СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Monna A. F.* Analysys non-Archimedence. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Veilag, 1970. 118 p.

2. *Хренников А. Ю., Шелкович В. М.* Современный p-аддический анализ и математическая физика // Теория и приложения. М. : Физматгиз, 2012. 452 с.

3. *Walsh J. L.* A constructive of normal orthonormal functions // Amer. J. Math. 1923. Vol. 49, № 1. P. 5–24.

4. *Paley R. E. A. C.* A remarkable series of orthonormal functions // Proc. of London Math Soc. 1932. Vol. 36. P. 241–264.

5. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions // Pac. J. Math. 1955. Vol. 5, № 1, P. 17 –31.

6. *Price J. J.* Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math. 1957. Vol. 9, № 3. P. 413–425.

7. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11, № 4, С. 363–400.

8. *Haar A.* Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme // Mathem. Anal. 1910. B. 69. S. 331–371.

9. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортгональных рядов. М. : Физматгиз, 1958. Дополнения Н. Я. Виленкина, § 1, п. 6. С. 475–479.

10. *Голубов Б. И., Рубинштейн А. И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. Нов. сер. 1966. Т. 71, вып. 1. С. 96–115.

11. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 297–314.

12. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 24–29.

13. *Щербаков В. И.* О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. 1983. № 2. С. 37–42.

14. *Щербаков В. И.* Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара // Матем. заметки. 2017. Т. 101, вып. 3. С. 446–473.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ[1]

В. А. Юрко (Саратов, Россия)
YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных пучков дифференциальных операторов второго порядка, заданных на произвольных компактных графах при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделено наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, № 17-51-53180)

обратной задачи доказана теорема единственности и получена конструктивная процедура построения решения. При этом используется развитие идей метода спектральных отображений [1]. Отметим, что основные результаты для классических обратных спектральных задач для дифференциальных операторов *на интервале* представлены в монографиях [1–5]. Обратные спектральные задачи для *операторов Штурма – Лиувилля* на графах изучались в [6–8] и других работах.

Рассмотрим компактный связный граф G в $\mathbf{R}^\ell$ с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_s\}$, множеством вершин $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и с отображением σ, которое каждому ребру $e_j \in \mathcal{E}$ ставит в соответствие упорядоченную пару (возможно равных) вершин: $\sigma(e_j) := [u_{2j-1}, u_{2j}]$, $u_j \in \mathcal{V}$. Вершины $u_{2j-1} =: \sigma^-(e_j)$ и $u_{2j} =: \sigma^+(e_j)$ называются *начальной* и *конечными* вершинами e_j, соответственно. Будем говорить, что ребро e_j *начинается* в точке u_{2j-1} и *заканчивается* в u_{2j}. Точки $U := \{u_j\}_{j=\overline{1,2s}}$ называются *концевыми* для $\mathcal{E}$. Каждая вершина $v \in \mathcal{V}$ порождает класс эквивалентности (который обозначается тем же символом v): $v = \{u_{j_1}, \ldots, u_{j_\nu}\}$ так, что $v = u_{j_1} = \ldots = u_{j_\nu}$. Другими словами, множество U разделяется на m классов эквивалентности $v_1, \ldots, v_m$. Число концевых точек в классе v_k называется *валентностью* вершины v_k и обозначается $val\,(v_k)$. Вершина $v_k \in \mathcal{V}$ называется *граничной*, если $val\,(v_k) = 1$. Остальные вершины называются *внутренними*. Пусть $\mathcal{V}_0 = \{v_1, \ldots, v_p\}$ — граничные вершины, а $\mathcal{V}_1 = \{v_{p+1}, \ldots, v_m\}$ — внутренние вершины. Ребро e_j называется *граничным*, если одна из его концевых точек лежит в $\mathcal{V}_0$. Остальные ребра называются внутренними. Пусть $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \ldots, e_p\}$ – граничные ребра и $v_k \in e_k$ при $k = \overline{1,p}$. Ребро $e_k \in \mathcal{E}$ называется *примыкающим* к $v \in \mathcal{V}$, если $v \in e_k$. Через $R(v, G)$ обозначим множество ребер графа G, примыкающих к v. Пусть l_j — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что начальная точка u_{2j-1} соответствует $x_j = 0$, а конечная точка u_{2j} соответствует $x_j = l_j$.

Цепочка ребер $\{e_{\nu_1}, \ldots, e_{k,\nu_\eta}\}$ называется *циклом*, если она образует замкнутую кривую. Ребро $e_j \in \mathcal{E}$ называется *простым*, если оно не является частью цикла. В частности, все граничные ребра $e_1, \ldots, e_p$ являются простыми. Занумеруем ребра следующим образом: $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \ldots, e_r\}$ — простые ребра, $\mathcal{E}_2 = \{e_{r+1}, \ldots, e_s\}$ — ребра, которые образуют множество циклов. Пусть для определенности $p > 1$ (случаи $p = 0$ и $p = 1$ требуют небольших изменений; см. замечание в конце статьи). Возьмем граничную вершину v_p в качестве корня. Соответствующее ребро e_p будем называть *корневым*. Для определенности условимся, что если $e_j \in \mathcal{E}_1$ — простое ребро, то u_{2j} расположена ближе к корню, чем u_{2j-1}. Стягивая каждый цикл в точку, получим новый граф G^* с множеством ребер $\mathcal{E}_1$. Ясно, что G^* — дерево (т.е. граф без циклов). Зафиксируем $e_k \in G^*$.

