группы G. Пусть $r_0(G)$ — ранг без кручения группы G. Отметим, что в работе [1] доказано, что спектральный анализ в пространстве $C(G)$ справедлив тогда и только тогда, когда мощность $r_0(G)$ меньше, чем континуум. В отличие от этого результата, по теореме 1, спектральный анализ в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ справедлив для любой дискретной абелевой группы G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М. : Мир, 1972.

2. *Laczkovich M., Székelyhidi L.* Harmonic analysis on discrete Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 133 (6). P. 1581–1586.

3. *Bruhat F.* Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étudedes représentations des groupes p-adiques // Bull. Soc. math. France. 1961. Vol. 89. P. 43–75.

4. *Робертсон А., Робертсон Б.* Топологические векторные пространства. М. : Мир, 1967.

УДК 517.9

СЛАБЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ СО СВОБОДНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М. Г. Плешаков (Саратов, Россия)

pleshakovmg@gmail.com

Обозначим X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E — выпуклая функция, определенная на X. Задачей выпуклой оптимизации является поиск приближенного решения задачи

$$E(x) \to \min_{x \in X}. \tag{1}$$

Множество $\mathcal{D} \subset X$ называют словарем в X (см., например, [1]), если каждый элемент из $\mathcal{D}$ имеет норму, не превосходящую единицу и $\overline{\mathrm{span}\mathcal{D}} = X$. Словарь $\mathcal{D}$ называют симметричным, если для каждого $g \in \mathcal{D}$ также $-g \in \mathcal{D}$. Нас интересует приближенное разреженное решение задачи (1):

$$E(x) \to \inf_{x \in \Sigma_m(\mathcal{D})}, \tag{2}$$

где $\Sigma_m(\mathcal{D})$ — множество m-членных полиномов из словаря $\mathcal{D}$.

Для нахождения наилучших m-членных приближений могут быть применены жадные алгоритмы. Алгоритм Франка – Вульфа [2], который также известен как метод условного градиента [3], является одним из самых известных жадных алгоритмов для нахождения оптимальных решений условных задач выпуклой оптимизации. Обобщили этого алгоритма

на случай произвольных Банаховых пространств получено В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым в [4]. В последнее время были получены новые результаты по сходимости жадных алгоритмов [1–10].

Используя приближенный слабый чебышевский жадный алгоритм AWCGA (Approximate Weak Chebyshev Greedy Algorithm) решения задачи аппроксимации в равномерно гладких банаховых пространствах, предложенный в статье [11], формулируется аналог слабого жадного алгоритма со свободной релаксацией (Weak Greedy Algorithm with Free Relaxation (co)) для приближенного решения задачи выпуклой оптимизации.

Ослабляющей последовательностью назовем последовательность действительных чисел $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $0 \le t_n \le 1$, $n \ge 1$. Возмущающая последовательность $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел таких, что $0 \le \delta_n \le 1$, $n \ge 0$. Последовательность ошибок $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел таких, что $\eta_n \ge 0$, $n \ge 1$. Положим $G_0 := 0$. Для $n \ge 1$ сформулируем индуктивное определение алгоритма AWGAFR(co).

(1) F_{n-1} — произвольный функционал, удовлетворяющий неравенству

$$\langle F'_{n-1}(G_{n-1}), \varphi_n\rangle \ge (1-\delta_{n-1})\langle -E'(G_{n-1}), \varphi_n\rangle,$$

где $\varphi_n \in \mathcal{D}$ – любой элемент, удовлетворяющий условию

$$\langle F'_{n-1}(G_{n-1}), \varphi_n\rangle \ge t_n \sup_{g\in\mathcal{D}} \langle F'_{n-1}(G_{n-1}), g\rangle.$$

(2) Ищем w_n и λ_n такие, что

$$F_{n-1}((1-w_n)G_{n-1} + \lambda_n\varphi_n) \le (1+\eta_n) \inf_{\lambda,w} F_{n-1}((1-w)G_{n-1} + \lambda\varphi_n)$$

и определим $G_n := (1-w_n)G_{n-1} + \lambda_n\varphi_n$.

Теорема. *Пусть E — равномерно гладкая выпуклая функция с модулем гладкости $\rho(E,u) \le \gamma u^q$, $1 < q \le 2$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ослабляющая последовательность. Для алгоритма AWGAFR(co) с возмущающей последовательностью $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ и ограниченной последовательностью ошибок $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такими, что для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\delta_{n_k} = O(t_{n_k+1}^p)$, $\eta_{n_k} = O(t_{n_k+1}^p)$, где $p = q/(q-1)$, справедлива следующая оценка*

$$E(G_n) - \inf_{g\in\mathcal{D}} E(g) \le C\left(1 + \sum_{k=1}^{N} t_{n_k}^p\right)^{-1/p},$$

где $C = C(q,\gamma,\eta_0)$, $N = N(n) = \max\{k \in N : n_k \le n\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temlyakov V. N.* Greedy approximation in convex optimization // Constr. Approx. 2015. Vol. 41, no. 2. P. 269–296.

2. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1—2. P. 95–110.

3. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787–823.

4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Л. : Ленингр. ун-т, 1968. 180 с.

5. *Temlyakov V. N.* Dictionary descent in optimization // Analysis Mathematica. 2016. Vol. 42, № 1. P. 69–89.

6. *DeVore R. A., Temlyakov V. N.* Convex optimization on Banach spaces // Found. Comput. Math. 2016. Vol. 16, № 2. P. 369–394.

7. *Nguyen H., Petrova G.* Greedy Strategies for Convex Optimization // Calcolo. 2017. Vol. 54, № 1. P. 207–224.

8. *Freund R. M., Grigas P.* New analysis and results for the Frank-Wolfe method // Math. Program. 2016. Vol. 155, № 1–2. P. 199–230.

9. *Jaggi M.* Revisiting Frank–Wolfe: Projection-free sparse convex optimization // ICML'13 : Proc. 30th Intern. Conf. on Machine Learning. Atlanta, GA, USA, 2013. P. 427–435.

10. *Clarkson K. L.* Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank–Wolfe algorithm // ACM Transactions on Algorithms. 2010. Vol. 6, № 4. P. 1–30.

11. *Dereventsov A.V.* On the approximate weak Chebyshev greedy algorithm in uniformly smooth Banach spaces // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 436, № 1. P. 288–304.

УДК 517.518

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ВИЛЕНКИНА

М. Г. Плотников (Вологда, Россия)
MGPlotnikov@gmail.com

Пусть $\{f_n\}$ — система функций, заданных на некотором множестве X. Множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, $\mathcal{U}$-*множеством*) для рядов $\sum\limits_n a_n f_n(x)$, если любой такой ряд, сходящийся к нулю на $X \setminus A$, содержит лишь нулевые коэффициенты.

Континуальные множества единственности для сходящихся по прямоугольникам кратных рядов Уолша изучались в работах [1–4] и ряде других. Наиболее широкие известные классы $\mathcal{U}$-множеств для таких рядов построены в [3, 4]. В [5–8] строились $\mathcal{U}$-множества для сходящихся по кубам и λ-сходящихся кратных рядов Уолша на многомерной двоичной группе G^d. Отметим [9], что классы $\mathcal{U}$-множеств при таких типах сходимости и при сходимости по прямоугольникам не совпадают.

Результаты работы [6] были обобщены [10, 11] на случай кратных рядов по системам характеров нульмерных компактных абелевых групп.