Полученные неравенства точны, в чем можно убедиться на примере последовательности $y_n = e^{\alpha n}$.

Утверждение, аналогичное теореме 4, верно и когда последовательность y_n строго убывает к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stolz O.* Vorlesungen Uber allgemeine Arithmetik: nach den Neuen Ansichten. Leipzig : Teubners, 1885. P. 173–175.

2. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. М. : Прометей, 2005. 232 с.

3. *Абанин А. В., Юделевич В. В.* Об обращении теоремы Штольца // Изв. вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 2. С. 5–9.

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, РАССМАТРИВАЕМОГО В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ [1]

М. Ш. Бурлуцкая (Воронеж, Россия)

bmsh2001@mail.ru

Исследование классических решений функционально-дифференциальных уравнений с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ на отрезке $[0, 1]$ и соответствующих операторов обычно приводит к исследованию систем Дирака (с потенциалом специального симметричного вида), решение которых необходимо удовлетворяет дополнительному условию в неподвижной точке инволюции $x = 1/2$ (см., например, [1], [2]). Простейшее же уравнение с инволюцией $y'(x) = \lambda y(1-x)$ легко приводится к простейшему уравнению второго порядка $y''(x) = -\lambda^2 y(x)$. Однако, если допустить конечный разрыв у решения уравнения с инволюцией (т.е. рассматривать его в классе разрывных решений из пространства $C^1([0, 1/2) \cup (1/2, 1]))$, то удается установить его эквивалентность и системе Дирака, и уравнению Штурма-Лиувилля, заданным на отрезке $[0, 1/2]$, но теперь уже произвольными непрерывными потенциалами [3]. Здесь мы установим связь между классическим решением смешанной задачи для волнового уравнения и решением смешанной задачи для уравнения с инволюцией, рассматриваемым в классе разрывных функций. Соотношения между классическими решениями таких задач в случае уравнений с нулевыми потенциалами исследовались в [4].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

1. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1/2],\ t \in [0,+\infty), \\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1/2],\end{gathered} \tag{1}$$

где $q(x)$, $\varphi(x)$ комплекснозначные, $q(x) \in C[0,1]$. В [5] при минимальных условиях $\varphi(x) \in C^2[0,1/2]$, $\varphi(0) = \varphi(1/2) = \varphi''(0) = \varphi''(1/2) = 0$, установлено, что формальное решение по методу Фурье задачи (1) является классическим решением. Из доказательства этого факта, легко следует, что частные производные $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$ существуют и непрерывны. Поэтому уравнение в (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = -q(x)u(x,t).$$

Отсюда придем к утверждению.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи (1), то $w(x,t) = (w_1(x,t), w_2(x,t))^T$ (T — знак транспонирования) такая, что $w_1(x,t) = u(x,t)$, $w_2(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$, является решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + Q(x)w(x,t), \quad x \in [0,1/2],\ t \in [0,+\infty), \\ w_1(0,t) = w_1(1/2,t) = 0, \\ w_1(x,0) = \varphi(x), \quad w_2(x,0) = -\varphi'(x), \quad x \in [0,1/2],\end{gathered} \tag{2}$$

где $B = \mathrm{diag}(1,-1)$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Полагая $v(x,t) = w_1(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, $v(x,t) = w_2(1-x,t)$, при $x \in (1/2,1]$, получим

Теорема 2. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи (1), то $v(x,t)$ такая, что $v(x,t) = u(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, $v(x,t) = u'_t(1-x,t) + u'_x(1-x,t)$, при $x \in (1/2,1]$, является разрывным в точке $x = 1/2$ решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + p(x)v(1-x,t), \quad x \in [0,1],\ t \in [0,+\infty), \\ v(0,t) = v(1/2,t) = 0, \\ v(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,1],\end{gathered} \tag{3}$$

где $p(x) = 1$, при $x \in [0,1/2]$, $p(x) = -q(1-x)$, при $x \in (1/2,1]$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, при $x \in [0,1/2]$, $\varphi_1(x) = -\varphi'(1-x)$ при $x \in (1/2,1]$.

