theta_{j_*}} \rho(n^{\tilde\sigma_{j_*}}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haroske D. D., Skrzypczak L.* Entropy and approximation numbers of function spaces with Muckenhoupt weights // Rev. Mat. Complut. 2008. Vol. 21 (1). P. 135–177.

2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 305 с.

П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов (Ульяновск)

velmisov@ulstu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ

На основе построенных математических моделей в задачах аэрогидроупругости исследуется динамика и устойчивость деформируемых элементов тонкостенных конструкций, находящихся во взаимодействии с идеальным газом (жидкостью). Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову.

Для решения связанных задач аэрогидроупругости используется несколько подходов.

Первый подход основан на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа. Второй подход основан на построении решения аэрогидродинамической части задачи разработанными для этого методами, использующими метод Фурье и представление искомых функций (потенциала скорости и прогибов пластин) в виде рядов. В обоих случаях решение задач сводится к исследованию системы связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными только для функций прогибов.

Третий подход основан на разработанных численных методах и алгоритмах, которые позволяют проводить исследование динамики и устойчивости упругих элементов конструкций.

Исследование устойчивости проводится на основе методик, связанных с построением положительно определенных функционалов, соответствующих либо указанным выше системам интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов, полученным при первом и втором подходе, либо исходной связанной системе дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций —- прогибов упругих элементов и потенциала скорости жидкости (газа).

Рассмотрены следующие классы задач о динамике элементов: крыловых профилей различных конфигураций; стенок каналов и трубопроводов различного назначения при протекании в них жидкости; датчиков давления.

С. С. Волосивец (Саратов), Б. И. Голубов (Долгопрудный)
volosivetsss@mail.ru, golubov@mail.mipt.ru

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ КЛАССОВ ЛИПШИЦА[1]

Определения. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$). Тогда ее преобразование Фурье определяется равенством $\hat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Известно, что $\hat{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \hat{f}(x) = 0$, т.е. $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ (см. [1, с. 19]). Для $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим m-ю

[1]Работа первого автора поддержана РФФИ, проект 10-01-00270-а) и грантом Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1). Работа второго автора поддержана РФФИ (проект 11-01-00321) и АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/12136)

симметричную разность $\Delta_h^m f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+(2j-m)h/2)$. Если $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$ и $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, то величина $\omega_m(f,\delta) := \sup\limits_{0\le h\le\delta} \|\Delta_h^m f(x)\|$, называемая m-м модулем гладкости, конечна при всех $\delta > 0$ и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Обозначим через Φ множество непрерывных возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций ω, таких что $\omega(0) = 0$ и $\omega(2t) \le C\omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Если $\omega \in \Phi$ и $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, то будем говорить, что ω принадлежит классу Бари B; а если $\omega \in \Phi$ и $\delta^m \int_\delta^\infty t^{-m-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $m \in \mathbb{N}$, то будем говорить, что ω принадлежит классу Бари-Стечкина B_m (см. [2]).

Определим функциональные классы $H^{\omega,m} = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \omega_m(f,t) \le C\omega(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ и $h^{\omega,m} = \{f \in H^{\omega,m} : \omega_m(f,t) = o(\omega(t)), t \to 0\}$, где $\omega \in \Phi$. Класс $H^{\omega,1}$ ($h^{\omega,1}$) при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, будем обозначать через $Lip(\alpha)$ ($lip(\alpha)$). Для $H^{\omega,2}$ и $h^{\omega,2}$ при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 2$, будем использовать обозначения $Zyg(\alpha)$ и $zyg(\alpha)$ соответственно.

Известные результаты. Г. Сэмпсон и Г. Туй [3] и Ф. Мориц [4] установили достаточные условия принадлежности преобразования Фурье (в [3] оно понимается в несобственном смысле) классам $Lip(\alpha)$ ($lip(\alpha)$) и $Zyg(\alpha)$ ($zyg(\alpha)$). Двойственная задача об условиях принадлежности функции этим классам в терминах поведения ее преобразования Фурье изучалась в [5] и [6].

Основные результаты. Все рассматриваемые в теореме 1 интегралы понимаются как несобственные с особыми точками $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 1. 1) *Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m$, $m \in \mathbb{N}$ и выполнены условия*

$$\int_y^\infty f(t)e^{-ixt}\,dt = O(\omega(y^{-1})), \quad \int_{-\infty}^{-y} f(t)e^{-ixt}\,dt = O(\omega(y^{-1})), \tag{1}$$

при $y > 0$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\hat{f} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если в пункте* 1) *вместо условий* (1) *потребовать выполнения условий*

$$\int_y^\infty f(t)e^{-ixt}\,dt = o(\omega(y^{-1})), \quad \int_{-\infty}^{-y} f(t)e^{-ixt}\,dt = o(\omega(y^{-1})),$$

при $y \to +\infty$ равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$, то $\hat{f} \in h^{\omega,m}$.

Теорема 2. 1) *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m \cap B$, $m \in \mathbb{N}$, и выполнено условие*

$$\left|\int_0^y t^m f(t)e^{-ixt}\,dt\right| + \left|\int_{-y}^0 t^m f(t)e^{-ixt}\,dt\right| = O(y^m\omega(y^{-1})) \tag{2}$$

при $y > 0$ *равномерно относительно* $x \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\hat{f} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если в пункте* 1) *вместо условий* (2) *потребовать выполнения условий*

$$\int_0^y t^m f(t) e^{-ixt}\, dt = o(y^m \omega(y^{-1})), \quad \int_{-y}^0 t^m f(t) e^{-ixt}\, dt = o(y^m \omega(y^{-1})),$$

при $y \to +\infty$ *равномерно относительно* $x \in \mathbb{R}$, *то* $\hat{f} \in h^{\omega,m}$.

Теорема 3. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B$ *и*

$$\int_{|t|<y} |t^m f(t)|\, dt = O(y^m \omega(1/y)), \quad y > 0. \tag{3}$$

Тогда $\hat{f} \in H^{\omega,m}$.

2) *Если в пункте* 1) *вместо условия* (3) *потребовать выполнения условия*

$$\int_{|t|<y} |t^m f(t)|\, dt = o(y^m \omega(1/y)), \quad y \to +\infty, \tag{4}$$

то $\hat{f} \in h^{\omega,m}$.

Теорема 4. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in H^{\omega,m}$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $t^m f(t)$ *сохраняет знак на* $\mathbb{R}$. *Тогда выполнено условие* (3).

2) *Если в пункте* 1) *заменить условие* $\hat{f} \in H^{\omega,m}$ *на* $\hat{f} \in h^{\omega,m}$, *то будет выполнено условие* (4).

Теорема 5. 1) *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\omega \in B_m \cap B$, $\hat{f} \in H^{\omega,m}$ *и* $t^{m+1} f(t)$ *сохраняет знак на* $\mathbb{R}$. *Тогда выполнено условие* (3).

2) *Если в пункте 1) заменить условие* $\hat{f} \in H^{\omega,m}$ *на* $\hat{f} \in h^{\omega,m}$, *то будет выполнено условие* (4).

Из теорем 3–5 вытекает

Следствие 1. 1) *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *причем* $tf(t) \geq 0$ *или* $f(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in B \cap B_m$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда условия* $\hat{f} \in H^{\omega,m}$, (3) *и* $\int_{|t|>y} |f(t)|\, dt = O(\omega(y^{-1}))$, $y > 0$, *эквивалентны.* 2) *В предположениях пункта* 1) *условия* $\hat{f} \in h^{\omega,m}$, (4) *и* $\int_{|t|>y} |f(t)|\, dt = o(\omega(y^{-1}))$, $y \to +\infty$, *эквивалентны.*

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0} h^{-m} \Delta_h^m f(x) = A,$$

то говорят, что *функция* f *в точке* x *имеет симметрическую производную Шварца порядка* $m \in \mathbb{N}$, *равную* A.

Теорема 6. *Пусть* $f \in L^1(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $\int_{|t|>y} |f(t)|\,dt = o(y^{-m})$, $y \to +\infty$. *Тогда симметрическая производная Шварца порядка* m *в точке* x *у функции* $\hat{f}$ *существует и равна* A *в том и только в том случае, когда главное значение* m *раз формально продифференцированного интеграла* $(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\,dt$, *т.е.* $\lim\limits_{y\to+\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{-y}^{y}(-it)^m f(t)e^{-ixt}\,dt$ *существует и совпадает с* A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.

2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. общ-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

3. *Sampson G., Tuy H.* Fourier transforms and their Lipschitz classes // Pacific J. Math. 1978. Vol. 75, № 2. P. 519–537.

4. *Moricz F.* Best possible sufficient conditions for the Fourier transform to satisfy Lipschitz or Zygmund condition // Studia Math. 2010. Vol. 199, № 2. C. 199–205.

5. *Moricz F.* Absolutely convergent Fourier integrals and classical function spaces // Arch. Math. 2008. Vol. 91, № 1. P. 49–62.

6. *Volosivets S.S.* Fourier transforms and generalized Lipschitz classes in uniform metric // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 383, № 1. P. 344–352.

И. Ю. Выгодчикова (Саратов)

VigodchikovaIY@info.sgu.ru

О ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ТИПА РАВЕНСТВА[1]

Пусть $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, $N \geq n+1$, $\Phi(\cdot)$ - сегментная функция, $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}, k = \overline{0,N}$, $\exists\ s \in \overline{0,N}$: $y_{2,s} = y_{1,s}$, $D := \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n(A,t_s) = y_{2,s}\}$. Рассмотрим задачу:

$$\rho(A) := \max_{k=\overline{0,N}} \max\{p_n(A,t_k) - y_{1,k}, y_{2,k} - p_n(A,t_k)\} \longrightarrow \min_{A\in D}. \qquad (1)$$

Пусть множество $\left\{i \in \overline{0,N} : y_{2,i} - y_{1,i} = \max_{k=\overline{0,N}} y_{2,k} - y_{1,k}\right\}$ содержит не менее $n+1$ элементов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

Теорема 1. *Решение задачи* (1) *существует и единственно. Для того чтобы* $A \in R^{n+1}$ *был решением задачи* (1), *необходимо и достаточно чтобы нашлось* $\sigma := \left\{t_{j_0} < \ldots < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T$, $t_s \in \sigma \quad (s = j_r)$ *и* h, *чтобы для* $i = 0$ *или* $i = 1$ *выполнялись равенства:*

$$y_{1.5+(-1)^k(0.5-i),j_k} - p_n\left(A, t_{j_k}\right) = (-1)^{k+i} h, \quad k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}, \tag{2}$$

$$y_{1.5+(-1)^k(0.5-i),j_r} = p_n\left(A, t_{j_r}\right) \tag{3}$$

и $\rho(A) = h$.

Разработана рациональная процедура решения задачи (1) на основании алгоритма Вале – Пуссена. Приведём преобразование текущего «базиса» σ для задачи П. Л. Чебышёва с ограничением ($y_{2,k} = y_{1,k}$, $k = \overline{0, N}$). Произвольно берём σ, полагаем $i = 2$. Находим A и h, решая систему (2)–(3). Если $\rho(A) = |h|$ выполняется, получено решение задачи. Иначе находим $q : \rho(A) = |y_{2,q} - p_n(A, t_q)|$. В новый базис включаем узел t_q. Для выбора узла, исключаемого из базиса, анализируются случаи расположения t_q относительно узлов базиса. Рассмотрим один из них. Если $t_q > t_{j_{n+1}}$, то а) при $r = n + 1$, если величина $(y_{2,q} - p_n(A, t_q))(y_{2,j_n} - p_n(A, t_{j_n})) > 0$, из базиса исключаем узел t_{j_0}, а если эта величина отрицательна, исключаем узел t_{j_n}, б) при $r < n + 1$, если величина $(y_{2,q} - p_n(A, t_q))(y_{2,j_n} - p_n(A, t_{j_n})) > 0$, из базиса исключаем узел $t_{j_{n+1}}$, а если эта величина отрицательна, при $r = 0$ исключаем узел t_{j_1}, а при $r > 0$ исключаем узел t_{j_0}.

И. Ю. Выгодчикова (Саратов)
VigodchikovaIY@info.sgu.ru

О ЗАДАЧЕ РАВНОМЕРНОГО СНИЖЕНИЯ РИСКА ФИНАНСОВОГО ПОРТФЕЛЯ[1]

Пусть θ_i — доли финансовых активов n видов в инвестиционном портфеле, $0 \le a_i \le 1$, $i = \overline{1, s}$, $s \le n$. В качестве рисковых показателей σ_i могут выступать среднеквадратические отклонения доходностей, либо иные показатели негативного для инвестора характера.

Требуется равномерно распределить риски (σ_i) между всеми активами, взвесив их по долям активов в портфеле, за счёт выбора этих долей:

$$\Psi(\theta) := \max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i \theta_i \longrightarrow \min_{\theta \in D}, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

$$D = \left\{ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,\, \theta_i \geq a_i, i = \overline{1, s} \right\}. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Решение задачи* (1)–(2) *существует тогда и только тогда, когда либо* $s < n$*, либо* $s = n$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq 1$.

Далее, если только $s = n$, считаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq 1$. Положим $\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} {\sigma_i}^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть* $l \in \overline{1, s}$ *удовлетворяет двойному неравенству:*

$$\min_{i=\overline{1,s}\setminus\{l\}} (a_l/a_i) \,/ \left(1 + \sum_{j=1, j\neq i, j\neq l}^{n} \sigma_i/\sigma_j + a_l/a_i \right) > a_l > 1/\left(\sigma_l \nu\right) \qquad (3)$$

Тогда решением задачи (1)–(2) *будет вектор* $\theta^* = ({\theta_1}^*, \ldots, {\theta_n}^*)$:

$$\theta_l^* = a_l, \theta_i^* = (1 - a_l) \,/ \left(1 + \sum_{j=1, j\neq i, j\neq l}^{n} \sigma_i/\sigma_j \right), \quad i \in \overline{1, n} \setminus \{l\}. \qquad (4)$$

Пример. Пусть $n = 3$, $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 4, \sigma_3 = 1$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.2$, $b_3 = 0.15$. Выполняется (9) для $l = 2$, $\theta^* = (2/15, 1/5, 2/3)$.

В. В. Галатенко (Москва)
vvgalatenko@yahoo.com

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СЛАГАЕМЫХ В ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЭКСПОНЕНТ[1]

Рассматривается следующая задача. Известно, что функция $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n e^{\beta_n x}$, где α_n — ненулевые действительные числа, β_n — попарно различные действительные числа. При этом ни α_n, ни β_n, ни N неизвестны. Также известны значения функции $f(x)$ (на всей прямой, на отрезке, или на равномерной сетке, в которой точек заведомо не меньше, чем $2N$). Требуется по этим данным восстановить N.

Следует отметить, что после того, как значение N восстановлено, могут быть восстановлены и значения α_n, β_n ($n = 1, 2, \ldots, N$): это может быть достигнуто, например, применением метода Прони (см. [1, 2]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00476) и программы «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-979.2012.1).

Также следует отметить, что рассматриваемый метод восстановления N базируется на тех же идеях, что и метод Прони: в его основе лежат стандартные свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема. *Пусть Δ — произвольное ненулевое действительное число, $f_k(x) = f(x - k\Delta)$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$. Тогда (i) при $K = N - 1$ (и, следовательно, при всех $K < N$) система функций $\{f_k\}_{k=0}^{K}$ линейно независима на $\mathbb{R}$ (и, более того, линейно независима на равномерных сетках, состоящих по крайней мере из N точек); (ii) при $K = N$ (и, следовательно, при всех $K \geqslant N$) система функций $\{f_k\}_{k=0}^{K}$ линейно зависима на $\mathbb{R}$ (а, значит, и на любом подмножестве $\mathbb{R}$).*

Теорема может быть перенесена и на случай комплексных α_n, β_n, однако это требует добавления некоторых условий; без дополнительных условий утверждение теоремы в этом случае неверно.

Полученный результат применим, в частности, при исследовании сложных биологических растворов для определения числа присутствующих в растворе ферментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prony G. R. B.* Essai experimental et analysique ... // J. de L'Ecole Polytechnique. 1795. Vol. 1(2). P. 24–76.

2. *Beylkin G., Monzon L.* On approximation of functions by exponential sums // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2005. Vol. 19. P. 17–48.

Ю. А. Гладышев (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА С ЗАДАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦАХ ПРОМЕЖУТКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ранее было доказано [1] существование и определен процесс нахождения обобщенных степеней Берса $X^{(2p+1)}(x; x_1, x_2)$ с нулевыми значениями на краях промежутка при целом $p > 0$.

Для решения ряда краевых задач и дальнейших обобщений необходимо построить последовательность степеней

$$X^{(2p+1)}(x; x_1, x_2; g_0^{(1)}, \ldots, g_\rho^{(1)}, g_0^{(2)}, \ldots, g_\rho^{(2)}),$$

которые обладают свойствами

$$D_2 D_1 X^{(2p+1)}(x; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) = (2p+1)2pX^{(2p-1)}(x; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) \quad (1)$$

относительно дифференцирования по Берсу

$$D_1 = a_1(x)\frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2(x)\frac{d}{dx}$$

и принимают заданные граничные значения

$$X^{(2p+1)}(x_1; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) = g_p^{(1)}, \tag{2}$$

$$X^{(2p+1)}(x_2; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) = g_p^{(2)}, \quad g_0^{(1)} = g_0^{(2)} \neq 0. \tag{3}$$

Случай одновременного обращения $g_0^{(1)}, g_0^{(2)}$ в ноль исключен. Здесь через $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ в символ степени обозначены наборы ρ заданных постоянных значений степени справа в точке x_1 и слева x_2.

Предварительно рассмотрена задача, когда все постоянные $g_\rho^{(1)} = 0$ исчезают:

$$X^{(2p+1)}(x_1; x_1, x_2) = 0,$$

$$X^{(2p+1)}(x_2; x_1, x_2) = g_p^{(2)} = g_\rho, \quad g_0 \neq 0.$$

Общее выражение для условий (2), (3) находится путем сложения двух последовательностей при замене $x_1 \to x_2$. Для нахождения степеней использован метод производящей функции вида

$$f(x, x_1, x_2, g_0, \ldots, g_\rho) = \left(\sum \frac{k^{(2i)} g_{(2i+1)}}{(2i+1)!}\right) \frac{\operatorname{sh} kX(x, x_1)}{\operatorname{sh} kX(x_2, x_1)}.$$

Разлагая функцию $\dfrac{\operatorname{sh} kX(x, x_1)}{\operatorname{sh} kX(x_2, x_1)}$ в ряд по k и производя перемножение рядов получим ряд, члены которого есть искомые степени. Показано, что искомые степени представленной линейной комбинацией степеней с двумя нуль-точками.

$$X^{(2p+1)}(x_2; x_1, x_2; g^{(1)}, g^{(2)}) =$$

$$= (2p+1)! \sum_{i=0}^{\rho} \frac{g_{2\rho-2i+1}^{(i)}}{(2\rho-2i+1)!(2i+1)!} X^{(2\rho-2i+1)}(x; x_1, x_2). \tag{4}$$

Можно непосредственным дифференцированием проверить выполнение условий (1) и подстановкой $x = x_1$, $x = x_2$ условий (2), (3).

Аналогичным образом в силу равноценности точек x_1, x_2 строятся степени, принимающие значения $g_{(2\rho+1)}^{(i)}$ слева в точке x_1. Полное решение получим как сумму этих двух выражений.

Тем самым показано, что последовательность степеней Берса с условиями (1)–(3) существует и единственна.

Последовательность (4) позволяет дать решение ряда краевых задач. Например, построить ось при разрывных функций $a_1(x)$, $a_2(x)$. Далее она позволяет построить обобщенные степени на графе принимает нулевые значения на открытых вершинах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения. Калуга, 2011. 201 с.

Ю. А. Гладышев, Ю. В. Афанасенкова (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Для решения второй краевой задачи для системы уравнений на графе использовано представление решения в форме Берса. Имеется в виду приложения к задачам переноса в системе стержней (труб) при линейных законах переноса в стержне и обмена с внешним пространством. Пусть граф имеет N вершин, среди которых L открытых и S закрытых. На открытых вершинах заданы значения первых производных по Берсу решения $u^{(i)}$

$$Du^{(i)} = J_i, \quad i = 1, 2, \ldots, L. \tag{1}$$

На закрытых вершинах приняты обычные условия непрерывности решения и суммарной непрерывности производной. Эти условия, учитывающие закон сохранения переносимой величины находятся в полном соответствии с основной системой уравнений переноса

$$D_1^{(i)} D_1^{(i)} u^{(i)} - m^2 u^{(i)} = u_b^{(i)}. \tag{2}$$

Здесь $u^{(i)}$ является потенциалом процесса на каждом ребре, а $u_b^{(i)}$ — внешним потенциалом. Система учитывает обмен с внешней средой.

Ранее [1] было дано решение задачи D на графе, где использовалось представленные решения на каждом ребре в виде

$$T^{(i)}(x) = \left(T_1 - w\,\Big|_{x_1}\right) \frac{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x, x_2)}{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x_1, x_2)} +$$

$$+ \left(T_2 - w\,\Big|_{x_2}\right) \frac{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x, x_1)}{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x_2, x_1)} + w(x), \tag{3}$$

где $w(i)$ — частные решения(2).

Для решения задачи (1) предлагается использовать решение в виде

$$T^{(i)}(x) = \left(J_1 - D_1 w^{(i)}\,\Big|_{x_1}\right) \frac{\mathtt{ch}\, m_i X_i(x, x_2)}{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x_1, x_2)} +$$

$$+ \left(J_2 - D_1 w^{(i)}\,\Big|_{x_2}\right) \frac{\mathtt{ch}\, m_i X_i(x, x_1)}{\mathtt{sh}\, m_i X_i(x_2, x_1)} + D_1 w(x), \qquad (4)$$

Используя представления (3) и (4) получено полное решения поставленной задачи. С этой целью введено понятие матрицы потенциалов при отличном от нуля определителя и правой части. Особо рассмотрен вопрос важный для приложений, о системе, когда поток равен нулю на всех открытых вершинах. Приведены многочисленные частные примеры. Показано приложения полученных методов к решению задачи о теплопередачи тепла через трубу при продольном сложном оребрении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами – Берса и его приложения в математической физике. Калуга, 1997 г.

Ю. А. Гладышев, Ю. В. Афанасенкова (Калуга)
dvoryanchikova_y@mail.ru

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЦЫ ПОТОКОВ И МАТРИЦЫ ПОТЕНЦИАЛОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Приведенные в сообщении построения предназначены для изучения процессов переноса в системе стержней, представленной определенным геометрическим графом.

Предварительно построены матрицы потоков P и матрицы потенциалов R для одного стержня. Положим, что x_1, x_2 координаты концов стержня. Было показано [1], что решение задачи Дирихле (D), где $\Phi|_{x_1} = \Phi_1$, $\Phi|_{x_2} = \Phi_2$ для потенциалов Φ при использовании аппарата обобщенных степеней Берса можно представить в виде

$$\Phi(x) = (\Phi_1 - w|_{x_1}) \frac{\operatorname{sh} mX(x, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)} + (\Phi_2 - w|_{x_2}) \frac{\operatorname{sh} mX(x, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)} + w(x).$$

Здесь w любые решения неоднородного уравнения процесса переноса в стержне при наличии внешнего обмена

$$a_2(x) \frac{d}{dx} \left(a_1(x) \frac{d\Phi}{dx}\right) - m^2 \Phi = \Phi_0(x).$$

Переменные коэффициенты $a_1(x),\ a_2(x)$ определены материальными и геометрическими параметрами стержня, а $\Phi_0(x)$ — заданная функция.

Напомним, что в процессе теплопроводности потенциал — температура, при диффузии вещества или зарядов это концентрация, при течении тока — потенциал электрического поля и т. д.

Матрица потоков выражает связь потенциалов на концах стержня Φ_1, Φ_1 и потоков J_1, J_2.

$$J_i = \sum_{k=1}^{2} P_{ik}\Phi_k + Q_i. \tag{1}$$

Здесь Q_i дополнительные потоки. Как легко установить [1], используя закон переноса, $J = -D_1\Phi$, где элементы матрицы потоков определены как

$$P_{11} = -\frac{m \operatorname{ch} m\widetilde{X}(x_1, x_2)}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)}, \quad P_{12} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)},$$

$$P_{21} = -\frac{m}{\operatorname{sh} mX(x_1, x_2)}, \quad P_{22} = -\frac{m \operatorname{ch} m\widetilde{X}(x_2, x_1)}{\operatorname{sh} mX(x_2, x_1)}.$$

Для дополнительных потоков найдем

$$Q_1 = P_{11}w|_{x_1} - P_{12}w|_{x_2} - D_1w|_{x_1},$$

$$Q_2 = -P_{21}w|_{x_1} - P_{22}w|_{x_2} - D_1w|_{x_2}.$$

Введем в рассмотрение вектор-столбцы Φ, J, W, D_1W с компонентами

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}, \quad D_1W = \begin{pmatrix} D_1w|_{x_1} \\ D_1w|_{x_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношениями (1) запишем

$$J = P\Phi - PW - D_1W. \tag{2}$$

Поставим вторую краевую задачу для стержня

$$J_1 = -D_1\Phi|_{x_1}, \quad J_2 = -D_1\Phi|_{x_2},$$

где $J_1,\ J_2$ — заданные потоки. Используя аппарат обобщенных степеней решение запишем

$$\Phi(x) = -(J_1 + D_1w|_{x_1})\frac{\operatorname{ch} mX(x, x_2)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_1, x_2)} -$$

$$-(J_2 + D_1 w|_{x_2}) \frac{\operatorname{ch} mX(x, x_1)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_2, x_1)} + w(x). \tag{3}$$

Линейная связь между потоками и потенциалами осуществляет матрица потенциалов R, которая имеет вид

$$R_{11} = -\frac{\operatorname{ch} mX(x_1, x_2)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_1, x_2)}, \quad R_{12} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_2, x_1)},$$

$$R_{21} = -\frac{1}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_1, x_2)}, \quad R_{22} = -\frac{\operatorname{ch} mX(x_2, x_1)}{m \operatorname{sh} m\widetilde{X}(x_2, x_1)}.$$

После этого соотношение между потоками и потенциалами в (3) запишем

$$\Phi = RJ + R(D_1 W) + W, \tag{4}$$

где использованы обозначения введенные ранее. Обратим внимание, что решение w совпадает с решением в (2).

Легко убедиться, непосредственно используя тождества для функций $\operatorname{ch} mX$, $\operatorname{sh} mX$, установленные в [2], что матрицы P, R взаимно обратные $PR = RP = 1$. Поэтому из (4), применяя матричный операторы P, найдем J d(2) и обратно.

Важным частным примером являются стержни, в которых все вершины закрыты, т. е. все $J_1 = J_2 = 0$. Тогда решение задачи имеет вид

$$\Phi = P(D_1 W) + W.$$

Потенциалы концов стержня определены только внешними условиями, которые задает функция Φ. Имеем процессы переноса в стержне за счет внешней разности потенциалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладышев Ю. А., Муталапова Т. В.* Методы решения задач теплопередачи в системах стержней и оболочек // Вестн. Калуж. ун-та. 2010. № 4. С. 14–18.

2. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения. Калуга, 2011. 201 с.

Ф. В. Голованева, С. А. Шабров (Воронеж)
shaspoteha@mail.ru

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ СПЕКТРА ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Бурное развитие качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами можно объяснить следующим обстоятельством: дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + Q'u = F' \tag{1}$$

стало трактоваться как поточечно заданное, т.е. как обыкновенное.

Поточечная трактовка позволила применить к таким дифференциальным уравнениям качественные методы анализа решения (типа теорем Ролля), что сделало возможным получение столь важной для приложений информации (например, количество нулей, экстремумов и пр.). Следует отметить, что изучение (1) с позиций теории обобщенных функций позволяет установить лишь слабую разрешимость (оставляя за кадром многие вопросы: о перемежаемости нулей и пр.). Последнее вызвано тем, что (1) расценивается как равенство функционалов, определенных на D — пространстве бесконечно дифференцируемых финитных на $[0;\, l]$ функций.

С точки зрения поточечной интерпретации уравнения, позволившей для уравнения второго порядка построить точную параллель классической теории вплоть до осцилляционных теорем (см. [1–3]), для краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda u M'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

здесь λ — спектральный параметр, удается получить достаточные условия осцилляционности спектра, а именно, справедлива установить справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $Q(x)$ не убывает на $[0; l]$, и разность $Q(l) - Q(0)$ достаточно мала. Тогда спектр задачи (2) состоит из действительных положительных собственных значений, единственная точка сгущения которых $+\infty$, (геометрическая) кратность каждого из них равна 1. Если собственные значения занумеровать в порядке возрастания $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, и через $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ обозначить соответствующие им собственные функции, то справедливы следующие утверждения:*

(а) нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются;

(б) нетривиальная комбинация $\sum\limits_{i=k}^{m} \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более m нулей и не менее k перемен знака.

Решение краевой задачи (2) мы ищем в классе непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$; вторая производная $u''_{xx}(x)$ имеет конечное на $[0;\, l]$ изменение; $(pu''_{xx})\,(x)$ - абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$, $(pu''_{xx})'_x\,(x) - \sigma$ — абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$.

В уравнении из (2) все производные до третьего порядка включительно понимаются в обычном смысле, а производная четвертого порядка — по Радону – Никодиму [1].

На коэффициенты $p(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ мы накладываем вполне физичные условия:

1. $p(x)$ имеет конечные на $[0;\, l]$ изменения;
2. $\inf\limits_{x \in [0;\, l]} p(x) > 0$;
3. $Q(x)$ - не убывает на $[0;\, l]$;
4. $M(x)$ - возрастает на $[0;\, l]$;
5. $Q(x)$ и $M(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0;\, l]$.

Переменная x в уравнении принадлежит специальному множеству $\overline{[0;\, l]}_\sigma$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S\,(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma\,(x)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$. В таких точках ξ уравнение понимается как равенство

$$\Delta\,(pu''_{xx})'_x\,(\xi) + u\,(\xi)\,\Delta Q\,(\xi) = \lambda u\,(\xi)\,\Delta M\,(\xi)\,,$$

где $\Delta\psi(\xi)$ — скачок функции $\psi(\xi)$ в точке ξ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производная по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.

2. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 1 (379). С. 111–154.

3. *Покорный Ю. В. и др.* Осцилляционный метод в спектральных задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 192 с.

А. В. Головцов, В. С. Мокейчев (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ВОЛНЫ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ЕЁ АМПЛИТУД

Если в волновом уравнении переменные t, (x, y, z) разделяются, то собственная волна $\phi(t)\psi(x, y, z)$ определяется равенствами $\phi^{(2)}(t) + a_1\phi^{(1)}(t) + (a_2 - \lambda)\phi(t) = 0$. $W\psi(x, y, z) = \lambda\psi(x, y, z)$, где W — волновой оператор, порождённый линейным, дифференциальным оператором в частных производных и не известными, дополнительными условиями на $\psi(x, y, z)$, определяемыми условиями среды, где движется волна. Коэффициенты в волновом уравнении, как правило, не известны. При этом λ — собственное значение оператора W всегда не известно.

Требуется определить $U = \phi(t)\psi(x_0, y_0, z_0)$, если известны её амплитуды A_0, A_1, A_2, A_3 в моменты 0, T, $2T$, $3T$. В случае не зависимости a_1, a_2 от t доказаны

Теорема 1. *Пусть $\tau_1 \neq \tau_2$ — положительные корни уравнения $(A_1^2 - A_0A_2)\tau^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)\tau + (A_2^2 - A_1A_3) = 0$. Тогда $U = \tau_1^{t/T}(A_1 - A_0\tau_2)/(\tau_1 - \tau_2) + \tau_2^{t/T}(A_1 - A_0\tau_1)/(\tau_2 - \tau_1)$, причём $a_1 = -T^{-1}\ln(\tau_1\tau_2)$, $a_2 - \lambda = T^{-2}\ln(\tau_1)\ln(\tau_2)$.*

Теорема 2. *При не выполнении предположений теоремы 1, но существовании $\tau > 0$, для которого $A_0\tau^2 - 2A_1\tau + A_2 = 0$, $2A_0T\tau^3 + A_1\tau^2 = A_3$ выполняются равенства $U = \tau^{t/T}(A_0t - A_0T + A_1/\tau)$, $a_1 = -2T^{-1}\ln(\tau)$, $a_2 - \lambda = (T^{-1}\ln(\tau))^2$.*

Теорема 3. *При не выполнении предположений теорем 1, 2, но существовании $\tau > 0$, для которого $\tau^2(A_1^2 - A_2A_0) = A_2^2 - A_1A_3$, $|A_3 + A_1\tau^2| \leq |2A_2\tau|$, в случае $A_2 \neq 0$ выполняются равенства $U = \tau^{t/T}(A_0\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$, где $\beta = 2\pi m/T + \varepsilon\arccos((A_3 + A_1\tau^2)/(2A_2\tau T))$, ε — число 1 либо -1, m — целое число, причём $B = \big(A_1/\tau - A_0(A_3 + A_1\tau^2)/(2A_2\tau)\big)/\sin(\beta T)$, если $\sin(\beta T) \neq 0$, $\tau = 1$, $B = (A_4 - A_0\cos(\pi k t_4/T))/\sin(\pi k t_4/T)$, если k — целое и $\beta = \pi k/T \neq 0$; при этом $a_1 = -2T^{-1}\ln(\tau)$, $a_2 - \lambda = (\beta^2 + a^2)$.*

Полностью изучен случай $A_2 = 0$.

М. О. Голубев (Москва)
maksimkane@mail.ru

МЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СИЛЬНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ[1]

Пусть H — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, $B_R(x) = \{y \in H : \|y - x\| \le R\}$ — замкнутый шар радиуса $R \ge 0$ с центром в точке $x \in H$. Метрической проекцией точки $x \in H$ на множество $A \subset H$ называется множество $P_A(x) = \{a \in \in A : \|x - a\| = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|\}$. Нормальным конусом к замкнутому множеству A в точке $a \in A$ называется множество $N(A; a) = \{p \in \in H : (p, a) \ge \sup\limits_{x \in A}(p, x)\}$. Пусть $U_\varrho(A) = \{x \in H : \inf\limits_{y \in A} \|x - y\| < \varrho\}$.

Хорошо известно, что для выпуклого и замкнутого множества $A \subset H$ множество $P_A(x)$ одноточечно, т. е. $P_A(x) = \{a(x)\}$, и для любых точек $x_0, x_1 \in H$ выполняется $\|a(x_0) - a(x_1)\| \le 1 \cdot \|x_0 - x_1\|$.

С помощью результатов [1, гл. 4] М. В. Балашовым было показано, что выполнено

Предложение 1. [2] *Пусть подмножество $A \subset H$ выпукло и замкнуто. Пусть число $C \in [0; 1)$ таково, что для всех точек $x_0, x_1 \in \in H \backslash U_\varrho(A)$ выполняется неравенство $\|a_0 - a_1\| \le C\|x_0 - x_1\|$. Тогда множество A есть пересечение шаров радиуса $R = \dfrac{C\varrho}{1 - C}$.*

Теорема 1. [2] *Пусть непустое множество $A \subset H$ имеет вид $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in H \backslash A$ выполнена оценка*

$$\|a_0 - a_1\| \le \frac{R}{\sqrt{(R + \varrho_0)(R + \varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0 - x_1\|^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}, \qquad (1)$$

где $\{a_i\} = P_A(x_i)$, $\varrho_i = \|x_i - a_i\|$, $i \in \{0, 1\}$.

В работах [3, 4] было введено новое понятие радиуса кривизны по направлению. С помощью радиуса кривизны по направлению был получен результат, аналогичный формуле (1), для C^2-гладких выпуклых аппроксимативно компактных многообразий.

Однако, как показано в [4, теорема 4.2], для негладких выпуклых множеств оценка получается хуже, чем оценка (1).

Следствие 1. [2] *Пусть непустое подмножество $A \subset H$ выпукло и замкнуто. Тогда условия*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00139а) и ФЦП «Кадры» программа 1.2.1.

1) $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$,

2) $\forall\ \varrho > 0$, $\forall\ x_0,\ x_1 \in H \backslash U_\varrho(A)$, $\{a_i\} = P_A(x_i)$, $i \in \{0, 1\}$,

$$\|a_0 - a_1\| \leq \frac{R}{(R + \varrho)} \cdot \|x_0 - x_1\|,$$

эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть* $A \subset H$, $S \subset \partial A$. *Определим множество* $\Phi \doteq \left(\bigcup\limits_{x \in S} N(A; x)\right) \bigcap (H \backslash U_\varrho(A))$. *Пусть функция*

$$\delta_S(\varepsilon) \doteq \inf\left\{\delta > 0 : B_\delta\left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right) \subset A,\ \forall\ a_0, a_1 \in S :\ \|a_0 - a_1\| = \varepsilon\right\}$$

удовлетворяет условию $\delta_S(\varepsilon) \geq C\varepsilon^p$, *где* $C > 0$, $p \geq 2$.

Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x_0, x_1 \in \Phi : \|x_0 - x_1\| < \delta$, $[x_0, x_1] \subset \Phi$, $\{a_i\} = P_A(x_i)$, $i \in \{0, 1\}$, $\|x_0 - a_0\| = \|x_1 - a_1\| \geq \varrho$, *выполнена оценка*

$$\|x_0 - x_1\|^2 \geq \|a_0 - a_1\|^2 + \left(\frac{8C\varrho}{1 - 2^{1-p}} - \varepsilon\right)\|a_0 - a_1\|^p +$$

$$+ \left(\frac{16C^2\varrho^2}{(1 - 2^{1-p})^2} - \varepsilon\right)\|a_0 - a_1\|^{2p-2}.$$

Полученные результаты применены для оценок скорости сходимости метода проекции градиента с сильно выпуклым множеством и выпуклой дифференцируемой функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 440 с.

2. *Балашов М. В., Голубев М. О.* Об условии Липшица для метрической проекции в гильбертовом пространстве // Тр. 54-ой научн. конф. МФТИ. М.: МФТИ, 2011. Т. 1. С. 34.

3. *Abatzoglou T. J.* The minimum norm projection on C^2-manifolds in $\mathbb{R}^n$ // Trans. of AMS. 1978. Vol. 243. P. 115–122.

4. *Abatzoglou T. J.* The Lipschitz continuity of the metric projection // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 26. P. 212–218.

Н. Д. Голубева (Самара)
depcy@yandex.ru

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,y)u = f(x,t)(1)$$

в области

$$D = ((x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T), \quad T < l$$

и поставим для него задачу с условиями

$$u(x,0) = \phi(x), \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^l K(x)u(x,t)\,dx = 0, \tag{5}$$

Функции $\phi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$, $K(x)$ заданы и выполнены условия согласования:

$$\int_0^l K(x)\phi(x)\,dx = \int_0^l K(x)\psi(x)\,dx = 0, \quad \phi'(0) = 0.$$

Решением задачи (1)–(5) будем называть функцию $u(x,t) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющую в классическом смысле условиям (2)–(5) и для п. в. $(x,t) \in D$ уравнению (1).

Теорема. *Если* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\phi(x) \in W_2^2(0,l)$, $\psi(x) \in W_2^1(0,l)$, $K(x) \in C^2[0,l]$, $c(x,t) \in C(\bar{D})$, $c_t(x,t) \in C(\bar{D})$, $K'(0) = 0$, *то существует единственное решение задачи* (1)–(5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.

2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

3. *Пулькина Л. С.* Нелокальные задачи с интегральными условиями для одномерного волнового уравнения // Докл. Адыгейской Международной академии наук. 2010. Т. 12, № 2. С. 52–58.

А. В. Голубь (Саратов)

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА – ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВ

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt,$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т. е. $\theta(\theta(x)) \equiv 1$, и имеет разрыв первого рода.

Через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ обозначим резольвенту Фредгольма.

Справедлив следующий результат.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap V\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *при* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \in$ $\in C\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap V\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *при* $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(0) = f(1)$, $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda \right| = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубь А. В. Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интеоператора специального вида // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 15–17.

П. В. Григорьев, Т. Н. Сабурова (Москва)
taniasab37@gmail.com

О НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ В КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Один из первых базисов, построенных в пространстве $C[0,1]$, был базис Фабера – Шаудера (БФШ) – $\{\varphi\}$ (см., например, [1]). Ранее мы ввли в рассмотрение базисы типа Фабера – Шаудера (БТФШ) – $\{g\}$, которые строятся по тому же принципу, что и БФШ, посредством одной порождающей функции $g(x)$ (см. [2]).

Для удобства дальнейшего изложения обозначим $A\alpha(M)$ класс функций $f(x) \in C[0,1]$, у которых коэффициенты Фурье по БФШ удовлетворяют неравенству $|a_m(f,\varphi)| < M2^k$, где $m = 2k + l$ ($k \ge l$, $1 \le l \le 2^k$); G – множество функций $g(x)$, порождающих БТФШ; пусть далее $F_k(g) = \sum\limits_{n=2^k+1}^{n=2^{k+1}} g_n(x)$; $R_n(f,g) = f(x) - \sum\limits_{m=0}^{n} a_m(f,g)g_m(x)$ – остаток разложения $f(x)$ по БТФШ $\{g\}$.

В предыдущих работах были получены следующие результаты (см. [2]).

Теорема 1. *Для вложения $A\alpha(M) \subset G$ необходимо и достаточно, чтобы $M < 2^\alpha - 1$.*

Теорема 2. *Если $g(x) \in A\alpha(M)$ и $M < 2^\alpha - 1$, то $|R_n(f,g)| \leq$ $\leq B_1\omega_2(1/\sqrt{n}, f) + B_2/n^\varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(a, M)$.*

Напомним, что для самой системы ФШ справедлива оценка: $|R_n(f,\varphi)| \leq \omega_2(1/n, f)$ (см.[3]). Таким образом, оценка в теореме 2, заведомо хуже оценки для БФШ. Однако для конкретных случаев эта общая оценка может быть улучшена. Получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть дан БТФШ $\{g\}$, тогда любая функция $u(x) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{sk}F_{sk}(g)$, $|q| < 1$ порождает БТФШ $\{u\}$ и $|R_n(f,u)| = O(|R_n(f,g)|$.*

Эта теорема показывает, что преход к БТФШ, указанного вида, сохраняет порядок приближения функций.

Например, рассмотрим классическую функцию, построенную ван-дер-Варденом как пример нигде не дифференцируемой функции $v(x) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} F_{2n}(\varphi)$. Согласно нашей теореме она порождает БТФШ и $|R_n(f,v)| = O(\omega_2(f, 1/n)$. То есть «плохая» функция может хорошо приближать «хорошие» функции. В некоторых случаях переход к построенным выше базисам может даже улучшить скорость приближения. Так, например, функция $t(x) = 4x(1-x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} F_k(\varphi)$ порождает БТФШ (впервые рассмотренный Шайдуковым К.М. в [4]), для которого справедлива оценка $|R_n(f,t)| \leq 4\omega_3(f, 1/n)$.

