УДК 517.538

СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДУ[1]

И. И. Шарапудинов (Махачкала, Россия)
sharapud@mail.ru

В настоящей работе мы продолжаем рассмотрение систем функций, ортогональных относительно скалярных произведений, в которых присутствуют одна или несколько точек с дискретными массами. Интерес к таким системам в последнее время интенсивно растет (см. [1–11] и цитированную там литературу). Это новое направление принято обозначать словами: «Функции, ортогональные по Соболеву». Возросшее внимание специалистов к этому направлению теории ортогональных систем можно объяснить в том числе и тем обстоятельством, что ряды Фурье по полиномам (и функциям), ортогональным по Соболеву, оказались естественным и весьма удобным инструментом для представления решений дифференциальных (разностных) уравнений. Скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx \tag{1}$$

обладает указанными свойствами. Ниже нам понадобятся некоторые факты, установленные в [2]. Предположим, что система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормирована на (a,b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)\rho(x)dx = \delta_{kl}, \tag{2}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера. Через $L^p_\rho(a,b)$ обозначим пространство функций $f(x)$, измеримых на (a,b), для которых $\int_a^b |f(x)|^p\rho(x)dx < \infty$. Если $\rho(x) \equiv 1$, то будем писать $L^p_\rho(a,b) = L^p(a,b)$ и $L(a,b) = L^1(a,b)$. Из (2) следует, что $\varphi_k(x) \in L^2_\rho(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Мы добавим к этому условию еще одно, считая, что $\varphi_k(x) \in L(a,b)$ $(k = 0,1,\ldots)$. Тогда, следуя [2], мы можем определить следующие порожденные системой $\{\varphi_k(x)\}$ функции

$$\varphi_{r,r+k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)dt, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{3}$$

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots,r-1. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00486а).

Из (3) и (4) следует, что для п.в. $x \in (a,b)$

$$(\varphi_{r,k}(x))^{(\nu)} = \begin{cases} \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } 0 \le \nu \le r-1,\ r \le k, \\ \varphi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \le k, \\ \varphi_{r-\nu,k-\nu}(x), & \text{если } \nu \le k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \le r-1. \end{cases} \tag{5}$$

Через $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ обозначим пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ $r-1$ раз, причем $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho(a,b)$. Скалярное произведение в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ определим с помощью равенства (1). Тогда, пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (3) и (4)) и равенством (5), нетрудно увидеть (см. [2]), что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$. Следуя [2], мы будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ *ортонормированной по Соболеву* относительно скалярного произведения (1) и *порожденной* ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$. В [2] показано, что ряд Фурье функции $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$ имеет смешанный характер, а именно:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{r,k}\varphi_{r,k}(x), \tag{6}$$

где

$$\hat{f}_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi^{(r)}_{r,k}(t)\rho(t)dt = \int_a^b f^{(r)}(t)\varphi_{k-r}(t)\rho(t)dt,$$

поэтому ряд вида (6) будем называть *смешанным рядом* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, считая это название условным и сокращенным обозначением полного названия: «*ряд Фурье по системе* $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, *ортонормированной по Соболеву, порожденной ортонормированной системой* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$».

Некоторые результаты общего характера

Важное значение имеет свойство смешанного ряда (6), которое заключается в том, что его частичная сумма вида

$$Y_{r,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{N} \hat{f}_{r,k}\varphi_{r,k}(x) \tag{7}$$

при $r \le N$ совпадает с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = a$ r-кратно, т.е.

$$(Y_{r,N}(f,x))^{(\nu)}_{x=a} = f^{(\nu)}(a) \quad (0 \le \nu \le r-1).$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства системы $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, состоящей из функций, определенных равенствами (3) и (4), установленные в работе [2].

Теорема A. *Предположим, что функции $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют полную в $L^2_\rho(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на (a, b). Тогда система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (3) *и* (4), *полна в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ и ортонормирована относительно скалярного произведения* (1).

