11. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Полиномы Бернштейна для степенной функции на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. 2015. Вып. 16. С. 215–220.

12. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 288–300. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300.

13. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 4. С. 425–435. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-425-435.

14. *Петросова М. А.* О скорости роста максимальных коэффициентов в полиномах Бернштейна, взятых от симметричного модуля на симметричном отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 209–211.

15. *Петросова М. А.* О поведении коэффициентов в полиномах Бернштейна для симметричного модуля на симметричном отрезке // Математика и информатика : материалы междунар. конф. М. : МПГУ, 2016. С. 77–79.

16. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. 2016. Вып. 17. С. 177–182.

17. *Петросова М. А., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* О некоторых комбинаторных задачах, возникших при явной записи полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы междунар. конф. Воронежская зимн. матем. шк. Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. С. 162–163.

УДК 517.984

О СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА ДИСКРЕТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

С. С. Платонов (Петрозаводск, Россия)
platonov@psu.karelia.ru

Пусть G — локально компактная абелева группа (LCA-группа), и пусть $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство (ТВП), состоящее из комплекснозначных функций на G. Будем называть пространство $\mathcal{F}$ *трансляционно инвариантным*, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов) $\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, y \in G$, и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или *обобщенным характером* называется произвольный непрерывный гомоморфизм из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел. Частным

случаем экспоненциальных функций являются характеры — непрерывные гомоморфизмы группы G в группу комплексных чисел, по модулю равных 1.

Пусть $\mathcal{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G, $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

Определение 1. *В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный анализ, если любое ненулевое инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$ содержит экспоненциальную функцию.*

Классическим результатом о спектральном анализе является теорема о том, что для любой LCA-группы G спектральный анализ справедлив в функциональном пространстве $L^\infty(G)$, снабженном слабой топологией (см., например, [1, гл. II, §3, предл. 3]).

Одним из естественных функциональных пространств, в которых можно изучать спектральный анализ, является пространство $C(G)$ всех непрерывных функций на LCA-группе G. Наиболее изучен здесь случай, когда G — дискретная абелева группа. Тогда пространство $C(G)$ состоит из всех комплекснозначных функций на G и снабжается топологией поточечной сходимости. Для дискретных абелевых групп в работе [2] получен критерий справедливости спектрального анализа в пространстве $C(G)$. Для произвольных LCA-групп вопрос об описании групп, для которых справедлив спектральный анализ в пространстве $C(G)$ остается открытым.

Другим естественным функциональным пространством является пространство $\mathcal{S}'(G)$ всех обобщенных функций медленного роста на LCA-группе G. Определение пространства $\mathcal{S}'(G)$ для произвольной LCA-группы G дано в работе Ф. Брюа [3].

Рассмотрим случай, когда G — дискретная абелева группа. В этом случае обобщенные функции из $\mathcal{S}'(G)$ совпадают с обычными функциями, поэтому будем называть пространство $\mathcal{S}'(G)$ пространством функций медленного роста на G. Приведем удобное для дальнейшего определение пространства $\mathcal{S}'(G)$ на дискретной абелевой группе G. Отдельно рассмотрим случай, когда G — конечно порожденная абелева группа, и общий случай, когда G — произвольная абелева группа.

Пусть G — конечно порожденная бесконечная абелева группа, $v_1, \dots, v_n$ — система образующих группы G. Любой элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$, где $t_j \in \mathbb{Z}$ (такое представление может быть не единственным). Для $x \in G$ определим число $|x| \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ равенством

$$|x| := \min\{|t_1| + \dots + |t_n| : x = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n,\ t_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \dots, n\}.$$

Для функции $x \mapsto |x|$ справедливы следующие свойства: 1) $|x| \geq 0$ и

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $|-x| = |x|$; 3) $|x+y| \leq |x|+|y|$, $x, y \in G$. Функция $|x|$ является частным случаем квазинормы на группе G. Будем называть ее квазинормой, порожденной системой образующих $v_1, \ldots, v_n$.

Для любого $k > 0$ через $\mathcal{S}'_k(G)$ обозначим множество всех комплекснозначных функций $f(x)$ на G, удовлетворяющих условию

$$|f(x)|(1+|x|)^{-k} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1}$$

Относительно нормы

$$\|f\|_k := \sup_{x \in G} |f(x)|(1+|x|)^{-k}$$

множество $\mathcal{S}'(G)$ является банаховым пространством. Очевидно, что $\mathcal{S}'_{k_1}(G) \subseteq \mathcal{S}'_{k_2}(G)$ при $k_1 < k_2$, причем вложение непрерывно.