Сходство данного БТФШ $\{g\}$ и базисов, порожденных функциями, рассматриваемыми в теореме 3 состоит еще и в том, что их можно «тасовать». А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если подпоследовательность $\{g_{m_k}(x)\}$ базиса $\{g\}$ заменить соответствующей подпоследовательностью $\{u_{m_k}(x)\}$ базиса $\{u\}$, то полученная система функций $\{s\} = \{s_m(x)\}$ будет базисом в $C[0,1]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С.,Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

2. *Сабурова Т. Н.* О базисах в $C[0,1]$ типа Фабера – Шаудера // Теория

функций и приближений : Тр. 3-й Сарат. зимней школы, 1986. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 3. С. 44–46.

3. *Матвеев В. А.* О рядах по системе Шаудера // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 267–278.

4. *Шайдуков К. М.* О базисах в пространстве непрерывных функций, построенных из дуг парабол // Учен. записки Казанск. ун-та. 1965–1966. Т. 125, кн. 2. С. 133–142.

Е. В. Губкина (Горно-Алтайск)
HelenVl@bk.ru

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАЗРУШЕНИИ ПЛОТИНЫ НА СКАЧКЕ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА[1]

При моделировании течения воды в каналах прямоугольного сечения применяются уравнения мелкой воды [1], которые в случае горизонтального дна, без учета влияния трения имеют вид

$$w_t + q_x = 0, \tag{1}$$

$$q_t + (qu + ghv/2)_x = gh^2 b_x/2, \tag{2}$$

где $h = h(t, x)$ — глубина воды, $q = q(t, x)$ — расход воды в поперечном сечении канала, $w = w(t, x) = bh$ — площадь поперечного сечения потока, $b = b(x)$ — ширина канала, $u = u(t, x) = q/w$ — средняя по сечению скорость потока.

Рассматривается задача (1), (2) о разрушении плотины, на скачке площади сечения

$$b(0, x) = \begin{cases} b_l, & x < 0 \\ b_r, & x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad w(0, x) = \begin{cases} w_l, & x < 0 \\ w_r, & x > 0 \end{cases}$$

где $w_l = b_l h_l$, $w_r = b_r h_r$, $b_l > b_r$. Решение этой задачи, найдено в виде комбинации простых волн: центрированной r-волны понижения R, прерывной волны S, распространяющейся с постоянной скоростью по фону h_r, и неподвижного гидравлического прыжка L.

В лабораторных экспериментах такая задача моделируется путем резкого удаления плоского щита, разделяющего покоящиеся жидкости различных уровней.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-98001-р-сибирь-а).

Разработаны алгоритмы построения точных решений задачи распада разрыва с прерывными волнами. Выполнена их численная реализация и проведено сравнение с лабораторным экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

2. *Остапенко В. В.* Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004.

В. И. Данченко, Е. Н. Кондакова (Владимир)
danch@vpti.vladimir.ru, kebox@mail.ru

ОБ ОСОБЫХ УЗЛАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ[1]

Наипростейшей дробью (н.д.) порядка n называется рациональная функция вида $R_n(x) = Q'_n(x)/Q_n(x)$ с унитарным многочленом $Q_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k$. Задача интерполяции $R(x_k) = y_k$ посредством н.д. R_n по вещественной таблице $T_n := \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ с простыми узлами x_k сводится к отысканию вещественного многочлена Q_n, удовлетворяющего системе уравнений

$$Q'_n(x_k) = y_k\, Q_n(x_k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

В [1] отмечен особый случай неразрешимости задачи интерполяции, когда система (1) совместна, но для одного из ее решений Q_n в некоторых узлах x_k выполняются равенства $Q_n(x_k) = Q'_n(x_k) = 0$ и, следовательно, $R_n(x_k) = \infty$. Такие узлы x_k назовем *особыми узлами* (относительно Q_n). Систему (1) назовем задачей обобщенной интерполяции [1].

Нами исследуется вопрос о возникновении особого узла x_{n+1} при расширении таблицы интерполяции T_n до новой таблицы T_{n+1} (с сохранением первых n элементов (x_k, y_k)). Пусть T_n – таблица, которой соответствует единственная н.д. R_n обобщенной интерполяции (1). Через $R^*_{n+1} = V'/V$ обозначим н.д. порядка $n+1$, которая однозначно определяется тем, что она также интерполирует (в обобщенном смысле) таблицу T_n, а порождающий ее многочлен имеет вид $V(x) = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} v_k x^k$ [2]. Дополненным графиком gR_n вещественной н.д. $R_n = Q'_n/Q_n$ назовем объединение ее обычного графика с вертикальными асимптотами в полюсах R_n, в которых многочлен Q_n имеет нуль не ниже второго порядка. Показано, что отличные от $x_1, \ldots, x_n$ особые узлы x_{n+1} могут возникать

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП РНПВШ (рег. номер 2.1.1/12115) и РФФИ (проекты 11-01-00952-а, 11 – 01 – 97517-р_центр_а).

лишь на множестве абсцисс точек пересечения графиков $gR_n \cap gR^*_{n+1}$. Получен также алгоритм для вычисления особых узлов как решения определенных алгебраических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондакова Е. Н.* Особые случаи интерполяции посредством наипростейших дробей // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2010. С. 105–106.

2. *Кондакова Е. Н.* Об интерполяции наипростейшими дробями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 2. С. 30–37.

В. И. Данченко, Е. Н. Кондакова (Владимир)
danch@vpti.vladimir.ru, kebox@mail.ru

КРИТЕРИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОСОБЫХ УЗЛОВ В ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ[1]

Мы используем определения и обозначения из нашей заметки «Об особых узлах интерполяции наипростейшими дробями», представленной в этом же сборнике тезисов. Пусть $T_n = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ — таблица интерполяции, для которой существует и единственна н.д. $R_n(x) = Q_n'(x)/Q_n(x)$ обобщенной интерполяции.

Теорема 1. *В дополненной таблице $T_{n+1} = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{n+1}$ узел x_{n+1} является особым для одного из решений R_{n+1} обобщенной задачи интерполяции, если и только если совместна система из $n+2$ линейных уравнений* (*относительно $q_0, \dots, q_n$*)

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1x_1 - 1 & \dots & y_1x_1^n - nx_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_n & y_nx_n - 1 & \dots & y_nx_n^n - nx_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \\ & 1 & \dots & nx_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)x_1^n - y_1x_1^{n+1} \\ \vdots \\ (n+1)x_n^n - y_nx_n^{n+1} \\ -x_{n+1}^{n+1} \\ -(n+1)x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

В терминах введенной в другой нашей заметке функции $R^*_{n+1} = V'/V$ этот критерий можно записать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Все особые узлы x_{n+1} являются корнями алгебраического уравнения*

$$Q_n'(x_{n+1})V(x_{n+1}) - V'(x_{n+1})Q_n(x_{n+1}) = 0. \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП РНПВШ (рег. номер 2.1.1/12115) и РФФИ (проекты 11-01-00952-а, 11-01-97517-р_центр_а).

Обратно, если x_{n+1} является корнем уравнения (1), то он является особым узлом в следующих случаях:

1. $Q_n(x_{n+1})Q'_n(x_{n+1}) \neq 0$*;*

2. $Q_n(x_{n+1}) \neq 0,\ V'(x_{n+1}) = Q'_n(x_{n+1}) = 0$*;*

3. $Q'_n(x_{n+1}) \neq 0,\ V(x_{n+1}) = Q_n(x_{n+1}) = 0$*;*

4. $V(x_{n+1}) = 0, \quad Q_n(x_{n+1}) = 0, \quad V'(x_{n+1}) = 0, \quad Q'_n(x_{n+1}) = 0.$

В случаях, не указанных в 1–4, корень x_{n+1}, вообще говоря, не является особым узлом.

М. В. Дейкалова (Екатеринбург)
Marina.Deikalova@usu.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ[1]

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических многочленов степени не выше n одного вещественного переменного с вещественными коэффициентами. С помощью пары чисел $\eta = (h', h'')$, $-1 \leq h' < h'' \leq 1$, определим интервал $\mathbb{I}(\eta) = \{t \in (-1,1) \colon h' < t < h''\}$.

Пусть v — функция, суммируемая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля на $(-1,1)$, которую будем называть весом. Обозначим через $L_1^v(-1,1)$ пространство измеримых на $(-1,1)$ функций f, для которых произведение fv суммируемо на $(-1,1)$. Пусть ρ_{n+1} — алгебраический многочлен порядка $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_1^\phi(-1,1)$ функций, суммируемых на интервале $(-1,1)$ с весом v. Все $n+1$ нулей τ_k, $1 \leq k \leq n+1$, многочлена ρ_{n+1} простые и лежат на $(-1,1)$; занумеруем их в порядке убывания; положим $\tau_0 = 1$, $\tau_{n+2} = -1$. Введем обозначение пар $\eta_k = (\tau_{k+1}, \tau_k)$, $0 \leq k \leq n+1$.

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении

$$E_n^v(\zeta_\eta) = \inf\{\|\zeta_\eta - g_n\|_{L_1^v(-1,1)} \colon g_n \in \mathcal{P}_n\} \qquad (1)$$

характеристической функции ζ_η интервала $\mathbb{I}(\eta)$ множеством $\mathcal{P}_n$ в пространстве $L_1^v(-1,1)$.

В докладе будет приведено решение задачи (1), т. е. выписано значение $E_n^v(\zeta_\eta)$ и указаны экстремальные многочлены в следующих случаях: $\tau_{k+1} \leq h' < h'' \leq \tau_k$ $(0 \leq k \leq n+1)$; $h' = -1$, $h'' = \tau_k$ или $h' = \tau_k$, $h'' = 1$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

$(1 \leq k \leq n+1)$ в случае произвольного веса [1]; а также при $h' = -1$, $h'' \in (-1,1)$ или $h'' = 1,\ h' \in (-1,1)$ в случае единичного веса $\upsilon(t) \equiv 1$ [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дейкалова М. В.* Несколько экстремальных аппроксимационных задач для характеристической функции сферического слоя // Тр. Ин-та Мат. Мех. УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 122–135.

2. *Дейкалова М.В.* Интегральное приближение характеристической функции сферической шапочки // Тр. Ин-та Мат. Мех. 2010. Т. 16, № 4. С. 144–155.

А. В. Дергачев (Москва)
artem@dxdy.ru

ЧЕЗАРОВСКИЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕЗАРОВСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ[1]

Свойства чезаровских C_k-производных

$$C_k DF(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{k}{h^k}\int\limits_0^h (x+h-t)^{k-1}F(x+t)\,dt - F(x)}{h/(k+1)}$$

(где $k \in \mathbb{N}$), введенных в [1] и позволяющих дифференцировать более широкий класс функций, включающий в том числе почленно проинтегрированные суммы тригонометрических рядов, всюду суммируемых по Чезаро вместе с сопряженными [2], оказываются существенно различными при $k = 1$ и $k > 1$.

Так, C_2-производная (и, следовательно, все последующие) может вступать в противоречие с аппроксимативной производной (см. [3]) почти всюду на отрезке, даже если речь идет о дифференцировании непрерывных функций; в работе [4] показано, что такого не может быть для C_1-производной. Любопытно также, что C_2-производная при этом может быть равна $+\infty$ почти всюду.

Также показывается, что функция, нижняя C_2-производная которой больше $-\infty$ всюду на отрезке, не обязана принадлежать классу VBG, хотя это легко доказывается для C_1-производной [5].

В то же время можно модифицировать определение чезаровской производной так, что класс дифференцируемых функций не изменится, но

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321) и программы «Ведущие научные школы» (проект НШ-979.2012.1).

упомянутые выше свойства (и многие другие) будут сохранены при всех $k > 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burkill J. C.* The Cesàro-Perron scale of integration // Proc. London Math. Soc. 1935. Vol. 39, № 2. P. 541–552.

2. *Cross G.* The Expression of Trigonometrical Series in Fourier Form // Can. J. Math. 1960. Vol. 12. P. 694–698.

3. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.

4. *Sargent W. L. C.* On the Cesàro derivates of a function // Proc. London Math. Soc. 1935. Vol. 40, № 3,4. P. 235–254.

5. *Скворцов В. А.* Некоторые свойства CP-интеграла // Мат. сб. 1963. Т. 47, № 5. С. 304–324.

А. В. Деревенцов (Москва)
dereventsov@gmail.com

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЖАДНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Рассмотрим действительное гильбертово пространство H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Множество $\mathcal{D} \subset H$, будем называть словарем, если норма всех элементов $\mathcal{D}$ равна 1 и $\overline{\operatorname{span}\mathcal{D}} = H$.

Для заданного словаря $\mathcal{D}$ и элемента $f \in H$ ортогональный жадный алгоритм определяется следующим образом (см., например, [1]).

$$f_0^{OGA,\mathcal{D}} = f \in H, \quad G_0^{OGA}(f,\mathcal{D}) = 0,$$
$$g_{m+1} = \arg\max_{g\in\mathcal{D}} |\langle f_m^{OGA,\mathcal{D}}, g\rangle|,$$
$$G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D}) = \mathrm{Proj}_{g_1,\ldots,g_{m+1}} f_0^{OGA,\mathcal{D}},$$
$$f_{m+1}^{OGA,\mathcal{D}} = f_0^{OGA,\mathcal{D}} - G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D}).$$

Известно, что ортогональный жадный алгоритм сходится для всех словарей $\mathcal{D}$ и элементов $f \in H$ (см., например, [2]). Также известна оценка на скорость сходимости ортогонального жадного алгоритма на классе $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ (см., например, [1]). Однако общие результаты о скорости сходимости ортогонального жадного алгоритма для множества всех элементов пространства H отсутствуют, известно лишь, что в случае ортогональных словарей квадраты норм остатков выпуклы вниз. Оказывается, что в случае произвольных словарей это не так. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой убывающей положительной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существуют гильбертово пространство H, словарь $\mathcal{D}$ и элемент $f \in H$ такие, что $\|f_k^{OGA,\mathcal{D}}\| = a_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.*

В доказательстве этой теоремы по заданной положительной убывающей последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ конструктивно строятся словарь $\mathcal{D}$ и элемент f такие, что норма $f_n^{OGA,\mathcal{D}}$ равна a_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on Greedy Algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5. P. 173–187.

2. *Dubinin V. V.* Greedy Algorithms and Applications. // Ph. D. Thesis Univ. South Carolina. 1997.

А. Б. Дикмен (Стамбул),
А. Л. Лукашов (Стамбул, Саратов)
LukashovAL@info.sgu.ru

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ВИДЕНСКОГО С ВЕСОМ

Пусть x_{ni} - фиксированные полюса, $x_{ni} = 1 + \rho_{ni}$, $\rho_{ni} > 0$,

$$h_{ni}(x) = \frac{\rho_{ni} x}{(1 + \rho_{ni} - x)}, \quad \phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} h_{ni}(x),$$

$$g_n(x, y) = \prod_{i=1}^{n} \left(h_{ni}(x)\, y + (1 - h_{ni}(x)) \right) = \sum_{k=0}^{n} u_{nk}(x)\, y^k.$$

В. С. Виденским в ряде работ (см., например, [1]) рассматривались операторы

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tau_{nk})\, u_{nk}(x),$$

где τ_{nk} определяются из соотношения $\phi_n(\tau_{nk}) = \frac{k}{n}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Эти операторы не являются ограниченными в весовых пространствах

$$C_w = \left\{ f \in C((0,1)) : \lim_{x \to 1} (wf)(x) = \lim_{x \to 0} (wf)(x) = 0 \right\},$$

$w(x) = x^{\alpha}(1 - x)^{\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Для аппроксимации в таких пространствах вводятся, по аналогии с [2], операторы $V_n^*(f, x)$

$$V_n^*(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\tau_{nk})\, u_{nk}(x) + u_{no}(x) \left[2f(\tau_{n1}) - f(\tau_{n2}) \right] +$$

$$+ u_{nn}(x) \left[2f(\tau_{n\,n-1}) - f(\tau_{n\,n-2}) \right].$$

Показано, что при выполнении ряда условий на фиксированные полюса эти операторы ограничены в весовых пространствах C_w, т.е. $\|wV_n^*(f)\| \le c\|wf\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виденский В. С.* Замечание о рассмотренных А. Лупасом рациональных линейных операторах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования ("Герценовские чтения – 2008"). СПб.: РГПУ имени А.И. Герцена, 2008. С. 134–146.

2. *Della Vecchia B., Mastroianni G., Szabados J.* Weighted approximation of functions with endpoint or inner singularities by Bernstein operators // Acta Math. Hugar. 2004. Vol. 103. P. 19–41.

Е. П. Долженко (Москва)
eugen@ngcom.ru

ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЕЙ[1]

Модулем колебания жордановой кривой L — замкнутой, либо разомкнутой (то есть дуги — с концами, или без них) — назовем функцию $d(L;\delta) := \sup\{d(L;z,t) :\ z,t \in L,\ |z-t| \le \delta\}$ $(\delta \ge 0)$, где $d(L;z,t)$ обозначает либо диаметр дуги $L(z,t) \subset L$ с концами z, t — это в случае разомкнутой кривой L, либо меньший из диаметров двух дуг $L(z,t) \subset L$ с концами z, t — в случае замкнутой кривой L. Определение *модуля спрямляемости* $m(L;\delta)$ кривой L мы получим, заменив здесь диаметр $d(L;z,t)$ дуги $L(z,t)$ её длиной $|L(z,t)|$. Спрямляемую жорданову кривую L называют *лаврентьевской* (в память акад. М.А.Лаврентьева), если $m(L;\delta) \le c\delta\ \forall\,\delta \ge 0$ при некотором $c = \mathrm{const} \ge 1$. Очевидно, что выпуклые кривые являются лаврентьевскими.

Пусть функция $g(x)$ задана и не убывает при $x \ge 0$ (она может иметь разрывы–скачки), $g(x) \ge x$, $g(0) = g(0+) = 0$.

Определим 4 класса жордановых кривых L (ниже $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$). Скажем, что $L \in J(g)$ (или что $L \in J(g,\varepsilon)$), если $d(L;\delta) \le g(\delta)\ \forall\,\delta \ge 0$ (соответственно, $\forall\,\delta \in [0,\varepsilon]$), и что $L \in J_0(g)$ (или что $L \in J_0(g,\varepsilon)$), если $m(L;\delta) \le g(\delta)\ \forall\,\delta \ge 0$ (соответственно, $\forall\,\delta \in [0,\varepsilon]$). Соотношения между этими классами очевидны, отметим лишь следующие: $J(g) \subset J(g,\varepsilon)\ \forall\,\varepsilon > 0$, $J(g) = \cap_{\varepsilon>0} J(g,\varepsilon)$ и аналогичные соотношения для J_0. Отметим ещё, что *каждая* жорданова кривая принадлежит некоторому классу $J(g)$, а в случае её спрямляемости — также и некоторому классу $J_0(g)$ (обычно с иным g).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952а).

Ниже $w = \varphi(z)$ — однолистное конформное отображение некоторой односвязной области $G \subset \mathbf{C}$ на круг $D:\ |z| < 1$, ψ — обратное отображение, $\omega(f, E, \delta)$ — обычный модуль непрерывности функции f на множестве E. Пусть $d_g(x) := (\pi^2/4)g^2(\sqrt{x}) + x/2$ и $m_g(x) := (g(\sqrt{x}) + \sqrt{x})^2/4$, а $d_g^{-1}(y)$ и $m_g^{-1}(y)$ — обратные к ним функции; $D_g(x) := \int_1^x dy/d_g^{-1}(y)$ и $M_g(x) := \int_1^x dy/m_g^{-1}(y)$, а $D_g^{-1}(y)$ и $M_g^{-1}(y)$ — обртные к ним функции.

Утверждения приводимых ниже теорем 1–3 доказаны в работе [1].

Теорема 1. $\partial G \in J(g, \varepsilon) \Rightarrow \omega(\varphi, \overline{G}, \delta) \le A\sqrt{g(\delta)}$.

Теорема 2. $\partial G \in J(g, \varepsilon) \Rightarrow \omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B\, g(\sqrt{D_g^{-1}(\log\delta)}\,)$.

$$\partial G \in J_0(g, \varepsilon) \Rightarrow \omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_0\, g(\sqrt{M_g^{-1}(\log\delta)}\,).$$

Теорема 3. $\partial G \in J_0(g, \varepsilon)\ \&\ g(x) \le cx\ \forall\, x \ge 0 \quad \Rightarrow$

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_1\, \delta^{\alpha(c)}, \quad \alpha(c) = (2/\pi)\operatorname{arcctg}(4B(c)),$$

$B(c) = c^2(\beta(c) - \sin\beta(c))/(2\beta^2(c))$ $\quad (B(1) = 0)$, $\beta(c)$ — корень уравнения $(\beta/2)/\sin(\beta/2) = c\ (c > 1)$, $\beta(c) \in [0,\, 2\pi]$. Положительные A, B, B_0 и B_1 не зависят от $\delta \ge 0$.

При указанных условиях все неравенства содержательны.

Следствие 1. Пусть $k = \mathrm{const} \in (0,\, 1]$, $K = \mathrm{const} > 0$, $g(x) \le$ $\le K\,x^k\ \forall\, x \in [0,\, \varepsilon]$, $\partial G \in J(g, \varepsilon)$. Тогда $\omega(\varphi, \overline{G}, \delta) \le A_1\, \delta^{k/2}\ \forall\, \delta \ge 0$.

Следствие 2. Пусть $c = \mathrm{const} > 1$, $k = \mathrm{const} \in (0,\, 1]$, $g(x) \le$ $\le cx^k\ \forall\, x \in [0,\, \varepsilon]$, $\partial G \in J_0(g, \varepsilon)$. Тогда

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le B_2\, \delta^{\alpha(c)} \quad \forall\, \delta \ge 0 \qquad \text{— } \textit{при}\ \ k = 1,$$

$$\omega(\psi, \overline{D}, \delta) \le \frac{B_4}{(1 + |\log\delta|)^{\nu(k)}}, \quad \nu(k) = \frac{k^2}{2 - 2k} \quad \forall\, \delta \in [0,\, 2]$$

— *при* $0 < k < 1$, (A_1, B_2, B_4 положительны и не зависят от δ).

См. также статью Е. П. Долженко в ДАН. 2007. 415 (2). С. 155–159.

В работе [2] доказано в частности, что каждое конформное отображение $w = \varphi(z)$ ограниченной выпуклой области G на круг D имеет на $\overline{G}$ ограниченную производную $\varphi'(z)$ (так что $\varphi \in \mathbf{Lip}\,1$ на $\overline{G}$).Там же построена такая ограниченная выпуклая область G с гладкой границей $\Gamma = \partial G$, что в некоторой точке $z_0 \in \partial G$ функция $\varphi'(z)$ разрывна (относительно $\overline{G}$). Найден критерий непрерывности $\varphi'(z)$ $(z \in \overline{G})$ относительно $\overline{G}$ в какой-либо заданной точке $z_0 \in \partial G$, состоящий в следующем: $\varphi'(z)$

непрерывна в точке $z_0 \in \partial G$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывен логарифмический потенциал $u_\Gamma(z) := \int_\Gamma \log(1/|\zeta - z|)\, d\vartheta(\zeta)$ по мере, естественно порождаемой на Γ неубывающей функцией $\vartheta(\zeta)$ — углом наклона правой полукасательной выпуклой кривой Γ в точке $\zeta \in \Gamma$ к положительному направлению действительной оси (при $z \notin \Gamma$ интеграл $u_\Gamma(z)$ можно понимать как интеграл Стилтьеса вдоль кривой Γ в её положительном направлении).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долженко Е. П.* Оценки модулей непрерывности конформных отображений областей вблизи их достижимых граничных дуг // Мат. сб. 2011. № 12. С. 57–106.

2. *Долженко Е. П., Колесников С. В.* О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг // Мат. заметки. 2011. Т. 90, вып. 4. С. 501–516.

С. И. Дудов (Саратов)

dudovsi@info.sgu.ru

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА: МЕТОД ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная на открытом выпуклом множестве S из $\mathbb{R}^p$ и множество $D \subset S$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) \longrightarrow \max_{x \in D}. \tag{1}$$

Очевидно, факт достижения в точке $x_0 \in D$ функцией $\varphi(x)$ своего максимального значения на D эквивалентен выполнению включения

$$D \subset G(x_0) = \{x \in S : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}. \tag{2}$$

Определение. Говорят, что отображение $L : \mathbb{R}^p \times 2^{\mathbb{R}^p} \to 2^{\mathbb{R}^q}$, сопоставляющее каждой точке $x \in \mathbb{R}^p$ и множеству $A \subset \mathbb{R}^p$ некоторое множество $L(x, A) \subset \mathbb{R}^q$, является *изотонным* (по включению), если

$$A \subset B \Rightarrow L(x, A) \subset L(x, B), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p; \quad A, B \subset \mathbb{R}^p.$$

Как следует из (2), в качестве источника получения необходимых условий решения задачи (1) можно использовать включение

$$L(x, D) \subset L(x, G(x_0)), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Такой подход требует наличия эффективного исчисления отображения $L(x, A)$ для различных форм задания множества A, что предполагает геометрическую или аналитическую простоту его образов.

Примерами изотонных отображений являются:

– конус допустимых направлений множества в точке

$$\gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p / \exists\ \alpha_g > 0 : x + \alpha g \in A,\ \forall\ \alpha \in (0, \alpha_g)\},$$

– коническая оболочка сдвинутого множества

$$K(A - x) = \{g \in \mathbb{R}^p / \exists\ \alpha > 0,\ a \in A:\ a = x + \alpha g\}.$$

Теорема 1 (Н. У.). *Если x_0 — точка максимума функции $\varphi(x)$ на множестве D, то справедливы включения*

$$\gamma(x, D) \subset \gamma(x, G(x_0)), \quad \forall\ x \in D, \tag{3}$$

$$K(D - x) \subset K(G(x_0) - x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^p. \tag{4}$$

Теорема 2 (Д. У.). *Если $\varphi(x)$ непрерывная на S функция и для точки $x_0 \in D$ справедливы включения*

$$K(D - x) \subset \gamma(x, G(x_0)), \quad \forall x \in S:\ \varphi(x) = \varphi(x_0), \tag{5}$$

то x_0 — точка максимума функции $\varphi(x)$ на множестве D.

В процессе доклада будет показано как, выражая правые части в (3)–(5) через используемые дифференциальные характеристики функции $\varphi(x)$ и проводя элементарные преобразования, нетрудно получить результаты [1, 2]. Также будут приведены новые результаты по характеризации глобального максимума, полученные с помощью теорем 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрекаловский А. С.* К проблемам глобального экстремума в невыпуклых экстремальных задачах // Изв. вузов. Математика. 1990. № 8. С. 74–80.

2. *Hiriart-Urruty I.-B. Ledyaev Yu. S.* A note on the characterization of the global maxima of a (tangentially) convex function over a convex set // J. of Convex Analysis. 1996. Vol. 3, № 1. P. 55–61.

Н. В. Егошина (Саратов)
saviour92@mail.ru

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ФУРЬЕ – ВИЛЕНКИНА

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, такая что $2 \le p_j \le N$, $m_n = p_1 \dots p_n$, $n \in \mathbb{N}$. По $\mathbf{P}$ определяется ортонормированная система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и обобщенная разность $\ominus$ на $[0,1)$ (см. [1]). Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p[0,1)$, а $\omega_n(f)_p = \sup\limits_{0<h<1/m_n} \|f(\cdot\ominus h) - f(\cdot)\|_p$ — модуль непрерывности в $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, $\omega_n(f)_\infty = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [k/m_n, (k+1)/m_n), k \in \mathbb{Z} \cap [0, m_n)\}$.

Определим коэффициенты и частичную сумму Фурье $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}dx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1[0,1)$ такова, что 1) $\hat{f}(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$; 2) $\int_0^1 |t^{-1}(f(x\ominus t) - f(x))| \ln 2/t\, dt < \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(S_n(f)(x) - f(x))/n$ сходится абсолютно.*

Теорема 2. *Пусть $f \in B[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma}\omega_n(f)_\infty$ сходится. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$, причем $\limsup\limits_{n\to\infty} p_{n+1}(\omega_{n+1}/\omega_n)^p > 1$, $f \in L^p[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\omega_n(f)_p \le C\omega_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma+1/p}\omega_n$ сходится, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty.$$

Тригонометрические аналоги теорем 1 и 2 см. в [2] и [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Goyal O. P.* On the absolute convergence of a series associated with a Fourier series // Mat. vesnik. 1965. Vol.2(17). P. 85–88.

3. *Goyal O. P.* On the absolute convergence of Fourier series // Mat. vesnik. 1965. Vol.2(17). P. 88–91.

М. П. Ефимова, М. А. Ефимов (Москва)
efimova.margarita@gmail.com, efimov.mikhail@gmail.com

О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННОЙ В ОБОБЩЕННОМ Q-ИНТЕГРАЛЕ[1]

Определение. Измеримая действительнозначная функция f *Q-интегрируема в обобщенном смысле* на отрезке $[a, b]$, если, полагая

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leq n \\ n \operatorname{sgn} f(x), & \text{иначе,} \end{cases}$$

имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b [f(x)]_n \, dx$ существует; этот предел назовем обобщенным Q-интегралом от функции f и обозначим $(Q_{\text{об}}) \int\limits_a^b f(x)dx$.

Следуя работе [1], можно получить следующее необходимое и достаточное условие замены переменной в обобщенном Q-интеграле:

Утверждение. *Пусть $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Тогда для того, чтобы функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ была Q-интегрируема в обобщенном смысле на $[\alpha, \beta]$, и выполнялось равенство*

$$(Q_{об}) \int\limits_a^b f(x)dx = (Q_{об}) \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

для любой Q-интегрируемой в обобщенном смысле на $[a, b]$ функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество полной меры $E \subset [\alpha, \beta]$, представимое в виде $E = E_1 \cup E_2$ таким образом, чтобы $\varphi'(t) = m$ для любого $t \in E_1$, $m \neq 0$, и $\varphi'(t) = 0$ для любого $t \in E_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бонди И. Л.* Замена переменной в A-интеграле // Учен. записки Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. 1962. № 188. С. 3–21.

2. *Ефимова М. П.* О свойствах Q-интеграла // Мат. заметки. 2011. Т. 90(3). С. 340–350.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, А. И. Порабкович (Минск)
ivanishko@bsu.by, krotov@bsu.by, dobrinia@bk.ru

ТЕОРЕМА КАМПАНАТО НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой, причем $\mu(B(x, 2r)) \le c\mu(B(x, r))$.

Обозначим Ω класс функций $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворящих условиям $\omega(+0) = 0$, $\omega(t)t^{-a}$ возрастает и $\omega(t)t^{-b}$ убывает при некоторых $0 < a < < b < +\infty$. Для $\omega \in \Omega$ введем обобщенный класс Гельдера $H^\omega(X)$ как

$$H^\omega(X) = \left\{ f : \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(d(x, y))} < +\infty \right\}.$$

Для шара $B \subset X$ r_B означает его радиус, f_B — среднее значение функции f по шару $B \subset X$.

Теорема. *Пусть $f \in L^p(X)$, $p \ge 1$, $\omega \in \Omega$. Тогда условие*

$$\sup_B \frac{1}{\omega(r_B)} \left(⨍_B |f(x) - f_B|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < +\infty$$

равносильно тому, что функция f эквивалентна некоторой функции из класса $H^\omega(X)$.

В случае, когда $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию $\mu(B(x, r) \cap X) \ge cr^n$ (c не зависит от $x \in X$ и $0 < r < \operatorname{diam}(X)$) это — классическая теорема Кампанато [1], важная при изучении регулярности решений эллиптических уравнений в частных производных.

Доказательство теоремы основано на неравенствах из работы [2] первых двух авторов. При некоторых дополнительных ограничениях на пространство X для $\omega(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ утверждение теоремы было получено другим способом в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Campanato S.* Proprieta di holderianita di alcune classi di funzioni // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1963. Vol. 17, № 1–2. P. 175–188.

2. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Обобщенное неравенство Пуанкаре – Соболева на метрических пространствах // Тр. ИМ НАН Беларуси. 2006. Т. 14, № 1. С. 51–61.

3. *Gorka P.* Campanato theorem on metric measure spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2009. Vol. 34. P. 523–528.

М. Ю. Игнатьев (Саратов)
IgnatievMU@info.sgu.ru

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИЕРАРХИИ КДФ[1]

Пусть $\varphi(\rho)$ — многочлен вида $\varphi(\rho) = 4^s\rho(\rho^2 - c_1)\dots(\rho^2 - c_s)$, $0 > c_1 > \dots > c_s$. Рассмотрим общее уравнение КдФ, соответствующее многочлену $\varphi(\rho)$ [1]:

$$q_t = F_\varphi\left(q, q_x, \dots\right). \tag{1}$$

Далее, определим функции $\beta_n(x; q)$ по рекуррентным формулам:

$$\beta_1 = q, \quad \beta_{n+1} = -\beta'_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu \beta_{n-\nu}.$$

Тогда значения $\beta_n(0; q)$ можно рассматривать как функционалы от q, которые мы обозначим $B_n(q)$. Рассмотрим для уравнения (1) краевую задачу с неоднородными условиями вида

$$B_n(q) = a_n, \quad n = \overline{1, 2s-1}, \tag{2}$$

где a_n — заданные вещественные числа.

В работе предлагается основанная на идеях метода обратной спектральной задачи конструктивная процедура построения широкого класса решений задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984. 160 с.

Т. В. Иофина (Саратов)
iofinat@mail.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРЕОБРАЗОВАННЫМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ ПО НОРМЕ ГЁЛЬДЕРА[2]

Пусть $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ – система Виленкина, построенная по $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ (см. [1, $ 1.5]). Для $f \in L[0,1)$ пусть $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС-а).

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00097-а) и гранта президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

Рассмотрим $\omega \in \Omega$, т.е. $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на [0,1), $\omega(0) = 0$. Тогда $f \in H_p^\omega[0,1)$, если $f \in L_p[0,1)$ при $1 \le p < \infty$ или $f \in C^*[0,1)$ (пространство функций, непрерывных относительно **P**-ичного сдвига) при $p = \infty$ и $\sup_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_{L_p} \le C\omega(\delta)$; $\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_{L_p} + \sup_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_{L_p}/\omega(h)$. Будем писать $\omega \in B$, если $\omega \in \Omega$ и $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$; $\omega \in B_1$, если $\omega \in \Omega$ и $\delta \int_\delta^1 t^{-2}\omega(t)\,dt = = O(\omega(\delta))$.

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^\infty \subset \mathbb{R}$, такая что $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum\limits_{k=0}^\infty |a_{nk}| < \infty$ и $\sum\limits_{k=0}^\infty a_{nk} = = 1$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $T_n(f) = \sum\limits_{k=0}^\infty a_{nk} S_{k+1}(f)$ и существует возрастающая последовательность $\{\mu_n\} \in \mathbb{N}$, для которой

$$\sum_{k=\mu_n}^\infty (k+1)|a_{nk}| = O(\mu_n).$$

Теорема. *Пусть матрица* A *удовлетворяет условиям выше,* $\omega, v \in \in \Omega$. *Если* $\omega \in B \cap B_1$ *и* $\omega^\gamma(t)/v(t) \le C$ *на* $(0,1)$ *при некотором* $\gamma \in (0,1)$, *то для* $f \in H_p^\omega$, $1 \le p \le \infty$ *справедливо соотношение*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,v} = O(\omega^{1-\gamma}(\lambda_n^{-1})[1 + ln^\gamma(\mu_n/\lambda_n) + \psi(n)\lambda_n]),$$

где $\{\lambda_n\} \uparrow$ *и* $\lambda_n \le \mu_n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) = \sum\limits_{k=0}^\infty |a_{nk} - a_{n,k+1}|$. *Если, кроме того, выполняется неравенство*

$$\sum_{k=i}^\infty |a_{ni} - a_{n,i+1}| < Ca_{nk}, \quad A_k = \sum_{i=0}^{k-1} |a_{n,i}|$$

для любых $k \in \mathbb{N}$, *то справедлива оценка*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,v} = O\left(\omega^{1-\gamma}(\mu_n^{-1}) \left(\sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{A_k(n)}{k}\right)^\gamma \left(\sum_{k=1}^{\mu_n} \frac{A_k(n)}{k}\omega(1/k)\right)^{1-\gamma}\right).$$

В тригонометрическом случае схожие результаты получены в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.

2. *Das G., Ghosh T., Ray B. K.* Degree of Approximation of Functions by Their Fourier Series in the Generalized Holder Metric // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 1996. Vol. 106, № 2. P. 139–153.

В. М. Ипатова (Долгопрудный)
ipatval@mail.ru

О РАВНОМЕРНЫХ АТТРАКТОРАХ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ[1]

Динамические системы, порождаемые диссипативными эволюционными уравнениями, и их аттракторы привлекают внимание исследователей в различных областях знаний. Первоначально аттракторы рассматривались только для автономных уравнений, затем это понятие было обобщено [1] на случай неавтономных эволюционных систем. Важным для приложений является вопрос о том, насколько близки аттракторы дискретных аппроксимаций математических моделей к их истинным аттракторам. Для автономных уравнений этот вопрос был изучен в [2], где была доказана теорема о полунепрерывной зависимости от параметра аттракторов семейств полудинамических систем. В работе [3] аналогичный результат был получен для равномерных аттракторов семейств полупроцессов, соответствующих неавтономным эволюционным уравнениям. В [2, 3] предполагалось, что рассматриваемые семейства имеют общую полугруппу времени, поэтому при исследовании сходимости аттракторов конечно-разностных схем приходилось считать, что шаг сетки представляется в виде $\tau = \tau_n = T_0/n$, где T_0 — некоторое положительное число, $n \in \mathbb{N}$.

В настоящей работе доказана более общая теорема о полунепрерывной сверху зависимости от параметра равномерных аттракторов семейств полупроцессов [4], которая позволяет исследовать сходимость аттракторов численных схем при произвольном законе стремления к нулю параметра дискретизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chepyshov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. Vol. 73. P. 279–333.

2. *Капитанский Л. В., Костин И. Н.* Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимаций // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, вып. 1. С. 114–140.

3. *Ипатова В. М.* Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 6. С. 47–56.

4. *Ипатова В. М.* О равномерных аттракторах явных аппроксимаций // Дифф. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 574–583.

[1]Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Г. Г. Исламов (Ижевск)
ggislamov@gmail.com

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теория функционально-дифференциальных уравнений описывает и изучает свойства таких процессов, ход которых зависит от их предыстории и планируемого будущего этих процессов. В работах [1–4] рассмотрены различные вопросы общей теории линейных краевых задач для таких уравнений. Вопросы численного решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений различных типов до сих пор остаются плохо изученными, Операторная форма теоремы Рябенького- Филиппова о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости для линейного уравнения (см., например, [5]) формулируется в терминах конечномерных аппроксимаций нормированных пространств и операторов. Мы применяем её при анализе численного решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений методом минимальной конечномерной аппроксимации линейной компактной инъекции $\Lambda : H \to H$, порождающей функциональное пространство D решений краевой задачи. При этом предполагается, что область значений функционально-дифференциального оператора L содержится в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Конечномерные аппроксимации операторов и пространств мы строим на основе разложения Шмидта оператора Λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исламов Г. Г.* Оценки минимального ранга конечномерных возмущений операторов Грина // Дифференц. уравнения, 1989. Т. 25, № 9. С. 1496–1503.

2. *Исламов Г. Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. I // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 11. С. 1872–1881.

3. *Исламов Г. Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. II // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 224–232.

4. *Исламов Г. Г.* Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Известия института математики и информатики УдГУ, 1994. Вып. 2. С. 3–24.

5. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: НИЦ «РХД», 2002. 848 с.

М. И. Исмайлов (Баку)
miqdadismailov1@rambler.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ РИССА – ФИШЕРА И ХАРДИ – ЛИТТЛВУДА С ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

В работе получены аналоги результатов Рисса и Пэли для ортогональных систем, а также Харди – Литтлвуда для системы экспонент об оценке коэффициентов Фурье через функцию, и обратно.

Справедливы

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ *— ортонормированная система на* $[c,d]$ *такая, что п. в. на* $[c,d]$ $|\varphi_n(y)| \le M$. *Тогда для всякой измеримой на* $[a,b]\times[c,d]$ *функции* $f \in L_q([a,b], L_p(c,d))$, $1 < p \le 2$, $q = \frac{p}{p-1}$, *последовательность* $\overline{c(x)} = \{c_k(x)\}_{k\in N} \in l_q(a,b)$, *где* $c_k(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\varphi_k(y)dy$ *и* $\left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_q(a,b)} \le M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L_q([a,b],L_p(c,d))}$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ *– ортонормированый базис на* $[c,d]$ *такая, что почти всюду на* $[c,d]$ *справедливо* $|\varphi_n(y)| \le M$. *Тогда для всякой последовательности* $\overline{c(x)} = \{c_k(x)\}_{k\in N} \in l_p(a,b)$, $1 < p \le 2$, *существует функция* $f \in L_p([a,b], L_q(c,d))$, $q = \frac{p}{p-1}$, *для которой* $c_k(x)$ *коэффициенты ряда Фурье по системе* $\{\varphi_n(y)\}_{n\in N}$ *и*

$$\|f\|_{L_p([a,b],L_q(c,d))} \le M^{\frac{2-p}{p}} \left\|\{c_k\}_{k\in N}\right\|_{l_p(a,b)} .$$

Теорема 3. *1) пусть* $f \in L_p((a,b)\times(0,2\pi))$, $1 < p \le 2$. *Тогда*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{p-2} \int\limits_a^b |c_k(x)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p \left(\int\limits_a^b \int\limits_0^{2\pi} |f(x,t)|^p\, dt dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $c_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x,t)e^{-\mathrm{int}}dt$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$;

2) пусть $c_n(x), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ *— последовательность измеримых на* $[a,b]$ *функций такая, что* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{q-2} \int\limits_a^b |c_k(x)|^q\, dx < +\infty$, $q \ge 2$. *Тогда существует функция* $f \in L_q((a,b)\times(0,2\pi))$, *для которой* $c_n(x)$ *коэффициенты ряда Фурье по системе экспонент* $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ *и*

$$\left(\int\limits_a^b \int\limits_0^{2\pi} |f(x,t)|^q\, dt dx\right)^{\frac{1}{q}} \le M_q \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{q-2} \int\limits_a^b |c_k(x)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. 658 с.

2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958. 508 с.

С. Н. Кабанов, О. Е. Кузьмина (Саратов)
kabanoff@hotmail.com

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Рассмотрим уравнение вида

$$C_p y(x) := K_p K_{p-1} \dots K_1 y(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $K_l g(x) = \int\limits_0^x k_l(x-t) g(t)\, dt$, $l = \overline{1,p}$, $p \geq 1$, целое; $k_l(x)$, $f(x) \in L[0,1]$ — заданные функции.

