Пусть $\beta_g + \beta_v = \delta$ и существуют $C \geq 1$ и монотонная функция $\omega : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такие, что $\frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ и для любого $j_0 \in \mathbb{Z}_+$

$$C^{-1}(j_0+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\omega(j_0+1) \leq \sup_{j\geq j_0} \overline{u}_j \left(\sum_{i=j}^{\infty} \overline{w}_i^q \frac{h(2^{-j})}{h(2^{-i})}\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C(j_0+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\omega(j_0+1).$$

Обозначим $\mathfrak{Z} = (r, d, p, q, g, v, h, a, c_*, C)$, $\mathfrak{Z}_* = (\mathfrak{Z}, R)$, где $R = \operatorname{diam}\Omega$.

Теорема 1. *Выполнено равенство*

$$e_n(I : \hat{\mathcal{W}}^r_{p,g}(\Omega) \to L_{q,v}(\Omega)) \underset{\mathfrak{Z}_*}{\asymp} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \max\{\omega(n), \omega(\log n)\}.$$

УДК 517.9

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1]

А. М. Водолазов, С. Ф. Лукомский (Саратов, Россия)
vam21@yandex.ru, LukomskiiSF@info.sgu.ru

В работе [1] С. Кзырев построил ортогональные системы всплесков на полях p-адических чисел. В [2] S. Albeverio, С. Евдокимов и М. Скопина доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))$ ступенчатой функции φ ортонормирована и функция φ порождает ортогональный p-адический кратномасштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. То есть два условия на функцию: ортогональность системы сдвигов и маштабирующее уравнение дают в качестве решения только систему Хаара. В 2015 году С. Евдокимов и М. Скопина [3] доказали, что для поля $\mathbb{Q}_p$ любой ортогональный вейвлет-базис в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, который состоит из локально-постоянных (периодических) функций, является модификацией базиса Хаара. В работе [4] С.Евдокимов построил ортогональные базисы всплесков, которые состоят из функций с финтным преобразованием Фурье. Эти базисы также ассоциированы с КМА Хаара.

В связи с работой [2] в [5] было доказано, что при $p = 2$ и $M = 1$ требование «φ порождает КМА» (маштабирующее уравнение), можно

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант (проект № 16-01-00152).

опустить. Поэтому представляет интерес нахождения функций, сдвиги которых образуют ортонормированную систему, но не являются решениями маштабирующего уравнения. В [5] авторы построили функции φ которые имеют большой носитель и постоянны на маленьких смежных классах с ортогональной системой сдвигов для поля $\mathbb{Q}_p$. В работе [6] строятся функции, сдвиги которых образуют ортонормированную системумы в случае локальных полей нулевой характеристики.

1. Основные понятия. Приведем необходимые свойства локальных полей нулевой характеристики. Пусть F является конечным расширением поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ степени n. На поле F существует нормирование $\|\cdot\|$ являющееся продолжением p-адического нормирования, которое для элементов $x \in \mathbb{Q}_p$ имеющих разложение

$$x = p^t \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i,$$

где $t \in \mathbb{Z}$ $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ и $a_0 \neq 0$, определяется, как $\|x\|_p = p^{-t}$. Условие продолжимости нормы означает, что для элементов $x \in \mathbb{Q}_p \subset F$ $\|x\| = \|x\|_p$.

Множество

$$\mathbf{O} = \{x \in F \mid \|x\| \leq 1\}$$

является кольцом и называется кольцом целых чисел поля F. Кольцо $\mathbf{O}$ содержит единственный максимальный идеал, который является главным $\mathbf{P} = \pi\mathbf{O} = \{x \in F | \ \|x\| < 1\}$. Фактор-кольцо $\mathbf{k} = \mathbf{O}/\pi\mathbf{O}$ является полем изоморфным $GF(p^s)$. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество представителей смежных классов $\mathbf{O}/\pi\mathbf{O}$, а через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ такие представители, смежные классы которых при изоморфизме являются базисом расширения поля $GF(p^s)$ над полем $GF(p)$. Для любого $a_i \in \mathbf{A}$ существует единственное представление в виде $a_i = a_{i1}\varepsilon_1 + \dots + a_{is}\varepsilon_s$, где $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Каждый элемент $x \in F$ допускает единственное разложение

$$x = \pi^\gamma(a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots),$$

где $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbf{A}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\pi^e = p$ и $es = n$. Норма элемента $\|x\| = p^{-\gamma/e}$. Базисом расширения поля F над $\mathbb{Q}_p$ являются элементы $\varepsilon_i\pi^j$ при $i = 1, \dots, s$ и $j = 0, \dots, e-1$.