Пусть

$$\mathcal{S}'(G) := \bigcup_{k>0} \mathcal{S}'_k(G).$$

Пространство $\mathcal{S}'(G)$ снабдим топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathcal{S}'_k(G)$ (см., например, [4]). Тогда $\mathcal{S}'(G)$ является локально выпуклым пространством. Используя свойства квазинормы легко доказать, что ТВП $\mathcal{S}'(G)$ будет трансляционно инвариантным пространством.

Теперь рассмотрим общий случай, когда G — произвольная бесконечная абелева группа. Для любого конечного подмножества $P \subset G$ обозначим через G_P подгруппу в G, порожденную множеством P. Так как группа G_P конечно порожденная, то уже определено пространство $\mathcal{S}'(G_P)$. Для любой функции f на группе G пусть $\sigma_P(f) = f|_{G_P}$ — ограничение функции f на подгруппу G_P.

По определению, пространство $\mathcal{S}'(G)$ состоит из всех функций f на группе G, таких, что $\sigma_P(f) \in \mathcal{S}'(G_P)$ для любого конечного подмножества $P \subset G$. Пространство $\mathcal{S}'(G)$ снабжается топологией проективного предела локально выпуклых пространств $\mathcal{S}'(G_P)$, т. е. слабейшей локально выпуклой топологией, для которой все отображения $\sigma_P : \mathcal{S}'(G) \mapsto \mathcal{S}'(G_p)$ непрерывны (определение и свойства проективных пределов локально выпуклых пространств см., например, в [4]). Тогда пространство $\mathcal{S}'(G)$ является локально выпуклым пространством.

Теорема 1. *Для любой дискретной абелевой группы G в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ справедлив спектральный анализ.*

Любая абелева группа G является модулем над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. Мощность максимальной линейно независимой над $\mathbb{Z}$ системы элементов бесконечного порядка группы G называется рангом без кручения

группы G. Пусть $r_0(G)$ — ранг без кручения группы G. Отметим, что в работе [1] доказано, что спектральный анализ в пространстве $C(G)$ справедлив тогда и только тогда, когда мощность $r_0(G)$ меньше, чем континуум. В отличие от этого результата, по теореме 1, спектральный анализ в пространстве $\mathcal{S}'(G)$ справедлив для любой дискретной абелевой группы G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. М. : Мир, 1972.

2. *Laczkovich M., Székelyhidi L.* Harmonic analysis on discrete Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 133 (6). P. 1581–1586.

3. *Bruhat F.* Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étudedes représentations des groupes p-adiques // Bull. Soc. math. France. 1961. Vol. 89. P. 43–75.

4. *Робертсон А., Робертсон Б.* Топологические векторные пространства. М. : Мир, 1967.

УДК 517.9

СЛАБЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ СО СВОБОДНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М. Г. Плешаков (Саратов, Россия)

pleshakovmg@gmail.com

Обозначим X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, E — выпуклая функция, определенная на X. Задачей выпуклой оптимизации является поиск приближенного решения задачи

$$E(x) \to \min_{x \in X}. \tag{1}$$

Множество $\mathcal{D} \subset X$ называют словарем в X (см., например, [1]), если каждый элемент из $\mathcal{D}$ имеет норму, не превосходящую единицу и $\overline{\mathrm{span}\mathcal{D}} = X$. Словарь $\mathcal{D}$ называют симметричным, если для каждого $g \in \mathcal{D}$ также $-g \in \mathcal{D}$. Нас интересует приближенное разреженное решение задачи (1):

$$E(x) \to \inf_{x \in \Sigma_m(\mathcal{D})}, \tag{2}$$

где $\Sigma_m(\mathcal{D})$ — множество m-членных полиномов из словаря $\mathcal{D}$.

Для нахождения наилучших m-членных приближений могут быть применены жадные алгоритмы. Алгоритм Франка – Вульфа [2], который также известен как метод условного градиента [3], является одним из самых известных жадных алгоритмов для нахождения оптимальных решений условных задач выпуклой оптимизации. Обобщили этого алгоритма