Пусть функции $k_l(x)$ таковы, что для них существуют $k_l^* \in L[0,1]$ такие, что

$$\int\limits_0^x k_l(x-t) k^*(t)\, dt \equiv 1, \quad x \in [0,1], \quad l = \overline{1,p}. \tag{2}$$

Имеют место

Лемма. *Оператор вида* $D_p = DK_1^* DK_2^* \dots DK_p^*$, *где* $DK_l^* g(x) = \frac{d}{dx} K_l^* g(x)$, $K_l^* g(x) = \int\limits_0^x k_l^*(x-t) g(t)\, dt$, *является обратным для оператора* C_p *в следующем смысле*

$$D_p C_p y(x) \overset{п.\,в.}{=} y(x), \quad x \in [0,1],$$

$$C_p D_p y(x) \overset{п.\,в.}{=} y(x) - \omega_p(0) k_p(x) - \omega_{p-1}(0) k_p(x) * k_{p-1}(x) - \dots -$$
$$-\omega_1(x) k_p(x) * \dots * k_1(x),$$

где $\omega_p(x) = K_p^* y(x)$, $\omega_{p-1}(x) = K_{p-1}^* DK_p^* y(x), \dots, \omega_1 = K_1^* DK_2^* \dots DK_p^* y(x)$. *Знак* $*$ *обозначает свертку.*

Теорема. *Для того, чтобы интегральное уравнение* (1) *имело решение* $y(x) \in L[0,1]$ *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) функции $\omega_1(x), \dots, \omega_p(x)$ *—- абсолютно непрерывны на* $[0,1]$*;*

2) $\omega_1(0) = \omega_2(0) = \dots = \omega_p(0) = 0$.

Если эти условия выполнены, то решение уравнения (1) *единственно и почти всюду на* $[0,1]$ *представимо в виде* $y(x) = D_p f(x)$.

Данные исследования продолжают исследования, начатые в [1]. Задачи вида (2) носят название задач Сонина (см. [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. М.: Наука, 1966. 672 с.

2. *Сонин Н. Я.* Обобщение одной формулы Абеля // Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: ГИТТЛ, 1954. С. 149.

Ю. А. Казакова (Ульяновск)
kazakovaua@mail.ru

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассматривается система дифференциальных уравнений, в которой искомые функции u_k зависят от координат x, y и времени t:

$$\begin{gathered} F_k(x, y, t, u_1, \ldots, u_n, u_{1x}, \ldots, u_{nx}, u_{1y}, \ldots, u_{ny}, u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = 0, \\ k = 1 \div n, \end{gathered} \tag{1}$$

где нижние индексы x, y, t обозначают частные производные. Решение системы представляется в параметрической форме

$$u_k = U_k(\xi, \eta, t), \quad k = 1 \div n, \quad x = x(\xi, \eta, t), \quad y = y(\xi, \eta, t)$$

Формулы перехода к новым переменным имеют вид

$$u_{kx} = \frac{U_{k\xi} y_\eta - U_{k\eta} y_\xi}{\Delta}, \quad u_{ky} = \frac{U_{k\eta} x_\xi - U_{k\xi} x_\eta}{\Delta},$$

$$u_{kt} = U_{kt} + U_{k\xi} \frac{y_t x_\eta - y_\eta x_t}{\Delta} + U_{k\eta} \frac{y_\xi x_t - x_\xi y_t}{\Delta},$$

где $\Delta = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \neq 0$, нижние индексы ξ, η, t обозначают частные производные. Система уравнений (1) преобразуется к виду

$$F_k(x, y, t, x_\xi, x_\eta, x_t, y_\xi, y_\eta, y_t, U_1, \ldots, U_n, U_{1\xi}, \ldots, U_{n\xi},$$

$$U_{1\eta}, \ldots, U_{n\eta}, U_{1t}, \ldots, U_{nt}) = 0 \tag{2}$$

В системе (2) $x, y, u_k (k = 1 \div n)$ являются функциями переменных ξ, η, t . Решение системы (2) представляется в виде многочленов:

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi, t)\eta^i, \quad x = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)\eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t)\eta^k,$$

где α_k, γ, $\omega \in N$ (где N — множество натуральных чисел).

Для квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты в которых являются многочленами относительно зависимых u_k и независимых x, y переменных, предложен способ определения параметров α_k,γ,ω $\in N$, для которых система дифференциальных уравнений для $x_k(\xi, t)$, $y_k(\xi, t)$, $u_{ki}(\xi, t)$ является определенной или недоопределенной.

На основе предлагаемого параметрического метода построены решения полиномиального вида, проведена их классификация и указаны приложения для некоторых систем уравнений газовой динамики. В частности, получены решения простых волн.

М. Ю. Калмыков, С. П. Сидоров (Саратов)
kalmykov_maksim@mail.ru, sidorovsp@info.sgu.ru

МОМЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ[1]

Пусть $\{u_0, \ldots, u_k\}$ является системой Чебышева на $[0, 1]$. Функция f, определенная на $[0, 1]$, называется выпуклой по отношению к системе $\{u_0, \ldots, u_k\}$ (мы будем записывать $f \in C(u_0, \ldots, u_k)$), если

$$\begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \ldots & u_0(t_{k+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_k(t_0) & u_k(t_1) & \ldots & u_k(t_{k+1}) \\ f(t_0) & f(t_1) & \ldots & f(t_{k+1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

для всех точек $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} < 1$.

Пусть $k \in N \cup \{0\}$, $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_k) \in R^{k+1}$, $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_0 \neq$ $\neq 0$, $\sigma_k \neq 0$. Обозначим $W_{l+1} := \{f \in C[0, 1] : \ f \in C(u_0, \ldots, u_l)\}$, $l = 0, \ldots, k-1$, $W_0 := \{f \in C[0, 1] \ : \ f \geq 0\}$. Обозначим конус $W_{0,k}(\sigma) = \cap_{l=0}^k \sigma_l W_l$. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$. Для $g \in C[0, 1]$ обозначим $Ig = (g(x_1), \ldots, g(x_n))$. Обозначим $V_{0,k}(\sigma) :=$ $= \{If \in R^n : \ f \in W_{0,k}(\sigma)\}$. Обозначим через $V^*_{0,k}(\sigma) := \{\mu \in$ $\in R^n : (If)^T\mu \geq 0, \ \forall If \in V_{0,k}(\sigma)\}$ двойственный конус. Пусть $\{f_i\}_0^p$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

является чебышевской системой на $[0,1]$ и может быть отличной от системы $\{u_i\}$. Пусть $M_{p+1,k}(\sigma) := \{c = (c_0, \ldots, c_p) \in R^{p+1} : (If_i)^T\mu = c_i, i = 0, \ldots, p, \ \forall \ \mu \in V^*_{0,k}(\sigma)\}$. Введем $c^0 = (c^0_0, c^0_1, \ldots, c^0_p) \in M_{p+1,k}(\sigma)$, мы определяем $K_{0,k}(c^0) = \{\mu \in V^*_{0,k}(\sigma) : (If_i)^T\mu = c^0_i, \ i = 0, 1, \ldots, p\}$. Обозначим $P_+ = \{g \in \{f_0, \ldots, f_p\} : \ I(g - f) \in V_{0,k}(\sigma)\}$, $P_- = \{g \in \in \{f_0, \ldots, f_p\} : \ I(f - g) \in V_{0,k}(\sigma)\}$

Теорема 1. *Пусть c^0 является внутренней точкой $M_{p+1,k}(\sigma)$ и пусть $f \in C[0,1]$ будет такой, что P_+ и P_- непустые множества, тогда*

$$\sup_{\mu\in K_{0,k}(c^0)} (If)^T\mu = \inf_{g\in P_-} g(c^0),$$

$$\inf_{\mu\in K_{0,k}(c^0)} (If)^T\mu = \sup_{g\in P_+} g(c^0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shapiro A.* On duality theory of conic linear problems // Semi-infinite programming: recent advances (M. A. Goberna and M. A. Lopez, eds.). Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 135-–165.

2. *Карлин С. Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.

Н. И. Карпович (Минск)

karpovichnatalya@bsu.by

АСИМПТОТИКА КОНСТАНТ ЛЕБЕГА p-АДИЧЕСКОГО СОЛЕНОИДА

Пусть p — фиксированное простое число, $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $B = \{(n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$ — подгруппа локально компактной абелевой группы $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_p$. Факторгруппу $\Sigma_p = (\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_p)/B$ называют p-адическим соленоидом (детали и основные свойства см. в [1]).

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi : (x, u) \mapsto (\{x\}, u - [x])$$

из $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_p$ в $[0,1)\times\mathbb{Z}_p$ (здесь $\{x\}$ — дробная часть, $[x]$ — целая часть $x \in \mathbb{R}$). Тогда $\ker\varphi = B$ и по теореме о гомоморфизмах

$$[0,1)\times\mathbb{Z}_p = \operatorname{Im}\varphi \cong (\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_p)/\ker\varphi = \Sigma_p.$$

Обозначим через $\{\cdot\}_p$ дробную часть p-адического числа. Тогда характеры группы $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}_p)/B$ определяются равенствами

$$\chi_\xi(x,u) = \chi_\infty(\xi x)\chi_p(-\xi u), \quad \xi \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

где $\chi_\infty(x) = \exp(2\pi i x)$, $\chi_p(u) = \exp(2\pi i \{u\}_p)$ — главные характеры групп $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}_p$ соответственно. Характеры χ_ξ порождают ядра Дирихле

$$D_n(x,u) = \sum_{\{\xi : |\xi|_p \le p^n\} \cap (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)} \chi_\xi(x,u) = \sum_{l=0}^{p^n-1} \exp\left(2\pi i l \left(\frac{x}{p^n} - \left\{\frac{u}{p^n}\right\}_p\right)\right).$$

Наш основной результат дает асимптотику соответствующих констант Лебега

$$\|D_n\|_{L^1([0,1)\times\mathbb{Z}_p)} \sim \frac{2}{\pi^2} \ln p^n, \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хьютт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т.2. Мир. 1975.

И. Н. Катковская (Минск)
krotov@bsu.by

φ-ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ СТУПЕНЧАТЫМИ

Пусть Φ — класс возрастающих функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(0) = \varphi(+0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$. Пусть далее $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный сегмент и $\varphi(L)(I)$ — множество измеримых функций на I, для которых $\varphi \circ f$ суммируема на I,

$$d_\varphi(f,g) = \int_I \varphi(|f(x) - g(x)|)\, dx,$$

Для $0 < \delta_i \le b_i - a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ определим анизотропный модуль непрерывности функции $f \in \varphi(L)(I)$

$$\omega(\delta_1, \ldots, \delta_n; f)_\varphi = \sup_{0 < h_i < \delta_i} \int_a^{b-h} \varphi(|f(x+h) - f(x)|)\, dx.$$

Для $l \in \mathbb{N}^n$ обозначим через $\mathcal{H}_l(I)$ класс функций χ на I, постоянных на каждом из n-мерных интервалов

$$\prod_{i=1}^n \left(a_i + (b_i - a_i)\frac{k_i - 1}{l_i}, a_i + (b_i - a_i)\frac{k_i}{l_i}\right), \quad k_i \in \{1, \ldots, l_i\}^n.$$

Теорема. *Для любых $\varphi \in \Phi$, $f \in \varphi(L)(I)$ и $l \in \mathbb{N}^n$ найдется такая функция $\chi \in \mathcal{H}_l(I)$, для которой*

$$d_\varphi(f,\chi) \le 2^n \omega\left(\frac{b_1 - a_1}{l_1}, \ldots, \frac{b_n - a_n}{l_n}; f\right)_\varphi.$$

В частности, это утверждение дает оценки для наилучших анизотропных приближений функций полиномами по кратным системам Хаара и Уолша.

Интересным частным случаем является $\varphi_0(t) = t(1+t)^{-1}$ (тогда $\varphi_0(L)(I)$ — класс всех измеримых функций на I). Для φ_0, но только в изотропном случае, утверждение теоремы приведено нами в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Катковская И. Н.* Критерий компактности М. Рисса для пространства измеримых функций // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 134—138.

Б. А. Кац, С. Р. Миронова (Казань), А. Ю. Погодина (Саратов)
srmironova@yandex.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ МАТРИЦ НА НЕГЛАДКОЙ КРИВОЙ

Пусть Γ есть простая дуга на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с началом и концом в точках a_1 и a_2 соответственно. Мы рассматриваем краевую задачу о нахождении голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ матрицы

$$Y(z) = \begin{pmatrix} Y_{11}(z) & Y_{12}(z) \\ Y_{21}(z) & Y_{22}(z) \end{pmatrix}$$

по краевому условию

$$Y^+(t) = Y^-(t)G(t), \qquad t \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2\},$$

где $G(t)$ есть заданная на Γ треугольная матрица

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & w(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ограничениям

$$Y(z) = O(|z-a_j|^{-\gamma}), \quad \gamma = \gamma(Y) < 1, \quad z \to a_j, \quad j = 1, 2,$$

на рост в точках a_1, a_2, и условию на поведение вблизи бесконечно удаленной точки

$$Y(z) = \left(I + O(z^{-1})\right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \to \infty,$$

где I означает единичную матрицу, а n — натуральное число.

Это краевая задача Римана в постановке Итса – Китаева – Фокаса. Она имеет многочисленные приложения. Однако во всех опубликованных до настоящего времени работах эта задача рассматривалась только на гладких дугах. В данном докладе представлены условия ее разрешимости для случая, когда дуга Γ является негладкой.

Е. С. Климова (Самара)
depcy@yandex.ru

СИСТЕМА СДВИГОВ ФУНКЦИИ

Рассматриваются системы, образованные с помощью оператора сдвига вида $(T_{\lambda_k} g(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. где $\lambda_k \in \mathbb{R}$ и оператор $T_{\lambda_k} g(x) = g(x - \lambda_k)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если последовательность вещественных чисел* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *имеет предельную точку* λ, $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, *то система* $(T_{\lambda_n} f)_{n\in\mathbb{Z}}$ *не может быть бесселевой.*

Пусть множество $E = [-\gamma, \gamma]$, и мера $0 < \mu(E) < \infty$. Обозначим

$$P_E = \left(f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq E\right),$$

где $\mathrm{supp}\,\hat{f}$ — носитель преобразования Фурье функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Пусть последовательность* $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ *такая, что* $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ *— фрейм для* $L^2(E)$. *Пусть функция* $g(x) \in P_E$, *тогда:*

1) система $\left(T_{\lambda_k} g(x)_{k\in\mathbb{Z}}\right)$ *— бесселева система в пространстве* $L^2(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда существует константа* $B > 0$, *такая что*

$$|\hat{g}(\omega)| \leq B$$

для почти всех $\omega \in \mathbb{R}$;

2) система $(T_{\lambda_k} g(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ *— фрейм для* P_E, *тогда и только тогда, когда существуют константы* $A > 0$, $B > 0$, *такие что:*

$$A \leq |\hat{g}(\omega)| \leq B$$

для почти всех $\omega \in E$;

3) система $(T_{\lambda_k} g(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ *— фреймовая последовательность в* $L^2(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда существуют такие константы* $A, B > 0$ *что:*

$$A \leq |\hat{g}(\omega)| \leq B$$

для почти всех $\omega \in \mathrm{supp}\,\hat{g}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz Bases // Birkhäuser. Boston, 2002.

2. *Seip C.* On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2[-\pi, \pi]$ // J. of Funct. Anal. 130 (1995). P. 131–160.

Е. С. Климова, С. Я. Новиков (Самара)
nvks@ssu.samara.ru

ТЕОРЕМА КАДЕЦА ОБ 1/4 И ФРЕЙМЫ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ — последовательность вещественных чисел. М. И. Кадец [1] доказал: если $\sup_{k\in\mathbf{Z}} |\lambda_k - k| < 1/4$, то $\{e^{i\lambda_k x}\}$ — базис Рисса в $L^2(-\pi,\pi)$. Точность константы $1/4$ обусловлена примером Левинсона [2], в котором

$$\lambda_k = \begin{cases} k-\frac{1}{4}, \text{ если } k>0, \\ k+\frac{1}{4}, \text{ если } k<0, \\ 0, \text{ если } k=0, \end{cases}$$

и последовательность $\{e^{i\lambda_k x}\}$ полна в $L^2(-\pi,\pi)$, но не является базисом Рисса. Вопрос о том, является ли последовательность примера Левинсона фреймом, оставался открытым.

Доказана теорема, из которой следует, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Теорема. *Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность вещественных чисел такая, что sup $|\lambda_k - k| = \frac{1}{4}$. Тогда либо $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — базис Рисса для $L^2(-\pi,\pi)$, либо $\{e^{i\lambda_k x}\}$ не является фреймом в $L^2(-\pi,\pi)$.*

Объединяя теорему с результатами K. Seip [3], имеем: комплексные экспоненты с показателями примера Левинсона образуют фрейм в пространстве $L^2(-\gamma,\gamma)$ для $\gamma<\pi$, и неполную базисную последовательность Рисса в $L^2(-\gamma,\gamma)$ для $\gamma>\pi$. Для $\gamma=\pi$ имеем полную последовательность, которая не является фреймом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадец М. И.* Точное значение постоянной Палея-Винера.// Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 155(6). С. 1253–1254

2. *Levinson N.* On non-harmonic Fourier series // Annals of Math. 1936. Vol. 37, № 4. P. 919–936.

3. *Seip K.* On the connection between exponential bases and certain related sequencrs in $L^2(-\pi,\pi)$ // J. Funct.Anal. 1995. Vol. 130. P. 131–160.

Е. А. Козлова (Самара)
leni2006@mail.ru

ЗАДАЧА О ПОЛНОМ УСПОКОЕНИИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО СМЕШАННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Одним из наиболее интересных направлений в теории уравнений с частными производными является изучение задач управления. В частности, исследованиям таких задач для уравнений гиперболического типа посвящены многочисленные работы В. А. Ильина, Е. А. Моисеева и их учеников. Рассматривалось граничное управление для волнового [1] и телеграфного уравнений [2]. В [3] было получено решение задачи граничного управления для системы волновых уравнений. В настоящей работе рассмотрена задача об успокоении для уравнения, которое возникает при описании малых колебаний движущегося гибкого стержня [4].

Пусть в прямоугольнике $Q = [0, l] \times [0, T]$ задано уравнение в частных производных гиперболического типа

$$u_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx} = 0,$$

где b, c— некоторые постоянные, $b^2 - c > 0$, и выполняются условия

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(x, T) = 0, \quad u_t(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

В работе для данной задачи о полном успокоении построены в явном виде управления $\mu(t) = u(0, t)$ и $\nu(t) = u(l, t)$ при $0 \leq t \leq T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.

2. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158.

3. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестник СамГТУ. Сер. Физико-математические науки. 2008. № 1(16). С. 5–10.

4. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978.

И. А. Козлова (Калуга)
Irena1983.83@mail.ru

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА

В работе [1] рассматривались многочлены Бернштейна $B_n(x)$ для функции Больцано $f(x)$. В настоящей работе дается оценка погрешности приближения функции Больцано многочленами Бернштейна.

Используем тождества:

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{1}$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x, \quad B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.$$

Из этих тождеств следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^k = \frac{x-x^2}{n}. \tag{2}$$

Умножая (1) на $f(x)$ и вычитая $B_n(x)$, получим

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum{}' + \sum{}'',$$

где в $\sum'$ суммирование распространяется на те значения k, для которых $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, а суммирование $\sum''$—на остальные значения k. Так как $|f(x)| \leqslant 1$ и $x - x^2 \leqslant 1/4$ на $[0;1]$, то в силу соотношения (2)

$$\left|\sum{}''\right| \leqslant 2 \sum{}'' C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < 2\sqrt{n} \frac{x-x^2}{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

Используя (1) и то, что $\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) = \omega(f;\delta)$, $f(x) \in \mathrm{Lip}_4 \frac{1}{2}$, получаем

$$\left|\sum{}'\right| \leqslant \sum_{|k/n - x| \leqslant 1/\sqrt[4]{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant 4 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^{1/2} = \frac{4}{\sqrt[8]{n}}.$$

Таким образом,

$$|f(x) - B_n(x)| < \frac{4}{\sqrt[8]{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлова И. А.* Построение многочленов Бернштейна для функции Больцано// Современные методы теории функций и их смежные проблемы : тез. докл. Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2011. С. 172.

И. А. Козлова, А. И. Савотин (Калуга)
irena1983.83@mail.ru

ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

Функция Больцано $B(x)$ строится следующим образом. Определяются вспомогательные функции $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $\ldots$, $B_n(x)$,$\ldots$. Графиком функции $B_0(x)$ является отрезок OA_4. Заменим OA_4 ломаной $OA_1A_2A_3A_4$, так, что точки O, A_1, A_2, A_3, A_4, имеют координаты

$$O(0,0), \quad A_1\left(\frac{a}{4},-\frac{h}{2}\right), \quad A_2\left(\frac{a}{2},0\right), \quad A_3\left(\frac{3a}{4},\frac{h}{2}\right), \quad A_4(a,h).$$

Функцию, имеющую график $OA_1A_2A_3A_4$, обозначим через $B_1(x)$. По функции $B_1(x)$ строим функцию $B_2(x)$.

Повторим эту операцию n раз; придем к функции $B_n(x)$. Колебание функции $B_n(x)$ в каждом из промежутков

$$\left(\frac{s}{4^n}\,a, \frac{s+1}{4^n}\,a\right), \quad s=0,1,2,\ldots,4^n-1, \quad n=0,1,2,3,\ldots \tag{1}$$

будет

$$\omega\left(\frac{s}{4^n}\,a, \frac{s+1}{4^n}\,a\right)=\frac{h}{2^n}; \tag{2}$$

для колебания $B_n(x)$ в промежутке $(0,a)$ получим

$$\omega_n(0,a)=h\left(2-\frac{1}{2^n}\right). \tag{3}$$

Определим функцию $B(x)$ вначале в точках вида

$$x=\frac{ka}{4^n}, \quad 0\leqslant k\leqslant 4^n, \quad n=0,1,2,3,\ldots, \quad k \text{ — целое}, \tag{4}$$

полагая $B(x)=B_n(x)$.

На основании (2) и (3) можно утверждать, что колебание $B(x)$ на множестве всех точек вида (4), принадлежащих одному из промежутков (1) будет

$$\omega\left(\frac{s}{4^n}\,a, \frac{s+1}{4^n}\,a\right)=\frac{h}{2^{n-1}}, \tag{5}$$

а колебание $B(x)$ на любом множестве точек вида (4), принадлежащем промежутку длины $a/4^n$, будет меньше $h/2^{n-2}$, а поэтому $B(x)$ будет непрерывна на множестве (4). Нам остается еще определить $B(x)$ для значений x, отличных от точек вида (4). Это можно сделать полагая

$$B(x)=\lim_{t\to x}B(t).$$

Теперь $B(x)$ определена во всем промежутке $(0,a)$ и является непрерывной функцией в этом промежутке.

Колебание функции Больцано $B(x)$ в любом промежутке длины $a/4^n$

$$\omega\left(x,x+\frac{a}{4^n}\right)>\frac{h}{2^n}. \tag{6}$$

Это утверждение вытекает из того, что в любом промежутке длины $a/4^n$ попадает хоть один промежуток из числа промежутков, полученных при делении $(0,a)$ на 4^{n+1} равных частей.

Теперь рассмотрим модуль непрерывности функции Больцано при $h=1$ и $a=1$. В этом случае $0<\delta<1$. Из (5) следует, что модуль непрерывности (при $h=1$, $a=1$)для

$$\frac{1}{4^{n+1}}\leqslant\delta<\frac{1}{4^n}$$

будет

$$\omega(B;\delta)\leqslant\omega\left(B;\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}=\sqrt{\frac{1}{4^{n-1}}}=4\sqrt{\frac{1}{4^{n+1}}}\leqslant4\sqrt{\delta}. \tag{7}$$

Таким образом, мы получили оценку сверху модуля непрерывности функции $B(x)$. Из (6) можно получить и оценку снизу модуля непрерывности для данной функции:

$$\omega(B;\delta)\geqslant\omega\left(B;\frac{1}{4^{n+1}}\right)>\frac{1}{2^{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{4^{n+1}}}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\delta}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что модуль непрерывности функции Больцано находится в пределах

$$\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\leqslant\omega(B;\delta)\leqslant4\sqrt{\delta},$$

и $B(x)$ принадлежит классу Липшица порядка $frac12$ с константой $M=$ $=4$, т.е. $B(x)\in4\mathrm{Lip}\frac{1}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бржечка Б. Ф.* О функции Больцано // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, вып. 2. С. 15–20.

В. С. Колесников (Иваново)
vswheell@mail.ru

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ

Пусть $f \in C_{2\pi}$, $T = \{x_{k,n}\}$, матрица узлов $x_{k,n} = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $-n \le k \le n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Последовательность a_k называется квазимонотонной, если для некоторого $\alpha \ge 0$ числа $\frac{a_k}{k^\alpha}$ монотонно убывают. При $\alpha = 0$ получаем монотонные последовательности.

Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \tag{1}$$

Если ряд (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$, то обозначим

$$T_n(f;x) = \frac{a_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^n \cos(kx),$$

— тригонометрические интерполяционные полиномы функции $f(x)$ по равноотстоящим узлам $x_{k,n}$.

Теорема 1. *Если $a_n \downarrow 0$ и a_n выпукла или хотя бы квазивыпукла, то полиномы $T_n(f;x)$ сходятся к функции $f(x)$ в метрике L.*

Теорема 2. *Если $a_n \downarrow 0$, $a_n = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$, ряд (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$, то полиномы $T_n(f;x)$ сходятся к функции $f(x)$ в метрике L.*

Теорема 3. *Если последовательность a_n квазимонотонна, $a_n = o\left(\dfrac{1}{\ln^2 n}\right)$, и ряд (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$, то полиномы $T_n(f;x)$ сходятся к функции $f(x)$ в метрике L.*

Получены также результаты для рядов Фурье по синусам.

Н. Е. Комиссарова (Саратов)
nataliyakomissarov@yandex.ru

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ – ХААРА В ПРОСТРАНСТВАХ L_p НА КОМПАКТНЫХ НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ[1]

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а).

Пусть $(G, \dot{+})$ — коммутативная компактная группа, топология в которой задана системой вложенных подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \dots \tag{1}$$

таких, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}, (G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$, где p_n — простые числа. Обозначим $m_0 = 1$, $m_{n+1} = m_n p_n$.

В [1] были определены функции Хаара H_{jm_n+k} ($j = \overline{1, p_n - 1}$, $k = \overline{0, m_n - 1}$) равенствами

$$H_0 \equiv 1, H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} r_n^j \left(x \dot{-} g\right) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} g}(x),$$

где $g \in G$ и $k \in \mathbb{N}_0$ связаны соотношениями

$$g = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \dots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1} \Leftrightarrow k = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$$

$\left(a_i = \overline{0, p_i - 1}\right)$, $\mathbf{1}_{G_n \dot{+} g}(x)$ - характеристическая функция множества $G_n \dot{+} g$. Функции H_0, H_{jm_n+k} образуют ортонормированную систему функций на G.

Если $f \in L^p(G)$, выражение

$$\omega_n(f, p) = \sup_{x \in G_n} \left(\int\limits_G \left| f(t) - f(t \dot{+} x) \right|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

назовём интегральным модулем непрерывности функции f в пространстве L^p.

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$\| f - S_N \|_p \le \left(1 + (p_n - 1) p_n^{\frac{1}{p}}\right) \omega_n(f, p), 1 < p < \infty.$$

Следствие 1. *Если p_n ограничены в совокупности, то система Хаара — базис в пространстве $L^p(G)$, $1 < p < \infty$.*

Следствие 2. *Если p_n неограничены и $\omega_n(f, p) = \bar{\bar{o}} \left(\frac{1}{1 + (p_n - 1) p_n^{\frac{1}{p}}}\right)$, то ряд Фурье – Хаара функции $f \in L^p(G)$, $1 < p < \infty$, сходится равномерно на G.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский С. Ф.* О рядах на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 14–19.

2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.

А. А. Копжасарова (Шымкент, Казахстан)
Asyl_K@mail.ru

ВОЗМУЩЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В научной литературе встречаются различные случаи обобщенных спектральных задач типа [1, с. 520]

$$Au = \lambda Su$$

в гильбертовом пространстве H, где A — плотно определенный в H линейный оператор, а S — линейный ограниченный оператор.

Если $Sf = f(-x)$ для любой функции $f(x) \in L_2(-1,1)$, то частным случаем обобщенных спектральных задач такого рода в классе $L_2(-1,1)$ служат задачи вида

$$-y''(-x) + \alpha y'(x) = \lambda y(x), \quad -1 < x < 1 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(-1) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11} u(-1) + \beta_{11} u(1) = 0, \\ \alpha_2 u'(-1) + \beta_2 u'(1) + \alpha_{21} u(-1) + \beta_{21} u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

При $\alpha = 0$ задача (1), (2) изучена в работе [2]. В настоящей заметке рассмотрены вопросы базисности Рисса в $L_2(-1,1)$ собственных функций обобщенной спектральной задачи (1), (2).

Теорема. *Собственные функции обобщенной спектральной задачи* (1), (2) *образуют базис Рисса пространства* $L_2(-1,1)$ *в следующих случаях:*

1°) $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ $(A_0 \neq 0)$;

2°) $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ \alpha_1^2 \neq \beta_1^2,\ \alpha_{21}^2 \neq \beta_{21}^2$;

3°) $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0,\ \alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11} \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. 740 с.

2. *Садыбеков М. А., Сарсенби А. М.* Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Узбек. мат. журн. 2007. № 3. С. 88–94.

А. Копжасарова (Шымкент),
А. Л. Лукашов (Стамбул, Саратов),
А.М. Сарсенби (Шымкент)
LukashovAL@info.sgu.ru

БАЗИСНОСТЬ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассмотрим следующую несамосопряженную возмущенную спектральную задачу

$$u'(-x) + \alpha u'(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < 1, \qquad (1)$$

$$u(-1) = \gamma u(1), \qquad (2)$$

где λ — спектральный параметр, α, γ комплексные числа.

Теорема *Если* $\alpha^2 \neq 1$, $\gamma \neq \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$, *то система собственных функций задачи* (1), (2) *образует базис Рисса в* $L_2(-1, 1)$.

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ вопросы самосопряженности, вольтерровости и базисности собственных функций (невозмущенной) спектральной задачи (1), (2) были решены в [1].

Аналогичный результат справедлив и для других видов возмущений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садыбеков М. А., Сарсенби А. М.* Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Узбек. мат. журн. 2007. Вып. 3. С.88–94.

В. В. Корнев (Саратов)
KornevVV@info.sgu.ru

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ[1]

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A_1(x,t) f(t)\, dt + \int\limits_{1-x}^{1} A_2(x,t) f(t)\, dt, \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

где функции A_1 и A_2 непрерывны вместе с частными производными до второго порядка включительно в треугольниках $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1-x$ и $0 \le x \le 1$, $1-x \le t \le 1$ соответственно, причем

$$A_1(x, 1-x) - A_2(x, 1-x) \equiv 1.$$

С использованием общей теории интегральных операторов с ядрами, разрывными на ломаных [1], для операторов вида (1) получена следующая теорема равносходимости.

Теорема. *Пусть оператор A обратим. Тогда при выполнении условия*

$$A_1(0,t) \pm iA_2(1,t) \notin R_{A^*} \tag{2}$$

(R_{A^*} — область значений интегрального оператора, ядро которого сопряжено ядру оператора A)
для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta \le x \le 1-\delta} |S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел, модуль которых меньше r; $\sigma_r(f,x))$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{i2\pi kx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k, для которых $|2k\pi| < r$.

Замечание. Отметим следующий частный случай: если существуют числа c_1 и c_2 такие, что $c_1 A_1(0,t) + c_2 A_2(1,t) \equiv 0$, то условие (2) можно заменить условием $c_1^2 + c_2^2 \ne 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

О. А. Королева (Саратов)
korolevaoart@yandex.ru

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим интегральный оператор: $y = Af = \int\limits_0^1 A\,(x,t)\; f(t)\,dt$. Обозначим: $A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\; 0 \le x \le 1/2\}$, $A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1, 0 \le x \le 1/2\}$, $A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x, 1/2 \le x \le 1\}$, $A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$, $A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Предположим, что $A_i(x,t), \quad i = \overline{1,5}$ непрерывно-дифференцируемые в своих областях, причем $A_5(x, \frac{1}{2} - x - 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x + 0) = a$, $A_5(x, \frac{1}{2} + + x + 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x - 0) = b$, $A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$, $A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$, где a, b, c, d — постоянные. Частный случай такого оператора впервые рассматривался в [1].

В качестве обобщенных средних Рисса будем брать интегралы

$$J_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda f$ — резольвента Фредгольма оператора A, а $g(\lambda, r)$ удовлетворяет условиям а), б), г) из [2], и условию, аналогичному условию в). Основной результат:

Теорема. *Соотношение*

$$\lim_{r \to \infty} \|f(x) + J_r(f,x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда: а) $f(x) \in C[0,1]$,
б) $\left(f(x), f\left(\frac{1}{2} + x\right), f\left(\frac{1}{2} - x\right), f\left(1 - x\right)\right)^T$ *удовлетворяет условию:*

$$\tilde{M}_0\, u(0) + \tilde{M}_1\, u\left(\frac{1}{2}\right) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \tilde{\Omega}(t)\, u(t)\, dt = 0$$

где $\tilde{M}_0$, $\tilde{M}_1$ — некоторые постоянные матрицы, $\tilde{\Omega}(x)$ — некоторая матрица с непрерывными компонентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О сходимости средних Рисса разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора на графе-цикле // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2007. Т. 7 Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 1. С. 3–8.

Кочерова В. В. (Ярославль)
v.kocherova@gmail.com

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КВАЗИНОРМ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА – МАРЦИНКЕВИЧА

Пусть Ω — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $\mu(\Omega) = 1$.

Для функции $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ через f^* обозначим ее перестановку в невозрастающем порядке: $f^*(\tau) = \inf\{s > 0 : \lambda(f,s) < \tau\}$.

Рассматриваем при некоторых условиях и ограничениях задачу нахождения области эквивалентности для $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_k}{\varphi(k)} < \infty$ и $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}}{\varphi(k)} < \infty$.

Теорема 1. *Пусть дана измеримая функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и возрастающая функция $\varphi : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая при любых $t \in [e^{-k}, e^{1-k})$ и любых $k \in \mathbb{N}$ следующим условиям: $\int\limits_1^\infty e^{1-\tau} (\varphi(\tau))^k \, d\tau \leq$ $\leq C_0(\varphi(k))^k$ и $\sup\limits_{l\geq 1} \dfrac{1}{(\varphi(l))^l} \sum\limits_{k=l+1}^{\infty} (\varphi(k))^l e^{-k} = C_1 < \infty$. Тогда неравенство $\sup\limits_{0<t<1} \dfrac{f^*(t)}{\varphi(\ln(e/t))} < \infty$ выполнено тогда и только тогда, когда верно неравенство $\sup\limits_k \dfrac{\|f\|_k}{\varphi(k)} < \infty$.*

Теорема 2. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима. Тогда $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_k}{\varphi(k)} < \infty$ тогда и только тогда, когда имеет место $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}}{\varphi(k)} < \infty$.*

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны при $\alpha > 0$:*

(1*) $f \in L_{\exp t^\alpha}$;

(2*) $\sup\limits_{0<t<1} \dfrac{f^*(t)}{(\ln(e/t))^\alpha} < \infty$;

(3*) $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(0,1)}}{k^\alpha} < \infty$;

(4*) $\sup\limits_k \dfrac{\|f^*\|_{L_k(t_k,t_{k-1})}}{k^\alpha} < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trudinger N.* On Inbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications // J. Math. Mech. 1967. Vol. 17. P. 473–483.

2. *Edmunds D. E.* On Decomposition in Exponencial Orlizc Spaces // Math. Nachr. 2000. Vol. 213. P. 77–88.

3. *Edmunds D. E., Krbec M.* Two limiting cases of Sobolev Imbeddings // Houcton J. Math. 1995. Vol. 21. P. 119–128.

Г. Г. Кошелева (Москва)
gkosheleva@mail.ru

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ

Одним из самых важных вопросов гармонического анализа является выяснение скорости сходимости ряда Фурье разлагаемой функции. Эту скорость изучают в различных метриках, в частности, в метрике $C[-\pi,\pi]$. Рассмотрим, например, классы $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha \in (0,1)$. Как известно, скорость сходимости ряда Фурье такой функции в метрике $C[-\pi,\pi]$ не может быть быстрее, чем $n^{-\alpha}$. Если коэффициенты Фурье при этом монотонны, то «плохой» точкой является 0 (с учетом периодичности), а в остальных точках ряд Фурье сходится быстрее. Нетрудно построить пример лакунарного ряда, скорость сходимости которого одинакова во всех точках отрезка. Здесь мы укажем простой пример функции класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, имеющей одинаковую скорость сходимости в каждой точке, и такой, что модули ее коэффициентов Фурье монотонно невозрастают.

Пусть $T=[-\pi,\pi]$, $t\in T$ и $x=e^{it}$. Через $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ обозначим последовательностей полиномов Рудина – Шапиро ([1, 2]).

Теорема. *Пусть $\alpha\in(0,1)$ и функция*

$$f(t)=1+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k(\alpha+\frac{1}{2})}P_k(e^{it})e^{i2^kt}.$$

Тогда $f(t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, модули ее коэффициентов Фурье монотонно невозрастают и функция

$$\varphi(t)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|f(t)-S_n(f;t)|}{n^{-\alpha}}\in(0,\infty)$$

при всех $t\in T$.

Работа выполнена в МГППУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shapiro H. S.* Extremal problems for polynomials and power series // Thesis for S. M. Degree, Massachusetts Institute of Technology, 1951.

2. *Rudin W.* Some theorems on Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 855-–859.

С. А. Крейс (Саратов)
KreisSA@info.sgu.ru

ФРЕЙМЫ И ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ[1]

В работе рассматриваются свойства групп операторов, связанные с фреймами в банаховых пространствах.

Определение. Пусть X — банахово пространство. Семейство операторов $\{T_t\}_{t\in R}$ называется *периодической однопараметрической группой линейных ограниченных операторов* в X, если выполняются условия:

1) $T_{t+s} = T_t T_s$ и $T_0 = I_X$;
2) $T_t x \to x$ при $t \to 0$ для всех $x \in X$;
3) $\|T_t x\| \equiv \|x\|$ для всех $t \in R$ и $x \in X$;
4) $T_{t+2\pi} = T_t$, $t \in R$.

Мы рассматриваем следующую задачу. Дана система ненулевых элементов $\{x_k\}_{k\in Z}$ банахова пространства X. Требуется построить периодическую однопараметрическую группу линейных ограниченных операторов в X такую, что $Ax_k = ikx_k$, $k \in Z$, где A — производящий оператор группы. Если $\{x_k\}_{k\in Z}$ является безусловным базисом пространства X, то искомое построение возможно (см. [1]).

В настоящей работе нами исследуется вопрос о существовании периодической группы операторов в ситуации когда данная система $x_{kk\in Z}$ образует кросс-фрейм (см. [2]).

Теорема. *Пусть задан кросс-фрейм $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ в банаховом пространстве X, не являющийся базисом в X. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Тогда не существует такой 2π-периодической одно-параметрической сильно непрерывной равномерно ограниченной группы операторов $\{T_t\}_{t\in R}$, что $T_t x_n = e^{i\lambda_n t} x_n$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецова Т. А.* Ограниченная группа операторов и теория приближений в комплексных областях // Вычислительные методы и программирование : межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. С. 53–62.

2. *Крейс С. А.* Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 36–38.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-300.2011.1)

А. В. Кривошеин (Санкт-Петербург)
san_san@inbox.ru

О ПОСТРОЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ФРЕЙМОПОДОБНЫХ СИСТЕМ[1]

Унитарный принцип расширения (UEP, [A. Ron, Z. Shen, 97]) является общей схемой построения двойственных фреймов всплесков. Однако, вообще говоря, он приводит к двойственной системе всплесков $\{\psi_{ik}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{ik}^{(\nu)}\}$, которая не обязательно является фреймом в $L_2(R^d)$, и, кроме того, может состоять из обобщенных функций. Некоторые свойства этих систем, такие как разложение фреймового типа (со сходимостью в различных смыслах) и их порядок аппроксимации, были исследованы в [1]. Эти системы всплесков были названы фреймоподобными.

Для произвольной матрицы растяжения, любого целого n и целого-полуцелого c описаны все симметричные относительно точки c маски, удовлетворяющие правилу сумм до порядка n. Для каждой такой маски явно строится фреймоподобная система всплесков, обеспечивающая порядок аппроксимации n, при этом все всплеск-функции $\{\psi^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}^{(\nu)}\}$ являются симметричными/антисимметричными относительно точки. Для всех матриц растяжения в R^2 (которые являются подходящими для осевой группы симметрий в некотором естественном смысле) построены фреймоподобные системы всплесков, обладающие осевой симметрией и обеспечивающие заданный порядок аппроксимации. Для некоторых матриц растяжения построены фреймоподобные системы всплесков, обладающие более высокой степенью симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krivoshein A. V., Skopina M. A.* Approximation by frame-like wavelet systems // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2011. Vol. 31(3). P. 410–428.

В. Г. Кротов, М. А. Прохорович (Минск)
krotov@bsu.by, prokhorovich@bsu.by

О МНОЖЕСТВЕ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Для функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ обозначаем $\Lambda(f)$ дополнение множества тех точек $x \in \mathbb{R}^N$, в которых существует предел

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f\, d\mu.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00162).

Здесь μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\}$ — евклидов шар с центром в точке x радиуса $r > 0$.

Согласно классической теореме Лебега $\mu(\Lambda(f)) = 0$ для любой функции $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$. Для более регулярных функций можно утверждать большее. Именно, *если* $p > 1$, $l \in \mathbb{N}$, $lp < N$ *и* $f \in W^p_l(\mathbb{R}^N)$ *(обычные классы Соболева), то*

$$\mathrm{Cap}_{l,p}(\Lambda(f)) = 0, \quad \dim_{\mathbb{H}}(\Lambda(f)) \le N - lp.$$

([1] при $l = 1$ и [2–4] в общем случае). Здесь $\mathrm{Cap}_{l,p}$ — емкость, порождаемая классом Соболева $W^p_l(\mathbb{R}^N)$, $\dim_{\mathbb{H}}$ — размерность Хаусдорфа. Наш основной результат показывает точность этого утверждения.

Теорема. *Пусть* $1 < p < N/l$. *Тогда существуют такая функция* $f_0 \in W^p_l\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что* $\dim_{\mathbb{H}}(\Lambda(f_0)) = N - lp$ *и* $\mathrm{Cap}_{l,q}(\Lambda(f_0)) > 0$ *для любого* $q > p$.

Подобные результаты получены также для некоторой непрерывной шкалы соболевских пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Federer H., Ziemer C.* The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p-th power summable // Indiana Univ. Math. J. 1972. Vol. 22, № 2. P. 139–158.

2. *Calderon C. P., Fabes E. B., Riviere N. M.* Maximal smoothing operators // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 232, № 10. P. 889–898.

3. *Meyers N. G.* Taylor expansion of Bessel potentials // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23, № 11. P. 1043–1049.

4. *Bagby T., Ziemer C.* Pointwise differentiability and absolute continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 191. P. 129–148.

