В заключение отметим, что оценки снизу наибольшего из минимумов модуля целой функции на окружностях, радиусы которых пробегают отрезок с постоянным отношением, встречались весьма редко. Автору известны три такие работы [3–5]. В [3] и [4] рассматривались весьма узкие подклассы целых функций. В [5] в рассуждениях имеются неисправимые ошибки, повлекшие за собой неверный результат (следствие 3 на с. 236).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. London, New York, San Francisco : Academic Press, 1990. Vol. 2.

2. *Hayman W. K.* The minimum modulus of large integral functions // Proc. London Math. Soc. 1952. № 2. P. 469–512.

3. *Гельфонд А. О.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 42–67.

4. *Гайсин А. М.* Решение проблемы Пойа // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 39–60.

5. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М. : Наука, 1979. 320 с.

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СУММ РЯДОВ ПО СИНУСАМ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ [1]

А. Ю. Попов, А. П. Солодов (Москва, Россия)

mysfed@rambler.ru, apsolodov@mail.ru

В работе изучается асимптотическое поведение при $x \to 0+$ сумм рядов по синусам

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad \boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \tag{1}$$

последовательности коэффициентов которых не только монотонно стремятся к нулю, т. е.

$$b_1 > 0, \qquad b_{k+1} \leqslant b_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0, \tag{2}$$

но и принадлежат следующим двум специальным классам.

Один класс — обозначим его $\mathcal{B}\downarrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}$, удовлетворяющих условию (2) и, кроме этого, условию

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6222.2018.1).

$(k+1)b_{k+1} \leqslant kb_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Другой класс — обозначим его $\mathcal{B}\uparrow$ — состоит из всех последовательностей, удовлетворяющих противоположному условию $kb_k \leqslant (k+1)b_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, и, кроме этого, условию (2).

Для получения двусторонней оценки суммы ряда (1) Р. Салем [1] определил следующую функцию:

$$v(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} kb_k, \quad m(x) = [\pi/x]\,.$$

Он доказал существование для произвольной последовательности $\boldsymbol{b}$ вида (2) таких положительных постоянных C_1, C_2, что верны оценки

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant C_1 v(\boldsymbol{b}, x) \quad \forall x \in (0, \pi], \tag{3}$$

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant C_2 v(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant x_0. \tag{4}$$

Оценка снизу (4) выведена при дополнительных условиях: последовательность $\boldsymbol{b}$ выпукла и $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$.

С. А. Теляковский [2] улучшил эти результаты, выведя оценки (3) и (4) с абсолютными постоянными C_1 и C_2, $x_0 = \pi/2$ и сняв требование $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$. А. Ю. Попов [3] доказал, что в (3) можно взять $C_1 = 1$, улучшить которую в общем случае, вообще говоря, нельзя. В [3] также найдено асимптотически неулучшаемое оптимальное значение постоянной $C_2 = 2\pi^{-2}$.

Нетрудно убедиться в том, что оценки снизу вида (4), если не требовать от последовательности $\boldsymbol{b}$ ничего кроме монотонного стремления к нулю, получить нельзя.

Нами найдены оценка снизу вида (4) с асимптотически неулучшаемой на классе $\mathcal{B}\downarrow$ константой C_2 и усиление оценки (3) с асимптотически неулучшаемой константой $C_1 < 1$ на классе $\mathcal{B}\uparrow$.

Теорема 1. *Если* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\downarrow$, *то при любом* $x \in (0, \pi/3]$ *верна оценка снизу* $g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \big(\underline{I} - 1/m(x)\big)v(\boldsymbol{b}, x) - 1{,}5b_{m(x)+1}\sin(x/2)$, *где* $\underline{I} = (1/\pi)\int_0^{2\pi}(\sin t/t)\,dt = 0{,}451\ldots$

В то же время существуют такие последовательности $\underline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\downarrow$ *и* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *что* $x_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \underline{I}\, v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n)$, $n \to \infty$.

Теорема 2. *Если* $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$, *то при любом* $x \in (0, \pi)$ *верна оценка сверху* $g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant \overline{I}\big(1 + 1/m(x)\big)v(\boldsymbol{b}, x) + 0{,}5b_{m(x)+1}\operatorname{tg}(x/4)$, *где* $\overline{I} = (1/\pi)\int_0^{\pi}(\sin t/t)\,dt = 0{,}589\ldots$

В то же время существуют такие последовательности $\overline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\uparrow$ *и* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *что* $x_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $g(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \overline{I}\, v(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n)$, $n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salem R.* Determination del'ordre de grandeur ál'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1928. V. 186. P. 1804–1806.

2. *Telyakovskiĭ S. A.* On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. Nouvelle série. 1995. V. 58, № 72. P. 43–50.

3. *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Матем. заметки. 2003. Т. 74, вып. 6. С. 877–888.

УДК 517.51

О НЕРАВЕНСТВЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Н. В. Попов (Москва, Россия)
popov.niikita@gmail.com

Рассмотрим функционал $\|\cdot\|_p$, $0 \le p \le +\infty$. Для $0 < p < +\infty$ считаем, что он определён формулой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Для крайних p полагаем

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_C = \max_{x\in\mathbb{T}}|f(t)|,$$
$$\|f\|_0 = \lim_{p\to 0+}\|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(t)|\,dt\right).$$

Исследуется наилучшая константа $\varkappa(\alpha,n,p)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha t_n\|_p \le \varkappa(\alpha,n,p)\,\|t_n\|_p, \quad p\in[0,\infty],$$

где t_n — тригонометрический полином степени не выше n и D^α — оператор дробно-линейного дифференцирования по Вейлю. То есть будем исследовать величину

$$\varkappa(\alpha,n,p) = \sup_{t_n\in\tau_n, t_n\not\equiv 0}\frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}.$$

Исследованию данной величины посвящено много работ. Отметим среди них [1–4].

Теорема. *Справедливо следующее равенство* $\varkappa(\alpha,1,p)=1$ *для* $\alpha\in\mathbb{R}$, $p\in[0;+\infty]$. *При* $n=2$, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *справедливо* $\varkappa(\alpha,n,p)=n^\alpha$ *при любом* $\alpha\in\{1,2,\dots,2n-3\}\cup[2n-2,\infty)$, $p\in[0;+\infty]$.

Отметим, что случай $n=2$ получен другим способом в работе [5], причём в работе [5] доказано, что $\varkappa(\alpha,2,p) > 2^\alpha$ при всех $\alpha\in[0;1)\cup\cup(1;2)$.