Аналогично, переходя сначала к векторному уравнению относительно $w_1(x,t) = u(x,t)$, $w_2(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$, а затем снова к скалярному, получим

Теорема 3. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи (1), то $\widetilde{v}(x,t)$ такая, что $\widetilde{v}(x,t) = u(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, $\widetilde{v}(x,t) = u'_t(1-x,t) - u'_x(1-x,t)$, при $x \in (1/2,1]$, является разрывным в точке $x = 1/2$ решением задачи*

$$\begin{gathered} \frac{\partial \widetilde{v}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \widetilde{v}(x,t)}{\partial x} + p(x)\widetilde{v}(1-x,t), \quad x \in [0,1],\ t \in [0,+\infty), \\ \widetilde{v}(0,t) = \widetilde{v}(1/2,t) = 0, \\ \widetilde{v}(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1], \end{gathered} \tag{4}$$

где $p(x)$ из теоремы 2, а $\varphi_2(x) = \varphi(x)$, при $x \in [0,1/2]$, $\varphi_2(x) = \varphi'(1-x)$ при $x \in (1/2,1]$.

2. Теперь исследуем обратный переход от решений задач (3) и (4) к решению (1).

Лемма 1. *Если $v(x,t)$ есть решение задачи (3), то $v(x,t)$ и $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)v(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по всем $x \in [0,1/2]$ и всем t, и имеют место соотношения:*

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x,t) = -q(x)v(x,t), \qquad x \in [0,1/2], \\ v(0,t) = v(1/2,t) = 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), \quad v'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1/2]. \end{gathered}$$

Аналогичный результат имеет место для решения задачи (4). Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть $v(x,t)$ есть решение задачи (3), $\widetilde{v}(x,t)$ есть решение задачи (4), причем $v(x,t) = \widetilde{v}(x,t)$ при $x \in [0,1/2]$. Тогда $v(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in [0,1/2]$ и всем t, и функция $u(x,t) = v(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, является классическим решением задачи (1).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 4. С. 1309–1312.

2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 15–17.

3. *Бурлуцкая М. Ш.* Функционально-дифференциальные уравнения с инволюцией в классе разрывных решений // Современные методы теории краевых задач :

материалы Воронежской весенней матем. шк. «Понтрягинские чтения XXVII». Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2017. С. 47–48.

4. *Хромов А. П.* Об одном свойстве смешанной задачи с инволюцией // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Материалы 10-й Междунар. Казан. летней науч. школы-конф. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2011. Т. 43. С. 364–365.

5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА, В КОТОРЫХ ДЛИНА КРАТЧАЙШЕЙ СЕТИ ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ ПОПАРНЫХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ ТОЧКАМИ[1]

Л. Ш. Бурушева (Москва, Россия)
lburusheva@gmail.com

Пусть X — банахово пространство и $x_1, ..., x_n \in X$. *Длиной кратчайшей сети* для точек $x_1, ..., x_n$ называется число

$$|\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}, X) = \inf\{|\Gamma| : \text{ сеть } \Gamma \text{ соединяет точки } x_1, \ldots, x_n\},$$

где сеть — связный граф с ребрами-отрезками, содержащий точки в качестве своих вершин. Через $|\Gamma|$ обозначается длина сети, то есть сумма длин ее ребер. Будем говорить, что банахово пространство *реализует кратчайшую сеть* для $x_1, \ldots, x_n$, если $|\Gamma_0| = |\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}, X)$ для некоторой сети Γ_0, соединящей $x_1, \ldots, x_n$.

Доклад посвящен вопросу, поставленному в работе [2]: в каких банаховых пространствах для всякого натурального n величина $|\mathrm{smt}|(\{x_1, \ldots, x_n\}, X)$ зависит только от попарных расстояний между точками $x_k \in X$ $(k = 1, \ldots, n)$?

Теорема. *В действительном банаховом пространстве X, реализующем кратчайшие сети для всех своих конечных подмножеств, длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками тогда и только тогда, когда X либо предуально к L_1, либо гильбертово.*

Пространство X *предуально* к L_1 [3], если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-08335).