Ю. С. Крусс (Саратов)
KrussUS@gmail.com

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КОМПАКТНОЙ НУЛЬМЕРНОЙ ГРУППЕ

Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ таких, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G). $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ — базисная последовательность, $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — функции Радемахера на группе G, $H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} * r^j_n(x \dot{-} q) * 1_{G_n}(x \dot{-} q)$ — функции Хаара, где $j = \overline{1, p_n - 1}$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = \overline{0, m_n - 1}$, а k и q связаны следующим образом $k = a_0m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_{n-1}m_{n-1}$, $q = a_0g_0 \dot{+} a_1g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1}g_{n-1}$, $(a_j = \overline{0, p_j - 1})$. О функциях Хаара см. [1, 2].

Определение 1. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$,

$$K_n(\gamma, x, t) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x) \overline{H_{jm_s+k}(t)}.$$

Определим оператор $\mathcal{K}_n(f)$ равенством: $\mathcal{K}_n(f) = \int\limits_G f(t) K_n(\gamma, x, t) dt$. Если для функции $f \in L_1(G)$ существует функция $g : G \to \mathbb{C}$ из $L_1(G)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{K}_n(f) - g\|_{L_1} = 0$, то g называется *производной* функции f и обозначается $D^{\gamma}(f)$.

Теорема 1. *Если* $f \in L_1(G)$ *дифференцируема,* $D^{\gamma}(f) \in L_1(G)$ *и* $f(x) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{p_s-1} \sum\limits_{k=0}^{m_s-1} \hat{f}(jm_s + k) H_{jm_s+k}(x)$, *то справедливо равенство:*

$$D^{\gamma} f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} \hat{f}(jm_s + k) H_{jm_s+k}(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 14–19.

2. *Sergei F. Lukomskii.* Haar system on a product of zero-dimensional compact group. // Centr. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. С. 627–639.

Л. С. Крыжевич (Курск)

Leonid@programist.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ УРОВНЯ ПОТЕРЬ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВ

При преобразованиях одного вида информации в другой мы вносим некоторые искажения, и данные неизбежно отличаются от исходных. В общем виде этот процесс представим так:

$$Y = \lfloor f(X) \rfloor, \quad \widetilde{X} = \lfloor f^{-1}(Y) \rfloor,$$

тогда $|X - \widetilde{X}|$ — абсолютная величина отличий между исходной и восстановленной информацией. В данном случае X может представлять собой вектор в n-мерном пространстве.

На функции необходимо накладывать условие монотонности (хотя бы на исследуемом промежутке), иначе обратное преобразование теряет свойство однозначности. К наименьшим потерям приводят линейные преобразования. Таким образом, искажения при n-мерном линейном преобразовании можно задать формулой:

$$g(X,A) = |X - \lfloor A^{-1} \cdot \lfloor A \cdot X + B + 0,5 \rfloor + D + 0,5 \rfloor|,$$

где $\lfloor . + 0,5 \rfloor$ — функция округления, а матрица A — матрица смены векторного пространства, и $|A| \neq 0$. Если X — непрерывная величина, то функция $G(X,A)$ — периодическая функция, с периодом $P = Ceil[\frac{1}{|A|}]$, т.е. она представима в более короткой форме:

$$f(x,a) = |x|, \quad \left(x \in \left[\frac{-0,5+k}{a}; \frac{0,5+k}{a} \right), \quad k = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor, \quad a \in R \backslash \{0\} \right).$$

В тоже время следует обратить внимание, что традиционно поддаются преобразованию не отдельные значения, а целые массивы данных, следовательно, помехи возрастают, и общий уровень потерь изменяется по закону:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \begin{cases} \frac{2k+1}{8a^2} - \frac{x^2}{2}; x \in [\frac{-0,5+k}{a}; \frac{k}{a}) & ; \\ \frac{2k}{8a^2} + \frac{x^2}{2}; x \in [\frac{k}{a}; \frac{0,5+k}{a}) & . \end{cases}$$

И становится задача подбора оптимального преобразования A, что бы потери были минимальными. Исследования показали, что чем ближе матрица A к единичной — тем меньше абсолютный уровень потерь!

О. С. Кудрявцева (Волжский)
kudryavceva@vgi.volsu.ru

ДРОБНОЕ ИТЕРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

В терминах функции Кёнигса (см., напр., [1]) исследуется вопрос дробного итерирования (см., напр., [2] и приведённую там библиографию) в классе $\mathfrak{P}_r[0;1]$, который представляет собой совокупность аналитических функций f, отображающих единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в себя, сохраняющих точки $z = 0$, $z = 1$, обладающих конечной угловой производной в точке $z = 1$ и имеющих вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена.

Методами, разработанными в [2], получено интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям $f \in \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, где $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$ – совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0;1]$, допускающих дробное итерирование в этом классе.

Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, тогда её функция Кёнигса F имеет вид*

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^{2/(1+\alpha)}} \exp\left\{ \frac{\alpha}{1+\alpha} \int\limits_{[-1,1]} \ln \frac{1}{1-2xz+z^2}\, d\mu(x) \right\} \qquad (1)$$

с некоторым $\alpha \geqslant 0$ и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$. При этом, под степенной функцией и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения 1 и 0, соответственно, при $z=0$.

Обратно, всякая функция F вида (1) является функцией Кёнигса для функций $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, определяемых из равенства

$$f(z) = F^{-1}\left(\beta\, F(z)\right), \quad 0 < \beta < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М.: ГИТТЛ, 1957. 235 с.

2. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 43–74.

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов (Владимир)
levizov@rambler.ru

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

Пусть $0 \le x \le 1$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — система Уолша (в порядке Пэли) ; $\{n(k)\}$ — некоторая (строго возрастающая) последовательность индексов (номеров). Скажем, что подсистема $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ подчинена закону повторного логарифма (ЗПЛ), если выполнено соотношение:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} (2N \log\log N)^{-1/2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \varphi_{n(k)}(x) = 1 \quad \text{почти всюду.} \qquad (1)$$

Известно (см. [1]), что если последовательность $\{n(k)\}$ такова, что, начиная с некоторого номера k_0

$$n(k+1) \ge n(k) \cdot (1 + c \cdot k^{-\alpha}), \quad \text{где } c > 0,\ 0 < \alpha < 0.5, \qquad (2)$$

то для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ соотношение (1) имеет место.

Размер «пробелов» (лакун) в последовательности $\{n(k)\}$ регулируется показателем α («густота» последовательности растёт вместе с α), причём «критическим» является рубеж $\alpha = 0,5$ (аналогичный результат справедлив и для другого вероятностного закона — ЦПТ, рассмотренного по отношению к подсистеме $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ — см. об этом [2, 3]). А именно: равенство (1) начинает «пропадать», если строить $\{n(k)\}$, не подчинённую (2) — взяв показатель $\alpha \geq 0,5$.

В то же время ЗПЛ может выполняться и для достаточно «густых» последовательностей $\{n(k)\}$.

Справедливо следующее утверждение: существуют последовательности $\{n(k)\}$ такие, что величина $n(k+1)/n(k) - 1$ при $k \to \infty$ убывает быстрее, чем $k^{-\gamma}$ для любого (наперёд заданного) показателя $\gamma > 0$, и при этом для подсистемы $\{\varphi_{n(k)}(x)\}$ равенство (1) выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takahasi S.* A statistical property of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1975. Vol. 10. P. 93–98.

2. *Foldes A.* Further Statistical properties of the Walsh functions // Stud. Sci. Math. Hung. 1972. Vol. 7. P. 147–153.

3. *Левизов С.В.* О ЦПТ для системы Уолша // Мат. заметки. 1984. Т. 36(3). С. 435–445.

Е. А. Лебедева (Санкт-Петербург)
ealebedeva2004@gmail.com

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФРЕЙМЫ ВСПЛЕСКОВ С ОПТИМАЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИЕЙ[1]

В сообщении построено семейство жестких фреймов всплесков с единичной границей для пространства $L_2(0,1)$. Семейство оптимально локализовано в смысле константы неопределенности Брейтенбергера по параметру семейства и почти оптимально локализовано по параметру всплеска.

Теорема. *Пусть последовательность 2^j-периодична по k*

$$\nu_k^{j,a} := \begin{cases} e^{-\frac{k^2+a^2}{(j-1)(j-2)a}}, & k = -2^{j-2}+1, \dots, 2^{j-2}, \\ \sqrt{1 - e^{-\frac{2((k-2^{j-1})^2+a^2)}{(j-1)(j-2)a}}}, & k = 2^{j-2}+1, \dots, 3 \times 2^{j-2}, \end{cases}$$

определим $\widehat{\xi_j^a}(k) := \prod_{r=j+1}^{\infty} \nu_k^{r,a}$. *Тогда*

$$\widehat{\varphi_j^a}(k) := 2^{-j/2}\widehat{\xi_j^a}(k), \;\; \mu_k^{j,a} := \sqrt{2}\nu_k^{j,a},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00162) и гранта президента РФ МК-7413.2010.1.

$$\lambda_k^{j,a} := e^{2\pi i 2^{-j}k}\mu_{k+2^{j-1}}^{j,a},\ \widehat{\psi}_j^a(k) := \lambda_k^{j+1,a}\widehat{\varphi}_j^a(k);$$

семейство $\Psi_a := \left\{\boldsymbol{1}, \psi_{j,k}^a :\ j = 0, 1, \ldots,\ k = 0, \ldots, 2^j - 1\right\}$, *образует нормализованный жесткий фрейм для* $L_2(0,\,1)$. *Далее,*

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1} UC(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}} UC(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}.$$
$$\lim_{j\to\infty} UC(\psi_j^a) = \frac{3}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} UC(\psi_j^a) = \frac{1}{2}.$$

При работе с периодическими всплесками мы пользуемся определениями, данными в [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Breitenberger E.* Uncertainty measures and uncertainty relations for angle observables // Found. Phys. 1985. Vol. 15. P. 353–364.

2. *Skopina M. A.* Multiresolution analysis of periodic functions // EJA. 1997. Vol. 3, № 2. P. 203–224.

3. *Koh Y. W., Lee S. L., Tan H. H.* Periodic Orthogonal Splines and Wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2 (1995). P. 201–218.

С. В. Лексина, Е. А. Козлова (Самара)
lesveta@rambler.ru

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрена система уравнений в частных производных

$$u_{tt} - Au_{xx} + Cu = 0,$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ — вектор-функция, A, C — постоянные квадратные матрицы порядка 2, для которых верно $AC = CA$, собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A положительны и $\lambda_1 > \lambda_2$.

Задача состоит в том, чтобы в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$ при $T > \frac{l}{\sqrt{\lambda_2}}$ построить решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l,$$

и финальным условиям

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l,$$

что позволит в явном виде найти вектор-функции

$$\mu(t) = u(0,t), \quad \nu(t) = u(l,t), \quad 0 \le t \le T,$$

определяющие граничные управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 5. С. 600–603.

2. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 843–849.

А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа (Волгоград)
alexander.losev@volsu.ru, lmazepa@rambler.ru

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В работе изучается поведение целых решений неравенств

$$Lu \equiv div(A(|\nabla u|)\nabla u) \ge c(x)f(u) \tag{1}$$

на модельных римановых многообразиях M.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbb{R}^n$ и некоторую гладкую функцию $q(r)$ на $[0,+\infty)$ такую, что $q(0) = 0$ и $q'(0) = 1$. Определим модельное риманово многообразие M следующим образом:

1) множество точек M является $\mathbb{R}^n$;

2) в полярных координатах (r,θ) риманова метрика определяется как

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2.$$

Будем считать, что функция A удовлетворяет условиям: $A(p) > 0$, $(pA(p))' > 0$ при $p > 0$, $c(x) \equiv c(r)$ — положительная на $[0,+\infty)$ функция, а функция $f \not\equiv 0$ такова, что $f(u) \ge 0$ при $u \ge 0$ и $f(0) = 0$. Кроме того, будем предполагать, что существует неубывающая функция $g \in C(0,\infty)$ такая, что при $u > 0$ выполнено

$$0 < g(u) \le f(u).$$

Введем обозначение

$$I(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r c(r)q^{n-1}(s)\,ds.$$

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ *и* $\limsup\limits_{p\to\infty} I(p) = \infty$. *Тогда на* M *не существует целых положительных решений неравенства* (1).

Кроме того, в работе найдены условия отсутствия целых положительных решений в случае $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$.

Также найдены достаточные условия существования нетривиальных целых положительных решений неравенства (1) и мощность их множества.

Т. П. Лукашенко (Москва)
lukashenko@mail.ru

РЕКУРСИВНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ – СТИЛТЬЕСА[1]

В $[1, 2]$ были введены орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах и в некоторых функциональных пространствах. Рассмотрим рекурсивные разложения Фурье – Стилтьеса на отрезках.

Определение. Пусть функция F непрерывна на $[a, b]$, а φ_k — последовательность функций ограниченной вариации на $[a, b]$, Φ_k — их первообразные, $\Phi_k(a) = 0$. Определим *рекурсивное разложение Фурье – Стилтьеса* функции F по последовательности функций φ_k: 1) $r_0 = F$; 2) если для натурального k задан остаток приближения — непрерывная на $[a, b]$ функция r_{k-1}, то $\widehat{dF}_k = (R-S)\int\limits_I \overline{\varphi_k}\, dr_{k-1}$ и $r_k = r_{k-1} - \widehat{dF}_k\Phi_k$. Ряд $S(dF) = \sum\limits_k \widehat{dF}_k\varphi_k$ — *рекурсивный ряд Фурье – Стилтьеса* (RFS-ряд) F, а $S(F) = \sum\limits_k \widehat{dF}_k\Phi_k$ — *рекурсивный интегрированный ряд Фурье – Стилтьеса* (RIFS-ряд) F.

Пусть $\{v_k\}_{k=o}^{\infty}$ — последовательность различных точек отрезка $[a, b]$, причем $v_0 = a$, $v_1 = b$. Определим ортогональную систему функций φ_k на $[a, b]$: $\varphi_1 \equiv \frac{1}{b-a}$; при $k > 1$ пусть $a_k = \max\{v_j : v_j < v_k, j < k\}$, $b_k = \min\{v_j : v_j > v_k, j < k\}$, $\varphi_k(x)$ равна 0 при $x \notin [a_k, b_k]$, $\frac{1}{v_k - a_k}$ при $x \in (a_k, v_k)$, $-\frac{1}{b_k - v_k}$ при $x \in (v_k, b_k)$, $\varphi_k(a) = \varphi_k(a+0)$, $\varphi_k(b) = \varphi_k(b-0)$, все точки разрыва φ_k регулярны.

Теорема. *Если* $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ *всюду плотна на* $[a, b]$, *то 1) если* $F(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то RIFS-ряд* F *равномерно сходится к* $F(x) - F(a)$ *на* $[a, b]$; *2) если* $F(x)$ *непрерывно дифференцируема на* $[a, b]$, *то RFS-ряд* F *равномерно сходится к* $F'(x)$ *на* $[a, b]$; *3) если* $F(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[a, b]$ *и* $F'(x) \in \mathrm{L}^p[a, b]$, $1 \leqslant p < \infty$, *то RFS-ряд* F *сходится к* $F'(x)$ *в пространстве* $\mathrm{L}^p[a, b]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

То же верно для системы неортогональных функций $\lambda_1 = \varphi_1$, при $k > 1$ $\lambda_{2k-2} = \varphi_k \chi_{[a,v_k)}$, $\lambda_{2k-1} = -\varphi_k \chi_{(v_k,b]}$, где χ — характеристическая функция, v_k — регулярная точка разрыва обеих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. 2001. № 1. С. 6–10.

2. *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 6. С. 1–6.

А. Л. Лукашов (Саратов, Стамбул),
С. В. Тышкевич (Саратов)
alukashov@fatih.edu.tr, s_tyshkevich@yahoo.com

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ НА ОТРЕЗКЕ[1]

Пусть $\mathcal{R}_N^{(A,B,\mathcal{A})}$ — класс рациональных тригонометрических функций вида

$$r_N(\varphi) = \\ = \frac{A\cos\frac{N}{2}\varphi + B\sin\frac{N}{2}\varphi + a_1\cos\left(\frac{N}{2}-1\right)\varphi + \ldots + b_{\left[\frac{N}{2}\right]}\sin\left(\frac{N}{2}-\left[\frac{N}{2}\right]\right)\varphi}{\sqrt{\mathcal{A}(\varphi)}},$$

где $N \in \mathbb{N}$, A, $B \in \mathbb{R}$, $A^2+B^2 \neq 0$, — фиксированные числа; $a_1, \ldots, b_{\left[\frac{N}{2}\right]} \in \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\varphi)$ — фиксированный тригонометрический полином порядка $a \leq N$ с действительными нулями, положительный на отрезке $\mathcal{E} = = [\alpha_1, \alpha_2]$, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$.

В зависимости от α_1 и α_2 минимум в задаче

$$\max_{\varphi\in\mathcal{E}} |r_N^*(\varphi)| = \min_{r_N \in \mathcal{R}_N^{(A,B,\mathcal{A})}} \max_{\varphi\in\mathcal{E}} |r_N(\varphi)|$$

достигается либо рациональной тригонометрической функцией вида [1, theorem 2], либо «эллиптической» функцией [2, corollary 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lukashov A. L.* Exact Solutions of Some Extremal Problems of Approximations Theory // Approximations Theory XIII: San Antonio 2010 (eds. M. Neamtu and L. Schumaker), Springer Proceedings in Mathematics 13, DOI 10.1007/978-1-4614-0772-0_13.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

2. *Lukashov A. L., Peherstorfer F.* Zeros of polynomials orthogonal on two arcs of the unit circle // J. Approx. Theory. 2005. Vol. 13. P. 42–71.

С. Ф. Лукомский (Саратов)
lukomskiisf@info.sgu.ru

ВСПЛЕСКОВЫЕ БАЗИСЫ РИССА НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ[1]

Пусть $(G, \dot{+})$ локально компактная нульмерная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ такой, что $\sharp(G_n/G_{n+1}) = p$, и p — простое число. Пусть $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — базисная последовательность в G, т. е. $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$. Через X обозначим группу всех характеров группы G, $(G_n^\perp)_{n\in\mathbb{Z}}$ — совокупность аннуляторов, $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ — функции Радемахера. Кратномасштабным анализом Рисса на $L_2(G)$ будем называть совокупность замкнутых подпространств V_n $n \in \mathbb{Z}$ таких, что 1) $V_n \subset V_{n+1}$; 2) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$; 3) $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}} V_n = L_2(G)$; 4) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(Ax) \in V_{n+1}$; 5) $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x\dot{-}h) \in V_0$ при всех $h \in H_0$; 6) существует функция $\varphi \in L_2(G)$ такая, что сдвиги $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ образуют базис Рисса в V_0.

Здесь $H_0 = \{x \in G : \ x = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-N}g_{-N}, N \in \mathbb{N}\}$, A — оператор сдвига, определенный равенством $Ax = \sum a_n g_{n-1}$, если $x = \sum a_n g_n$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in L_2(G)$ есть решение масштабирующего уравнения*

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h \varphi(Ax\dot{-}h) \quad \left(\sum_{h\in H_0} |\beta_h|^2 < +\infty\right)$$

и при некоторых A, $B > 0$ выполнено неравенство $A \cdot \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) \le |\hat{\varphi}(\chi)|^2 \le B \cdot \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)$. Тогда функция φ порождает КМА Рисса.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in L_2(G)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Определим функции $\psi_l(x)$ равенствами*

$$\psi_l(x) = \sum_{h\in H_0} \beta_h (r_0^l, A^{-1}h)\varphi(Ax\dot{-}h) \quad (l = \overline{0, p-1}).$$

Тогда $L_2(G) = \oplus W_{np+l}$ $(n \in \mathbb{Z}, l = \overline{0, p-1})$, где $W_{np+l} = \overline{\psi_l(A^n x\dot{-}h)}_{h\in H_0}$ и система $\psi_l(A^n x\dot{-}h)_{h\in H_0}$ образуют базис Рисса в W_{np+l}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский С. Ф.* Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы // Мат. сб. 2010. Т. 201(5). С. 41–64.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а).

С. М. Лыткин (Москва)
sergeml@rambler.ru

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СИСТЕМЕ СДВИГОВ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С КВАДРАТНЫМ ОСНОВАНИЕМ[1]

Пусть $\square = \{(x,y)\colon \max\{|x|,|y|\} \leqslant 1\}$, $\Diamond = \{(x,y)\colon |x|+|y| \leqslant 1\}$. Через $\Phi_\square$ и $\Phi_\Diamond$ обозначим непрерывные кусочно-линейные функции с носителями, сосредоточенными на квадратах $\square$ и $\Diamond$ соответственно; графиками этих функций являются правильные пирамиды с основаниями $\square$ и $\Diamond$.

Сожмём функции $\Phi_\square$ и $\Phi_\Diamond$ в N раз по каждой координате и определим на $\mathbb{R}^2$ следующую систему, состоящую из сдвигов этих сжатых функций:

$$\Phi_{ij}(x,y) = \begin{cases} \Phi_\square(Nx-i, Ny-j), & \text{если } i+j \text{ чётно}, \\ \Phi_\Diamond(Nx-i, Ny-j)), & \text{если } i+j \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Пространство кусочно-плоскостных функций, являющееся линейной оболочкой этой системы, обозначим через $\mathcal{S}_N$.

Пусть $H_{ij} = \operatorname{supp} \Phi_{ij}$ и $|H_{ij}|$ — площадь многоугольника H_{ij}, $i,j \in \mathbb{Z}$. Линейный оператор $T\colon L_1^{loc}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}_N$ определим как

$$Tf(x,y) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} c_{ij} \Phi_{ij}(x,y), \text{ где}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{|H_{ij}|} \iint\limits_{H_{ij}} f(x,y)(12\Phi_{ij}(x,y) - 3)\, dx\, dy, \quad i,j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Для всех $f \in \mathcal{S}_N$ выполняется равенство $Tf = f$.*

Теорема 2. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $\|Tf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$. Величина C_p монотонно убывает от $C_1 = 9$ до $C_\infty = \frac{19}{8}$.*

Приведённые результаты аналогичны тем, что были получены в работе [1] для пирамид с шестиугольным основанием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашенко Т. П., Лыткин С. М. Разложение по системе сдвигов пирамидальных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. 2009. № 4. С. 22–28.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы ведущих научных школ НШ-3252.2010.1.

М. Г. Магомед-Касумов (Махачкала)
rasuldev@gmail.com

СХОДИМОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ – ХААРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА $L^{p(x,y)}$[1]

Через $L^{p(t)}_{\mu}(E)$ [1] обозначим множество μ-измеримых функций $f(t)$, определенных на E и таких, что $\int\limits_E |f(t)|^{p(t)}\mu(dt) < \infty$:

$$L^{p(t)}_{\mu}(E) = \{f(t) : \int\limits_E |f(t)|^{p(t)}\mu(dt) < \infty\}.$$

В [2] было доказано, что система Хаара является базисом пространства $L^{p(t)}(0,1)$ тогда и только тогда, когда показатель $p(t)$, $t \in [0,1]$ удовлетворяет условию Дини – Липшица. Целью данной работы является обобщение этого результата на двумерный случай.

Пусть функция $p(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $E = [0,1]^2$. Говорят, что она удовлетворяет на E условию Дини – Липшица порядка $\alpha \geq 0$, если $\omega(p,E,\delta)\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha} \leq c \quad (0 < \delta \leq 1)$, где $c = c(E,p,\alpha)$, $\omega(p,E,\delta) = \sup\{|p(A) - p(B)| : A, B \in E, \rho(A,B) \leq \delta\}$.

Двумерные функции Хаара определяются через попарные произведения одномерных: $\chi_{sq}(x,y) = \chi_s(x)\chi_q(y)$, $(x,y) \in [0,1]^2$.

Пусть $f(x,y) \in L^{p(x,y)}([0,1]^2)$. Требуется исследовать сходимость частичных сумм Фурье – Хаара

$$S_{NM}(f,x,y) = \sum_{s=1}^{N}\sum_{q=1}^{M} c_{sq}\chi_s(x)\chi_q(y), \tag{1}$$

где $c_{sq} = \iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\chi_s(x)\chi_q(y)dxdy$.

Теорема. *Прямоугольные частичные суммы (1) сходятся в пространстве $L^{p(x,y)}([0,1]^2)$ к функции $f(x,y)$ при $N, M \to \infty$ в том случае, когда показатель $p(x,y)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица порядка $\alpha \geq 1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.

2. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

З. М. Магомедова (Махачкала)
alimn@mail.ru

О ПОЛИНОМАХ $\hat{l}_n(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ [1]

Пусть $T = \{t_j\}_{j=0}^{\infty}$ — сетка, состоящая из бесконечного числа различных точек полуоси $[0,\infty) : 0 = t_0 < t_1 < \dots$ Обозначим $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \dots$, причем предполагается, что $\sup\limits_{0\le j<\infty} \Delta t_j < \infty$, $\sup\limits_{0\le j<\infty} t_j = +\infty$, $\delta = \sup\limits_{0\le j\le\infty} \Delta x_j$. Рассмотрим еще одну сетку $X = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, состоящую из бесконечного множества точек x_j, где $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$, $j = 0, 1, \dots$ Далее, через

$$\hat{l}_k(x) = \hat{l}_k(x,T) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X в следующем смысле (n, $m = 0, 1, \dots$) :

$$(\hat{l}_n, \hat{l}_m) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j} \hat{l}_n(x_j) \hat{l}_m(x_j) \Delta t_j = \delta_{nm}.$$

В настоящей работе, по аналогии с работами профессора И. И. Шарапудинова [1], исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{l}_n(x)$ при n, $N \longrightarrow \infty$, где $N = 1/\delta$. А именно, установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лагерра $\hat{L}_n(x)$ [2].

Далее нам также удалось показать, что для функции

$$\Lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \hat{l}_k(x) \hat{l}_k(t_j) \right| e^{-x_j} \Delta t_j$$

при $n = O(\delta^{-2/3})$ относительно $x \in [0,\infty)$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $0 \le x \le 3/s$, *то справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le C s^{3/2}.$$

Теорема 2. *Если* $3/s \le x \le s/2$, *то справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le C s^{3/2} x^{-1/2} \ln s.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00143а)

Теорема 3. *Если $s/2 \le x \le 3s/2$, то справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le Cs^{17/12}(s^{1/3} + |x-s|)^{-1/4} \ln s.$$

Теорема 4. *При $x \ge 3s/2$ справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le Cs^{3/2}e^{-3s/4}.$$

В заключении хочу выразить благодарность моему научному руководителю И. И. Шарапудинову и М. Ш. Джамалову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: ДНЦ, 2004. 276 с.

2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

З. М. Магомедова (Махачкала)
alimn@mail.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{l}_n^\alpha(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ [1]

Пусть $X = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ — сетка, состоящая из бесконечного числа различных точек полуоси $[0, \infty) : 0 = x_0 < x_1 < \ldots$. Обозначим $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \ldots$, причем предполагается, что $\sup\limits_{0 \le j < \infty} \Delta x_j < \infty$, $\sup\limits_{0 \le j < \infty} x_j = +\infty$, $\delta = \sup\limits_{0 \le j \le \infty} \Delta x_j$. Через

$$\hat{l}_k^\alpha(x) = \hat{l}_k^\alpha(x; X) \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке X в следующем смысле (n, $m = 0, 1, \ldots$):

$$(\hat{l}_n^\alpha, \hat{l}_m^\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}) \hat{l}_n^\alpha(x_j) \hat{l}_m^\alpha(x_j) = \delta_{nm} \quad (-1 < \alpha \le 0),$$

$$(\hat{l}_n^\alpha, \hat{l}_m^\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}) \hat{l}_n^\alpha(x_{j+1}) \hat{l}_m^\alpha(x_{j+1}) = \delta_{nm} \quad (\alpha > 0).$$

В настоящей работе, по аналогии с работами профессора И. И. Шарапудинова [1], исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{l}_n(x)$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00143а)

при n, $N \longrightarrow \infty$, где $N = 1/\delta$. А именно, установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению многочленов Лагерра $\hat{L}_n^\alpha(x)$ [2].

Далее нам также удалось показать, что для функций

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{l}_k^\alpha(x)\hat{l}_k^\alpha(x_j)\right|e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}) \quad (-1<\alpha\le 0)$$

и

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{l}_k^\alpha(x)\hat{l}_k^\alpha(x_{j+1})\right|e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}) \quad (\alpha>0)$$

при $n = O(\delta^{-2/3})$ относительно $x \in [0,\infty)$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $0 \le x \le 3/s$, *то справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le Cs^{3/2+3\alpha/4}.$$

Теорема 2.*Если* $3/s \le x \le s/2$, *то справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le Cs^{\alpha+2}\ln s.$$

Теорема 3. *Если* $s/2 \le x \le 3s/2$, *то справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le Cs^{-\alpha+17/12}(s^{1/3}+|x-s|)^{-1/4}\ln s.$$

Теорема 4. *При* $x \ge 3s/2$ *справедлива оценка*

$$\Lambda_n(x) \le Cs^{3/2}e^{-3s/4}.$$

В заключении хочу выразить благодарность моему научному руководителю И. И. Шарапудинову и М. Ш. Джамалову за поставленную задачу, а также за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала: ДНЦ, 2004. 276 с.

2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

Т. В. Мазур (Саратов)
Xtmprsqzntwlfb@gmail.com

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ[1]

Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на звездообразном графе T, заданном в [1]: $l_j y_j := -(y_j^{[1]})' - \sigma_j(x) y_j^{[1]} - \sigma_j^2(x) y_j = \lambda y_j$, $x \in [0,1]$, $j = \overline{1,p}$, где $y_j^{[1]} := y_j' - \sigma_j y_j$, $y_j \in W_2^1[0,1]$, $y_j^{[1]} \in W_1^1[0,1]$, $l_j y_j \in L_2[0,1]$, $\sigma_j \in L_2[0,1]$.

Определим *вектор Вейля* $M(\lambda)$ аналогично [1] и рассмотрим следующую обратную задачу: по заданному вектору Вейля M определить потенциал σ. Выберем и зафиксируем модельный оператор с потенциалом $\tilde{\sigma}$. Определим S как отображение, ставящее некоторому потенциалу σ^* в соответствие потенциал $\bar{\sigma}^*$: по заданному σ^* построим для каждого λ решения $\varphi_j(x,\lambda)$ задачи Коши из [1]; подставляя их в соотношения из [1], получим новый потенциал $\bar{\sigma}^*$.

Теорема. *Потенциал σ, являющийся решением обратной задачи для данного M, является неподвижной точкой отображения S.*

Метод доказательства даёт конструктивный алгоритм решения обратной задачи Штурма – Лиувилля на звездообразном графе, использующий соотношения метода спектральных отображений и требующий относительно небольшого количества операций. В качестве приближённого решения принимается неподвижная точка отображения S_N, определяемого соотношениями, аналогичными соотношениям S : $\sigma_k(x) = -m_k(x) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\varphi_k(x,\lambda) - \tilde{\varphi}_k(x,\lambda))\tilde{\varphi}_k(x,\lambda)\hat{M}_k(\lambda)d\lambda$, $m_k(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_N} \rho \hat{M}_k(\rho^2)\cos 2\rho x d\rho$, где $\gamma_N = \gamma_N(\tau) := (-N + i\tau, N + i\tau)$, Γ — контур в λ-плоскости, являющийся отображением γ_N при $\lambda = \rho^2$. Неподвижная точка ищется с помощью модификации метода последовательных приближений, предложенной в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freiling G., Ignatiev M., Yurko V.* An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operators with singular potentials on star-type graphs // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, 2008. Vol. 77. P. 397–408.

2. *Ignatiev M., Yurko V.* Numerical Methods for Solving Inverse Sturm – Liouville Problems // Results in Math. 2008. Vol. 52, № 1–2. P. 63–74.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

А. Н. Малютина, М. А. Елизарова (Томск)
ndm@main.tusur.ru, elma@tpu.ru

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ, ЗАДАННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ $G \subset R^n$[1]

Теорема 1. *Пусть G — произвольная ограниченная область в R^n, $n \geq 2$, $f\colon G \to \overline{R^n}$ – нормальное отображение* [1] *с s-усредненной характеристикой* [2], *$\gamma\colon [0,1) \to G$, $\lim\limits_{t\to 1} d_G(\gamma(t), \partial G) = 0$, множество $E \subset A_G(\gamma, T)$ для некоторого $T > 0$ и $\overline{E} \cap \partial G \neq \varnothing$. Если существует $\lim\limits_{x\to\partial G,\ x\in E} f(x) = 0$ и $\operatorname{cap}\underline{\operatorname{dens}}\,(E, \gamma, T_1) > 0$ для некоторого числа T_1, то для любого $T > 0$ существует угловой предел $\lim\limits_{x\to\partial G,\ x\in A_G(\gamma,T)} f(x) = 0$.*

Замечание. В случае, когда $G = B^n$, теорема 1 является усилением теоремы 1 [3]. Отметим, что множество E, для которого существует $\lim\limits_{x\to\partial G,\ x\in E} f(x) = 0$, должно лежать внутри угла $A(b, \varphi_0, t)$ с вершиной в точке b раствора $\varphi_0 < \pi/2$. На необходимость такого рода условия указывает, построенный С. Рикманом в [4], пример ограниченного квазирегулярного отображения $f\colon B^n \to B^n$, которое в точке $b \in S^{n-1}$ имеет бесконечно много асимптотических значений и не имеет в этой точке углового предела. Теорема 1 усиливает некоторые результаты, полученные М. Вуориненом в [1] и А. Симушевым в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vuorinen Matti* On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings // Ark. for matem. 1980. Vol. 18, № 2. P. 157–180.

2. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой // Вестн. Томск. ун-та. 2007. № 300(1). С. 124–129.

3. *Малютина А. Н., Елизарова М. А.* О существовании углового предела для отображений с s-усредненной характеристикой, заданных на единичном шаре B^n // Деп. в ВИНИТИ 12.10.11, № 445В2011.

4. *Martio O, Rickman S.* Boundary behavior of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1969. № 448. P. 1–40.

5. *Симушев А. А.* Теоремы единственности для пространственных нормальных квазимероморфных отображений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 305–309.

[1]Работа выполнена в рамках контракта П937 по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

А. Н. Малютина, М. А. Елизарова (Томск)
ndm@main.tusur.ru, elma@tpu.ru

КРИТЕРИИ НОРМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ, ЗАДАННЫХ НА ШАРЕ $B^n \subset R^n$[1]

Теорема 1. *Произвольное отображение с s-усредненной характеристикой* [1], $f\colon B^n \to \overline{R^n}$, $n \geq 2$, *является нормальным* [2] *тогда и только тогда, когда для некоторого положительного числа M неравенство*

$$\sigma\left[f(w_1), f(w_2)\right] \leq M \cdot q(w_1, w_2)^{\alpha},$$

где $\alpha = K^{1/(1-n)}$, выполняется для любых точек w_1, w_2 из B^n.

Теорема 2. *Пусть $f\colon B^n \to \overline{R^n}$ — нормальное отображение с s-усредненной характеристикой, точка $b \in S^{n-1}$, число $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, множество $E \subset V(b, \varphi_0, 1)$, $b \in \overline{E}$. Если предел $\lim\limits_{x \to b,\ x \in E} f(x) = 0$ и* $\operatorname{cap}\underline{\operatorname{dens}}\,(E, b) > 0$, *то f имеет нулевой угловой предел в точке b.*

Теорема 3. *Пусть $f\colon B^n \to \overline{R^n}$ — произвольное нормальное отображение с s-усредненной характеристикой, обладающее свойством: для каждого числа $r \in (0,1)$ справедливо неравенство $N\left(f, \overline{B^n}(r)\right) \leq c \cdot (1 - r)^{-s}$, $c \in (0, +\infty)$, $s \in [0, n-1)$. Если для некоторого измеримого множества $A \subset S^{n-1}$ с $\varpi(A) > 0$ и некоторого семейства конусов Δ_b, $b \in A$, пересечение угловых предельных множеств $\cap\, e\,(f, b, \Delta_b)$ по всем $b \in A$ непусто, то $f = \mathrm{const}$.*

Теорема 1 усиливает некоторые результаты, полученные О. Мартином и С. Рикманом в [3] и А. Симушевым в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н., Елизарова М.А.* Оценки искажения модулей для отображений с s-усредненной характеристикой // Вестн. ТГУ. Математика и механика. 2010. № 2(10). С. 5–15.

2. *Vuorinen Matti.* On the existence of angular limits of n-dimensional quasiconformal mappings // Ark. for matem. 1980. Vol. 18, № 2. P. 157–180.

3. *Martio O., Rickman S.* Boundary behavior of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1969. № 448. P. 1–40.

4. *Симушев А. А.* Теоремы единственности для пространственных нормальных квазимероморфных отображений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 305–309.

[1]Работа выполнена в рамках контракта П937 по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

3. *Малютина А.Н., Елизарова М.А.* О существовании углового предела для отображений с s-усредненной характеристикой, заданных на единичном шаре B^n // Деп. в ВИНИТИ 12.10.11, № 445В2011.

Т. С. Мардвилко (Минск)
mardvilko@mail.ru

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ КВАЗИНОРМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОЙ И ПЛОСКОЙ МЕР

Пусть $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Через $L_p(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство Лебега комплексных измеримых на $\mathbb{R}$ функций f со стандартной квазинормой.Через $L_{p,\mu}(\Pi)$ обозначим пространство Лебега комплексных измеримых в Π относительно плоской меры m_2 функций f, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{L_{p,\mu}(\Pi)} = \left(\int\limits_{\Pi} (\operatorname{Im} z)^{p\mu-1} |f(z)|^p \, dm_2(z) \right)^{1/p}, \quad p > 0, \quad \mu > 0.$$

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим множество рациональных функций r степени не выше n.

Автором совместно с А. А. Пекарским [1] получена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть p и μ положительные числа такие, что* $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$. *Тогда для* $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p,\mu}(\Pi)$, $n \geq 1$, *выполняется неравенство*

$$\|r\|_{L_\lambda(\mathbb{R})} \leq cn^{\mu} \|r\|_{L_{p,\mu}(\Pi)}, \quad c = c(p, \mu) > 0.$$

Условие $\dfrac{1}{p} + \mu \notin \mathbb{N}$ в теореме 1 является существенным. Можно привести пример рациональной функции для которой теорема 1 не выполняется, когда $\dfrac{1}{p} + \mu \in \mathbb{N}$.

Полученное экстремальное неравенство позволило нам доказать точную обратную теорему рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана [1]. Частный случай теоремы 1, $\mu = 1/p$, можно найти также в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мардвилко Т. С., Пекарский А. А.* Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 9. С. 77–96.

2. *Мардвилко Т. С.* Неравенство для квазинорм рациональной функции относительно линейной и плоской мер и его приложения // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 41–48.

Е. А. Мещерякова (Саратов)
narelena@yandex.ru

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ АСФЕРИЧНОСТИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА[1]

Пусть D выпуклое тело из $\mathbb{R}^p$, $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Задачей об асферичности тела D называется задача о минимизации отношения радиуса описанного шара для этого тела к радиусу вписанного шара за счет выбора единого центра этих шаров, то есть

$$\varphi\,(x) \equiv \frac{R(x)}{\rho(x)} \longrightarrow \min_{x\in D}, \tag{1}$$

где

$$R(x) = \max_{y\in D} n(x-y), \quad \rho(x) = \min_{y\in\Omega} n(x-y), \quad \Omega = \overline{\mathbb{R}^p \backslash D}.$$

Известно ([1]), что функция $\varphi\,(x)$ является квазивыпуклой и субдифференцируемой в смысле В. Ф. Демьянова – А. М. Рубинова ([2]), но, в общем случае не является выпуклой. Как показывают примеры, решение задачи (1) может быть неединственным.

Теорема. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*

1) D — строго выпуклое тело,

2) выпуклое тело D обладает центральной симметрией и при этом либо

а) $n(x)$ — строго квазивыпуклая норма, либо

б) размерность пространства $p = 2$,

то задача (1) *имеет единственное решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мещерякова Е. А.* О двух задачах по оценке выпуклого компакта шаром // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 48–50.

2. *Демьянов В. Ф. Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

В. Р. Мисюк (Гродно, Беларусь)
misiuk@grsu.by

О НЕКТОРЫХ НАИЛУЧШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n. Для функции f из пространства Харди H_p, $0 < p \leqslant \infty$, в круге $D = \{z : |z| < 1\}$, через $E_n(f)_p$ обозначим её наилучшее приближение посредством множества $\mathcal{P}_n$. Хорошо известно следующая импликация, называемая соответственно теоремой типа Джексона:

$$f^{(s)} \in H_p \quad \Longrightarrow \quad E_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{H_p} \quad \text{при} \quad n \geqslant s,$$

где $c > 0$ и зависит лишь от p и s, а $f^{(s)}$ — s-я производная ($s \in \mathbb{N}$) функции f. Для $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ введём в рассмотрение функцию $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$, где главная ветвь степени берётся в области $\mathbb{C} \backslash [1, \infty)$. Из выше упомянутой импликации можно показать, что при $n \to \infty$ имеет место слабая эквивалентность:

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha - \frac{1}{p}}, \quad \alpha \in \left(-\frac{1}{p}, \infty\right) \backslash \mathbb{Z}\,.$$

Через $A_p = A_p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначим пространство Бегмана аналитических функций f в D, наделённых конечной квазинормой $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$) относительно плоской меры Лебега. Для $f \in A_p(D)$ введём

$$E_n(f)_{A_p} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{A_p(D)}, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве A_p посредством множества $\mathcal{P}_n$. Запишем аналог теоремы типа Джексона [1] в пространстве Бергмана: *если $s \in \mathbb{N}$ и $f^{(s)} \in A_p(D)$, $0 < p < \infty$, то*

$$E_n(f)_{A_p} \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{A_p}, \qquad n = s,\, s+1,\, \ldots\ ,$$

где $c > 0$ и не зависит от f и n.

Так нами показано, что при $n \to \infty$ имеет место соответствующая слабая эквивалентность

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha - \frac{2}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{2}{p}, \quad \infty\right) \backslash \mathbb{Z}\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мисюк В. Р.* Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана // Веснiк ГрДУ iмя Я. Купалы. Сер. 2. Фiзыка. Матэматыка. Iнфарматыка. 2006. № 1. С. 58–62.

В. С. Мокейчев (Казань)
Valery.Mokeychev@ksu.ru

ТЕОРЕМА БРАУЕРА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ (ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И УТОЧНЕНИЯ)

В 1903 году на математическом конгрессе Брауер сообщил об утверждении: *если функция f непрерывно отображает замкнутый, выпуклый симплекс из R^n в себя, то функция имеет неподвижную точку.* В 1910 году было опубликовано частично подробное доказательство. Оно содержит сложные топологические рассуждения, специальные топологические объекты. Не случайно, нет учебников, по крайней мере, в России, где подробно была бы доказана эта теорема. Теорема Брауера была обобщена на случай, когда вместо симплекса используется ограниченное, замкнутое, выпуклое множество. Она не даёт ответ на вопрос: в каких случаях имеется не менее двух неподвижных точек. Предлагается простое доказательство теоремы Брауера и выделяются случае, когда неподвижных точек не менее двух. В доказательстве *будут использоваться только те результаты, которые были известны задолго до появления теоремы Брауера.* Ниже $g(\tau, \xi)$ — скалярная, непрерывная, вещественная функция аргументов $\tau \in [a,\ b] \subset R^{n-1}$, $\xi \in [a_n, b_n] \in R$, удовлетворяющая условиям $g(\tau, a_n) > 0$, $g(\tau, b_n) < 0$, $\xi(\tau)$ — наименьший корень уравнения $g(\tau, \xi) = 0$. Функция $g(\tau, \xi)$ (как функция аргумента $\xi \in R$) меняет знак в точке $\xi(\tau)$, если существуют $x_k \to \xi(\tau - 0)$, $y_k \to \xi(\tau + 0)$, для которых $g(\tau, x_k)g(\tau, y_k) < 0$.