Множество $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{F} \ |\|x - a\| \leq p^\gamma\}$ является π-адическим шаром. Дробной частью элемента $x \in F$ называется $\{x\}_F = \pi^\gamma \sum_{k=0}^{-\gamma-1} a_k\pi^k$, множество I_F состоит из чисто дробных чисел $x = \{x\}_F$ и $I_F(N) = I_F \cap B_N(0)$. Обозначим $D_{-N}(M)$, где $N, M \in \mathbb{N}$, множество локально

постоянных функций, носитель которых содержится в $B_N(0)$ и являющихся постоянными на множествах $a + \pi^M \mathbf{O}$.

2. Ортогональная система сдвигов. Фактор-группа $G = \pi^{-N}\mathbf{O}/\pi^M\mathbf{O}$ является конечной абелевой группой порядка $p^{s(N+M)} = q$. Пусть $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{q-1}$ — множество аддитивных характеров группы G. Они образуют ортонормированный базис в пространстве комплексно-значных функций на G.

Определим функции ψ_i на F следующим образом

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \chi_i(x), & \text{если } x \in \pi^{-N}\mathbf{O}, \\ 0, & \text{если } x \notin \pi^{-N}\mathbf{O}, \end{cases}.$$

Эти функции являются аддитивными на F , $\psi_i(x-y) = \psi_i(x)\overline{\psi_i(y)}$ и образуют ортогональный базис для $D_{-N}(M)$ над $\mathbb{C}$, так как

$$\int_F \psi_i(x)\overline{\psi_j(x)}dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ p^{sN}, & i = j, \end{cases}.$$

и для φ имеем место разложение

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{q-1} c_i \psi_i(x).$$

Обозначим через $H_F(N) = \{h \mid h = a - b, \text{ где } a, b \in I_F(N)\}$.

Теорема 1 [6]. *Для функции $\varphi \in D_{-N}(M)$ система сдвигов $(\varphi(x-a))_{a \in I_F}$ будет ортонормированна тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=0}^{q-1} |c_i|^2 \psi_i(h) = \begin{cases} p^{sN}, & \text{если } h = 0, \\ 0, & \text{если } h \neq 0 \text{ и } h \in H_F(N), \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 2 [6]. *Пусть F — локальное поле характеристики ноль. Если $M > \frac{e}{\log_2 p}$, то множество функций $\varphi \in D_{-N}(M)$, сдвиги которых на элементы из I_F образует ортонормированную систему в $L_2(F)$ содержит нетождественную функцию. Количество таких линейно независимых функций в пространстве $D_{-N}(M)$ не менее $p^{s(N+M)} - 2^n p^{sN} + 1$.*

Замечание 1. В [2] для поля $\mathbb{Q}_p$ доказано, что система из теоремы 1 имеет единственное действительное решение при условии, что не более p^N коэффициентов отлично от нуля. Это так, если функция удовлетворяет масштабирующему уравнению. Мы показываем, что если отказаться от этого условия, то появляются другие действительные решения.

Замечание 2. В случае поля $\mathbb{Q}_p$ всегда есть нетождественная функция, обладающая системой ортогональных сдвигов, исключение только $p = 2$ и $M = 1$, что доказано в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козырев С. В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149-–158.

2. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal Appl. 2010. Vol. 16, № 5. P. 693–714.

3. *Evdokimov S., Skopina M.* On orthogonal p-adic wavelet bases // J. Math. Anal. and Appl. 2015. Vol. 424, № 2. P. 952–965.

4. *Evdokimov S.*, On non-compactly supported p-adic wavelets // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 443, № 2. P. 1260–1266

5. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел //Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 14, вып. 3. С. 256–262. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.

6. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* Системы сдвигов в локальных полях нулевой характеристики // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 455. С. 25-–32.

УДК 517.444

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СВЕРТКИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

С. С. Волосивец (Саратов, Россия), Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия)

golubov@mail.mipt.ru, volosivetsss@mail.ru

Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$. Положим $p_{-j} = p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $m_j = p_1 ... p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому числу $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \le x_n < p_n, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь в первой сумме из (1) присутствует конечное число слагаемых и разложение определяется однозначно, если для чисел вида $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_j \ne 0$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j / m_j$, $z_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j)$, $|j| \in \mathbb{N}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Эта операция не определена, если $z_j = p_j - 1$ для всех $j \ge j_0$, т.е. для счетного множества y при