Теорема B. *Предположим, что $\frac{1}{\rho(x)} \in L(a, b)$, а функции $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ образуют полную в $L^2_\rho(a, b)$ ортонормированную с весом $\rho(x)$ систему на (a, b), $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — система, ортонормированная в $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ относительно скалярного произведения* (6), *порожденная системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ посредством равенств* (3) *и* (4). *Тогда если $f(x) \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, то ряд Фурье (смешанный ряд)* (6) *сходится к функции $f(x)$ равномерно относительно $x \in [a, b]$.*

О представлении решения задачи Коши для ОДУ рядом Фурье по функциям $\varphi_{r,n}(x)$

В настоящем разделе мы рассмотрим задачу о приближении решения задачи Коши для ОДУ суммами Фурье по системе $\{\varphi_{r,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, ортогональной по Соболеву и порожденной ортонормированной системой функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ посредством равенств (3) и (4) с $a = 0$, $b = 1$. Полученные ниже (теорема 1) результаты можно перенести на системы дифференциальных уравнений вида $y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y_0$, где $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Но для простоты выкладок мы ограничимся рассмотрением задачи Коши вида

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \tag{8}$$

в которой функцию $f(x, y)$ будем считать непрерывной в некоторой замкнутой области $\bar{G}$ переменных (x, y), содержащей точку $(0, y_0)$. Кроме того, мы будем считать, что $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \bar{G}$. Это требование не сужает дальнейшие рассмотрения, так как, не ограничивая в общности, мы можем, в случае необходимости, продолжить функцию $f(x, y)$ по переменной y на всё $\mathbb{R}$, сохраняя свойство ее подчиненности нижеследующему условию Липшица (10). Например, если область $\bar{G}$ такова, что прямая в $\mathbb{R}^2$ вида (x, ty) $(t \in \mathbb{R})$ для каждого $x \in [0, 1]$ и $y \in \mathbb{R}$ пересекается с границей области $\bar{G}$ не более, чем в двух (граничных для $\bar{G}$) точках (x, y') и (x, y''), то функцию $f(x, y)$ можно непрерывно продолжить на $[0, 1] \times \mathbb{R}$, считая ее постоянной на лучах, выходящих из точек (x, y') и (x, y'') в противоположные направления вдоль прямой (x, ty) $(t \in \mathbb{R})$.

Требуется аппроксимировать с заданной точностью функцию $y = y(x)$, определенную на $[0,1]$, которая является решением задачи Коши (8). Будем считать, что весовая функция $\rho(x)$ интегрируема на $(0,1)$, а система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы **B**, а порожденная система $\{\varphi_{1,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – условиям $(0 \le x \le 1)$

$$\delta_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{1,k}(x))^2 < \infty, \quad \kappa_\varphi = \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{1,k}(t))^2\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (9)$$

Кроме того, мы предположим, что по переменной y функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \le \lambda|y' - y''|, \quad 0 \le x \le 1. \quad (10)$$

Через m обозначим наименьшее натуральное число, для которого $h\lambda\kappa_\varphi < 1$, где $h = 1/m$. Если, в частности, $\lambda\kappa_\varphi < 1$, то $m = 1$. Полагая $x = t/m$, отобразим линейно отрезок $[0,m]$ на $[0,1]$. Относительно новой переменной $t \in [0,m]$ уравнение (8) принимает следующий вид

$$\eta'(t) = hf(ht,\eta(t)), \quad \eta(0) = y_0, \quad 0 \le t \le m, \quad (11)$$

где $h = 1/m$, $\eta(t) = y(ht)$. Мы можем представить отрезок $[0,m]$ в виде объединения отрезков $[l,l+1]$ $(l = 0,1,\dots m-1)$ и решать поставленную задачу Коши для уравнения (11) сначала на $[0,1]$, а затем, используя найденное начальное значение $\eta(1)$, решать её на $[1,2]$ и так далее. Мы ограничимся рассмотрением этой задачи для отрезка $[0,1]$. Поскольку, по предположению, функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\bar{G}$, то из (11) следует, что функция $\eta'(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и, следовательно, $\eta \in W^1_{L^2_\rho(0,1)}$, поэтому в силу теоремы **B** мы можем представить функцию $\eta(t)$ в виде равномерно сходящегося на $[0,1]$ ряда Фурье по порожденной системе $\{\varphi_{1,n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{\eta}_{1,k}\varphi_{1,k}(t),$$