Лемма 1. *Если в точке $\xi(\tau)$ функция $g(\tau, \xi)$ (как функция аргумента ξ) меняет знак, то $\xi(\tau)$ непрерывно зависит от τ.*

Лемма 2. *Для каждого ε существует такая непрерывная функция $g_\varepsilon(\tau.\xi)$, что $|g(\tau, \xi) - g_\varepsilon(\tau, \xi)| < \varepsilon$, и функция $g_\varepsilon(\tau, \xi)$ (как функция аргумента ξ) меняет знак в точке $\xi_\varepsilon(\tau)$ — наименьшего корня уравнения $g_\varepsilon(\tau, \xi) = 0$.*

С использованием этих лемм методом математической индукции доказывается теорема Брауера для случая $f : [\hat{a}, \hat{b}] \to (\hat{a}, \hat{b}) \subset R^n$. Так как непрерывная на замкнутом, звёздном множестве $\Omega \subset R^n$ функция f со значениями в Ω продолжается до непрерывной функции $\hat{f} : [\hat{a}, \hat{b}] \to \Omega \subset \subset (\hat{a}, \hat{b})$, то теорема Брауера верна для звёздных множеств.

Неподвижная точка построена с использование наименьших корней. Если используем наибольшие корни, то также будет построена неподвижная точка. В частности, если хотя бы при одной координате $f_j(\tau, \xi)$ наименьший $\xi(\tau)$ и наибольший $\eta(\tau)$ корни уравнения $f_j(\tau, \xi) - \xi = 0$ удовлетворяют условию $\min|\xi(\tau) - \eta(\tau)| > 0$, то у f, по крайней мере, — две неподвижные точки.

С. Р. Насыров (Казань)
snasyrov@ksu.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УРАВНЕНИЕ Ф. Д. ГАХОВА[1]

В докладе дается обзор результатов о разрешимости внешних обратных и смешанных обратных краевых задач, ставятся нерешенные проблемы.

Обратные и смешанные обратные краевые задачи или краевые задачи с неизвестной (свободной) границей являются важным разделом теории функций комплексного переменного (см., напр., [1–3]). Они состоят в определении области D_z с полностью или частично неизвестной границей и голоморфной в ней функции $w = w(z)$ по краевым условиям на границе этой области. При этом, на неизвестных участках границы краевые условия задаются в терминах некоторого геометрического параметра: дуговой абсциссы s, декартовой координаты x или y, полярной координаты r или φ. Если граница области полностью неизвестна, то такая задача называется обратной, если частично неизвестна — то смешанной обратной.

Решение задачи, как правило, сводится к определению функции $z = z(\zeta)$, конформно отображающей каноническую область D_ζ на область D_z. В односвязном случае в качестве D_ζ, как правило, берется единичный круг или верхняя полуплоскость. Поскольку по функции $z = z(\zeta)$ однозначно определяются область D_z и функция $w = w(z)$, то часто именно эту функцию и называют решением задачи.

Если искомая область содержит внутри себя бесконечно удаленную точку, то соответствующая задача называется внешней. В этом случае функция $z = z(\zeta)$ имеет полюс в некоторой точке $\zeta_0 \in D_\zeta$. При этом возникает условие разрешимости задачи, которое можно рассматривать как уравнение для определения точки ζ_0.

Впервые такое уравнение получил Ф. Д. Гахов для обратной краевой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00762).

задачи по параметру s (см., напр., [4]). Это уравнение имеет вид

$$\frac{f''(\zeta_0)}{f''(\zeta_0)} = \frac{2\overline{\zeta_0}}{1 - |\zeta_0|^2}. \tag{$*$}$$

Здесь f — голоморфная функция, однозначно определяемая по краевым условиям, в качестве D_ζ берется единичный круг. Множество решений уравнения $(*)$ — это множество решений некоторой полианалитической функции. Ф. Д. Гахов доказал разрешимость уравнения $(*)$. В дальнейшем уравнение $(*)$ и его обобщения стали называть уравнением Гахова.

Исследование многих известных математиков связаны с изучением множества корней уравнения $(*)$. В этой связи можно упомянуть работы проф. Л. А. Аксентьева и его учеников. В частности, Л. А. Аксентьевым было замечено, что решения уравнения Гахова соответствуют критическим точкам поверхности, которая является графиком отображения — внутреннего радиуса области как функции от ее точки. Основное внимание было уделено вопросам единственности решения уравнения $(*)$. Однако только в 1990 г. в [5] было установлено, что множество корней уравнения $(*)$ конечно. Также в этой статье было описано структура множества корней уравнения Гахова в многосвязном случае (за D_ζ берется n-круговая область). Было показано, что множество решений непусто и состоит из объединения не более чем конечного числа точек и не более чем конечного числа гомологически независимых в D_ζ замкнутых аналитических кривых. До сих пор остается открытым вопрос: *существуют ли примеры, в которых число замкнутых аналитических кривых в множестве корней уравнения Гахова равно заданному значению* k, $2 \leq k \leq n - 1$?

Уравнение Гахова для смешанных обратных краевых задач по параметру x было впервые получено в [6]. Далее оно обобщалось в работах [7, 8] на случай, когда смешанная обратная краевая задача рассматривается на полигональной римановой поверхности, которая имеет точку ветвления над бесконечно удаленной точкой. Было показано, что соответствующее уравнение Гахова разрешимо. Однако не решенным остается вопрос *о структуре корней этого уравнения.* Кроме того, разрешимость уравнения Гахова является только необходимым условием разрешимости задачи. Актуальной является *проблема разрешимости внешней обратной краевой задачи по параметру x как на плоскости, так и на римановой поверхности.* Не исследован и вопрос *о разрешимости уравнения Гахова на римановой поверхности с несколькими точками, лежащими над* ∞.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. 333 с.

2. *Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г.* Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Мат. анализ Т. 18. (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ. 1980. С. 69–126.

3. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1977. 424 с.

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 2-е изд, 1977. 641 с.

5. *Киселев А.В., Насыров С.Р.* О структуре множества корней уравнения Ф.Д.Гахова для односвязной и многосвязной областей // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1990. Вып. 24. С. 105–115.

6. *Насыров С. Р., Галиуллина Г. Р.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 25–30.

7. *Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x на полигональной римановой поверхности с простой точкой ветвления на бесконечности // Учен. записки Казанск. гос. ун-та. 2008. Т. 150. Сер. физ.-мат. Кн. 1. С. 91–101.

8. *Насыров С. Р., Низамиева Л. Ю.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи на римановой поверхности с точкой ветвления на бесконечности произвольного порядка // Вестн. Самарского гос. ун-та. Сер. естественнонаучн. 2009. No 4. С. 28–42.

В. В. Новиков (Саратов)

vvnovikov@yandex.ru

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИРКГОФА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ[1]

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на $\mathbb{R}$ 2π-периодических функций с равномерной нормой. Обозначим через $Q_n(f,x)$, $n = 1,2,\ldots$, тригонометрический (0,2,3)-интерполяционный многочлен Биркгофа (см., например, [1]) функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$ такой, что

$$Q_n(f,x_{k,n}) = f(x_{k,n}), \quad Q_n''(f,x_{k,n}) = Q_n'''(f,x_{k,n}) = 0, \quad k = \overline{-n,n}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Пусть, далее, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty$. Говорят, что f есть функция ограниченной упорядоченной Λ–вариации (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если

$$\sup_{\Pi} \sum_{k} \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

где супремум берется по всем системам Π неналегающих замкнутых интервалов вида

$$I_k := [t_{2k-1}, t_{2k}] \subset [-\pi, \pi], \quad k = 1, 2, \ldots,$$

таких, что $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ (запись $I_k < I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно, правее, чем I_{k+1}). При $\Lambda = \{1/k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующий класс обозначается $OHBV$ (гармоническая вариация).

Теорема. *Для любой функции $f \in C_{2\pi} \cap OHBV$ последовательность многочленов $Q_n(f, x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к f равномерно на всей числовой прямой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Varma A. K., Vertesi P.* Equiconvergence of Some Lacunary Trigonometric Interpolation Polynomials // J. Approx. Theory. 1987. Vol. 50. P. 185–191.

А. А. Нурмагомедов (Махачкала)
alimn@mail.ru

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Пусть $\Omega = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество, состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1, 1] : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N = \{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, где $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Через

$$\hat{p}_{k,N}(x) = \hat{p}_k(x; \Omega) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в следующем смысле $(0 \le n, m \le N-1)$:

$$(\hat{p}_{n,N}, \hat{p}_{m,N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{n,N}(x_j) \hat{p}_{m,N}(x_j) \Delta t_j = \delta_{nm},$$

где $\triangle t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max_{0\le j\le N-1}\Delta t_j$, $\varkappa_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В. А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$, $C[-1,\,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций.

В работе [4] исследованы асимптотические свойства многочлена $\hat{p}_{n,N}(x)$ при n, $N\to\infty$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f\in C[-1,1]$, $0<b<1$, $0<a\le\left(\frac{1-b}{2\varkappa_2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $n=O(\delta_N^{-2/7})$. *Тогда справедливо неравенство* $(-1\le x\le 1)$

$$L_{n,N}(x)\le c(a,b)n^{1/2},$$

где

$$L_{n,N}(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{p}_{k,N}(x)\hat{p}_{k,N}(x_j)\right|\Delta t_j.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функция Лебега сумм Фурье – Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. 1968. № 1. С. 11–23.

2. *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье – Якоби // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 6. С. 1263–1283.

3. *Шарапудинов И. И.* О сходимости метода наименьших квадратов // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 3. С. 131–143.

4. *Нурмагомедов А. А.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 25–31.

О. В. Охлупина (Брянск)
helga131081@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ В КЛАССАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть C — комплексная плоскость, $SH(C)$ — множество всех субгармонических в C функций, Ω_ρ — класс положительных функций из $C^1(R_+)$, $R_+=(0;+\infty)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\alpha_\omega=\sup_{x\in R_+}\frac{x\cdot|\omega'(x)|}{\omega(x)}<+\infty$,

2) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\omega(x)}{x^{1+\rho}}dx<+\infty.$

Введём в рассмотрение класс функций

$$A^p_{\omega,\rho}=\left\{u\in SH(C):\left(\int\limits_1^{+\infty}\frac{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}u^+(re^{i\varphi})d\varphi\right)^p\omega(r)}{r^{1+\rho}}dr\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\right\},$$

$\rho>0$, $0<p<+\infty$,

$$A\left(\frac{z}{\zeta},q\right)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{\frac{z}{\zeta}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^2+...+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^q\right\}$$

— фактор Вейерштрасса, где q — наименьшее целое число, для которого $\int\limits_0^{+\infty}t^{-q-1}n(t)dt=+\infty$, $q>0$, $|z|<t$.

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть* $0<p<+\infty$, $\rho>0$, *и* $q\in Z_+$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\rho}{p}-1<q<\frac{\rho}{p}$$

(отношение ρ/p *не является целым числом при* $0<p\leq 1$*).*

Тогда класс функций $A^p_{\omega,\rho}(C)$ *совпадает с классом функций, допускающих представление:*

$$u(z)=\int\limits_C ln\left|A\left(\frac{z}{\zeta},q\right)\right|d\mu(\zeta)+h(z),$$

где $z,\zeta\in C$, $h(z)$ *— гармоническая функция в* C, *удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\left|h(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p\omega(r)}{r^{1+\rho}}dr<+\infty,$$

$\omega\in\Omega_\rho$, $\mu(\zeta)$ *— неотрицательная борелевская мера:*

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{n^p(r)\omega(r)}{r^{1+\rho}}dr<+\infty,$$

$n(r)=\mu(D_r)$, $0<r<+\infty$.

При $p=1$, $\omega(r)=r$ в случае целых функций указанное утверждение совпадает с классической теоремой Валирона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1979.

2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

3. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.

И. С. Панфилова (Саратов)

panfilova_inga@mail.ru

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ПОСТРОЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ УИТТЕКЕРА – КОТЕЛЬНИКОВА – ШЕННОНА

Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{p_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to \infty$ нули решения задачи Коши [1, (1.4)] или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, задачи Коши [1, (1.5)], попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим как [1, (1.6)]. Определим оператор, ставящий в соответствие любой заданной на отрезке $[0,\pi]$ функции f непрерывную функцию

$$T_\lambda(f,\ x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\ \lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\left[f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\right]+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0).$$

Теорема 1. *Пусть $f\in C[0,\ \pi]$ и функции q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию $[1,\ (2.1)]$ в случае задачи Коши $[1,\ (1.4)]$ или $[1,\ (2.2)]$ — в случае задачи $[1,\ (1.5)]$. Тогда если выполняется условие*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{0\le p\le n-1}\left|{\sum_{m=\tilde m_1}^{\tilde m_2}}{}'\,\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-f(x_{2m,\lambda})}{p-2m}\right|=0 \qquad (1)$$

(здесь $\tilde m_2$, $\tilde m_1$ определяются с помощью $[1,\ (2.13)]$, и если $\tilde m_2<\tilde m_1$, то сумма в (1) равна нулю), или эквивалентное ему условие

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{0\le p\le n-1}\left|{\sum_{m=0}^{[n/2]-1}}{}'\,\frac{f(x_{2m+1,\lambda})-f(x_{2m,\lambda})}{p-2m}\right|=0,$$

где штрих у сумм означает отсутствие слагаемого со знаменателем равным нулю, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\max_{x\in[0,\ \pi]}\left|\int_0^\pi (T_\lambda(f,\ x)-f(x))dx\right|=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108.

А. А. Пекарский (Минск)
pekarskii@gmail.com

О ТЕОРЕМЕ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СМИРНОВА

В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим односвязную ограниченную область G со спрямляемой жордановой границей ∂G. Через $E_p = E_p(G)$, $0 < p \le \infty$, обозначим пространство Смирнова [1] функций f аналитических в G, наделённых стандартной квазинормой $\|f\|_{E_p} = \|f\|_{L_p(\partial G)}$. Через $\mathcal{R}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, обозначим множество рациональных функций степени не выше n. Для $f \in E_p$ введём

$$R_n(f)_p = \inf\left\{\|f-r\|_{E_p} : r \in \mathcal{R}_n \cap E_p\right\}$$

— наилучшее приближение f посредством множества $\mathcal{R}_n$.

Пусть $0 < p \le \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $1/\sigma = s + 1/p$, f аналитична в G и $f^{(s)} \in E_\sigma$. Тогда (при указанных ниже дополнительных условиях на ∂G) $f \in E_p$ и

$$R_n(f)_p \le \frac{c}{n^s}\left\|f^{(s)}\right\|_{E_\sigma}, \quad n \ge s, \tag{1}$$

где $c > 0$ и не зависит от f.

Неравенство типа Джексона (1) получено нами в [2] при следующих условиях на ∂G: ∂G — кривая Лаврентьева при $0 < p < \infty$; ∂G — кривая Альпера или Радона при $p = \infty$. Кривые Лаврентьева и Радона могут иметь как внутренние, так и внешние острые углы. Автором в [2–4] показано, что если ∂G имеет хотя бы один внутренний или внешний нулевой угол, то неравенство (1) не выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duren P.* Theory of H^p spaces. NY: Academic Press, 1970.

2. *Пекарский А. А.* Рациональные приближения функций с производной из пространства В. И. Смирнова // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 2. С. 165–190.

3. *Пекарский А. А.* Равномерные рациональные приближения аналитических функций с производной из пространства Смирнова E_1 // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ-мат. н. (в печати).

4. *Пекарский А. А.* Аппроксимация функции z^α рациональными дробями в области с нулевым внешним углом // Мат. заметки (в печати).

Н. Р. Перельман (Смоленск)
nataly@mannet.ru

О РЕШЕНИИ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть T^+ — конечная область, ограниченная единичной окружностью $L = \{t : |t| = 1\}$. Рассматривается следующая краевая задача, сформулированная К. М. Расуловым (см. [1, с. 287]).

Требуется найти все функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + G_{12}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = -G_{21}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} + G_{22}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + ig_2(t), \tag{2}$$

где $G_{kj}(t), g_k(t)$ $(k = 1,2;\ j = 1,2)$ –– заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, причем $G_{k1}(t) \neq 0$ на L; $\alpha(t)$ –– прямой или обратный сдвиг контура L, удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{3}$$

и такой, что $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha(t) \in H^{(1)}(L)$.

Следуя [1], сформулированную задачу назовем *трехэлементной задачей типа Карлемана для бианалитических функций* или, короче, *задачей* $K_{\mathbf{1,2}}$.

В данном сообщении будем рассматривать случай, когда $\alpha(t)$ — прямой сдвиг контура L.

Устанавливается, что в так называемом невырожденном случае решение задачи $K_{\mathbf{1,2}}$ сводится к решению двух трехэлементных задач типа Карлемана для аналитических функций, каждая из которых в свою очередь сводится (см., например, [2]) к двум интегральным уравнениям типа Фредгольма и скалярной задаче Газемана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998.

2. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Известия СмолГУ. 2008. № 2. С. 94–104.

Э. В. Переходцева (Москва)
perekhod@mecom.ru

МОДЕЛЬ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА МАКСИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ВЕТРА (ВКЛЮЧАЯ ШКВАЛЫ И СМЕРЧИ) ДЛЯ ТЕРРИТОРИИ ПОВОЛЖЬЯ

Приводятся результаты прогноза максимальной скорости летнего ветра при шквалах и смерчах для территории Поволжья, основанного на использовании численных моделей гидродинамико-статистического прогноза. Объективными методами их прогноза, использующими зависимость этих явлений — ветра скоростью $V > 19$ м/с и ветра скоростью $V > 24$ м/с от совокупности параметров атмосферы, являются методы статистической классификации. На обучающей выборке векторов размерности n, соответствующих метеорологическим ситуациям, способствующим возникновению этих явлений, и выборке векторов, соответствующих отсутствию явлений при неустойчивой атмосферной стратификации были построены с использованием байесовского подхода статистические решающие правила распознавания и прогноза этих явлений (включая шквалы и смерчи). Предварительно был проведен отбор наиболее информативных и слабо зависимых параметров $k < n$. Критериями информативности являлись расстояние Махаланобиса и критерий минимальной энтропии Вапника – Червоненкиса. С целью автоматизации прогноза в качестве расчетных значений k параметров (предикторов) использовались их прогностические значения, полученные из гидродинамических моделей численного прогноза погоды. Первой такой моделью стала полусферная модель Гидрометцентра РФ. Испытания первой численной гидродинамико-статистической модели прогноза опасного ветра ($V > 24$м/с) были успешно проведены в Нижнем Новгороде (в 2000–2001 гг., в 2003–2005 гг.) и в Казани (в 2003–2005 гг.). Методы были рекомендованы для использования в синоптической практике. В новой модели численного гидродинамико-статистического прогноза опасного ветра (включая шквалы и смерчи) используются прогностические значения предикторов из региональной модели Гидрометцентра. Приводятся примеры прогноза на следующий день опасного ветра в Нижнем Новгороде, Самаре, Казани, Волгограде, Саратове в летний период 2009–2011 гг.

С. С. Платонов (Петрозаводск)
platonov@psu.karelia.ru

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ

Пусть группа Ли G транзитивно действует справа на гладком многообразии X, $\mathcal{F}$ — некоторое топологическое векторное пространство, состоящее из комплекснозначных функций на X и инвариантное относительно преобразований $\tau_g : f(x) \mapsto f(xg)$, $f \in \mathcal{F}$, $g \in G$. Линейное замкнутое подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ назовем G-инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно преобразований $\tau(g)$, $g \in G$. Естественными задачами гармонического анализа являются задачи об описании строения всех инвариантных подпространств для различных конкретных групп Ли G, однородных многообразий X и функциональных пространств $\mathcal{F}$. В докладе будет рассказано о решении этой задачи для случая, когда X — верхняя пола светового конуса в $\mathbb{R}^3$, G — группа псевдоортогональных преобразований и растяжений. Перейдем к более точному описанию задачи.

Пространство $\mathbb{R}^3$ будем рассматривать как псевдоевклидово пространство в билинейной формой

$$\langle x, y\rangle := x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2, \quad x = (x_0, x_1, x_2),\, y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть X — верхняя пола светового конуса, т. е.

$$X := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\}.$$

Через $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ обозначим связную группу псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$. Пусть $G = \mathbb{R} \oplus \mathrm{SO}_0(1, 2)$. Группа G действует справа на X: если $g = (t, u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathrm{SO}_0(1, 2)$, $x \in X$, то $xg := e^t xu$.

Основным результатом работы является полное описание всех G-инвариантных подпространств в функциональных пространствах, состоящих из функций экспоненциального роста на X. В частности, получено описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Платонов С. С.* Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на световом конусе в $\mathbb{R}^3$ // Мат. сб. 2012 (В печати).

М. Г. Плешаков (Саратов)
pleshakovmg@gmail.com

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ФОРМОСХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ[1]

Пусть $\mathbb{C}^{(1)}$ — пространство непрерывно дифференцируемых 2π-периодических действительнозначных функций f с равномерной нормой $\|f\| := \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; $\omega_k(f;t)$ — модуль непрерывности порядка k функции f; $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Пусть на промежутке $[-\pi, \pi)$ заданы $2s$ точек y_i: $-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi$. Отправляясь от этих точек, при помощи равенства $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ определим точки y_i для всех целых индексов i; в частности, $y_0 = y_{2s} + 2\pi$, $y_{2s+1} = y_1 - 2\pi$ и т.д. Обозначим $Y := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Y}_{2s}$ — множество всевозможных таких наборов. Будем писать $f \in \triangle^{(1)}(Y)$, если $f(x)$ – 2π-периодическая непрерывная функция и $f(x)$ не убывает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i нечетное; $f(x)$ не возрастает на $[y_i, y_{i-1}]$, если i четное. Положим

$$E_n^{(1)}(f;Y) := \inf_{\tau\in\triangle^{(1)}(Y)\cap\mathbb{T}_n} \|f - \tau\|.$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$ и набор $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} = Y \in \mathbb{Y}_{2s}$. Справедливо следующее

Утверждение. *Для любых $k > 3$ и $n \in \mathbb{N}$ существует функция $f(x) := f(x; s, Y, k)$ такая, что*

$$f \in \triangle^{(1)}(Y) \cap \mathbb{C}^{(1)}$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{nE_n^{(1)}(f;Y)}{\omega_k\left(f'; \frac{1}{n}\right)} = \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гилевич Я., Шевчук И. А.* Комонотонное приближение// Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 2. С. 319–363.

2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

А. В. Политов (Москвв)
antonpolitov-2008@ya.ru

ОРТОРЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМЕ СЖАТИЙ И СДВИГОВ НА КВАДРАТЕ[1]

Определение. Семейство функций $\varphi_{k,l_1,l_2}(x,y) = 2^k\varphi(2^kx - l_1, 2^ky - l_2)$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $l_i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$; $i \in \{1, 2\}$, будем называть *системой сжатий и сдвигов* функции $\varphi(x,y)$.

Напомним, как производится орторекурсивное разложение(далее ОРР) элементов в гильбертовом пространстве (см., например, [1]). Пусть в пространстве $\mathcal{H}$ даны вектор $f \in \mathcal{H}$ и система нормированных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $\tilde{f}_1 = (f, e_1)$; если уже определены $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$, то положим $\tilde{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1})$, где $r_n(f) = f - \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k e_k$. Коэффициенты $\tilde{f}_n$ называются *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k e_k$ — *орторекурсивным рядом Фурье* элемента f по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пронумеруем систему сжатий и сдвигов одним индексом: $\varphi_{k,l_1,l_2} = e_{(4^k+2)/3+2^kl_2+l_1}$. Рассмотрим ОРР по пронумерованной таким образом системе. Оказывается, что для него имеет место следующее достаточное условие сходимости к разлагаемому элементу.

Теорема. *Пусть функция $\varphi \in L_2[0,1)^2$, удовлетворяет условиям $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty$, где $\omega_2(\varphi,\delta)$ — модуль непрерывности в $L_2[0,1)^2$, и $\int_{[0,1)^2} \varphi(x)d\mu \neq 0$. Тогда ОРР по системе сжатий и сдвигов функции φ сходится в норме $L_2[0,1)^2$ к разлагаемой функции для любой функции из $L_2[0,1)^2$.*

Полученная теорема обобщает теорему, приведенную в тезисах А. Ю. Кудрявцева [2] (см. также [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т. П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 2001. № 1. С. 6–10.

2. *Кудрявцев А. Ю.* Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции // Современные методы теории ф-ций и смежные проблемы : тез. докл. Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2001. С. 161–162.

3. *Политов А. В.* Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 2010. № 3. С. 3–7.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00476-а).

И. В. Поляков (Москва)
igorp86@mail.ru

ОЦЕНКИ ЯДРА ДИРИХЛЕ И РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ УОЛША – КАЧМАЖА[1]

Для тригонометрической системы широко известен результат Колмогорова о существовании интегрируемой функции, ряд Фурье которой расходится почти всюду. Данный результат обощался многими авторами для различных классов ортогональных систем. Для системы Уолша – Качмажа наиболее сильный результат в данном направлении принадлежит Балашову, который показал, что для всякого $\epsilon \in (0,1)$ найдется функция f из класса $L(Ln^+L)^{1-\epsilon}[0,1]$, ряд Фурье – Уолша – Качмажа которой имеет монотонные коэффициенты и расходится почти всюду в [0,1]. Доказательство данного утверждения существенным образом опирается на оценку Шнейдера для ядер Дирихле по системе Уолша – Качмажа, который показал что найдется константа $C > 0$, для которой выполнено

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^\chi}{\ln n} > C \text{ для почти всех } x \in [0,1].$$

Автором получено усиление данной оценки.

Лемма 1. *Для всякой положительной и возрастающей последовательности* $\{\lambda_n\}$, *такой что* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty$, *верхний предел* $\limsup_{n\to\infty} \frac{D_n^\chi(x)}{\lambda_n}$ *равен бесконечности для почти всех* $x \in [0,1]$.

С помощью данного факта построен новый пример расходящегося почти всюду ряда Фурье – Уолша – Качмажа.

Теорема 1. *Для всякой* $F(u) = uf(u)$, *где* $f(u)$ *- неубывающая непрерывная на* $[0,\infty)$ *функция,* $f(0) = 1$ *и* $f(u)$ *удовлетворяет условию* $f(u) = o(\log u)$, *при* $u \to \infty$, *существует такая функция* $g \in F(L)$, *ряд Фурье – Уолша – Качмажа которой расходится почти всюду на* $[0,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шнейдер А. А.*, О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12, № 2. С. 179-–192.

2. *Балашов Л. А.* О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 1. С. 25–39.

3. *Поляков И. В.* Оценки ядра Дирихле и расходящиеся ряды Фурье // Мат. заметки (в печати).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321).

В. А. Пчелинцев (Томск)
VPchelintsev@vtomske.ru

ОДНА ЗАДАЧА О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

Исследуется множество E значений функционала

$$\xi(f, F) = \ln \frac{f(z_0)^\lambda}{F(\zeta_0)^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

при фиксированных z_0 и ζ_0, $0 < |z_0| < 1$ и $1 < |\zeta_0| < \infty$, на классе $\mathbf{M}$ пар функций, однолистных в системе круг – внешность круга. Установленно, что множество E замкнуто связно ограниченно. Для решения задачи используется вариационный метод Голузина и параметрический метод Лёвнера. Доказано, что каждая экстремальная пара функций $(f(z), F(\zeta)) \in \mathbf{M}$ функционала $\xi(f, F)$, вносящая граничную точку в E, удовлетворяет следующей системе функционально-дифференциальных уравнений

$$e^{-i\alpha} \frac{\big((1-2\lambda)f(z) - (1-\lambda)f(r) + \lambda F(\rho)\big) f'^2(z)}{f(z)(f(z) - F(\rho))(f(z) - f(r))} = \frac{\lambda C}{z(r-z)(1-rz)},$$

$$e^{-i\alpha} \frac{\big((1-2\lambda)F(\zeta) - (1-\lambda)f(r) + \lambda F(\rho)\big) F'^2(\zeta)}{F(\zeta)(F(\zeta) - F(\rho))(F(\zeta) - f(r))} = \frac{(1-\lambda)D}{\zeta(\rho-\zeta)(1-\rho\zeta)},$$

где $0 \le \alpha < 2\pi$, $r = |z_0|$, $\rho = |\zeta_0|$ и

$$C = e^{-i\alpha} \frac{r f'(r)}{f(r)}(1 - r^2) > 0, \quad D = e^{-i\alpha} \frac{\rho F'(\rho)}{f(\rho)}(\rho^2 - 1) > 0.$$

Анализируя полученную систему уравнений заключаем, что общей границей образа единичного круга и его внешности при отображении экстремальной парой функций является замкнутая жорданова аналитическая кривая.

Интегрируя первое из уравнений по z от 0 до r, от 0 до -1, затем по дуге $|z| = 1$ против часовой стрелки от -1 до $e^{i\varphi}$ $(\pi \le \varphi < 3\pi)$, а второе по ζ от ρ до ∞ и от 1 до ρ, находим уравнение границы области E значений функционала $\xi(f, F) = \ln(f(r)/F(\rho))^{1/2}$:

$$\xi(\nu) = \ln\left(16q \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 + q^{2n}}{1 - q^{2n-1}}\right]^8\right), \quad 0 \le \nu < 2,$$

где

$$q = e^{-\pi\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2}\left\{\frac{K(\sqrt{1-r^2})}{K(r)} + \frac{K(\sqrt{1-1/\rho^2})}{K(1/\rho)}\right\} + \nu i$$

и $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $\lambda \neq 1/2$ уравнение границы искомой области выражается неявно через эллиптические интегралы первого рода и третьего рода.

Полученные результаты распространяют исследования Н.А. Лебедева о функционале $f(z_0)/F(\zeta_0)$ на классе $\mathbf{M}$, опубликованные в ДАН СССР [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев Н. А.* Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1070–1073.

К. М. Расулов (Смоленск)
kahrimanr@yandex.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L.

Многие физические задачи, связанные, например, с диффузией газа при наличии распада и при цепных реакциях приводятся к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0, \qquad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n — некоторое фиксированное неотрицательное целое число, $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ — неизвестная функция.

Ясно, что если в (1) положить $n = 0$, то регулярные решения этого уравнения в области T^+ представляют собой класс *гармонических в* T^+ *функций*.

Всюду в дальнейшем при $n \geq 1$ регулярные в области T^+ решения уравнения (1) будем называть *квазигармоническими функциями рода* n *в области* T^+.

Известно [1, 2], что *всякую квазигармоническую функцию рода* n *в области* T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \qquad (2)$$

где $A_k^n := (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ — *аналитическая* (*голоморфная*) в области T^+ функция.

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача D. *Требуется найти все квазигармонические функции рода* n $(n \geq 1)$, *принадлежащие классу* $C^n(T^+ + L)$ *и удовлетворяющие на* L *условию*:

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = g(t), \tag{3}$$

где $W(t) = \lim\limits_{z \to t \in L} W(z)$, *а* $G(t)$ *и* $g(t)$ *— заданные на контуре* L *функции класса* $H(L)$ (*т.е. удовлетворяющие на контуре* L *условию Гельдера*).

В дальнейшем задачу **D** будем называть *видоизмененной задачей типа Дирихле для квазигармонических функций рода* n. Если же в (3) $g(t) \equiv 0$, то соответствующую задачу называем *однородной видоизмененной задачей типа Дирихле* (короче, *задачей* $\mathbf{D^0}$).

Ясно, что если $G(t) \equiv 0$, то задача **D** представляет собой обычную (*классическую*) краевую задачу Дирихле для квазигармонических функций.

В настоящем сообщении излагается конструктивный метод решения краевой задачи **D** в классах квазигармонических функций второго рода в круге $T^+ = \{z : \ |z| < 1\}$ в следующих двух случаях: $G(t) \equiv 0$ и $G(t) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bauer K. W.* Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n++1)W = = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. Schrften 23 (1965).

2. *Heersink R.* Uber Losungen der Bauer – Peschl – Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Bericht. 1986. № 268.

Е. Г. Родикова, Ф. А. Шамоян (Брянск)

evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

СВОБОДНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ ХАРАКТЕРИСТИКИ Р. НЕВАНЛИННЫ

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Введем в рассмотрение следующие классы функций (см. [1, 2]):

$$S_\alpha^\infty = \left\{ f \in H(D) : T(r,f) \leq \frac{C_f}{(1-r)^\alpha}, \ \alpha > 0, \ C_f > 0 \right\},$$

где $T(r,f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции f,

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln |f(te^{i\theta})| \, dt \right)^+ d\theta < +\infty, \alpha > -1 \right\}.$$

Решению интерполяционных задач в различных классах голоморфных в круге функций посвящено множество работ (см., например, [3, 4]). Методы их решения также различны. Мы описываем следы классов N_α, S_α^∞ на последовательности точек $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$, находящихся в конечном числе углов Штольца. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *— последовательность различных комплексных чисел, расположенных в конечном числе углов Штольца, т.е.* $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma(\theta_k)$, *где* $\Gamma(\theta_k)$ *— угол Штольца с вершиной в точке* $e^{i\theta_k}$. *Для того, чтобы оператор* $R(f) = (f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_k), \ldots)$ *отображал пространство* N_α *на пространство*

$$l_\alpha = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \leq \exp \frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+2}}, \delta > 0 \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|\alpha_k|)^{\alpha+2} < +\infty, \quad |\pi_p'(\alpha_k)| \geq \exp \frac{-M}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+2}},$$

где $M > 0$, $\pi_p(z, \alpha_k)$ *— произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках* $\{\alpha_k\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $p > \alpha$ *(см. [1])*

$$\pi_p(z, \alpha_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha}_k(\alpha_k - z)}{1 - \overline{\alpha}_k z} \exp \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j} \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\overline{\alpha}_k z} \right)^j.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$*- последовательность различных комплексных чисел, расположенных в конечном числе углов Штольца, т.е.* $\{\alpha_k\} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma(\theta_k)$. *Для того, чтобы оператор* $R(f) = (f(\alpha_1), \ldots$ $\ldots, f(\alpha_k), \ldots)$ *отображал пространство* S_α^∞ *на пространство*

$$l_\alpha^\infty = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \leq \exp \frac{\delta}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}}, \delta > 0 \right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$n(r) \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}},$$

где $n(r) = \{card\, z_k : |z_k| < r\}$,

$$|\pi_p'(\alpha_k)| \geq \exp \frac{-M}{(1-|\alpha_k|)^{\alpha+1}},$$

где $M > 0$, $c > 0$, $\pi_p(z, \alpha_k)$ — произведение М. М. Джрбашяна с нулями в точках $\{\alpha_k\}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $p > \alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157(5). С. 1024–1027.

2. *Шамоян Ф. А., Шубабко Е. Н.* Введение в теорию весовых L^p-классов мероморфных функций. Брянск: БГУ, 2009. 152 с.

3. *Nikolski N. K.* Operators, functions and systems. Amer. Math. Soc., 2002. Vol. 92. 460 p.

4. *Seip K.* Interpolation and sampling in spaces of analytic functions. Amer. Math. Soc., 2004. 183 p.

Е. Г. Родикова, Ф. А. Шамоян (Брянск)
evheny@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ И. И. ПРИВАЛОВА

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех аналитических в D функций. Классом И. И. Привалова назовем следующий класс функций (см. [1]):

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < +\infty \right\},$$

$$0 < p < +\infty,$$

где $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Очевидно, что $H^\infty \subset \Pi_p$ при всех $0 < p < +\infty$, где класс H^∞ — класс ограниченных аналитических функций. При $p = 1$ класс И. И. Привалова совпадает с классом Р. Неванлинны функций ограниченного вида, т. е. $\Pi_1 = N$. При $1 < p < +\infty$ $\Pi_p \subset N$, и поэтому его корневые множества характеризуются условием Бляшке. Однако при $0 < p < 1$ условие Бляшке уже не является необходимым (см. [2]). Следующая теорема уточняет результат работы [2]:

Теорема. *Если $f \in \Pi_p$, $0 < p < 1$, $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \not\equiv 0$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) < +\infty.$$

Обратно, $\exists\, f \in \Pi_p$ *и* $\exists\, \{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $z_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие что* $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $f \neq 0$, *но*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1+\varepsilon}{p}} \left(\frac{1}{1 - |z_k|} \right) = +\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Привалов И. И.* Субгармонические функции. М.; Л., 1937. 200 с.

2. *Шамоян Ф. А., Беднаж В. А., Приходько О. В.* О нулевых множествах некоторых весовых классов аналитических в круге функций // Вестн. Брянск. гос. ун-та. 2008. Вып. 4. С. 85–92.

Т. В. Родионов (Москва)
rodionovtv@mail.ru

О РАВЕНСТВЕ БОРЕЛЕВСКИХ И БЭРОВСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ[1]

Пусть T — топологическое пространство с семействами $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, и $\mathcal{B}$ открытых, замкнутых и борелевских множеств. Известно, что $\mathcal{B} = \Lambda_{\omega_1}$, где $\Lambda_1 \equiv \mathcal{F}_\sigma$, $\Lambda_2 \equiv \mathcal{G}_{\delta\sigma}$, $\Lambda_3 \equiv \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$, $\Lambda_4 \equiv \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, ... для совершенного T [1, 30.II], и $\Lambda_1 \equiv \mathcal{K}_\sigma$, $\Lambda_2 \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma}$, $\Lambda_3 \equiv \mathcal{K}_{\sigma\delta\sigma}$, $\Lambda_4 \equiv \mathcal{L}_{\delta\sigma\delta\sigma}$, ..., где $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}$ (семейство *симметризуемых множеств*), $\mathcal{L} \equiv \{G \cup F \mid G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}$ для произвольного T [2].

Пусть X — нормированное пространство, $\mathcal{S}$ — некоторое непустое семейство подмножеств T. Через $M(T, \mathcal{S}, X)$ обозначим семейство всех $\mathcal{S}$-*измеримых функций* $f : T \to X$, т. е. таких, что прообраз любого открытого шара принадлежит $\mathcal{S}$. В частности, получаем семейство непрерывных функций $C(T, X) \equiv M(T, \mathcal{G}, X)$ и семейство $B_\alpha(T, X) \equiv M(T, \Lambda_\alpha, X)$ *борелевских функций класса* α, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

Для произвольного семейства $A(T, X)$ функций на T со значениями в X определим соответствующие *классы Бэра*: $\mathrm{Lim}_\alpha\, A(T, X)$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$) состоит из всевозможных поточечных пределов функций классов $\mathrm{Lim}_\beta\, A(T, X)$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, $\mathrm{Lim}_0\, A(T, X) \equiv A(T, X)$.

Для метрического T и $X = \mathbb{R}$ известны равенства $\mathrm{Lim}_\alpha\, C(T, \mathbb{R}) = B_\alpha(T, \mathbb{R})$ при $1 \leqslant \alpha < \omega_0$ и $\mathrm{Lim}_\alpha\, C(T, \mathbb{R}) = B_{\alpha+1}(T, \mathbb{R})$ при $\omega_0 \leqslant \alpha < \omega_1$ (теорема Лебега–Хаусдорфа [1, 31.IX]). Для метрического T и сепарабельного метрического X верны равенства $\mathrm{Lim}_\alpha\, M(T, \mathcal{F}_\sigma, X) = B_{\alpha+1}(T, X)$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$ (теорема Банаха [1, 31.IX]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00321) и грантов Президента РФ (МК-833.2012.1, НШ-979.2012.1).

В [2] доказано следующее равенство для произвольного топологического пространства T: $\mathrm{Lim}_\alpha\, M(T,\mathcal{K}_\sigma,\mathbb{R}) = B_{\alpha+1}(T,\mathbb{R})$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$.

Аналогичное равенство бэровских и борелевских классов справедливо и для функций на произвольном T со значениями в сепарабельном нормированном пространстве X: $\mathrm{Lim}_\alpha\, M(T,\mathcal{K}_\sigma,X) = B_{\alpha+1}(T,X)$, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$. Если T совершенно нормально, то верна и теорема типа Лебега – Хаусдорфа с X вместо $\mathbb{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

2. *Захаров В. К., Родионов Т. В.* Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 6. С. 49–84.

И. А. Романова (Волгоград)

irina.a.romanova@gmail.com

N-РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим квазилинейное уравнение с квадратичной главной частью

$$L_{\gamma,\varepsilon}[u] = u_{xx}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_x^2 + (\gamma-1)u_y^2\right) + 4u_{xy}\,u_x u_y +$$
$$+u_{yy}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_y^2 + (\gamma-1)\,u_x^2\right) = 0,$$

где $|\gamma| \geq 1$, $\varepsilon = 0$, 1 или -1.

Данное уравнение обобщает многие уравнения геометрии и теории потенциала.

В работе рассматривается метод построения параметрического представления решений для данного уравнения при $\varepsilon = \operatorname{sng}\gamma$. При этом, для случая $\gamma = \varepsilon = 1$ мы получаем минимальную поверхность, заключенную в цилиндр, а в остальных случаях построенные решения являются целыми C^2-гладкими функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зорина И. А., Ткачев В. Г.* О целых решениях квазилинейных уравнений с квадратичной главной частью // Вестн. СамГУ. Сер. Математика. 2008. № 3. С. 108–123.

2. *Зорина И. А.* Целые решения уравнения Саймона // Геометрический анализ и его приложения : тр. междунар. шк.-конф. (Волгоград, 24–30 мая 2004 г.). Волгоград, 2005. С. 55–74.

3. *Романова И. А.* N-решения уравнения минимальных поверхностей // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского : материалы Десятой междунар. Казан. летней науч. шк.-конф. 2011. Т. 43. С. 308–309.

В. С. Рыхлов (Саратов)
RykhlovVS@info.sgu.ru

О ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

В пространстве $L_2[0,1]$ для $n = 2m+1$, где $m \in \mathbb{N}$, рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L: $l(y) := y^{(n)}$, $U_\nu(y) := = \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0$, $\nu = \overline{1,n}$, где $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$.