Наименьшее число ω_k ребер G^* между корневым ребром и e_k (включая e_k) называется *порядком* ребра e_k. Порядок корневого ребра равен нулю. Число $\omega := \max\limits_{e_k \in G^*} \omega_k$ называется порядком G^*. Пусть $\mathcal{E}^{(\mu)}$, $\mu = \overline{0, \omega}$ — множество простых ребер порядка μ.

Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,s}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, l_j]$ определена на ребре e_j. Обозначим

$$Y_{|u_{2j-1}} := y_j(0), \quad Y_{|u_{2j}} := y_j(l_j), \quad \partial Y_{|u_{2j-1}} := y_j'(0), \quad \partial Y_{|u_{2j}} := -y_j'(l_j).$$

Если $v \in \mathcal{V}$, то $Y_{|v} = 0$ означает, что $Y_{|u_j} = 0$ для всех $u_j \in v$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1,s}}$ и $P = \{p_j\}_{j=\overline{1,s}}$ — комплекснозначные функции на G; они называются потенциалами. Предположим, что $q_j(x_j) \in L(0, l_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, l_j]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G:

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x_j) + q_j(x_j))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in [0, l_j], \tag{1}$$

где $j = \overline{1, s}$, ρ — спектральный параметр, функции y_j, y_j', $j = \overline{1, s}$, абсолютно непрерывны на $[0, l_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки (УС) в каждой внутренней вершине $v_\xi \in \mathcal{V}_1$:

$$Y_{|u_i} = Y_{|u_j} \text{ for all } u_i,\, u_j \in v_\xi, \qquad \sum_{u_i \in v_\xi} \partial Y_{|u_i} = 0. \tag{2}$$

УС (2) называются стандартными УС. Зафиксируем $e_k \in \mathcal{E}_2$ и $\varepsilon_k = 0 \vee 1$. Положим $w_k := u_{2k-\varepsilon_k}$. Если (2) верно для множества $U \setminus \{w_k\}$, то будем называть эти условия w_k-УС.

Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для уравнения (1) с УС (2) во внутренних вершинах $\mathcal{V}_1$ и с граничными условиями Дирихле в граничных вершинах $\mathcal{V}_0$:

$$Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p}. \tag{3}$$

Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p-1}$ для уравнения (1) с УС (2) и с граничными условиями

$$\partial Y_{|v_k} = 0, \quad Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p} \setminus k.$$

Таким образом, $L_k(G)$ получается из $L_0(G)$ заменой краевого условия Дирихле в $v_k = \sigma^-(e_k)$ на условие Неймана в v_k. Обозначим $\Lambda_k = \{\rho_{kn}\}_{n \geq 1}$, $k = \overline{0, p-1}$ — собственные значения (с учетом кратностей) задачи $L_k(G)$.

Пусть $L_\nu^\xi(G)$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, — краевые задачи для уравнения (1) с w_ξ — УС и с граничными условиями

$$\partial^\nu Y_{|w_\xi} = 0, \quad Y_{|v_j} = 0, \quad j = \overline{1, p},$$

где $\partial^0 Y := Y$, $\partial^1 Y := \partial Y$. Через $\Lambda_\nu^\xi = \{\rho_{\nu n}^\xi\}_{n\geq 1}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи $L_\nu^\xi(G)$. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Даны спектры Λ_k, $k = \overline{0, p-1}$, и Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, построить потенциалы P и Q на G.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для оператора Штурма – Лиувилля на *интервале* и на *деревьях*.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с (P, Q) рассмотрим потенциалы $(\tilde{P}, \tilde{Q})$. Везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к (P, Q), то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $(\tilde{P}, \tilde{Q})$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, p-1}$, $\Lambda_\nu^\xi = \tilde{\Lambda}_\nu^\xi$, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, *то* $P = \tilde{P}$ *и* $Q = \tilde{Q}$.

Получена также конструктивная процедура решения обратной задачи 1.

Замечание. Пусть $p \leq 1$ (т.е. $p = 0$ или $p = 1$). Тогда обратная задача ставится следующим образом: *даны спектры* Λ_ν^ξ, $\xi = \overline{r+1, s}$, $\nu = 0, 1$, *построить потенциалы* P *и* Q *на* G. Для $p = 1$ все вышеприведенные рассуждения и результаты остаются верными; в частности, для нахождения потенциалов P и Q на G может быть использован алгоритм 1 без шага 3. Если $p = 0$, $r > 0$, то дерево G^* непусто. Тогда выбираем одну из граничных вершин G^* в качестве корня и повторяем вышеприведенные рассуждения. Если $r = 0$, то G^* пусто, и мы опускаем шаг 3 в алгоритме 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 316 p.

2. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 393 с.

4. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 246 с.

5. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : NOVA Science Publ., 2001. 305 p.

6. *Belishev M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.

7. it Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.

8. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs // Journal of Inverse and Ill-Posed Proplems. 2010. Vol. 18, № 3. P. 245–261.