где

$$\hat{\eta}_{1,k} = \int_0^1 \eta'(t)\varphi_{k-1}(t)\rho(t)dt \quad (k \ge 1). \quad (12)$$

Наша цель состоит в том, чтобы сконструировать итерационный процесс для нахождения приближенных значений коэффициентов $c_k = m\hat{\eta}_{1,k+1}$

$(k = 0, 1, \ldots)$. Для этого обратимся к соотношениям (5) и (7), которые вместе с (12) дают

$$\eta'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\eta}_{1,k+1} \varphi_k(t), \tag{13}$$

где равенство понимается в том смысле, что ряд в правой части равенства (13) сходится к η' в метрике пространства $L^2_\rho(0,1)$. Положим $q(t) = f(ht, \eta(t)) = m\eta'(t)$ и заметим, что в силу (12) (см. также (13)) коэффициенты Фурье функции $q = q(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ имеют вид

$$c_k(q) = \int_0^1 q(t)\varphi_k(t)\rho(t)dt = m\hat{\eta}_{1,k+1} \quad (k \geq 0). \tag{14}$$

С учетом этих равенств мы можем переписать (12) в следующем виде

$$\eta(t) = \eta(0) + h \sum_{k=0}^{\infty} c_k(q)\varphi_{1,k+1}(t). \tag{15}$$

Из (14) и (15), в свою очередь, выводим следующие соотношения

$$c_k(q) = \int_0^1 f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t)\right]\varphi_k(t)\rho(t)dt,\ k = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство l_2, состоящее из последовательностей $C = (c_0, c_1, \ldots)$, для которых определена норма $\|C\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$. В пространстве l_2 рассмотрим оператор A, сопоставляющий точке $C \in l_2$ точку $C' \in l_2$ по правилу

$$c'_k = \int_0^1 f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} c_j\varphi_{1,j+1}(t)\right]\varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Из (16) следует, что точка $C(q) = (c_0(q), c_1(q), \ldots)$ является неподвижной точкой оператора $A : l_2 \to l_2$. Для того чтобы найти точку $C(q)$ методом простых итераций, достаточно показать, что оператор $A : l_2 \to l_2$ является сжимающим в метрике пространства l_2. С этой целью рассмотрим две точки $P, Q \in l_2$, где $P = (p_0, \ldots)$, $Q = (q_0, \ldots)$, и положим $P' = A(P)$, $Q' = A(Q)$. Имеем

$$p'_k - q'_k = \int_0^1 F_{P,Q}(t)\varphi_k(t)\rho(t)dt, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

где

$$F_{P,Q}(t) = f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} p_j \varphi_{1,j+1}(t)\right] -$$

$$-f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} q_j \varphi_{1,j+1}(t)\right]. \qquad (18)$$

Из (17), пользуясь неравенством Бесселя, находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(p'_k - q'_k)^2 \le \int_0^1 (F_{P,Q}(t))^2 \rho(t)dt. \qquad (19)$$

Из (18) и (10) имеем

$$(F_{P,Q}(t))^2 \le (h\lambda)^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty}(p_j - q_j)\varphi_{1,j+1}(t)\right)^2, \qquad (20)$$

откуда, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, выводим

$$(F_{P,Q}(t))^2 \le (h\lambda)^2 \sum_{j=0}^{\infty}(p_j - q_j)^2 \sum_{j=0}^{\infty}(\varphi_{1,j+1}(t))^2.$$

Сопоставляя (20) с (19), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p'_k - q'_k)^2 \le (h\lambda)^2 \sum_{k=0}^{\infty}(p_k - q_k)^2 \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty}(\varphi_{1,j+1}(t))^2 \rho(t)dt. \qquad (21)$$