В [1] была дана классификация операторов L по степени их нерегулярности: введены классы операторов в порядке усиления их нерегулярности NR_j, NR_j^0, NR_j^1, $j = \overline{0, m-1}$. В классификации использовались параметры $\theta_{1,r} := a_1 - s_1 a_n - \dots - s_r a_{n-r+1}$, $\theta_{2,r} := a_2 - s_1 a_1 - \dots - s_r a_{n-r+2}$, $\dots$, $\theta_{n,r} := a_n - s_1 a_{n-1} - s_2 a_{n-2} - \dots - s_r a_{n-r}$, где $r \in \mathbb{N}$, $s_j \in \mathbb{C}$ $(j = \overline{1,r})$, $a_\nu := \hat\alpha_\nu \omega_1^{\nu-1}$ $(\nu = \overline{1,n})$, $(\hat\alpha_1, \dots, \hat\alpha_n)^T := \left(\Omega^T\right)^{-1} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, $\Omega := \left(\omega_j^{\nu-1}\right)_{\nu,j=1}^n$, $\omega_j = \exp\dfrac{(2j-1)\pi i}{n}$, $j = \overline{1,n}$. Если индекс у a_ν выходит за диапазон $\overline{1,n}$, то предполагается, что $a_\nu = a_{\mathrm{mod}_n(\nu)}$. Полнота в $L_2[0,1]$ системы корневых функций операторов L из классов NR_1, NR_1^0, NR_1^1 уже доказана (см. ссылку в [1]). Рассмотрим случай $L \in \mathrm{NR}_2$. В [1] получены необходимые и достаточные условие для того, чтобы $L \in \mathrm{NR}_j$. В частности, справедлива

Теорема 1. *$L \in \mathrm{NR}_2$ тогда и только тогда, когда $\hat\Delta_{12\dots m+3} \neq 0$ и существуют такие числа $s_1, s_2, \dots, s_{m-2}$, что $s_{m-2} \neq 0$ и выполняется какое-либо одно из следующих условий:*
$1^\circ)$ $\theta_{1,m-2} = \dots = \theta_{m+2,m-2} = 0$, $\theta_{m+3,m-2} \neq 0$, $\theta_{n,m-2} \neq 0$;
$2^\circ)$ $\theta_{n,m-2} = \dots = \theta_{m+1,m-2} = 0$, $\theta_{m+2,m-2} \neq 0$, $\theta_{n-1,m-2} \neq 0$;
....
$4^\circ)$ $\theta_{n-2,m-2} = \dots = \theta_{m-1,m-2} = 0$, $\theta_{m,m-2} \neq 0$, $\theta_{n-3,m-2} \neq 0$.

Удалось получить следующее достаточное условие полноты.

Теорема 2. *Если $n = 7$ $(m = 3)$, $L \in \mathrm{NR}_2$ и такой, что $s_1 = \omega_j$, $j = \overline{1,7}$, то система его корневых функций полна в $L_2[0,1]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыхлов В. С.* О некоторых свойствах определителей с циклически сдвинутыми столбцами и их применение в классификации дифференциальных операторов // Spectral and evolution problems: Proc. XIV Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol, 2004. Vol. 14. P. 71–78.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1).

В. С. Рыхлов (Саратов)
RykhlovVS@info.sgu.ru

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Рассмотрим в $L_2[0,1]$ краевую задачу для пучка $L(\lambda)$

$$y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y = 0, \tag{1}$$

$$\big(\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{2}$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. Пусть корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ удовлетворяют неравенству $0 < \omega_1 < \omega_2$ и $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Обозначим $v_{\nu j} = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$, $\nu, j = 1,2$. Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$, $e_1 = \frac{a_{\bar{1}1}}{a_{\bar{1}2}(\omega_2 - \omega_1)}$, $e_2 = \frac{a_{2\bar{2}}}{a_{\bar{1}2}(\omega_2 - \omega_1)}$. Тогда характеристический определитель пучка имеет вид $\Delta(\lambda) = \lambda^2\big(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\big)$. Рассмотрим случай $a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0$ и линеаризуем задачу (1)–(2). Положим $v_0 = y$, $v_1 = \lambda v_0$. Тогда получим следующую задачу на собственные значения уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций:

$$v_1 = \lambda v_0, \quad -\frac{1}{p_2}v_0'' - \frac{p_1}{p_2}v_1' = \lambda v_1,$$

$$\big(\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)\big) = 0, \quad \nu = 1,2.$$

Собственные значения $L(\lambda)$ и $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ совпадает с системой собственных вектор-функций $\hat{L}$. Пусть $\big(\hat{L} - \lambda E\big)^{-1}f = \big(v_0(x,\lambda), v_1(x,\lambda)\big)^T$, где $f = (f_0, f_1)^T$.

Теорема. *Если f_0'', $f_1' \in L_1[0,1]$ и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0,$$

то

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda)\,d\lambda = f_0(x) + \left(e_2\omega_2 f_0\left(\tfrac{x}{\tau}\right) - e_1\omega_1 f_0(\tau x + \tau - 1) + \right.$$

$$\left. + \omega_1 f_0(x)\right) + p_2\left(-e_2F_1\left(\tfrac{x}{\tau}\right) + e_1F_1(\tau x + \tau - 1) - F_1(x)\right) + o(1)$$

при $\nu \to \infty$, где $F_1(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$, а Γ_ν — круговой контур с центром в начале координат и радиуса $\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

К. С. Рютин (Москва)
kriutin@yahoo.com

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ВАПНИКА–ЧЕРВОНЕНКИСА ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ[1]

Пусть F — некоторое множество действительнозначных функций на множестве S. Положим $\mathrm{sgn}\,(v) = 1$ при $v > 0$, и 0 при $v \leq 0$, и для $v = (v_1, \ldots v_m) \in \mathbf{R}^m$ положим $\mathrm{sgn}\,[v] = (\mathrm{sgn}\,(v_1), \ldots \mathrm{sgn}\,(v_m)) \in \{0; 1\}^m$. Всюду ниже $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\} \subset S, v \in \mathbf{R}^m$, S — метрический компакт, $U_\delta(F, f) = \{g \in F : \|g - f\|_{C(S)} \leq \delta\}$, для $f \in F \subset C(S), \delta > 0$. Пусть $\nu(F, T, v) = \#\{\mathrm{sgn}\ [(f(\tau_1) - v_1, \ldots f(\tau_m) - v_m)] : f \in F\}$. Для исследования массивности класса функций в теории аппроксимации, математической статистике (теории обучения) (ссылки имеются, например, в [1, 2, 5]) использовались следующие понятия: размерность Вапника – Червоненкиса $\dim_{VC}(F) = \sup\{m : \exists\ T :\ \nu(F, T, 0) = 2^m\}$ и псевдоразмерность $\dim_P F = \sup\{m : \exists\ T, v :\ \nu(F, T, v) = 2^m\}$.

Известно, что для выпуклых множеств $\dim_P$ совпадает с алгебраической размерностью, кроме того в [2] показано, что для любого локально компактного подмножества $F \subset C(S)$ справедливо неравенство $\dim_P F \geq \dim F$.

Представляется естественным определить «локальную» размерность Вапника – Червоненкиса семейства функций в точке $\dim_{vc}(F, f) = \sup\{m : \exists T :\ \lim_{\delta \to +0} \nu(U_\delta(F, f), T, f(T)) = 2^m\}$ (где $f(T) = (f(\tau_j)) \in \mathbf{R}^m$). Размерность класса же $\dim_{vc} F = \sup_{f \in F} \dim_{vc}(F, f)$. Для ряда важных в приложениях классов функций удаётся вычислить $\dim_{vc}$ (всюду предполагается, что S -*- невырожденный отрезок на $\mathbf{R}$), точные же значения $\dim_{VC}, \dim_P$ не найдены.

Для класса экспоненциальных сумм $E_n = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{\alpha_j t} : a_j, \alpha_j \in \mathbf{R} \right\}$ справедливо $\dim_{vc} E_n = 2n$. Для малочленов $FP_n = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j t^{n_j} : a_j \in \mathbf{R},\ n_j \in \mathbf{Z}_+ \right\}$ имеем: $\dim_{vc} FP_n = n$, если $S \subset (0; +\infty)$ и $\dim_{vc} FP_n = 2n$, если $0 \in \mathrm{int} S$. Оценка $\dim_P FP_n$ была получена в [4]. Для множества алгебраических рациональных функций $R_n = \{r(t) = p(t)/q(t) : p, q \in P_n, r \in C(S)\}$ справедливо $\dim_{vc} R_n = 2n + 1$. Для множества билинейных форм $B(V, W) = \{v \cdot w : v \in V, w \in W\}$ (V, W — подпространства), получена линейная по $\dim V, \dim W$ оценка $\dim_{vc} B(V, W)$. Вычислена

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00329).

также $\dim_{vc}$ для множеств нейронных сетей и сплайнов с нефиксированными узлами (определения в [3, 5]).

С. В. Конягин задал вопрос о связи между топологией класса и псевдоразмерностью, который привёл автора к рассмотрению следующей величины (и к определению $\dim_{vc}$): $D(Q) := \min\{\dim_{vc}(F) : F \subset \subset C[0;1], F \approx Q\}$, где Q — метрический компакт и «$\approx$» означает гомеоморфность множеств. Автором установлено, что: если Q вложимо в n-мерный компактный полиэдр, то $D(Q) \leq n$. В последние годы активно исследуются свойства различных размерностей типа Ассуа – Нагата (см., например [6, 7]). Оказывается, что $D(Q) \leq \dim_{AN} Q$ ($\dim_{AN}$ — микроскопическая размерность Ассуа – Нагата).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Assouad P.* // Ann. Inst. Fourier. 1983. Vol. 33, № 3.

2. *Рютин К. С.* // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 1.

3. *Andrianov A.* // East J. on Approx. 1999. Vol. 5, № 4.

4. *Karpinski M., Werther T.* // SIAM J. Comp. 1993. Vol. 22, № 6.

5. *Schmitt M.* // Lect. Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 2002. Vol. 2533.

6. *Bell G., Dranishnikov A.* // Topology Proc. 2011. Vol. 38. P. 209–236.

7. *Brodskiy N., Dydak J., Higes J., Mitra A.* // Israel J. Math. 2009. Vol. 171. P. 405–423.

И. С. Рябцов (Самара)

tinnulion@gmail.com

КРИТЕРИЙ ПРОСТОТЫ ФРЕЙМА ПАРСЕВАЛЯ

В работе [1] вводятся понятия простого и составного фрейма Парсеваля.

Фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ будем называть *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ также является фреймом Парсеваля, при этом хотя бы одна константа α_i равна нулю. В противном случае, будем называть фрейм Парсеваля *простым.*

Теорема 1. *Если $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля в ℓ_2^N, то имеет место ограничение сверху на число векторов этого фрейма*

$$M \leq \frac{N(N+1)}{2}.$$

Пусть

$$V\left(F\right)=\begin{pmatrix} |\langle f_1,f_1\rangle|^2 & \ldots & |\langle f_1,f_M\rangle|^2 \\ \vdots & & \vdots \\ |\langle f_M,f_1\rangle|^2 & \ldots & |\langle f_M,f_M\rangle|^2 \end{pmatrix}$$

Теорема 2. *Следующие два утверждения эквивалентны*

- $F=\{f_i\}_{i=1}^M$ *— простой фрейм Парсеваля в* ℓ_2^N.
- *Матрица* $V\left(F\right)$ *— невырожденная.*

Следствие. *Для того, чтобы произвольный фрейм Парсеваля* $F=$ $=\{f_i\}_{i=1}^M$ *был простым, достаточно чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{|\langle f_i,f_j\rangle|}{\|f_i\|\,\|f_j\|}<\frac{1}{\sqrt{N}},\quad \forall\, i\neq j$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casazza P. G., Redmond D., Tremain J. C.* Real Equiangular Frames // CISS Meeting Information Sciences and Systems. Princeton, NJ, 2008.

2. *Рябцов И. С.* О представлении фреймов Парсеваля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Вып. 2(23). С. 194-–199.

Н. Ю. Сабурова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Рассматривается периодический плоский граф Γ. Периодическим будем называть граф, для которого можно выделить фундаментальную область W, сдвигами которой на пару неколлинеарных векторов $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ в $\mathbb{R}^2$ получается весь граф Γ. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x\in[0,1]$.

Введем оператор Лапласа $-\Delta_\Gamma$ на графе: на каждом ребре оператор действует как $-\partial_x^2$, и функции f из области определения оператора $-\Delta_\Gamma$ подчинены условию Кирхгофа.

Известно, что в случае, когда граф Γ представляет собой квадратную или гексагональную решетку, абсолютно непрерывный спектр оператора Лапласа $\sigma_{ac}(-\Delta_\Gamma)=[0,+\infty)$ [1,2]. В случае треугольной решетки в спектре оператора $-\Delta_\Gamma$ появляется бесконечное число лакун [3]. А как ведет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).

себя спектр оператора на произвольном периодическом графе? В работе исследуется зависимость между структурой периодического графа и наличием (или отсутствием) лакун в спектре оператора Лапласа.

Приведем одно из доказанных утверждений.

Утверждение 1. *Пусть* $(p_{1j}, p_{2j}) \in \mathbb{Z}^2$, $j = 1, \ldots, N_0$, *и граф* Γ *представляет собой квадратную решетку с множеством вершин* $\mathbb{Z}^2$, *в которую добавлены ребра, соединяющие вершину* (z_1, z_2) *с вершинами* $(z_1 + p_{1j}, z_2 + p_{2j})$, *для всех* $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$. *Тогда*

$$\sigma_{ac}(-\Delta_\Gamma) = [0, +\infty) \Leftrightarrow p_{1j} + p_{2j} \text{ нечетно для всех } j = 1, \ldots, N_0.$$

Автор выражает благодарность Е. Л. Коротяеву и А. В. Баданину за внимание к работе и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pankrashkin K.* Spectra of Schrödinger operators on equilateral quantum graphs // Lett. Math. Phys. 2006. Vol. 77, № 2. P. 139–154.

2. *Kuchment P., Post O.* On the spectra of carbon nano-structures // Comm. Math. Phys. 2007. Vol. 275, № 3. P. 805–826.

3. *Ando K.* Inverse scattering theory for discrete Schrödinger operators on the hexagonal lattice // arXiv:1110.3922, 2011.

Н. Ю. Сабурова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com

О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

Рассматривается периодический плоский орграф Γ с фундаментальной областью W. Граф Γ будем называть периодическим, если он инвариантен относительно трансляций с периодами $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$, т.е. $\Gamma + p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 = \Gamma$ при любых $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x \in [0, 1]$ в соответствии с ориентацией.

Введем оператор H на графе: на каждом ребре оператор действует как $\partial_x(\partial_x^3 + p\partial_x) + q$, $p, q \in L^2(0, 1)$, и функции f из области определения оператора H удовлетворяют условиям: f непрерывна на графе Γ, $f_e''(v) = 0$, $\sum\limits_{e: v=\tau(e)} \big(f_e''' + p\, f_e'\big)(v) - \sum\limits_{e: v=i(e)} \big(f_e''' + p\, f_e'\big)(v) = 0$ для всех вершин v графа; $i(e)$ и $\tau(e)$ — соответственно начальная и конечная вершина ребра e; f_e — сужение функции f на ребро e графа.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).

Обозначим через $\varphi_j(x,\lambda)$, $(x,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{C}$, решения уравнения $(f''' + p\,f')' + qf = \lambda f$, удовлетворяющие условиям $\varphi_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}$, где $\varphi_j^{(3)} = \varphi_j''' + p\,\varphi_j'$, $j,k = \overline{1,4}$, δ_{jk} — символ Кронекера. Пусть

$$\Delta_{mn}^{kl}(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_m^{(k)} & \varphi_n^{(k)} \\ \varphi_m^{(l)} & \varphi_n^{(l)} \end{vmatrix}(1,\lambda), \qquad m,n = 1,2,3,4, \quad k,l = 0,1,2,3,$$

$R = \{\lambda \in \mathbb{R} : \varphi_2''(1,\lambda)\Delta_{42}^{32}(\lambda) \neq 0\}$, $D(\lambda,\theta_1,\theta_2)$ — определитель линейной системы уравнений с неизвестными $f(v)$, $v \in W$:

$$\big(\Delta_{42}^{32}(\lambda)\deg_+ v + \Delta_{12}^{02}(\lambda)\deg_- v\big) f(v) = \varphi_2''(1,\lambda)\sum_{u\in S(v)} e^{i(p_{1j}\theta_1 + p_{2j}\theta_2)} f(v_j).$$

Здесь $S(v)$ — множество всех вершин, смежных с v; v_j — вершина фундаментальной области, которая переходит в вершину $u \in S(v)$ при трансляции графа Γ на вектор $p_{1j}\vec{e}_1 + p_{2j}\vec{e}_2$; $\deg_+ v$ и $\deg_- v$ — полустепень захода и полустепень исхода вершины v.

Утверждение 1. *Если $\lambda \notin R$, то λ принадлежит спектру $\sigma(H)$ оператора H тогда и только тогда, когда $D(\lambda,\theta) = 0$ для некоторого $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in [-\pi;\pi]^2$.*

Н. Ю. Сабурова, А. В. Томилова (Архангельск)
n.saburova@gmail.com, vdovinaanna1709@rambler.ru

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ[1]

Рассматривается орграф Γ, имеющий вид бесконечной гексагональной решетки. Ориентацию ребер графа выберем таким образом, чтобы каждая вершина являлась либо начальной для всех инцидентных ей ребер, либо конечной. Каждое ребро графа параметризуем параметром $x \in [0,1]$ в соответствии с ориентацией.

Введем оператор H на графе: на каждом ребре оператор действует как $-\partial_x^2 + q$, $q \in L^2(0,1)$, и функции f из области определения $D(H)$ оператора H подчинены условиям Кирхгофа.

В случае четного потенциала q собственные функции оператора Шрёдингера на гексагональном графе изучались в работе [1].

Пусть σ_D – спектр краевой задачи Дирихле $-f'' + qf = \lambda f$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Определим пространство $\mathcal{H}(\lambda) = \{\psi \in D(H) : H\psi = \lambda\psi\}$ для $\lambda \in \sigma_D$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ГК 14.740.11.0581).

Пусть $\varphi(x,\lambda)$, $(x,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{C}$, — решение уравнения $-f''+qf=\lambda f$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0,\lambda)=0$, $\varphi'(0,\lambda)=1$.

Определим функции $\psi^{(\Sigma)}$, носителями которых являются гексагональные ячейки Σ графа Γ, следующим образом: сужения функции $\psi^{(\Sigma)}$ на ребра шестиугольника Σ равны $\pm\varphi(x,\lambda)$, сужения на соседние ребра шестиугольника отличаются знаком. Для двух соседних ячеек Σ_1 и Σ_2 сужения функций $\psi^{(\Sigma_1)}$ и $\psi^{(\Sigma_2)}$ на ребро, общее для Σ_1 и Σ_2, отличаются знаком.

Мы доказываем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Множество собственных значений оператора $\sigma_{pp}(H)=\sigma_D$. Каждое собственное значение $\lambda\in\sigma_{pp}(H)$ имеет бесконечную кратность. Функции $\psi^{(\Sigma)}(x,\lambda)$ для всех Σ принадлежат $\mathcal{H}(\lambda)$. Исключив из этих функций одну (любую), получим базис в пространстве $\mathcal{H}(\lambda)$.*

В работе найдены коэффициенты разложения произвольной функции $f(x)$ из $\mathcal{H}(\lambda)$ по базисным функциям $\psi^{(\Sigma)}(x,\lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuchment P., Post O.* On the spectra of carbon nano-structures // Comm. Math. Phys. 2007. Vol. 275, № 3. P. 805–826.

Т. Н. Сабурова (Москва)
taniasab37@gmail.com

О КРАТНЫХ РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ ФАБЕРА – ШАУДЕРА

Система Фабера – Шаудера $\varphi_m(x)$, является первым базисом в $C[0,1]$. Из результатов [1] следует, что произведение $\varphi_{m_1}\varphi_{m_2}\cdots\varphi_{m_n}$ (при нумерации по квадратам) образует базис в $C[0,1]^n$ — пространстве функций n переменных, непрерывных на n-мерном единичном кубе $[0,1]^n$. Такой базис также назовем базисом Фабера – Шаудера (БФШ).

Пусть теперь $T=\{Tm(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ — (БФШ) на $[0,1]^n$; A — класс функций $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C[0,1]^n$, у которых сходится ряд $\sum|a_m(f)|$ (здесь $\{a_m(f)\}$ — последовательность коэффициентов Фурье БФШ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$). Возникает вопрос: при каких условиях, наложенных на функцию $F(x)$, можно утверждать, что для любой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A$ суперпозиция $F(f(x_1,x_2,\ldots,x_n)))\in A$. Этот вопрос рассматривались ранее для функций одной переменной (см. [2]) и для функций нескольких переменных в [3]. В последней работе было показано, что, если $F(x)$ целая функция и $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in A$, то суперпозиция $F(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\in A$. В настоящей работе мы продолжаем исследовать эту проблему.

Теорема. *Для любой функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ *существует константа* M*, такая, что* $1/f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + M) \in A$.

Замечание. В случае $n = 1$ этот результат вытекает из более общей теоремы, полученной в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Semadeni Z.* Product Schauder Bases and Approximation with Nodes in Spaces of Continious Functions // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1963. T. XI, № 6. C. 387–391.

2. *Сабурова Т. Н.* Суперпозиции функций и их ряды по системе Фабера – Шаудера // Изв. АНРФ. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 2. С. 401–423.

3. *Сабурова Т. Н.* Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье – Фабера – Шаудера функций нескольких переменных // Современные методы теории функций и смежные проблемы : тез. докл. Воронеж. зимней мат. шк. 2001. С. 228–229.

А. И. Савотин (Калуга)
irena1983.83@mail.ru

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Предлагается следующая конструкция непрерывной нигде не дифференцируемой функции, определенной на отрезке $[0; 1]$. Значения аргумента x представляются в виде бесконечной q-игной дроби

$$x = (0, x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{n+k} \ldots)_q.$$

Соответствующее значение функции $f(x)$ определим в виде суммы ряда

$$f(x) = \frac{y_1}{p} + \frac{y_2}{p^2} + \ldots + \frac{y_n}{p^n} + \frac{y_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{y_{n+2}}{p^{n+2}} + \ldots + \frac{y_{n+k}}{p^{n+k}} + \ldots,$$

где p и y_i — целые числа, $2 \leqslant p < q$, $|y_i| < p$ при всех i.

Непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке x отрезка $[0; 1]$ следует из рассмотрения

$$x' = (0, x_1 x_2 \ldots x_n x'_{n+1} x'_{n+2} \ldots x'_{n+k} \ldots)_q,$$

$$f(x') = \frac{y_1}{p} + \frac{y_2}{p^2} + \ldots + \frac{y_n}{p^n} + \frac{y'_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{y'_{n+2}}{p^{n+2}} + \ldots + \frac{y'_{n+k}}{p^{n+k}} + \ldots,$$

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \frac{2}{p^{n-1}}.$$

Если же при этом для любого x можно подобрать при каждом n последовательность $x'_{n+1}, x'_{n+2}, \dots, x'_{n+k}, \dots$ такую, что соответствующие значения $y'_{n+1} \neq y_{n+1}$, $y'_{n+k} = y_{n+k}$, то тогда $f(x)$ нигде не дифференцируема. Действительно,

$$0 < |x' - x| \leqslant \frac{q-1}{q^{n+1}} + \frac{q-1}{q^{n+2}} + \ldots = \frac{q-1}{q^{n+1}(1-1/q)} = \frac{1}{q^n},$$

а $|f(x') - f(x)| \geqslant \frac{1}{p^{n+1}}$, поэтому

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}\right| \geqslant \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n \longrightarrow +\infty,$$

так как $q > p$.

А. М. Сарсенби (Шымкент, Казахстан)
Abzhahan@mail.ru

КРИТЕРИЙ БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

В работе [1] автора настоящей заметки было установлено, что равномерная ограниченность почти всюду модулей корневых векторов прямого и сопряженного дифференциальных операторов второго порядка является необходимым и достаточным условием их базисности Рисса в классе L_2. В случае произвольных систем из класса L_2, не связанных с конкретным дифференциальным оператором, подобных фактов не наблюдается. Например, системы вида [2]

$$\{|x|^{\alpha} e^{inx}\}, \quad \{|x|^{-\alpha} e^{-inx}\}$$

где n — целое число, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, являются биортогонально сопряженными, нормированными. Каждая из них образует базис пространства $L_2(-\pi, \pi)$, но не базис Рисса. Полиномы Лежандра (см., например, [3, с. 44])

$$P_n x = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}$$

образуют базис Рисса пространства $L_2(-1, 1)$ (ортонормированный базис), но они не ограничены. Эти примеры показывают, что нормированные полные и минимальные биортогонально сопряженные системы могут быть базисами Рисса, могут и не быть базисами Рисса. Тем не менее справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть система* $\{u_k(x)\}$ *из класса* $L_2(G)$ *полна, минимальна и удовлетворяет условию* $\|u_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1$. *Тогда* $\{u_k(x)\}$ *базис Рисса в* $L_2(G)$ *тогда и только тогда, когда биортогонально сопряженная система* $\{v_k(x)\}$ *полна и удовлетворяет условию* $\|v_k\|_{L_\infty(G)} \le C_2$.

Поскольку всякий базис Рисса есть безусловный почти нормированный базис, то теорема 1 позволяет утверждать следующее.

Теорема 2. *Полная и минимальная система* $\{u_k(x)\}$ *из класса* $L_2(G)$, *удовлетворяющая условию* $\|u_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1\|u_k\|_{L_2(G)}$, *будет безусловным базисом в* $L_2(G)$ *тогда и только тогда, когда биортогонально сопряженная система* $\{v_k(x)\}$ *полна и выполнены следующие оценки:*

$$\|v_k\|_{L_\infty(G)} \le C_1\|v_k\|_{L_2(G)},$$

$$\|u_k\|_{L_2(G)}\|v_k\|_{L_2(G)} \le C.$$

Некоторые известные условия [4], обеспечивающие базисность Рисса изучаемых систем, содержат объекты, привлекаемые извне.

Одно из наиболее часто используемых условий — условие квадратической близости [4] довольно трудоемко и не всегда применимо.

Систему функций $\{\varphi_k(x)\}$ называют *квадратически близкой* к $\{\psi_k(x)\}$, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_k - \psi_k|_{L_2}^2 < +\infty.$$

Известно [4], что всякая минимальная система, квадратически близкая к базису Рисса, есть базис Рисса. Указанный выше пробел в общей теории базисов пространства L_2 может быть восполнен основными результатами настоящей заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сарсенби А. М.* Критерий базисности Рисса систем собственных присоединенных функций дифференциальных операторов высших порядков на отрезке // Докл. АН. 2008. Т. 419, № 5. С. 601–603.

2. *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, № 2. С. 157–160.

3. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1963. 360 с.

4. *Бари Н.К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. записки Моск. гос. ун-та. 1951. Вып. 148. С. 69-–107.

А. В. Светлов (Волгоград)
a.v.svetlov@gmail.com

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим многообразие M, представимое в виде $B \cup D$, где B — компактное мноогообразие, а конец D — простое скрещенное произведение. Простым скрещенным произведением порядка k мы называем полное риманово многообразие D, изометричное произведению $\mathbf{R_0} \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{R_0} = (r_0, +\infty)$, а S_i — компактные римановы многообразия без края размерности n_i) с метрикой $ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2$, где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — гладкие положительные на $\mathbf{R_0}$ функции.

Рассмотрим на многообразии M оператор Лапласа — Бельтрами $-\Delta = -\mathrm{div}\nabla$ и оператор Шредингера $L = -\Delta + c(r)$, где $c(r) > 0$ — гладкая функция на $\mathbf{R_0}$. Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности. Для данных операторов известны критерии дискретности их спектров — см. [1], [2], причем недавние исследования ряда авторов показывают, что условия, аналогичные [1], являются необходимыми и достаточными для дискретности спектра лапласиана не только на исследуемых здесь квазимодельных многообразиях. Настоящая работа посвящена изучению взаимосвязи дискретности спектра операторов Лапласа — Бельтрами и Шредингера.

Теорема. *Для дискретности спектра оператора Шредингера L на многообразии M достаточно выполнения одного из условий:*

1) спектр лапласиана на многообразии M дискретен;

2) $\int\limits_r^{r+\omega} c(r)dr = +\infty \ \forall \omega > 0.$

Однако данные условия не являются необходимыми. Причем установлено, что существуют многообразия, спектр оператора Лапласа — Бельтрами на которых не дискретен, но оператор Шредингера имеет дискретный спектр при любом потенциале $c(r) > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Лапласа-Бельтрами на квазимодельных многообразиях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1362–1371.

2. *Светлов А. В.* Условия дискретности спектра оператора Шрёдингера // Труды по геометрии и анализу. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики. 2003. С. 376–383.

А. И. Седов (Магнитогорск)
sedov-ai@yandex.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА. МЕТОД СЛЕДОВ

Пусть линейный, дискретный, самосопряженный, полуограниченный снизу оператор T с ядерной резольвентой действует в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть P — ограниченный оператор умножения на функцию $p \in H$ действующий в H. Обозначим через $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\sigma(T+P) = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектры операторов.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа: *пусть ряд* $\sum\limits_n |\lambda_n - \xi_n|$ *сходится. Для последовательности* $\{\xi_n\}$ *требуется доказать существование и единственность такого оператора* $T+P$*, что его спектр* $\sigma(T+P)$ *совпадает с данной последовательностью* $\{\xi_n\}$.

За последнее время метод, идея которого высказана в [1], был обобщен для абстрактных дискретных операторов, найдены и обоснованы эффективные алгоритмы по нахождению приближенного решения обратной задачи [2]. Приведем пример применения метода.

Пусть оператор T_0, порожден краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial \Pi} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, Π — прямоугольник со сторонами a и b.

Введем оператор $T = \displaystyle\int_0^{\infty} \lambda^{\beta} dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0, $\beta > 3/2$, $\lambda^{\beta} > 0$ при $\lambda > 0$. Можно показать, что $\lambda_{kl} = \left(\dfrac{\pi^2 k^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2 l^2}{b^2}\right)^{\beta}$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Пусть стороны прямоугольника $a = \sqrt[4]{2}$ и $b = 1$; степень $\beta = 2$. Положим $m = 9$. Тогда будем иметь $\{\lambda_1, \dots, \lambda_9, \dots\} = \{28.76,\ 144.66,\ 218.68,\ 460.19,\ 535.21,\ 929.99,\ 1060.11,\ 1380.87,\ 2329.73, \dots\}$. В качестве возмущенной последовательности возьмем $\{\xi_1, \dots, \xi_9\} = \{-14.70,\ 118.56,\ 189.90,\ 449.10,\ 511.75,\ 903.62,\ 1051.98,\ 1372.41,\ 2324.44\}$. Показано, что функция

$$p(x,y) = -177.59\cos(5.28x)\cos(6.28y) -$$

$$-105.16\cos(10.56x)\cos(6.28y) - 116.70\cos(5.28x)\cos(12.57y) -$$

$$-44.36\cos(10.57x)\cos(12.57y) - 91.65\cos(15.85x)\cos(6.28y) -$$

$$-105.39\cos(5.28x)\cos(18.85y) - 30.93\cos(15.85x)\cos(12.57y) -$$

$$-33.09\cos(10.57x)\cos(18.85y) - 19.70\cos(15.85x)\cos(18.85y)$$

дает множество $\{\mu_1, \dots, \mu_9\}$ которое отличается от множества $\{\xi_1, \dots, \xi_9\}$ на величину равную 0.000075, в смысле метрики ℓ_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1206–1211.

2. *Седов А. И.* Об обратной задаче спектрального анализа // Вестн. Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2011. Вып. 7, № 4(221). С. 91–99.

А. И. Седов, С. С. Михеева (Магнитогорск)
sedov-ai@yandex.ru, sveta.safonova@mail.ru

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть T — положительный линейный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H с компактной резольвентой и простым спектром $\sigma(T) = \{\lambda_n\}$. Занумеруем собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ в порядке возрастания и обозначим через $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированные в H соответствующие собственные функции. Пусть ряд $\sum\limits_n \frac{1}{\lambda_n}$ сходится. Тогда $d_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$. Пусть P — ограниченный оператор действующий в H. Тогда найдется N такое, что при $n > N$ выполняются неравенства $\|P\| < d_n/2$ и $q := \frac{\|P\|}{r} < 1$, где $r = \frac{1}{2}\inf\limits_{n>N} d_n$. Обозначим через μ_n собственные числа оператора $T + P$ занумерованные в порядке возрастания действительных частей, с учетом алгебраической кратности, а через u_n соответствующие им ортонормированные в H собственные функции. Можно показать, что матрица Вандермонда $\left(\mu_k^m\right)_{k=\overline{1,N},\, m=\overline{0,N-1}}$ обратима. Обозначим элементы обратной матрицы через w_{km}.

В работе приводятся формулы асимптотики собственных функций возмущенного оператора u_n при любом n. Например, для первых $k \le N$ собственных функций они имеют следующий вид.

$$c_{nk}u_k = \sum_{m=0}^{N-1} w_{km}\Big(\lambda_n^m v_n + m\lambda_n^{m-1}(Pv_n, v_n)v_n +$$

$$+ \sum_{l\le N, l\ne n} \frac{\lambda_n^m - \lambda_l^m}{\lambda_n - \lambda_l}(Pv_n, v_l)v_l + \sum_{l>N} \frac{\lambda_n^m}{\lambda_n - \lambda_l}(Pv_n, v_l)v_l + R_2^m\Big),$$

где

$$c_{nk}^2 = \sum_{m=0}^{N-1} w_{km}\Big(\lambda_n^m + m\lambda_n^{m-1}(Pv_n, v_n) + (R_2^m, v_n)\Big),$$

$$\|R_s^m\|_H \le \frac{(\lambda_N + r)^{m+1}}{\lambda_N + r - \lambda_n}\frac{\|P\|^s}{r(r - \|P\|)}, \quad n \le N.$$

Увеличивая s можно получить более точные формулы, при этом число слагаемых в больших скобках увеличится.

При $k > N$ асимптотические формулы имеют более простой вид.

Е. С. Серебрянникова (Ульяновск)
serebr_k@mail.ru

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию широкого диапазона температур и повышенных уровней виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на двигателе принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на датчики высоких температур и виброускорений. Возникает задача проектирования механической системы «трубопровод — датчик давления», позволяющей ослабить воздействие температур и виброускорений.

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x,y): \quad 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0;$$

$$\begin{gathered}
\varphi_y(x,0,t) = \varphi_y(x,y_0,t) = 0, \quad x \in (0,x_0); \\
\varphi_x(0,y,t) = \dot\omega(y,t), \quad y \in (a,b); \\
\varphi_x(0,y,t) = 0, \quad y \in (0,a) \cup (b,y_0); \\
\tilde P - \rho\varphi_t(x_0,y,t) = P(y,t), \quad y \in (0,y_0); \\
L(\omega) \equiv M\ddot\omega + D\omega'''' + N\omega'' + \alpha\dot\omega'''' + \beta\dot\omega + \gamma\omega = \\
= P_0(y,t) - \tilde P + \rho\varphi_t(0,y,t), \quad y \in (a,b).
\end{gathered}$$

На основе метода Фурье задача сведена к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение связывает закон изменения $P(y,t)$ давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба $\omega(y,t)$ упругого элемента датчика давления:

$$L(\omega)=P_0(y,t)-\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}P(y,t)dy-$$

$$-\frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n y)\frac{\operatorname{th}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n}\int_a^b\ddot{\omega}(y,t)\cos(\lambda_n y)dy-$$

$$-\frac{2}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\lambda_n y)}{\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)}\int_0^{y_0}P(y,t)\cos(\lambda_n y)dy-\frac{\rho x_0}{y_0}\int_a^b\ddot{\omega}(y,t)dy.$$

Решение этого уравнения строится в виде ряда.

А. М. Сидоров (Казань)
Anatoly.Sidorov@ksu.ru

МАТРИЧНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Пусть при каждом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ линейный оператор $A(\varepsilon)=B_0+B_1(\varepsilon)$ отображает гильбертово пространство H в себя. Пусть λ_0 – изолированное собственное значение конечной кратности оператора B_0 и $y_1,\ldots,y_n$ – собственные элементы, соответствующие λ_0. Будем предполагать, что оператор $B_0-\lambda_0 I$ нормально разрешим, $ker(B_0-\lambda_0 I)=ker(B_0-\lambda_0 I)^*$ и для всех x, принадлежащих области определения B_0 таких, что $x\perp y_k$, $k=1,\ldots,n$, справедливо неравенство

$$\|B_1(\varepsilon)x\|\le b(\varepsilon)\|(B_0-\lambda_0 I)x\|.$$

Пусть оператор $B_1(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε.

Теорема 1. *Если $|\varepsilon|b(\varepsilon)$ достаточно мало, то существует аналитически зависящие от ε $n\cdot n$ — матрица $S(\varepsilon)$ и ненулевой вектор $z(\varepsilon)$ такие, что*

$$A(\varepsilon)z(\varepsilon)=(S(\varepsilon)+\lambda_0 E)z(\varepsilon).$$

Матрица $S(\varepsilon)$ называется матричным собственным значением оператора $A(\varepsilon)$. Это понятие, принадлежащее В. С. Мокейчеву, оказывается весьма полезным в теории возмущений.

Теорема 2. *Пусть $S(\varepsilon)$ — матричное собственное значение $A(\varepsilon)$, $\delta_j(\varepsilon)$, $j=1,\ldots,m$ — все различные собственные значения матрицы, транспонированной к $S(\varepsilon)$. Тогда $\lambda_j(\varepsilon)=\lambda_0+\delta_j(\varepsilon)$, $j=1,\ldots,m$ — аналитически зависящие от ε собственные значения $A(\varepsilon)$ и соответствующие им собственные элементы можно выбрать аналитически зависящими от ε.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мокейчев В. С.* Собственные значения граничных задач. Преобразования граничных задач к граничным задачам с малыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 222–226.

2. *Мокейчев В. С., Сидоров А. М.* О матричном подходе к теории возмущений линейных операторов // Современные методы теории функций и смежные вопросы : материалы Воронеж. зимней шк. Воронеж, 2009. С. 119–120.

С. П. Сидоров (Саратов)
sidorovsp@info.sgu.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ФОРМОСОХРАНЯЮЩИМИ КОНЕЧНОМЕРНЫМИ МЕТОДАМИ НА ИЗМЕРИМЫХ МНОЖЕСТВАХ[1]

Класс всех p-выпуклых функций на $[0,1]$ обозначим $\Delta^p[0,1]$. Пусть $0 \leqslant h < k$ есть два целых числа, $h \leqslant k-2$, и $\sigma = (\sigma_i)_{h \leqslant i \leqslant k}$ есть последовательность чисел такая, что $\sigma_i \in \{-1,0,1\}$ и $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$. Обозначим

$$\Delta^{h,k}(\sigma) := \{f \in C[0,1] :\ \sigma_p f \in \Delta^p[0,1],\ h \le p \le k\}.$$

Пусть $\Gamma = \{i :\ h \leqslant i < k,\ \sigma_i \neq 0,\ \sigma_{i+1} = 0,\ \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$. Обозначим $\sigma^{[j]} = (\sigma_i^{[j]})_{i \geq 0}$, где $\sigma_i^{[j]} = 0$ для $i \neq j$ и $\sigma_j^{[j]} = \sigma_j$. Используя идеи [1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset [0,1]$ есть некоторое измеримое множество, $B^r(\Omega)$ есть класс всех функций. имеющих ограниченную производную порядка r на Ω. Пусть конус $\Delta^{h,k}(\sigma)$ таков, что $\Gamma \neq \varnothing$ и $r \in \Gamma$. Пусть последовательность линейных операторов $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $L_n : C^r[0,1] \to B^r(\Omega)$, такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$*

1. *L_n имеет конечный ранг n;*

2. *$L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma^{[r]})$;*

3. *$D^r L_n f$ является измеримой функцией для любой $f \in C^r[0,1]$.*

Пусть $\gamma = \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ есть возрастающая последовательность целых чисел. Обозначим

$$E_\gamma := \{x \in \Omega :\ \lim_{i \to \infty} n_i^{k-r} |D^r L_{n_i} e_j(x) - D^r e_j(x)| = 0,\ j = h, \dots, k\},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

где $e_j(x) = x^j$, D^r *есть оператор дифференцирования порядка* r, $D^r f(x) := d^r f(x)/dx^r$.

Тогда $\mathrm{meas}(E_\gamma) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev R. K., Guendouz F.* On the order of approximation of continuous functions by positive linear operators of finite rank // J. of Approx. Theory. 1992. Vol. 69 (2). P. 133–140.

В. П. Скляров (Саратов)

sklyarovvp@sgu.ru

ОБ УСЛОВИИ S-РЕГУЛЯРНОСТИ Н. П. КУПЦОВА

Предполагается, что линейный оператор Q действует из банахова пространства X в X, $R_\lambda\big(Q\big) = \big(Q - \lambda E\big)^{-1}$. Следующее понятие было введено Н. П. Купцовым [1, с. 137] в 1968 году.

Определение. Оператор Q будем называть *s-регулярным*, если при некотором натуральном s существует действительное число θ такое, что

$$\left\| R_\lambda\Big(e^{i\theta} Q^s\Big) \right\| \leq \frac{C}{\operatorname{Im} \lambda},$$

где C не зависит от λ.

Пусть $Qy = -y''(x) + x^2 y(x)$, а в роли пространства X выступает $L^p(-\infty, \infty)$, $p \geq 1$ с нормой

$$\|f\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

В 1976 году Н. П. Купцовым был поставлен вопрос о s-регулярности оператора Q в пространстве $C_0(-\infty, \infty)$. Ответ оказался отрицательным [2], т. е. было доказано, что в этом случае s-регулярность не возможна ни при каком натуральном s.

Можно показать, что имеет место следующее утверждение.

Теорема *Оператор* $Qy = -y'' + x^2 y$ *будет* s*-регулярным при любом натуральном* s *в пространстве* $L^p_{(-\infty,\infty)}$ *тогда и только тогда, когда* $p \in \left[\frac{4}{3}, 4\right]$.

Известно [3], что при $p \in \left[\frac{4}{3}, 4\right]$ система собственных функций оператора Q образует базис в $L^p_{(-\infty,\infty)}$. Однако, нетрудно убедиться, что условие базисности, являясь достаточным для s-регулярности, не является необходимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, № 4(142). С. 117–178.

2. *Скляров В. П.* Еще раз о равномерных приближениях функциями Эрмита // Дифференциальные уравнения и теория функций : научн. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. Вып.3. С. 105–113.

3. *Markett C.* Norm estimates for (C, δ) means of Hermite expansions and bounds for δ_{eff} // Acta Math. Hung. 1984. Vol. 43. P. 187–198.

Е. С. Смаилов (Караганды, Казахстан)
esmailov@mail.ru

КРИТЕРИЙ ВЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВО МАРЦИНКЕВИЧА

Пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$ и $f(\bar{x})$ — измеримая в смысле Лебега на $\mathbb{R}_n$ функция; пусть $\rho_n(\bar{x}) = e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$; $|\bar{x}| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Через $F(|f\rho_n|; t)$ — обозначим невозрастающую перестановку функций $|f(\bar{x})\rho_n(\bar{x})|$ на $\mathbb{R}_n$, $t \in [0; +\infty)$.

Будем говорить, что $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$, [1] если конечна величина:

$$\|f\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \left\{ \frac{\theta}{p} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{\theta}{p}-1} (F(|f\rho_n|; t))^{\theta} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad \text{при } 1 \leq \theta < +\infty,$$

$$\|f\|_{L_{p\infty}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \sup_{t>0} \left\{ t^{\frac{1}{p}} F(|f\rho_n|; t) \right\}, \quad \text{при} \quad \theta = +\infty.$$

Пространство $L_{p,\infty}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$ — также называют пространством Марцинкевича.

Через $\mathcal{P}_{m_1,\ldots,m_n}(\mathbb{R}_n)$ обозначим множество всевозможных алгебраических многочленов порядка m_k, по переменной x_k, $k = 1, \ldots, n$; $E_{m_1,\ldots,m_n}(f)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \inf\Big\{ \|f - P_{m_1,\ldots,m_n}\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} : P_{m_1,\ldots,m_n}(\bar{x}) \in$ $\in \mathcal{P}_{m_1,\ldots,m_n}(\mathbb{R}_n)\Big\}$ — полное наилучшее приближение функций f в метрике пространства $L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$, $1 \leq p < +\infty$, $0 < \theta \leq +\infty$ посредством алгебраических многочленов.

Определение. Пусть $\{\lambda_m\}_{m=1}^{+\infty}$ — убывающая к нулю заданная последовательность чисел. Тогда, через $E_{p,\theta}^{(n)}(\lambda; \rho_n)$, $1 \leq p < +\infty$, $0 < \theta \leq +\infty$ обозначим класс всех функций $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$, для которых $E_{m,\ldots,m}(f)_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leq \lambda_m$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть* $1 < p < q < +\infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$. *Для того чтобы имело место вложения* $E^{(n)}_{p\theta}(\lambda;\rho_n) \subset L_{q,\infty}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$ *необходимо и достаточно, чтобы величина*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} m^{-\frac{n}{2q}} \sum_{k=1}^{m} k^{\frac{n}{2p}-1}\lambda_k$$

была конечна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., Мир, 1974.

А. П. Солодов, И. А. Щигорцов (Москва)

О ВЗАИМООТНОШЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ХЕНСТОКА И ДАНЖУА – ПЕТТИСА[1]

В случае функций со значениями в банаховом пространстве интеграл Мак-Шейна оказывается более общим, чем интеграл Лебега, а интеграл Хенстока — более общим, чем интеграл Данжуа (см. [1]). В связи с этим возникает задача сравнения интегралов римановского типа с интегралами Петтиса и Данжуа – Петтиса. Как показано в [2], интеграл Петтиса общее интеграла Мак-Шейна, причем на классе сепарабельнозначных функций эти интегралы эквивалентны.

В данной работе исследуется взаимоотношение интегралов Хенстока и Данжуа – Петтиса. Этот вопрос оказывается труднее, поскольку даже на классе сепарабельных пространств эквивалентность нарушается. Окончательный ответ получен на классе функций вида $f = \sum x_n \chi_{(a_n,b_n)}$, $x_n \in X$, или ступенчатых функций, которые рассматривались, например, в [3].

Далее X обозначает банахово пространство, X^* — сопряжённое к нему, f определена на отрезке $[a,b]$ и принимает значения в X.

Определение 1. Функция f называется *интегрируемой по Хенстоку*, если существует вектор $I \in X$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ такая что, для любого набора $\{(s_i,\Delta_i)\}$ со свойством $s_i \in \Delta_i \subset (s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i))$, выполняется неравенство $\| \sum f(s_i)|\Delta_i| - I \| < \varepsilon$.

Определение 2. Функция f называется *интегрируемой по Данжуа – Петтису*, если для каждого $x^* \in X^*$ функция x^*f интегрируема по Хенстоку на $[a,b]$, и для любого отрезка $\Delta \subset [a,b]$ существует $x_\Delta \in X^*$ такой, что $x^*x_\Delta = \int_\Delta x^*f$ для всех $x^* \in X^*$.

[1] Работа поддержана грантом ведущих научных школ НШ-979.2012.1.

Теорема. *Интегралы Хенстока и Данжуа – Петтиса эквивалентны на классе ступенчатых функций со значениями в X тогда и только тогда, когда сильная сходимость в X равносильна слабой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солодов А. П.* Интегралы Хенстока и Макшейна для банаховозначных функций. // Мат. заметки. 1999. Т. 65(6). С. 860–870.

2. *Fremlin D. H., Mendoza J.* On the integration of vector-valued functions // Illinois J. Math. 1994. Vol. 38, № 1 P. 127–147.

3. *Bongiorno B., Di Piazza L., Musial K.* Kurzweil-Henstock and Kurzweil – Henstock – Pettis integrability of strongly measurable functions // Math. Bohem. 2006. Vol. 131, № 2. P. 211–223.

В. В. Старков (Петрозаводск)

Vstar@psu.karelia.ru

α-ЗВЕЗДООБРАЗНЫЕ И α-ДОСТИЖИМЫЕ ОБЛАСТИ В $\mathbb{R}^n$[1]

Область $D \subset \mathbb{R}^n, 0 \in D$, называется *$\alpha$-достижимой*, $\alpha \in (0,1)$, если для любой ее граничной точки существует конус с радиальной осью симметрии

$$K_+(p,\alpha,r) = \{x \in R^n : ||x-p|| < r, (x-p, p/||p||) \geq ||x-p|| \cos(\alpha\pi/2)\},$$

лежащий в $\mathbb{C} \setminus D$. В плоском случае такие области изучались, например, в [1–4]. При этом инструментом служил аппарат теории однолистных функций. Будет показано, что в этом вопросе гораздо эффективнее отказаться от привлечения теории функций, а за точку опоры брать геометрию. Доказано:

1) из α-достижимости области D следует ее η-достижимость из области, D $(0 < \eta < \alpha)$, т. е. для любой граничной точки в области D существует конус

$$K_-(p,\eta,r(p)) =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : ||x-p|| < r(p), (x-p, -p/\|p\|) > \|x-p\| \cos(\eta\pi/2)\};$$

2) из η-достижимости области D изнутри для любого $\eta \in (0,\alpha)$ следует ее α-достижимость бесконечными конусами $K_+(p,\alpha,\infty)$ из вне;

3) из α-достижимости области извне бесконечными конусами следует ее η-достижимость из области D конусами фиксированного размера $K_-(p,\eta,R)$;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952a).

4) при $\alpha \in (0,1)$ α–достижимые области ограничены (результат известен [2] в плоском случае, но мы даем простое доказательство без применения теорий функций);

5) в случае гладкой границы области D при существенном использовании результата пункта 3), получено необходимое и достаточное условие ее α-достижимости:

$$(gradF(p)/||gradF(p)||, p/||p||) \geq \sin(\alpha\pi/2)$$

для любой точки p на границе D; здесь $F(x) = 0$ — уравнение границы, $gradF(p) \neq 0$.

α-достижимые области являются звездообразными. Они представляют интерес в вопросах граничного поведения функций, заданных в таких областях, так как в этих областях с негладкой, вообще говоря, границей можно рассматривать угловые пределы (пределы по конусам).

Результаты получены совместно с П. Личберски.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Stankiewicz J.* Quelques problemes extremaux dans les classes α-angulairement etoilees // Ann. Univ. M. Currie-Sklodowska. Sect. A. 1966. Vol. 20. P. 59–75.

2. *Brannan D. A., Kirwan W. E.* On some classes of bounded univalent functions // J. London Math. Soc. 1969. Vol. 2. P. 431–443.

3. *Ma W. Minda D.* // Ann. Univ. M. Currie-Sklodowska. Sect. A. 1991. Vol. 45. P. 89–97.

4. *Sugava T.* A self-duality of strong starlikeness // Kodai Math. J. 2005. Vol. 28. P. 382–389.

А. П. Старовойтов, А. В. Астафьева (Гомель)
svoitov@gsu.by, avastafeva@mail.ru

АСИМПТОТИКА СОВМЕСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ДЛЯ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

голоморфных в нуле функций. Зафиксируем $n, m_1, m_2, \ldots, m_r$ – произвольные целые неотрицатетельные числа. Обозначим $\sum_{j=1}^{r} m_j = m$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Известно, что существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $deg\, Q_m \leqslant m$, $deg\, P_{n_j}^j \leqslant n_j$, для которых

$$Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots .$$

В случае единственности множества $\{P^j_{n_j}(z)/Q_m(z)\}^r_{j=1}$, его элементы $\pi^j_{n_j,m}(z,f_j) = P^j_{n_j}(z)/Q_m(z)$ называют совместными аппроксимациями Паде для системы функций (1). Единственность имеет место для системы экспонент $f_j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

А. И. Аптекарев доказал [1], что при $n + m \to \infty$ для любого $j = 1, 2, \ldots, r$ $\pi^j_{n_j,m}(z; e^{\lambda_j \xi})$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$.

Теорема. *Пусть* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}^2_{j=1}$ *— набор экспонент с произвольными различными комплексными числами* λ_1, λ_2. *Тогда если* $m(n) = o(n^{1/2})$, *то для любого комплексного* z *равномерно по всем* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$ *при* $n \to \infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n,m}(z; e^{\lambda_1 \xi}) \sim$$

$$\sim \frac{(-1)^m\ (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2}\ n!\ m_1!\ \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+m+1}}{(n+m)!\ (n+m_1+1)!}\, e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z}\ e^{\frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{n+m} z}.$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n,m}(z; e^{\lambda_2 \xi}) \sim$$

$$\sim \frac{(-1)^m\ (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1}\ n!\ m_2!\ \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+m+1}}{(n+m)!\ (n+m_2+1)!}\, e^{\frac{\lambda_2 m_2}{n+m_2} z}\ e^{\frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{n+m} z}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.

A. P. Starovoitov, Yu. A. Ermolenko (Gomel)
svoitov@gsu.by, jlabych@yandex.ru

TRIGONOMETRIC PADÉ APPROXIMANTS FOR FUNCTIONS WITH REGULARLY DECREASING FOURIER COEFFICIENTS

We shall consider real continuous 2π-periodic functions f expanded in a convergent Fourier series:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

where the Fourier coefficients a_k and b_k are real numbers.

Let $\mathcal{R}^t_{n,m}$ be the class of trigonometric rational functions $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$ where the numerator $p_n(x)$ and denominator $q_m(x)$ are trigonometric polynomials with real coefficients such that $\deg p_n \leqslant n$,

$\deg q_m \leqslant m$. We define the *best uniform trigonometric rational approximations* to f to be: $\mathrm{R}^t_{n,m}(f) := \inf\{||f - r|| : r \in \mathcal{R}^t_{n,m}\}$, where $||g|| = \max\{|g(x)| : x \in [0, 2\pi]\}$.

By a *trigonometric Padé approximant* to a function f we shall mean a rational function $\pi^t_{n,m}(x; f) = p^t_n(x)/q^t_m(x)$ in $\mathcal{R}^t_{n,m}$, where the numerator and denominator satisfy the condition

$$q^t_m(x)f(x) - p^t_n(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\widetilde{a}_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx).$$

Sufficient conditions describing the regular decrease of the coefficients of a Fourier series (1) are found which ensure that the trigonometric Padé approximants $\pi^t_{n,m}(x; f)$ converge to the function f in the uniform norm at a rate which coincides asymptotically with the highest possible one (see [1]):

Theorem. *Let f be a function in $T^\alpha_\beta(q)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \geqslant 1$, $q \in \mathbb{R}$. If $m(n) = o\left(n^{1/(2+\beta)}\right)$, then for all $x \in \mathbb{R}$, uniformly for all $x \in \mathbb{R}$ uniformly for m, $0 \leqslant \leqslant m \leqslant m(n)$, $n \to \infty$*

$$\mathrm{R}^t_{n,m}(f) \sim \|f - \pi^t_{n,m}(\cdot; f)\| \sim m!\, |a_{n+1}| \left(\frac{\alpha|q|}{n^{\alpha+1}}\right)^m.$$

BIBLIOGRAPHY

1. *Labych Yu. A., Starovoitov A. P.* Trigonometric Padé approximants for functions with regularly decreasing Fourier coefficients // Sb. Math. 2009. Vol. 200:7, 198:7. P. 107-–130.

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко (Гомель)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПАДЕ

Рассмотрим непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ функции, представимые рядом Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

$$f_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(x)}{(\gamma)_k}, \qquad (1)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$, $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$.

Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}$ множество всех алгебраических рациональных дробей $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$, где p_n и q_m – вещественные алгебраические многочлены и $\deg p_n \leqslant n$, $\deg q_m \leqslant m$. Для $f \in C[-1,\,1]$, определим наилучшие равномерные алгебраические рациональные приближения, полагая

$$\mathrm{R}_{n,\,m}(f) = \mathrm{R}_{n,\,m}(f;[-1,1]) := \inf\{\|f-r\| : r \in \mathcal{R}_{n,\,m}\},$$

где $\|g\| = \max\{|g(x)| : x \in [-1,\,1]\}$.

Аппроксимацией Паде – Чебышёва (см. [1]) функции f_γ, представимой рядом (1), назовем дробь $\pi^{ch}_{n,\,m}(x;\,f_\gamma) = p^{ch}_n(x)\,/\,q^{ch}_m(x)$ из класса $\mathcal{R}_{n,m}$, для которой

$$f_\gamma(x) - \pi^{ch}_{n,\,m}(x;\,f_\gamma) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k\,T_k(x),$$

где c_k — вещественные числа.

Теорема. *Аппроксимации Паде – Чебышёва функции f_γ существуют и если $m(n) = o(n)$, то равномерно по всем m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$\mathrm{R}_{n,\,m}(f_\gamma;\,[-1,1]) \sim \|f_\gamma - \pi^{ch}_{n,\,m}(\cdot;\,f_\gamma)\| \sim \frac{m!\,(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\,.$$

Кроме того, равномерно по всем m, $0 \leqslant m \leqslant n$ при $n \to \infty$

$$\mathrm{R}_{n,\,m}(f_\gamma;\,[-1,1]) \asymp \|f_\gamma - \pi^{ch}_{n,\,m}(\cdot;\,f_\gamma)\| \asymp \frac{m!\,(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суетин С. П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57(1). С. 45–142.

С. А. Стасюк (Киев)
stasyuk@imath.kiev.ua

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ АНАЛОГОВ КЛАССОВ БЕСОВА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ[1]

Пусть L_q — пространство Лебега 2π-периодических функций $f(x)$ со стандартной нормой $\|\cdot\|_q$, $x \in [0,2\pi]$. Пусть $B^{0,r}_{\infty,\theta} := \{f \in L_\infty : \|f\|_{B^{0,r}_{\infty,\theta}} \leq \leq 1\}$, где $r > 0$, $1 \leq \theta < \infty$, $\|f\|_{B^{0,r}_{\infty,\theta}} := \left(\sum\limits_{s=0}^{\infty}((s+1)^r\|\delta_s(f)\|_\infty)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № GP/F32/0100).

а $\delta_s(f) := \sum\limits_{[2^{s-1}]\le k<2^s} \widehat{f}(k)e^{ikx}$, $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$. Классы $B^{0,r}_{\infty,\theta}$ являются аналогами классов Бесова с логарифмической гладкостью.

Для центрально-симметричного множества $F \subset L_q$ рассмотрим величину

$$d_m(F, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m \subset L_q} \sup_{f\in K} \inf_{c_j} \Big\| f - \sum_{j=1}^m c_j u_j \Big\|_q,$$

которая называется m-м поперечником по Колмогорову множества F в пространстве L_q.

Сформулируем некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{\theta}$, *тогда*

$$d_m(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $2 \le q, \theta < \infty$, $r > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$, *тогда*

$$d_m(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Заметим, что при $\theta = \infty$, т.е. для классов $LG^r := B^{0,r}_{\infty,\infty}$ соответствующие теоремам 1 и 2 результаты установлены в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Теория функций, СМФН. 2007. Т. 25. С. 58–79.

С. А. Степанянц (Москва)
tri_zvezdochki@mail.ru

КОРНИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ И ВОПРОСЫ ВКЛЮЧЕНИЯ МЕТОДОВ ВОРОНОГО[1]

В данной работе будет рассматриваться суммирование методов Вороного (или Нёрлунда) числовых рядов $\sum a_n$ с действительными или комплексными членами.

Определение и свойства методов Вороного (W, P_n) можно найти в [1, гл. 4]. Приведём это определение в форме, удобной для дальнейшего использования.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00175).

Пусть $\{P_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — неубывающая последовательных действительных чисел с $P_0 > 0$. Говорят, что $\sum a_n = A\ (W, P_n)$, если

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{P_m} \sum_{\nu=0}^{m} P_{m-\nu} a_\nu = A.$$

Вместе с $\{P_n\}$ будем рассматривать производящую функцию $P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n$. Известно, что многие классические методы суммирования (в частности, методы Чезаро (C, k) и дискретных средних Рисса (Rd, k) [1, гл. 5]) могут быть представлены как методы Вороного для некоторой $\{P_n\}$. Будем говорить, что метод суммирования R включается в метод T $(R \subset T)$, если из того, что $\sum a_n = A\ (R)$ следует, что $\sum a_n = A\ (T)$.

Теорема. *Пусть (W, P_n) и (W, Q_n) — два регулярных метода Вороного с производящими функциями $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Пусть существует число γ, такое что $|\gamma| < 1$; $P(\gamma) = 0$; $Q(\gamma) \neq 0$. Тогда $(W, P_n) \not\subset (W, Q_n)$.*

Следствие. Рассматривая нули производящих функций методов (Rd, k), можно сделать вывод об отсутствии шкалы для этих методов, т. е. $(Rd, k) \not\subset (Rd, k+1)$ для натуральных $k > 2$.

Замечание. Условие теоремы нельзя усилить в том смысле, что если $|\gamma| \leq 1$, то утверждение теряет силу. Например, $(Rd, 2) \subset (C, 3)$, но производящая функция для метода $(Rd, 2)$ имеет ноль в точке $\gamma = -1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

А. В. Стрижов (Москва)
anton.strizhov@gmail.com

УТОЧНЕНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК С ПОМОЩЬЮ ИЗМЕРЯЕМЫХ ДАННЫХ

Тема доклада — уточнение экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах. Цель исследования — найти способ уточнения экспертной оценки качества объектов, с помощью оценок, выставленных в ранговых шкалах, и измеряемых данных.

Даны n объектов, измеряемые по каждому из m признаков. Результаты измерений записаны в матрицу A размера $m \times n$. Эксперт задает ранговые оценки качества объектов и важности показателей. Скаляр, соответствующий объекту, называется интегральным индикатором качества объекта. Скаляр, соответствующий показателю, называется весом показателя. Векторы весов и индикаторов связаны формулой $q = Aw$. Требуется найти такую оценку, что векторы весов и индикаторов удовлетворяют ранговым оценкам.

Ранговые оценки задают в пространствах весов и индикаторов многогранные конусы. Если линейное отображение конуса из пространства весов в пространство индикаторов пересекается с конусом, заданном в пространстве индикаторов, то искомая уточненная экспертная оценка принадлежит их пересечению. Если же они не пересекаются, то такой оценки не существует. Тогда предлагается отыскать компромисс между выставленной экспертной оценкой и вычисленной.

Результат исследования — метод получения экспертной оценки, уточненной в линейной шкале, подтвержденный теоремами.

1. Если в пространстве интегральных индикаторов два многогранных конуса пересекаются, то в пространстве весов тоже. Пересечение их отображений в пространство весов равняется отображению их пересечения.
2. Для любой матрицы A существует такой вектор весов w, что пересечение конуса, заданного в пространстве индикаторов с конусом, отображенным в это пространство непусто.

Предложенный подход используется для построения интегральных индикаторов качества [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strijov V. V. et. al.* Integral Indicator of Ecological Impact for Croatian Power Plants // Energy. 2011. Vol. 36(7). P. 4144–4149.

М. С. Султанахмедов (Махачкала)
sultanakhmedov@gmail.com

ОБРАБОТКА И СЖАТИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ И СИГНАЛОВ ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМИ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ[1]

В работе рассмотрены задачи обработки и сжатия двумерных изображений и трехмерных массивов посредством дискретного преобразования Фурье – Чебышева на основе полиномов Чебышева $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$, $(0 \le n \le N-1)$, образующих ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ с весом

$$\mu(x) = \frac{\Gamma(N-x+\alpha)\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

При численной реализации дискретного преобразования Фурье – Чебышева возникает проблема неустойчивости счета при вычислении значений самих базисных полиномов $\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ при $x \in \Omega_N$, в особенности при больших n и N.

Эту проблему удалось решить, опираясь на специальные свойства полиномов, такие как рекуррентные и разностные соотношения, а также представление через гипергеометрическую функцию. Результаты вычисления значений полиномов на сетке в классических случаях $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ перепроверялись с привлечением алгоритмов длинной арифметики.

Проведены компьютерные эксперименты по обработке и сжатию изображений на основе двумерного дискретного преобразования Фурье – Чебышева в базисе $\tau_{n,m}^{\alpha,\beta}(x,y) = \tau_n^{\alpha}(x,N)\tau_m^{\beta}(y,N)$ $(0 \le n, m \le N-1)$, которые показывают достаточно высокую эффективность предлагаемого подхода. В частности, проводилось сравнение предлагаемого нами подхода с методами сжатия на основе дискретного косинусного преобразования и вейвлетов. В отдельных случаях удается достичь значительного прироста эффективности сжатия.

Разработаны устойчивые алгоритмы для численной реализации трехмерного дискретного преобразования Фурье – Чебышева. Проведен ряд компьютерных экспериментов по сжатию различных трехмерных массивов дискретными полиномами Чебышева, таких как данные геологической разведки, данные статистических исследований и др.

Э. Ш. Султанов (Махачкала)
emir.sultanov@gmail.com

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ МЕЙКСНЕРА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА[1]

Рассмотрена задача об аппроксимации дискретных функций с помощью рядов по полиномам Мейкснера $m_n^{\alpha}(x) = m_n^{\alpha}(x,q)$, ортогональным на равномерной сетке $\{0,1,\ldots\}$. Построены новые ряды по указанным полиномам, частичные суммы $S_n(f;x)$ которых совпадают в точке $x = 0$ с приближаемой функцией $f(x)$, т.е. $S_n(f;0) = f(0)$.

Построение новых рядов основано на предельном переходе при $\alpha \to -1$ рядов Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x,q)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

по полиномам Мейкснера $m_n^\alpha(x,q)$, ортонормированным на равномерной сетке $\{0,1,\ldots\}$ с весом

$$\eta(x)=(1-q)^{\alpha+1}q^x\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}.$$

Также исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм рассматриваемых предельных рядов на сетке $\{0,1,\ldots\}$. Для указанных частичных сумм изучено поведение функций Лебега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Дискретные ортогональные многочлены. Теория и приложения. Махачкала: ДГПУ, 2006. 259 с.

Д. С. Теляковский (Москва)
dtelyakov@mail.ru

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ В $\mathbb{R}^n$, СОХРАНЯЮЩИХ УГЛЫ[1]

Рассматривается отображение $y=f(x)$ области $\Omega\in\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, в $\mathbb{R}^n$. Если непрерывное отображение в каждой точке области Ω обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений, то такое отображение конформно. Под свойством сохранения углов при отображении $y=f(x)$ в точке $x\in\Omega$ имеется в виду, что $\lim_{x'\to x,x''\to x}(\angle y'{-}y,y''{-}y)-(\angle x'{-}x,x''{-}x)=0$, где $y'=f(x')$ и $y''=f(x'')$. Показано, что если отображение $y=f(x)$ в каждой точке области Ω сохраняет углы, то оно конформно в Ω.

С. А. Теляковский (Москва)
sergeyAltel@yandex.ru

О СВОЙСТВАХ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ РЯДА $\sum\frac{1}{k}\sin kx$[2]

С помощью строго возрастающей последовательности Λ натуральных чисел $1=n_1<n_2<\ldots$ строится функция

$$g_\Lambda(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{\sin kx}{k}\right|.$$

Исследуется, при каких условиях на последовательность Λ эта функция интегрируема в $L^p[0,\pi]$ с весом $x^{-\gamma}$, $\gamma<1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00952а), АВЦП (проект 2.1.1/6827) и гос. контрактов с Рособразованием П268 и П943).
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00417).

Теорема 1. *При целых $p = 2, 3, \ldots,$ функция $g_\Lambda(x)$ принадлежит пространству $L^p[0,\pi]$, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{1-\frac{1}{p}},$$

где $m_j = \min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1)$.

В теоремах 2 и 3 рассматривается сходимость интеграла

$$\int_0^\pi x^{-\gamma} g_\Lambda^p(x)\, dx \tag{1}$$

при $\gamma \neq 0$.

Теорема 2. *Интеграл (1) при $p = 1$ сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{\gamma}.$$

Теорема 3. *При целых $p = 2, 3, \ldots$ и γ, удовлетворяющих условию $1 - p < \gamma < 1$, интеграл (1) сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_j} m_j^{1-\frac{1}{p}(1-\gamma)},$$

а при $\gamma = 1 - p$ интеграл (1) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_{j+1}} \log m_j.$$

П. А. Терехин (Саратов)
TerekhinPA@info.sgu.ru

БЕССЕЛЕВЫ СИСТЕМЫ И ИХ ПРОДОЛЖЕНИЕ[1]

Пусть F — банахово пространство и $G = F^*$ — сопряженное пространство всех непрерывных линейных функционалов на F. Как обычно, билинейная форма $\langle f, g \rangle$ задает значение функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097) и гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МД-300.2011.1).

Пусть X — банахово пространство, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить, что X — *модельное пространство*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X. Напомним, что i-й канонический орт $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Сопряженное пространство X^* к модельному пространству изометрически изоморфно некоторому пространству последовательностей Y.

Скажем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ — *бесселева система* в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X, если существует постоянная $B > 0$ такая, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\{\langle\varphi_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B\|g\|_G.$$

Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является X-*продолжимой*, если существуют объемлющее банахово пространство $\mathcal{F} \supset F$, включающее в себя исходное пространство F в качестве замкнутого подпространства, базисная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathcal{F}$, изометрически эквивалентная естественному базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ модельного пространства X, непрерывный линейный проектор $P : \mathcal{F} \to F$ из $\mathcal{F}$ на F и постоянная $B > 0$ такие, что

$$\varphi_n = B \cdot P\psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 1. *Для того, чтобы система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F была X-продолжимой, необходимо и достаточно, чтобы она являлась бесселевой системой в F относительно модельного пространства X.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терехин П. А.* О бесселевых системах в банаховом пространстве // Мат. заметки. 2012. Т. 91(2). С. 285–296.

С. В. Трошина (Москва)
svetatroshina@gmail.com

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ БЕЗРИСКОВЫМ ПОРТФЕЛЕМ

В работе проводится построение дискретной динамической модели управления инвестиционным портфелем ценных бумаг при условии безрисковых вложений, которая является развитием модели, представленной в [1].

Пусть инвестор в каждый момент t $(t = 0, \dots, T-1)$ вкладывает средства в n активов, имеющих ставку доходности $r_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ соответственно.

Объем вложенных средств в i-й актив в момент t обозначим $u_i(t)$. Некоторую часть наращенного капитала по i-му активу на следующем шаге инвестор вкладывает в тот же актив.

Через $y_i(t+1)$ обозначим общий объём наращенного капитала по i-ому активу за период от t до $t+1$. Таким образом, уравнения роста капитала будут иметь вид:

$$y_i(t+1) = (1 + r_i(t))u_i(t) + (1 + r_i(t))\eta y_i(t),$$

$$t = 0, \dots, T-1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $0 \prec \eta \prec 1$.

Будем полагать $y_i(0) = 0$, $u_i(t) \geq 0$.

Оптимальная стратегия управления определяется квадратичным критерием, минимизация которого обеспечивает приближение суммарных доходов от всех активов к запланированным (задача слежения за эталоном) и, кроме того, минимизацию вложений на каждом шаге и максимизацию доходов в конце рассматриваемого периода.

Таким образом, деятельность инвестора должна быть построена так, чтобы минимизировался критерий:

$$I = \alpha_1 \sum_{t=0}^{T-1} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t) - p(t) \right)^2 - \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2(T) + \beta \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^2(t) \to \min,$$

где α_1, α_2, β — неотрицательные весовые коэффициенты.

Построен алгоритм нахождения точного решения этой линейно-квадратичной задачи оптимального управления

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоров С. П., Трошина Н. Ю., Трошина С. В.* Одна динамическая модель оптимизации инвестиционных вложений // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем : сб. статей 5-й междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2010. С. 121–125.

Е. А. Трушкова (Переславль-Залесский)
katerina@trushkova.pereslavl.ru

МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ[1]

Рассмотрим задачу управления гамильтоновой системой с управляемыми коэффициентами

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = A\left(u(t)\right)x(t),\ t \in [t_I, t_F],\ x \in R^{2n},\ u \in U(t,x) \subset R^1, \\ x(t_I) = x_I,\ J(x,u) = F\left(x(t_F)\right) = x^T(t_F)Qx(t_F) \to \min, \end{array} \tag{1}$$

где $A(u) = \begin{pmatrix} 0 & P_A \\ -P_A & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & P_B \\ -P_B & 0 \end{pmatrix} u$, $P_A = P_A^T$, $P_B = P_B^T$, $Q = Q^T$. Поставим задачу улучшения: известен процесс $m^I = \left(x^I(t), u^I(t)\right)$, требуется найти $m^{II} = \left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$, такой что $J(m^{II}) < J(m^I)$. Запишем конструкции достаточных условий оптимальности Кротова: $G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x)$, $R(t,x,u) = \varphi_x^T A(u)x + \varphi_t$. Метод глобального улучшения [1,2] заключается в поиске функции $\varphi(t,x)$ такой, что $G(x^I(t_F)) = \max\limits_{x} G(x)$, $R(t, x^I(t), u^I(t)) = \min\limits_{x(t)} R(t, x(t), u^I(t))$. Будем искать $\varphi(t,x) = \psi^T(t)x + x^T\sigma(t)x$, предполагая, что $\alpha, \beta \geq 0$, $R(t,x,u^I(t)) = \alpha\left(x - x^I(t)\right)^T\left(x - x^I(t)\right)$, $G(x) = -\beta\left(x - x^I(t_F)\right)^T\left(x - x^I(t_F)\right)$. Тогда $\psi(t)$, $\sigma(t)$ можно найти, решив задачи Коши

$$\begin{array}{l} \dot{\sigma}(t) = -2\sigma(t)A(u^I(t)) + \alpha E, \quad \sigma(t_F) = -Q - \beta E, \\ \dot{\psi}(t) = -A^T(u^I(t))\psi(t) - 2\alpha x^I(t), \quad \psi(t_F) = 2\beta x^I(t_F). \end{array} \tag{2}$$

Далее, метод глобального улучшения предполагает поиск функции

$$\widetilde{u}(t,x) = \arg \max_{u \in U(t, x^I(t))} \left(\psi^T(t)A(u)x + x^T A^T(u)\sigma(t)A(u)x\right),$$

и замыкание полученным управлением исходной системы. Тем самым получается улучшенный процесс $m^{II} = \left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$.

Теорема. *Вышеописанный метод глобального улучшения гарантирует выполнение неравенства* $J(m^I) - J(m^{II}) \geq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кротов В. Ф., Фельдман И. Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.

2. *Трушкова Е. А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // АиТ. 2011. № 6. С. 151–159.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-90717).

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

О РАВНОСХОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧИ КОШИ И МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГРАНЖА – ЯКОБИ[1]

Пусть
$$u_n(\theta) = (\sin\frac{\theta}{2})^{\alpha_n+\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta}{2})^{\beta_n+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(\cos\theta)$$
— «взвешенные» многочлены Якоби, а
$$S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(f,\theta) = \sum_{k:\theta_{k,n}\in[0,\pi]} \frac{u_n(\theta)}{u_n'(\theta_{k,n})(\theta-\theta_{k,n})} f(\theta_{k,n}) \quad (u_n(\theta_{k,n})=0).$$

Сделаем линейную замену переменной $\phi(\theta) : [\frac{a}{2}, \pi - \frac{\pi-b}{2}] \leftrightarrow [0,\pi]$. Рассмотрим круг K в комплексной плоскости переменной τ с центром на действительной оси и границей ∂K, проходящей через точки $-\frac{a}{2(\pi+b-a)}\pi$ и $\frac{3\pi+b-2a}{2(\pi+b-a)}\pi$. Обозначим
$$\max\left(\max_{\substack{\phi\in[0,\pi],\\ \tau\in\partial K}}\left|\frac{\sin\frac{\theta(\tau)}{2}}{\sin\frac{\theta(\phi)}{2}}\right|^{\pm1}, \max_{\substack{\phi\in[0,\pi],\\ \tau\in\partial K}}\left|\frac{\cos\frac{\theta(\tau)}{2}}{\cos\frac{\theta(\phi)}{2}}\right|^{\pm1}\right) = \mathcal{M}_0(a,b).$$

Будем говорить,что функция $f \in C[a,b]$, $\quad [a,b] \subset (0,\pi)$ и пара последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ связаны между собой условием равносходимости, если после доопределения функции f до F на отрезок $[0,\pi]$
$$F(\theta) = \begin{cases} f(\theta), & \text{при } \theta \in [a,b], \\ 0, & \text{при } \theta \in [0,\pi] \setminus (\frac{3a}{4}, \frac{\pi+3b}{4}), \\ \text{линейная}, & \text{при } \theta \in (\frac{3a}{4}, a) \text{ и } (b, \frac{\pi+3b}{4}) \end{cases}$$
найдутся константа $\nu \geq 0$ и ограниченная последовательность $\{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$, каждый член которой удовлетворяет неравенству $\frac{1}{\ln n} \leq \mu_n \leq \mu < \infty$, такие, что одновременно справедливы соотношения
$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(F, \frac{1}{n}\right)\mu_n \ln n = 0$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

и
$$|\alpha_n|+|\beta_n|\le \frac{\ln(\mu_n \ln n)}{\ln \mathcal{M}_0(a,b)}+\nu, \quad n=2,3,4,\dots .$$

Теорема 1. *Пусть функция $f\in C[a,b]$, $[a,b]\subset(0,\pi)$ и пара последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ связаны между собой условием равносходимости. Тогда для классических интерполяционных процессов Лагранжа – Якоби $\mathcal{L}_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(F,\cos\theta)$ и значений операторов $S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}$, имеет место равномерно по θ на $[a,b]$ соотношение*

$$|\mathcal{L}_n^{(\alpha_n,\beta_n)}(F,\cos\theta)-S_{\lambda_n}^{(\alpha_n,\beta_n)}(F,\theta)|=o(1), \text{ при } n\to\infty,$$

где o-символ зависит от a, b, $\|f\|_{C(a,b)}$, выбора константы ν и последовательности $\{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$.

К. Б. Турашвили (Саратов)
ksenia-sgu@mail.ru

ОЦЕНКА ФУНКЦИЙ И КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА – ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Найдены точные по порядку оценки сверху и снизу для функций и констант Лебега интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функция задачи Штурма – Лиувилля $u''+(\lambda-q(x))u=0$ с краевыми условиями $u'(0)-hu(0)=0$, $u'(\pi)+Hu(\pi)=0$, где h и H — произвольные действительные числа (допускается h, $H=\infty$), а потенциал q ограниченной вариации на отрезке $[0,\pi]$, исчезает в нуле и не обязательно непрерывен.

Теорема 1. *Пусть h и H в краевых условиях, потенциал задачи Штурма – Лиувилля $q\in V[0,\pi]$, исчезает в нуле и не обязательно непрерывен, тогда существует константа C_1 такая, что для всех $x\in$ $\in[0,\pi]$ и всех $n=3,4,5,\dots$ справедливо неравенство*

$$L_n^{SL}(x)=\sum_{k=1}^{n}|l_{k,n}^{SL}(x)|\le C_1|u_n(x)|\ln n+C_2.$$

В частности,
$$L_n^{SL}=\max_{x\in[0,\pi]}L_n^{SL}(x)\le 2C_1\ln n.$$

Теорема 2. *Пусть $0\le\alpha<1$, $C_2>0$, числовые последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $0\le a_n<b_n\le\pi$, $b_n-a_n\ge C_2 n^{-\alpha}$. Тогда для*

любых h и H в краевых условиях и любого потенциала q ограниченной вариации, исчезающего в нуле и необязательно непрерывного, задачи Штурма – Лиувилля существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, начиная с которого функции и константы Лебега интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля на отрезках $[a_n, b_n]$ будут удовлетворять неравенствам

$$L_n^{SL}([a_n, b_n], x) = \sum_{k=l_n}^{m_n} |l_{k,n}^{SL}(x)| \geq C_\alpha |u_n(x)| \ln n - \frac{C_3}{n},$$

и, в частности,

$$L_n^{SL}([a_n, b_n]) = \max_{x \in [a_n, b_n]} L_n^{SL}([a_n, b_n], x) \geq \frac{C_\alpha}{2} \ln n,$$

где $l_n : x_{l_n-1,n} < a_n \leq x_{l_n,n}$, $m_n : x_{m_n,n} \leq b_n < x_{m_n+1,n}$ — номера наименьшего и наибольшего из нулей $x_{k,n}$, принадлежащих отрезку $[a_n, b_n]$, а константа C_α зависит только от параметров задачи Штурма – Лиувилля и α.

Н. С. Узенцова, С. П. Сидоров (Саратов)
e-mail: uzentsovans@gmail.com, sidorovsp@info.sgu.ru

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТЬЮ ПРЯМОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ: ЕМКОСТНЫЙ АНАЛИЗ[1]

Рассмотрим нейронную сеть $F : R \to R$ прямого распространения сигнала с одним входом и одним выходом и одним скрытым слоем, содержащем n нейронов [1, 2]:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sigma(w_j x + b_j),$$

где $\sigma(\theta) = \frac{\theta}{1+\theta}$, $x \in R$. Обозначим множество всех таких отображений G_n.

Лемма. *Справедливы соотношения*

$$\frac{d^s F(x)}{dx^s} = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j^s Q_s(\sigma(\theta_j)),$$

где $\theta_j := w_j x + b_j$, $Q_s(\sigma(\theta_j)) = (-1)^{s+1} s! w_j^s \frac{1}{\theta^s} \sigma^s(\theta_j)(1 - \sigma(\theta_j))$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Используя лемму, мы приведем новое (конструктивное) доказательство следующего утверждения [3].

Теорема. *Пусть* $x_{max} > 0$ *— произвольное действительное число. Для любого алгебраического полинома* p *степени* $n-1$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует нейронная сеть* $F : R \to R \in G_n$ *такая, что*

$$|F(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [-x_{max}, x_{max}].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галушкин А.* Теория нейронных сетей. М.: ИПРЖР, 2000.

2. *Haykin S.* Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Second ed. NJ: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.

3. *Allan Pinkus*, Approximation theory of the MLP model in neural networks // Acta Numerica. 1999. Vol. 8. P. 143–195

Р. Н. Фадеев (Саратов)

belal_templier@mail.ru

ДОСТАТОЧНЫЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОБОБЩЕННЫМ КЛАССАМ БЕСОВА[1]

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, такая что $2 \le p_j \le N$. По $\mathbf{P}$ определяется ортонормированная система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и обобщенное сложение $\oplus$ на $[0,1)$ (см. [1]). Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p[0,1)$, а $\omega^*(f,t)_p = \sup\limits_{0<h<t} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_p$ — модуль непрерывности в $L^p[0,1)$. Пусть $\alpha(t)$ — измеримая положительная функция на $[0,1)$, такая что $\alpha(t) \in L[\delta,1)$ при всех $0 < \delta < 1$ и $\int_{\delta/2}^{\delta} \alpha(t)\,dt \le C\int_{\delta}^{2\delta} \alpha(t)\,dt$. По определению имеем $B\left(\theta,p,\alpha\right) = \{f \in L^p[0,1) : \int_0^1 \alpha(t)\omega^*\left(f,t\right)_p^{\theta}\,dt < \infty\}$, где $p, \theta \ge 1$.

Определим коэффициенты Фурье $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_n(x)}dx$. Введем две последовательности $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}$ формулами $\beta(n) = \int_{1/n+1}^{1} \alpha(t)dt$, $\beta(0) = 1$ и $\alpha(n) = \int_{1/n+1}^{1/n} \alpha(t)dt$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in L^p[0,1)$. *Для включения* $f \in B\left(\theta,p,\alpha\right)$ *достаточны следующие условия:*

а) $p \ge 2$, $\theta/p \ge 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha(k))^{1-\theta/p}\beta^{\theta/p}(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}k^{\theta-2\theta/p} < \infty$;

б) $p \ge 2$, $\theta/p \le 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}k^{\theta-2\theta/p} < \infty$;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

в) $1 < p \le 2$, $\theta \ge 2$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha(k))^{1-\theta/2}\beta^{\theta/2}(k)|\hat{f}(k)|^{\theta} < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta \ge 1$, $f \in L^p[0,1)$. *Для включения* $f \in B\,(\theta, p, \alpha)$ *необходимы следующие условия:*

а) $2 \le p < \infty$, $\theta/p \ge 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(k)^{1-\theta/p}\beta(k)^{\theta/p}|\hat{f}(k)|^{\theta}k^{\theta-2\theta/p} < \infty$;

б) $2 \le p < \infty$, $\theta/p \le 1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta(k)|\hat{f}(k)|^{\theta}k^{\theta-2\theta/p} < \infty$.

В тригонометрическом случае аналогичные результаты см. в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Бериша М.* О коэффициентах Фурье некоторых классов функций // Glasnik Mat. 1981. Vol. 16(36). P. 75–90.

Ю. А. Фарков (Москва)
farkov@list.ru

О ВСПЛЕСКАХ В АНАЛИЗЕ УОЛША

Для данного целого $p \ge 2$ группа Виленкина G_p может быть определена как слабое прямое произведение счетного множества циклических групп p-го порядка (в случае $p = 2$ группа G_p изоморфна канторовой диадической группе). Теория ортогональных рядов на группах Кантора и Виленкина началась с замечания И. М. Гельфанда о том, что функции Уолша можно интерпретировать как характеры группы Кантора. Специфика построения всплесков на группе G_p связана с тем обстоятельством, что эта группа (как и аддитивная группа поля p-адических чисел) содержит открытые компактные подгруппы. Известно, например, что всплески Хаара и Шеннона на группе G_p совпадают. Недавно [1] выяснилось, что при построении ортогональных всплесков в $L^2(G_p)$ основная задача о нахождении подходящей унитарной матрицы с заданной первой строкой допускает более простое решение по сравнению с известным методом для $L^2(\mathbb{R}^d)$. Это свойство позволило найти новые алгоритмы построения ортогональных и биортогональных всплесков с компактными носителями в $L^2(G_p)$. Соответствующие дискретные вейвлеты в пространствах последовательностей определены в [2], а периодические всплески на группе G_p построены в [3]. В докладе будут приведены некоторые результаты по применению изучаемых всплесков к кодированию фрактальных функций и обработке изображений. Полученные ранее результаты о всплесках в анализе Уолша вместе с подробной библиографией содержатся в обзоре [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Farkov Yu. A., Rodionov E.A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3(3). P. 181–195.

2. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина-Крестенсона // Мат. заметки. 2011. Т. 89(6). С. 914–928.