Из (21) и (9) имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(p'_k - q'_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le h\kappa_\varphi \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty}(p_k - q_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Неравенство (22) показывает, что если $h\kappa_\varphi\lambda < 1$, то оператор $A : l_2 \to l_2$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C^{\nu+1} = A(C^\nu)$ сходится к точке $C(q)$ при $\nu \to \infty$. Однако с точки зрения приложений важно рассмотреть конечномерный аналог оператора A. Мы рассмотрим оператор $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, сопоставляющий точке $C_N = (c_0, \ldots, c_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ точку $C'_N = (c'_0, \ldots, c'_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ по правилу

$$c'_k = \int_0^1 f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{N-1} c_j \varphi_{1,j+1}(t)\right] \varphi_k(t)\rho(t)dt,\ k = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (23)$$

Рассмотрим две точки $P_N, Q_N \in \mathbb{R}^N$, где $P_N = (p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$, $Q_N = (q_0, q_1, \ldots, p_{N-1})$ и положим $P'_N = A_N(P_N)$, $Q'_N = A_N(Q_N)$. Дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к неравенству (22), мы получим

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1}(p'_k - q'_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq h\kappa_\varphi\lambda\left(\sum_{k=0}^{N-1}(p_k - q_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Неравенство (24) показывает, что если $h\kappa_\varphi\lambda < 1$, то оператор $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ является сжимающим и, как следствие, итерационный процесс $C_N^{\nu+1} = A_N(C_N^\nu)$ при $\nu \to \infty$ сходится к его неподвижной точке, которую мы обозначим через $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_0(q), \ldots, \bar{c}_{N-1}(q))$. С другой стороны, рассмотрим точку $C_N(q) = (c_0(q), \ldots, c_{N-1}(q))$, составленную из искомых коэффициентов Фурье функции q по системе φ. Нам остается оценить погрешность, проистекающую в результате замены точки $C_N(q)$ точкой $\bar{C}_N(q)$. Другими словами, требуется оценить величину $\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N = \left(\sum_{j=0}^{N-1}(c_j(q) - \bar{c}_j(q))^2\right)^{\frac{1}{2}}$. С этой целью рассмотрим точку $C'_N(q) = A_N(C_N(q)) = (c'_0(q), \ldots, c'_{N-1}(q))$ и запишем

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \leq \|C_N(q) - C'_N(q)\|_N + \|C'_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N.$$

Далее, пользуясь неравенством (24), имеем

$$\|C'_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N = \|A_N(C_N(q)) - A_N(\bar{C}_N(q))\| \leq$$
$$\leq h\kappa_\varphi\lambda\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N. \tag{26}$$

Из (25) и (26) выводим

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \leq \frac{1}{1 - h\kappa_\varphi\lambda}\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N. \tag{27}$$

Чтобы оценить норму в правой части неравенства (27), заметим, что в силу неравенства Бесселя

$$\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^2 \leq \int_0^1 (F_{C(q),C_N(q)}(t))^2\rho(t)dt, \tag{28}$$

где

$$F_{C(q),C_N(q)}(t) = f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{\infty} c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t)\right] -$$
$$-f\left[ht, \eta(0) + h\sum_{j=0}^{N-1} c_j(q)\varphi_{1,j+1}(t)\right]. \tag{29}$$

Из (29) и (10) следует, что

$$(F_{C(q),C_N(q)}(t))^2 \le \lambda^2 \left(\sum_{j=N}^{\infty} hc_j(q)\varphi_{1,j+1}(t) \right)^2,$$

отсюда с учетом (13) имеем

$$(F_{C(q),C_N(q)}(t))^2 \le \lambda^2 \left(\sum_{j=N}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j+1}\varphi_{1,j}(t) \right)^2. \tag{30}$$

Сопоставляя (30) с (28), получаем

$$\|C_N(q) - C'_N(q)\|_N^2 \le \lambda^2 \int_0^1 \left(\sum_{j=N}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j+1}\varphi_{1,j+1}(t) \right)^2 \rho(t)dt, \tag{31}$$

где согласно (12)

$$\hat{\eta}_{1,j+1} = \int_0^1 \eta'(t)\varphi_j(t)\rho(t)dt \quad (j = 0, 1, \ldots)$$

— коэффициенты Фурье функции $\eta'(t) = hf(ht, \eta(t))$.