3. *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets on the p-adic Vilenkin group // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3(4). P. 281–287.

4. *Farkov Yu. A.* Wavelets and frames in Walsh analysis // «Wavelets: Classification, Theory and Applications», Chapter 11. Editors: Manel del Valle et al, Nova Science Publishers, N.Y, 2011. P. 267–304.

Ю. А. Фарков (Москва)
farkov@list.ru

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВСПЛЕСКАХ

Пусть $\{w_k\}$ — функции Уолша на локально компактной канторовой группе $(G,\oplus)$, а подгруппа U, автоморфизм A и элементы $h_{[k]}$ определены как в работе [1].

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ выберем $b_k^{(n)}\in\mathbb{C}$, $k=0,1\dots,2^n-1$, такие, что $b_0^{(n)}=1$, $|b_k^{(n)}|^2+|b_{k+2^{n-1}}^{(n)}|^2=1$, $k=0,1,\dots,2^n-1$, и определим маски $m_0^{(n)}(\omega)=(1/2)\sum_{k=0}^{2^n-1}c_k^{(n)}w_k(\omega)$, где $c_k^{(n)}$ получаются из $b_k^{(n)}$ применением дискретного преобразования Уолша. Тогда функции

$$\varphi_j(x):=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2^{j+1}-1}c_k^{(j+1)}\varphi_{j+1}(x\oplus A^{-j-1}h_{[k]}),\quad x\in G,$$

имеют преобразования Фурье

$$\widehat{\varphi_j}(\omega)=2^{-j/2}\prod_{n=j+1}^{\infty}m_0^{(n)}(A^{-n}\omega),\quad j\in\mathbb{Z}_+,\quad \omega\in G,$$

а носители всех функций φ_j расположены в U. Определим функции ψ_j по формуле

$$\psi_j(x):=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2^{j+1}-1}(-1)^{k+1}c_{k\oplus 1}^{(j+1)}\varphi_{j+1}(x\oplus A^{-j-1}h_{[k]}),\quad x\in G,$$

и положим $\psi_{j,k}(x):=\psi_j(Ax\oplus h_{[k]})$, $x\in G$. Доказано, что если маски $m_0^{(n)}$ удовлетворяют модифицированному условию Коэна (см. [1]) и существует число $s\in\mathbb{N}$ такое, что

$$m_0^{(n)}(A^{-s}\omega)=1\quad \text{для всех}\quad n\in\mathbb{N},\quad \omega\in U,$$

то система $\{\varphi_0(\cdot \oplus h_{[k]}) \,|\, k \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\psi_{j,k} \,|\, j,k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована и полна в пространстве $L^2(G)$ (сравните с [2, теорема 8.2.2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82(6). С. 934–952.

2. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 616 с.

Ю. А. Фарков (Москва)
farkov@list.ru

О ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, $T = \partial U$ — его граница, $U_R = RU$ – круг радиуса R, $d\sigma(e^{i\theta}) = d\theta/2\pi$ – мера Лебега на T, $d\nu(x+iy) = dxdy/\pi$ – плоская мера Лебега. Ниже через s_n обозначается любой из n-поперечников d_n (колмогоровский), d^n (гельфандовский) и δ_n (линейный) (см. [1]). Замкнутый единичный шар пространства Харди $H^p(U_R)$ обозначается через $BH^p(U_R)$. В работе [2] доказано, что при $1 \leq$ $\leq q \leq p \leq \infty$, $R \geq 1$ верны равенства

$$s_n(BH^p(U_R), L^q(\sigma)) = R^{-n},\ s_n(BH^p(U_R), L^q(\nu)) = R^{-n}\Big(\frac{qn}{2}+1\Big)^{-1/q}.$$

Для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ пусть $H_R(l,p)$ обозначает класс функций, у которых производная порядка l принадлежит классу $BH^p(U_R)$. Аналогично определяется класс Бергмана – Соболева $A_R(l,p)$. Поперечники классов $H_R(l,p)$ и $A_R(l,p)$ в метриках $L^p(\sigma)$ и $L^p(\nu)$ вычислялись В. М. Тихомировым, Л. В. Тайковым, А. Пинкусом и др. (см. библиографию в [1–3]).

Задача 1. Для $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $n \geq l$, $R \geq 1$ найти значения n-поперечников $s_n(H_R(l,p), L^q(\sigma))$ и $s_n(H_R(l,p), L^q(\nu))$. В частности, при указанных условиях проверить равенство

$$s_n(H_R(l,p), L^q(\nu)) = \frac{(n-l)!}{n!}\Big(\frac{qn}{2}+1\Big)^{-1/q} R^{l-n}.$$

Задача 2. Для $1 \leq p < \infty$, $R \geq 1$ вычислить значения n-поперечников $s_n(A_R(l,p), L^p(\sigma))$.

Отметим, что бернштейновские n-поперечники $b_n(H_R(l,p), L^q(\sigma))$ в случае $l=0$, $p=\infty$, $q=2$ вычислены в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory. Berlin/N.Y.: Springer-Verlag, 1985. 524 p.

2. *Farkov Yu. A.* n-Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions // J. Complexity. 1996. Vol. 12. P. 58–79.

3. *Farkov Yu. A.* The N-widths of Hardy-Sobolev spaces of several complex variables // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 75. P. 183–197.

4. *Парфенов О. Г.* Поперечники по Бернштейну некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1994. Т. 56(4). С. 123—131.

Н. Н. Федотов (Москва)
nikitafedot@yandex.ru

СХОДИМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА С ОШИБКАМИ В ПРОЕКТОРАХ

Рассмотрим действительное гильбертово пространство H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Множество $\mathbf{D}\subset H$ будем называть словарем, если все элементы $\mathbf{D}$ имеют единичную норму и $\overline{span\mathbf{D}} = H$. Напомним определение ортогонального жадного алгоритма (OGA). Для $f\in H$ индуктивно определим последовательности аппроксимантов $\{G_k\}_{k=0}^{\infty}$, остатков $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ и подпространств $\{H_k\}_{k=0}^{\infty}$. Положим $r_0 = f$, $H_0 = \{0\}$ и $G_0 = 0$. Если уже известны r_n, H_n и G_n $(n \geqslant 0)$, выберем $e_{n+1}\in\mathbf{D}$ такой, что $|\langle r_n, e_{n+1}\rangle| = \sup\limits_{e\in\mathbf{D}}|\langle r_n, e\rangle|$, и положим $H_{n+1} = \langle H_n\cup e_{n+1}\rangle = \langle e_1,\ldots,e_{n+1}\rangle$, $G_{n+1} = \mathbf{Pr}_{H_{n+1}}(f)$, $r_{n+1} = f - G_{n+1}$, где $\mathbf{Pr}_{H_k}$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство H_k.

Известно, что $G_n\to f$ при $n\to\infty$ ([1]), и на естественном классе $A_1(\mathbf{D})$ скорость сходимости является оптимальной ([2]).

При реализации OGA возникают два основных источника вычислительных погрешностей — выбор элементов e_n и вычисление проекций $\mathbf{Pr}_{H_n}(f)$. Первый тип ошибок рассматривался ранее, например, в работах [3], [4]. Ошибки, связанные с погрешностями при вычислении проекций $\mathbf{Pr}_{H_n}(f)$, ранее не изучалось.

Введем последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$ векторов абсолютных ошибок при проектировании. При этом будем считать, что $g_n\in H_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Выбрав на $(n+1)$-м шаге элемент e_{n+1}, положим $H_{n+1} = \langle H_n\cup e_{n+1}\rangle$, $G_{n+1} = \mathbf{Pr}_{H_{n+1}}(f) + g_{n+1}$, $r_{n+1} = f - G_{n+1}$.

Теорема. *Слабое ортогональное жадное разложение произвольного элемента $f\in H$ с абсолютными ошибками $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f если и только если $g_n\to 0$ при $n\to\infty$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dubinin V. V.* Greedy Algorithms and Applications // Ph. D. Thesis. Univ. South Carolina. 1997.

2. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Some remarks on Greedy Algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5. P. 173–187.

3. *Temlyakov V. N.* Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2000. Vol. 12. P. 213–227.

4. *Галатенко В. В* Сходимость слабых ортогональных жадных приближений. // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимней мат. шк. Воронеж, 2011. С. 62–63.

И. В. Хахинов (Москва)
ivkhakhinov@mail.ru

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТОДОВ ВОРОНОГО

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и P — метод суммирования, т.е. правило, по которому мы ряду $\sum a_n$ сопоставляем (или нет) некоторое число.

Пусть P и Q два метода суммирования.

Определение 1. Тогда будем говорить, что имеет место включение методов суммирования $Q \subset P$, если из того, что $\sum a_n = S(Q)$ следует, что $\sum a_n = S(P)$.

Определение 2. Методы P и Q называются *эквивалентными* ($P \sim \sim Q$), если имеют место включения методов $Q \subset P$ и $P \subset Q$.

Пусть $p_n \geq 0$, $p_0 > 0$, $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$.

Определение 3. Ряд $\sum a_n$ называется *суммируемым методом Вороного* (W, P_n) к числу S (запись $\sum a_n = S(W, P_n)$) если $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = S$, где $t_n = \dfrac{P_n a_0 + P_{n-1} a_1 + \dots + P_0 a_n}{P_n}$.

Методы Чезаро (C, k) и дискретных средних Рисса (Rd, k) являются методами Вороного $(W, \binom{n+k}{k})$ и $(W, (n+1)^k)$ соответственно.

Обозначим $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n$ и $Q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^k x^n$ — производящие функции методов Чезаро и дискретных средних Рисса.

Известно, что $P(x)$ не имеет корней при $|x| \leq 1$. Множество корней $Q(x)$ при $|x| \leq 1$ не пусто при $k \geq 2$ [1]. Пусть $\{\gamma_i\}_{i=0}^{m}$ — множество корней $Q(x)$ при $|x| \leq 1$.

Определим новый метод суммирования $(\widetilde{Rd}, k)$, добавив к производящей функции метода Чезаро (C, k) корни производящей функции метода суммирования дискретными средними Рисса при $|x| \leq 1$.

А именно, определим числа $\tilde{P}_n$ соотношением

$$\tilde{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n x^n = (x - \gamma_0) \cdot \ldots \cdot (x - \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n =$$

$$= (x - \gamma_0) \cdot \ldots \cdot (x - \gamma_m) \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n.$$

Определение 4. Ряд $\sum a_n$ называется *суммируемым методом* $(\widetilde{Rd}, k)$ к числу S, если $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{R}_n^k = S$, где $\tilde{R}_n^k = \dfrac{\tilde{B}_n^k}{\tilde{P}_n}$, $\tilde{B}_n^k = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \tilde{P}_{n-\nu} a_\nu$.

Теорема. *Пусть $k \geq 2$ — фиксированное действительное число. Тогда $(Rd, k) \sim (\widetilde{Rd}, k)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miesner W., Wirsing E.* On zeros of $\sum (n+1)^k z^n$ // J. London Math. Soc. 1965. Vol. 40. P. 421–424.

А. А. Хомченко, Н. П. Гришина, С. П. Сидоров (Саратов)
aahomchenko@gmail.com, sidorovsp@info.sgu.ru

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ НЕПРИЯТИЯ ПОТЕРЬ ИНВЕСТОРОМ[1]

Известно [1], что задача оптимального портфельного инвестирования может быть сформулирована как задача нахождения $x \in D := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, максимизирующего математическое ожидание значения функции полезности:

$$\mathbb{E}(u(r(x))) \to \max_{x \in D}, \tag{1}$$

где $r(x)$ есть доходность портфеля x.

Традиционный подход [1] состоит в использовании в качестве функций полезности возрастающих вогнутых функций. С другой стороны, учет поведенческих аспектов отношения инвестора к потерям [2] приводит рассмотрению задачи (1), где

$$u(r) = \begin{cases} (r - r_0)^\alpha,\ r \geq r_0, \\ \lambda (r_0 - r)^\beta,\ r < r_0, \end{cases} \tag{2}$$

r_0 есть заданный уровень доходности, α, β, λ есть положительные константы, характеризующие отношение инвестора к потерям.

Так как задача (1), (2) не является выпуклой, стандартные методы нелинейной оптимизации не могут гарантировать нахождения ее решения. В связи с этим мы используем некоторые алгоритмы эвристической оптимизации [3, 4]. Мы покажем, что учет неприятия потерь инвестором имеет существенное влияние на структуру оптимального портфеля,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

которая имеет значительные расхождения со структурой оптимального портфеля, полученного на основе подхода Марковица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H.* Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7 (1). P. 77–91.

2. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect theory: An analysis of decision under risk // Econometrica. 1979. Vol. 47. P. 263–291.

3. *Storn R., Price K.* Differential evolution — a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces // Journal of Global Optimization. Vol. 11. P. 341–359.

4. *Price K., Storn R.M., Lampinen J.A.* Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. Berlin: Springer, 2005.

А. А. Хромов, Г. В. Хромова (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ С «РАЗМАЗАННЫМ» ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Рассматривается задача восстановления непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию:

$$U(f) \equiv \int_0^1 p(x) f(x) dx = 0, \tag{1}$$

где $p(x) \in C^1[0,1]$, $p(1) \neq 0$, и заданной δ-приближением $f_\delta(x)$ в среднеквадратичной метрике.

Для решения задачи применяется метод из [1] в котором приближенные решения также удовлетворяют условиям (1). При этом, по сравнению с [1], здесь снимается дополнительное условие:

$$\int_0^1 p(x)\, dx \neq 0.$$

Обозначим через T_r семейство операторов из [1] и рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, T_r, f) = \sup\{\|T_r f_\delta - f\|_{C[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta\}.$$

Теорема. *Предельное соотношение*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

$\Delta(\delta, T_\alpha, f) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, $r \to \infty$ *выполняется тогда и только тогда, когда*

1) $f(x) \in M$, *где* $M = \{f \in C[0,1] : U(f) = U_1(f) = 0\}$,

$U_1(f) = p(1)f(1) - p(0)f(0) - \int\limits_0^1 p'(x)f(x)dx;$

2) $r = r(\delta)$, *так что* $(r(\delta))^{1/2}\delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* О построении приближений к непрерывным функциям с интегральными граничными условиями // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2001. Т. 51, № 8. С. 1370–1375.

А. П. Хромов (Саратов)
KhromovAP@info.sgu.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА В НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СЛУЧАЕ[1]

На отрезке $[0,1]$ изучается краевая задача для системы Дирака

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x), \tag{1}$$

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1(1) = y_2(1). \tag{2}$$

Предполагаем, что $q_j \in C[0,1]$ ($q_j(x)$ — комплекснозначные). В отличие от случая $q_j \in C^1[0,1]$ здесь приходится сталкиваться со значительными трудностями. Тем не менее, и в недифференцируемом случае достигнуты значительные успехи (см. [1–3]). Мы получаем уточненные асимптотические формулы для собственных значений (фактически полные асимптотические разложения) в трудном недифференцируемом случае.

Система (1)–(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1 e^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} q_2(t) y_2(t)\, dt, \\ y_2(x) &= c_2 e^{-\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} q_1(t) y_1(t)\, dt, \end{aligned} \tag{3}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные (см. также [4]). В (3) положим $z_1(x) = y_1(x)e^{-\lambda x}$, $z_2(x) = y_2(x)e^{\lambda x}$. Тогда получим

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t)\, dt, \tag{4}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

$$z_2(x) = c_2 + \int\limits_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t)\, dt. \tag{5}$$

Найдем матрицу решений $z(x) = (z_{ij}(x))_{i,j=1}^2$ при c_1 и c_2 таких, чтобы $z(0) = E$. Тогда $(z_{11}(x), z_{21}(x))^T$ (T — знак транспонирования) удовлетворяет (4)-(5) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Подставляя в этом случае (5) в (4), получим

$$z_{11}(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)\, dt \int\limits_0^t e^{2\lambda\tau} q_1(\tau) z_{11}(\tau)\, dt. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для решения $z_{11}(x)$ уравнения (6) имеет место формула*

$$z_{11}(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11}(x, \xi)\, d\xi, \tag{7}$$

где $K_{11}(x,\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{11,n}(x,\xi)$,

$$K_{11,n}(x,\xi) = \int\limits_0^x q_2(t_1)\, dt_1 \int\limits_0^x \varepsilon(t_1, t_2) q_1(t_2)\, dt_2 \cdots$$
$$\cdots \int\limits_0^x \varepsilon(t_{2n-3}, t_{2n-2}) q_1(t_{2n-2})\, dt_{2n-2} \int\limits_0^x \varepsilon(t_{2n-2}, t_{2n-1}) \times$$
$$\times \varepsilon(\xi, t_{2n}(\xi) + \xi - t_{2n-1}) \varepsilon(t_{2n}(\xi) + \xi, \xi) q_2(t_{2n-1}) q_1(t_{2n}(\xi))\, dt_{2n-1},$$

$\xi(x,t) = 1$ *при* $t \le x$, $\xi(x,t) = 0$ *при* $t > x$, $t_{2n}(\xi) = t_1 - t_2 + t_3 - \cdots + {}$ $+ t_{2n-1} - \xi$, $K_{11}(x,\xi)$ *не зависит от* λ.

Формула (7) получается путем решения уравнения Вольтерра (6) методом последовательных подстановок, при этом в каждом члене получающегося ряда произведения экспонент приводим к одной экспоненте. Для $K_{11,n}(x,\xi)$ имеет место оценка

$$|K_{11,n}(x,\xi)| \le (M_1 M_2)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}, \tag{8}$$

где $M_j = \max\limits_x |q_j(x)|$.

Лемма 2. *Для $z_{21}(x)$ имеет место формула*

$$z_{11}(x) = \int\limits_0^x e^{2\lambda\xi} K_{21}(x,\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

где $K_{21}(x,\xi) = q_1(\xi) + \int\limits_\xi^x q_1(\tau) K_{11}(\tau, \tau - \xi)\, d\tau$.

Формула (9) получается подстановкой (7) в (5) при $c_2 = 0$. Далее, $z_{12}(x)$, $z_{22}(x)$ удовлетворяют (4)–(5) при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Лемма 3. *Имеют место формулы*

$$z_{12}(x) = \int\limits_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{12}(x,\xi)\, d\xi, \quad z_{22}(x) = 1 + \int\limits_0^x e^{2\lambda\xi} K_{22}(x,\xi)\, d\xi,$$

где K_{22} получается из K_{11}, меняя q_1 на q_2, q_2 на q_1, а K_{12} — из K_{21}, меняя q_1 на q_2 и K_{11} на K_{22}.

Уравнение для собственных чисел задачи (1)–(2) имеет вид

$$e^{2\lambda} = (1 + g_1(\lambda))(1 + g_2(\lambda))^{-1},$$

где $g_1(\lambda) = \int\limits_0^1 a_1(\xi) e^{2\lambda\xi}\, d\xi$, $g_2(\lambda) = \int\limits_0^1 a_2(\xi) e^{-2\lambda\xi}\, d\xi$, $a_1(\xi) = K_{21}(1,\xi) + K_{22}(1,\xi)$, $a_2(\xi) = K_{11}(1,\xi) + K_{12}(1,\xi)$.

Из результатов в [5] легко следует, что собственные значения, достаточно большие по модулю, простые и $\lambda_n = n\pi i + \varepsilon_n$, $(n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \ldots)$ и $\varepsilon_n = o(1)$. Так как

$$g_1(\lambda_n) = \int\limits_0^1 a_1(\xi) e^{2\pi n i\xi} (1 + 2\xi\varepsilon_n)\, d\xi + O(\varepsilon_n^2), \tag{10}$$

$$g_2(\lambda_n) = \int\limits_0^1 a_2(\xi) e^{-2\pi n i\xi} (1 - 2\xi\varepsilon_n)\, d\xi + O(\varepsilon_n^2), \tag{11}$$

то справедлива

Лемма 4. *Имеет место асимптотическое соотношение:*

$$\varepsilon_n = \beta_n + \alpha_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2), \tag{12}$$

где $\beta_n = \frac{1}{2}\left[(a_1(\xi), e^{-2\pi n i\xi}) - (a_2(\xi), e^{2\pi n i\xi})\right]$, $((\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(0,1))$, а через α_n обозначаем различные константы, лишь бы $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$.

Теорема 1. *Для собственных значений λ_n справедливы формулы $\lambda_n = n\pi i + \beta_n + \alpha_n^2$.*

Замечание. Если вместо (10) взять

$$g_1(\lambda_n) = \int\limits_0^1 a_1(\xi) e^{2\pi n i\xi} \left(1 + 2\xi\varepsilon_n + \cdots + \frac{(2\xi\varepsilon_n)^m}{m!}\right) d\xi + O(\varepsilon_n^{m+1}),$$

и аналогичное выражение для $g_2(\lambda_n)$ вместо (11), то для ε_n вместо (12) получим

$$\varepsilon_n = \beta_{n_0} + \beta_{n_1}\varepsilon_n + \cdots + \beta_{n_m}\varepsilon_n^m + \alpha_n^{m+1} + O(\varepsilon_n^{m+1}),$$

где β_{n_j} точно вычисляются, что приводит к $\varepsilon_n = \gamma_{nm} + \alpha_n^{m+1}$, где γ_{nm}, в свою очередь, тоже точно вычисляются и $\sum |\gamma_{nm}|^2 < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Djakov P., Mityagin B.* // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.

2. *Джаков П. В., Митягин Б. С.* // УМН. 2006. Т. 61. № 4. С. 77–182.

3. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

4. *Хромов А. П.* // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимней мат. школы. Воронеж, 2011. С. 346–347.

5. *Бурлуцкая М. Ш.* // Материалы Воронеж. весенней мат. школы «Понтрягинские чтения – XXI» : сб. статей. 2010. С. 3–9.

И. Г. Царьков (Москва)
tsar@mech.math.msu.su

СГЛАЖИВАНИЕ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА СУППЕРРЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

Обозначим через (B) класс всех действительных банаховых пространств. Для произвольного чисел $\alpha \in (1,2]$, $C > 0$ и непустого подмножества $M \subset X \in (B)$ через $C\mathbf{H}^\alpha(M)$ обозначим класс всех таких дифференцируемых по Фреше в каждой точке множества M функций $f : M \to \mathbb{R}$, что для произвольных $x, y \in M$ выполнено неравенство: $\big\|f'(x) - f'(y)\big\| \leqslant C\|x-y\|^{\alpha-1}$. Будем писать, что $\varphi \in C\mathbf{Lip}(X)$, если функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ является C-липшицевой на X. Через $\|f\|_\infty$ обозначим равномерную норму функции f на множестве M, а через $\omega(f,\varepsilon)$ будем обозначать модуль непрерывности функции f, т.е. величину $\sup\{\|f(x)-f(y)\| \mid x,y \in M, \|x-y\| \leqslant \varepsilon\}$

В произвольном $X \in (B)$ через S_X обозначим единичный сферу с центом в нуле. Будем писать, что $X \in D(\alpha)$, если $\|\cdot\|_X \in C\mathbf{H}^\alpha(S_X)$ для некоторого числа $C > 0$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (1,2]$, M — произвольное непустое подмножество пространства $X \in D(\alpha)$, и $f : M \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция. Тогда найдется число $K = K(X) > 0$ такое, что для лю-*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00442-а).

бого числа $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $\varphi \in K\dfrac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha}\mathbf{H}^\alpha(X)\cap\dfrac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon}\mathbf{Lip}(X)$: $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant 2\omega(f,\varepsilon)$.

Теорема 2. *Пусть* $X \in (B)$. *Тогда пространство* X *является суперрефлексивным тогда и только тогда, когда найдется такое число* $\alpha \in (1,2]$, *что для любых множества* $M \subset X$ *и равномерно непрерывной функции* $f : M \to \mathbb{R}$ *найдется число* $K = K(X) > 0$ *такое, что для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $\varphi \in K\dfrac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha}\mathbf{H}^\alpha(X)\cap$ $\cap\, K\dfrac{\omega(f,\varepsilon)}{\varepsilon}\mathbf{Lip}(X) : \|f-\varphi\|_\infty \leqslant K\omega(f,\varepsilon)$.

И. А. Шакиров (Набережные Челны)
iskander@tatngpi.ru

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СЕМЕЙСТВОМ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

В математической литературе до сих пор не проведено исследование аппроксимативных возможностей семейства интерполяционных полиномов Лагранжа [1]

$$\Phi_n(x,t;\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^*(t_k-t) + \alpha\sin nt \tag{1}$$

$$\left(D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}(u/2)},\quad n\in N\right)$$

в зависимости от поведения параметра α ($\alpha \in R$), в частности, в классическом пространстве непрерывных 2π-периодических функций $C[0,2\pi]$. Такая возможность появилась после моноядерного описания [2] полиномов (1) в виде

$$\Phi_n^c(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^c(t_k-t) \tag{2}$$

$$(c\in R;\quad t\in[0,2\pi],\quad t_k = \pi k/n),$$

где $D_n^c(u) = \frac{1}{2}\sin nu\big(\mathrm{ctg}\,\frac{u}{2} - c\big)$ — обобщенное ядро Дирихле ($c = 0 \Rightarrow D_n^0(u) = D_n^*(u)$), а параметры α, c связаны вполне определенным соотношением.

1. В работе явные виды функции Лебега, соответствующие полиномам (2), получены для всевозможных значений параметра c ($\pm c \in R$):

$$\lambda_n^{\pm c}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[2c(n-n^*) + \sum_{k=1}^{n^*}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{t_{k-1}+t}{2} + \mathrm{ctg}\,\frac{t_k-t}{2}\right)\pm\right.$$

$$\pm \sum_{k=n^*+1}^{n} \left(\operatorname{ctg} \frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right) \Bigg]$$

$$\left(c > 0; \quad n^* = \left[\frac{2n}{\pi} \operatorname{arcctg} c \right] = \frac{2n}{\pi} \operatorname{arcctg} c \right);$$

$$\lambda_n^0(t) \equiv \lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{ctg} \frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg} \frac{t_k - t}{2} \right)$$

$$(c = 0; \quad t \in T = [0, \pi/n]).$$

2. С использованием аппарата дифференциального исчисления установлены полные поведения графиков пары функций Лебега $\lambda_n^c(t)$ и $\lambda_n^{-c}(t)$ ($c > 0$ — фиксированный параметр), которые выбраны из двух непересекающихся классов $\Phi^+ = \{\lambda_n^c(t) \mid c > 0\}$ и $\Phi^- = \{\lambda_n^{-c}(t) \mid c > 0\}$. Результаты исследования функций Лебега $\lambda_n^*(t)$ ($c = 0$) содержатся в [3]. Заметим, что эти функции и соответствующие им константы Лебега являются фундаментальными характеристиками интерполяционных процессов и их сравнительное исследование остается актуальной задачей теории приближения функции.

Теорема. *Функции $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$, $\lambda_n^{-c}(t) \in \Phi^-$ и их константы Лебега λ_n^c, λ_n^{-c} удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^c(\pi/n - t), \quad \lambda_n^c = \lambda_n^{-c} \quad \forall\, t \in T, \;\; c > 0$$

$$\left(c = 0 \Rightarrow \lambda_n^0 = \lambda_n^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi \right),$$

т. е. графики этих двух произвольно выбранных функций являются симметричными относительно прямой $t - \pi/2n = 0$, проходящей через центр их общего периода T, и соответствующие им константы Лебега равны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 2. 537 с.

2. *Шакиров И. А.* О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 60–68.

3. *Шакиров И.А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 80–88.

Ф. А. Шамоян (Брянск)
shamoyanfa@yandex.ru

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА НА ЕДИНИЧНОМ ТОРЕ

Пусть $D^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = \overline{1,n}\}$ — единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n$ — его остов, $H^p(\mathbb{D}^n), 0 < p \leq +\infty$ — класс Харди в $\mathbb{D}^n$, $N(\mathbb{D}^n)$, $N^+(\mathbb{D}^n)$ — классы Р. Неванлинны и В. И. Смирнова в $\mathbb{D}^n$ соответственно (см. [1]). Хорошо известно, что если граничные значения функции $f \in N^+(\mathbb{D}^n)$ на $\mathbb{T}^n$ принадлежат классу $L^1(\mathbb{T}^n)$, то функция $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$, поэтому коэффициенты Фурье функции $f(\zeta) := f|_{\mathbb{T}^n}$ с индексами из множества $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{Z}^n_+$ равны нулю . В случае $f \in N(\mathbb{D}^n)$ такое утверждение неверно. Однако, как было установлено в работе [2], если коэффициенты Фурье функции $f \in N(D)$, $D := \mathbb{D}^1$, с отрицательными индексами стремятся к нулю достаточно сильно, то они равны нулю. В данной работе устанавливаются аналоги этих результатов в $\mathbb{D}^n$.

Пусть задана последовательность положительных чисел $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n_+}$, где $\alpha_{k_1,\ldots,k_n}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $b^{(j)}_m = \alpha_{k_1,\ldots,k_{j-1},m,k_{j+1},k_n}$ — монотонно возрастающая последовательность при всех $j = 1, 2, \ldots, n$;

б) $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{k^m}{b^{(j)}_k} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Положим $T_j(r) = \sup\limits_{m \geq 1} \frac{r^m}{b^{(j)}_m}$, j=1,2,. . . ,n.

Справедлива

Теорема. *Пусть $f \in N(\mathbb{D}^n)$, причем $f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)}$, $z \in \mathbb{D}^n$, $h_j \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$, и граничные значения функции f суммируемы на $\mathbb{T}^n$, а ряд Фурье имеет вид:*

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} c_k e^{ik\theta} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_-} c_k e^{ik\theta}, \tag{1}$$

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in [-\pi, \pi]^n$, *при этом*

$$|c_{-k}| \leq \frac{1}{\alpha_{k_1,\ldots,k_n}}, k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{2}$$

где $\{\alpha_k\}$ удовлетворяет вышеуказанным условиям. Если

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln T_j(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

то функция $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$, и все коэффициенты Фурье функции f с индексами из множества $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{Z}^n_+$ равны нулю.

Обратно, если $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} = \alpha^{(1)}_{k_1} \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n)}_{k_1}$, причем каждая из последовательностей $\{\alpha^{(j)}_k\}^{+\infty}_{k=1}$, $j = \overline{1,n}$ удовлетворяет условию б) и логарифмически выпукла, то из сходимости одного из интегралов (3) следует, что существует функция $f \in N(\mathbb{D}^n) \cap L^1(\mathbb{T}^n)$, не принадлежащая классу $H^1(\mathbb{D}^n)$, ряд Фурье которой представим в виде (1) с условием (2) на коэффициенты, т. е. не все коэффициенты Фурье с индексами из множества $\mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{Z}^n_+$ равны нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974. 160 с.

2. *Шамоян Ф. А.* Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и классы аналитических функций с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36(4). С. 943—953.

И. И. Шарапудинов (Махачкала)
sharapud@mail.ru

ПРЕДЕЛЬНЫЕ УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИЕ РЯДЫ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА[1]

Пусть $f(x)$ непрерывная функция, заданная на $[-1,1]$. Тогда для каждого $\alpha > -1$ мы можем рассмотреть ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha}(x)$$

по ультрасферическим полиномам $\hat{P}_k^{\alpha}(x)$, образующим ортонормированную систему с весом $\kappa^{\alpha}(x) = (1-x^2)^{\alpha}$ на $[-1,1]$, т.е.

$$\int_{-1}^{1} \kappa^{\alpha}(x) \hat{P}_k^{\alpha}(x) \hat{P}_n^{\alpha}(x) dx = \delta_{kn}.$$

Поскольку $\kappa^{-1}(x) = (1-x^2)^{-1}$ не интегрируема на $[-1,1]$, то при $\alpha = -1$ коэффициенты f_k^{-1} теряют смысл. И тем не менее, оказалось, что предельное положение ряда Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} \hat{P}_k^{\alpha}(x)$ при $\alpha \to -1$, которое мы обозначим через $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{-1} \hat{P}_k^{-1}(x)$, приобретает вполне определенный смысл.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

В настоящей работе показано, что частичные суммы $S_n^{-1}(f,x)$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{-1}\hat{P}_k^{-1}(x)$ обладают полезными свойствами. Среди этих свойств отметим, например, что $S_n^{-1}(f,x)$ совпадает с исходной функцией в точках ±1, т.е. $S_n^{-1}(f,\pm1)=f(\pm1)$. Кроме того, $S_n^{-1}(f,x)$ представляют собой проектор на пространство алгебраических полиномов $P_n(x)$ степени n, т.е. $S_n^{-1}(P_n,x)=P_n(x)$. В работе показано, что функция Лебега $\Lambda_n(x)$ сумм $S_n^{-1}(f,x)$, допускает для $-1\le x\le 1$ оценку

$$\Lambda_n(x)\le c(1+\ln(n\sqrt{1-x^2}+1))$$

В работе рассмотрены также двумерные аналоги рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^{-1}\hat{P}_k^{-1}(x)$ и проводится исследование их свойств.

Т. И. Шарапудинов (Махачкала)
sharapudinov@gmail.com

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ЧЕБЫШЕВА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА[1]

В работе рассмотрена задача о приближении дискретных функций одной и двух переменных рядами по полиномам Чебышева $\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, ортогональным на равномерной сетке $\{0,1,\ldots,N-1\}$. Построены новые ряды по указанным полиномам, частичные суммы $S_n(f;x)$ которых совпадают в концевых точках $x=0$ и $x=N-1$ с исходной функцией $f(x)$, т.е.

$$S_n(f;0)=f(0),\quad S_n(f;N-1)=f(N-1).$$

Конструкция рассматриваемых новых рядов основана на предельном переходе при $\alpha\to-1$ рядов Фурье

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha}\tau_k^{\alpha,\alpha}(x,N)$$

по полиномам Чебышева $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x,N)$, ортонормированным на равномерной сетке $\{0,1,\ldots,N-1\}$ с весом

$$\mu(x)=\frac{\Gamma(N-x+\alpha)\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(N-x)\Gamma(x+1)}.$$

Исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм новых предельных рядов на сетке $\{0,\ldots,N-1\}$. Изучено поведение функций Лебега указанных частичных сумм.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

О. И. Шаталина (Саратов)
olja170788@mail.ru

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А. Н. ТИХОНОВА

Рассматривается задача восстановления непрерывной функции $\overline{u}(x)$, заданной на отрезке [0,1] ее δ — приближением $u_\delta(x)$ в среднеквадратичной метрике, в случае, когда $\overline{u}(x)$ удовлетворяет граничному условию.

$$\beta_1\overline{u}(0) + \beta_2\overline{u}(1) = 0, \tag{1}$$

где β_1 и β_2 — константы, отличные от нуля.

Для решения задачи используется регуляризующее семейство операторов R_α, соответствующее функционалу Тихонова [1]:

$$M_\delta^\alpha[u, u_\delta] = \|u - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\|u\|_{W_2^1}^2,$$

определенному на функциях, удовлетворяющих условию (1).

В данном сообщении приводится интегральный вид указанного семейства операторов. В случае $\beta_2 = 0$ аналогичный результат приведен в [2].

Теорема. *Для операторов R_α справедливо представление*

$$R_\alpha u_\delta = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 G(x, t, -\frac{1}{\alpha})u_\delta(t)\,dt,$$

где $G(x, t, -1/\alpha)$ — функция Грина, соответствующая краевой задаче:

$$\begin{cases} -y'' + y + \dfrac{1}{\alpha}y = \dfrac{1}{\alpha}u_\delta, \\ \beta_1 y(0) + \beta_2 y(1) = 0, \\ \beta_2 y'(0) + \beta_1 y'(1) = 0. \end{cases}$$

Вид функции Грина получен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.

2. *Шаталина О. И.* Оценка погрешности трилинейного решения задачи восстановления функции на некотором компактном классе // Алгоритмический анализ неустойчивых задач : тез. докл. междунар. конф. Екатеринбург, 2011. С. 97–98.

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала)
Tadgius@gmail.com

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2\pi}^{p(x)}$[1]

В работе рассмотрены аппроксимативные свойства линейных средних типа Норлюнда $\mathcal{N}_n(f,x)$ и Рисса $\mathcal{R}_n(f,x)$ для тригонометрических рядов Фурье в пространстве Лебега с переменным показателем $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Пусть $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$

$$s_h(f)(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+t)dt,$$

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\alpha > 0 \,|\, \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right| dx \le 1\},$$

$$\omega(f,\delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0<h\le\delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)}.$$

Через $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ обозначим класс Липшица с показателем α в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, состоящий из функций $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, для которых имеет место неравенство

$$\omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \le M\delta^\alpha (0 < \alpha \le 1).$$

При определенных условиях на методы суммирования Норлюнда и Рисса доказано, что если $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$, то

$$\|f - \mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha,\ \|f - \mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}$ // Analysis mathematica. 2007. T. 33. 135–153.

2. *Ali Guven, Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L_p(x)$ // J. of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285—299

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

А. А. Широкий (Волгоград)
mhwide@hotmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЕЛОНЕ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ К ПРИМЕРУ ШВАРЦА [1]

Пусть P — некоторый конечный набор точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащих на n-мерной C^1-гладкой гиперповерхности F и таких, что любой симплекс с вершинами из P является невырожденным.

Пусть S — некоторый n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Описанным шаром для S назовём $(n+1)$-мерный шар, содержащий на своей границе все вершины симплекса и имеющий наименьшее возможное значение радиуса.

Будем говорить, что *триангуляция гиперповерхности F удовлетворяет условию Делоне*, если для любого симплекса триангуляции описанный в смысле предыдущего определения шар не содержит внутри себя ни одной вершины триангуляции.

Будем говорить, что для двух n-мерных симплексов, пересекающихся по общей $(n-1)$-мерной грани, выполнено *условие пустоты шара*, если $(n+1)$-мерный описанный шар одного симплекса не содержит внутри себя вершин другого симплекса.

Триангуляцию Делоне двумерной поверхности можно рассмотреть применительно к известному примеру Шварца (1890, [2]), в котором строится семейство приближений кругового цилиндра с помощью полиэдральных поверхностей, причём предельная площадь этих приближений может быть как равной площади боковой поверхности цилиндра, так и произвольно большой, даже бесконечной. В докладе показано, что при помощи указанной выше триангуляции Делоне возможно построить полиэдральную поверхность, точно приближающую боковую поверхность цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Delaunay B. N.* Sur la sphére vide. A la mémoire de Georges Voronoï // Изв. АН СССР. 1934. № 6. С. 793–800.

2. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. Волгоград: Платон, 1989. 464 с.

3. *Клячин В. А., Широкий А. А.* Триангуляция Делоне многомерных поверхностей // Вест. СамГУ. Естеств.-науч. сер. 2010. № 4(78). С. 51–55.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-97021-р_поволжье_а).

Е. А. Эрина (Санкт-Петербург)

ОЦЕНКА УКЛОНЕНИЯ ЧАСТИЧНОЙ СУММЫ РЯДА ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СИСТЕМЕ ХААРА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ РАСТЯЖЕНИЯ

В работе найдена точная константа в неравенстве

$$\|f - S_n\|_\infty \le C\omega\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

где $f \in C[0;1]$, S_n- частичная сумма ряда Фурье функции f по системе Хаара с произвольным коэффициентом растяжения. Константа C полностью определяется выбором системы Хаара.

И. С. Юрченко (Саратов)
hamsterchik@mail.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХАРАКТЕРОВ НУЛЬ-МЕРНОЙ ГРУППЫ ДЛЯ СХОДИМОСТИ ПО КУБАМ [1]

М. Г. Плотников в 2007 году [1], рассмаривая функции Уолша на двоичной группе, показал, что конечное множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам. В работе [2] эта задача была решена для кратных рядов Виленкина с произвольной образующей последовательностью (p_k). Мы покажем, что данный результат справедлив для произвольной нуль-мерной группы.

Пусть $(G, \oplus)$ — компактная нуль-мерная группа. Обозначим $p_k = (G_k/G_{k+1})^\sharp$. Пусть (χ_n) совокупность характеров группы G.

Обозначим $\mathfrak{G} = G^N = G \times \cdots \times G$ N-мерную группу с топологией произведения групп.

Рассмотрим N-кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1\ldots n_N}\chi_{n_1}(z_1)\ldots\chi_{n_N}(z_N).$$

Теорема. *Любое конечное множество $A \subset \mathfrak{G} = G^N$ является множеством единственности для N-кратных рядов на группе в смысле сходимости по кубам.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плотников М. Г.* О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 1. С. 61–78.

2. *Непочатова И. С.* О множествах единственности кратных рядов Виленкина для сходимости по кубам // Труды мат. центра имени Н. И. Лобачевского/ Казанское мат. общество. Теория функций, её приложения и смежные вопросы : материалы Десятой междунар. Казан. летней науч. шк.-конф. Казанское мат. общество. 2011. Т. 43. С. 263–265.

В. А. Юрко (Саратов)
yurkova@info.sgu.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ[1]

Рассмотрим краевую задачу L вида

$$\ell y := y'' + \Big(\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x)\Big)y = 0, \quad x > 0, \tag{1}$$

$$U(y) := P_1(\rho)y'(0) - P_0(\rho)y(0) = 0, \tag{2}$$

$$P_k(\rho) = \sum_{j=0}^{p_k} P_{kj}\rho^{p_k - j}, \quad k = 0, 1, \quad p_k \geq 0,$$

с комплексными $q_k(x), P_{kj}$, причем $P_1(\rho)$ и $P_0(\rho)$ не имеют общих нулей. Для определенности $p_0 = p_1 + 1$, $P_{10} = 1$. Предположим, что $P_{00} \neq \pm i$. Пусть $Z_k = \{z_{ks}\}_{s=\overline{1,p_k}}$ — нули $P_k(\rho)$, $k = 0, 1$. Положим

$$Q(x) = \frac{1}{2}\int_0^x q_1(s)\,ds, \quad \Pi_\pm = \{\rho :\ \pm Im\,\rho > 0\}.$$

Пусть $\Phi(x,\rho)$ — решение уравнения (1) при условиях

$$U(\Phi) = 1, \quad \Phi(x,\rho) = O(\exp(\pm(i\rho x - Q(x))), \quad x \to \infty, \quad \rho \in \Pi_\pm.$$

Функция $M(\rho) := \Phi(0,\rho)$ называется *функцией Вейля* для L.

Пусть $Z_k,\ k = 0, 1$ известны и фиксированны. Обратная задача формулируется следующим образом.

Обратная задача. Задана функция Вейля $M(\rho)$, построить $q_1(x)$, $q_0(x)$ и коэффициент P_{00}.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Теорема 1. *Задание функции Вейля $M(\rho)$ однозначно определяет q_1, q_0 и P_{00}.*

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений [1] и дает конструктивную процедуру решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Для случая простого спектра получено также решение обратной задачи по спектральным данным, которые описывают поведение непрерывного и дискретного спектров задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

Содержание

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы 16-й Саратовской зимней школы

Подготовка оригинал-макета: В. А. Халова

Подписано в печать 10.01.2012. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 12,55(13,5). Тираж 250 экз. Заказ 7-Т.

ООО «Издательство «Научная книга».
410031, Саратов, ул. Московская, 35.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Саратовского государственного университета.
410012, Саратов, ул. Б. Казачья, 112А.