Подводя итоги, из (27) и (31) мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть область $\bar{G}$ такова, что $[0,1] \times \mathbb{R} \subset \bar{G}$, функция $f(x,y)$ непрерывна в области $\bar{G}$ и удовлетворяет условию Липшица* (10)*, а h и λ удовлетворяет неравенству $h\lambda\kappa_\varphi < 1$, где величина κ_φ определена равенством* (9)*. Далее, пусть l_2 гильбертово пространство, состоящее из последовательностей $C = (c_0, \ldots)$, для которых введена норма $\|C\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, оператор $A : l_2 \to l_2$ сопоставлят точке $C \in l_2$ точку $C' \in l_2$ по правилу* (15)*. Кроме того, пусть $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ — конечномерный аналог оператора A, сопоставляющий точке $C_N = (c_0, \ldots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ точку $C'_N = (c'_0, \ldots, c'_N) \in \mathbb{R}^N$ по правилу* (23)*. Тогда операторы $A : l_2 \to l_2$ и $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ являются сжимающими и, следовательно, существуют их неподвижные точки $C(q) = (c_0(q), c_1(q), \ldots) = A(C(q)) \in l_2$ и $\bar{C}_N(q) = (\bar{c}_0(q), \bar{c}_0(q), \ldots, \bar{c}_N(q)) = A_N(\bar{C}_N(q)) \in \mathbb{R}^N$, для которых имеет место неравенство*

$$\|C_N(q) - \bar{C}_N(q)\|_N \le \frac{\lambda\sigma_N^\varphi(\eta)}{1 - h\kappa_\varphi\lambda},$$

где

$$\sigma_N^{\varphi}(\eta) = \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \hat{\eta}_{1,j} \varphi_{1,j}(t) \right)^2 \rho(t) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

а $C_N(q) = (c_0(q), \ldots, c_{N-1}(q))$ *— конечная последовательность, составленная из первых* N *компонент точки* $C(q)$*, при этом в силу* (13) *справедливо также равенство* $hC_N(q) = (\hat{\eta}_{1,1}, \hat{\eta}_{1,2}, \ldots, \hat{\eta}_{1,N})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней шк. Саратов : ООО «Научная книга», 2016. С. 329–332.

2. *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы, порожденные ортогональными функциями // Изв. РАН. Сер. матем 82. Т. 82. (Принята к печати)

3. *A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett and J. M. Sanz-Serna* On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65. P. 151–175.

4. *F. Marcellan, M. Alfaro and M. L. Rezola* Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. and Appl. Math. North-Holland. 1993. Vol. 48. P. 113–131.

5. *H. G. Meijer* Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73. P. 1–16.

6. *K. H. Kwon and L. L. Littlejohn* The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. № 2 P. 289–303.

7. *Lopez G. Marcellan F. Vanassche W.* Relative Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to a Discrete Sobolev Inner-Product // Constr. Approx. 1995. Vol. 11, № 1. P. 107–137.

8. *K. H. Kwon and L. L. Littlejohn* Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Rocky Mountain J. Math. 1998. Vol. 28. P. 547–594.

9. *F. Marcellan and Yuan Xu* On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. Vol. 33, № 3. P. 308–352.

10. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. 2003. Т. 194, вып. 3. С. 115–148.

11. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Махачкала : Издательство Дагестанского научного центра. 2004. 176 с.

12. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ. 1999.

13. *Шарапудинов И. И., Муратова Г. Н.* Некоторые свойства r-кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.

14. *G. Faber* Ober die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1910. Vol. 19. P. 104–112.