— наилучшее приближение функции f в пространстве $A_{p,\alpha}$ посредством множества $\mathcal{P}_n$.

Теорема 2. *Если* $f \in A_{p,\alpha}(D)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$ *и при некотором* $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big(n^s E_n(f)_{A_{p,\alpha}} \Big)^{\min\{p,1\}} < \infty,$$

то $f^{[s]} \in A_{p,\alpha}(D)$.

Теоремы 1 и 2 для случая $\alpha = 1 - 1/p$ были получены ранее в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. Н.* Полное собрание сочинений : в 4 т. Т. 1. М. : Изд-во АН СССР, 1952; Т. 2. М. : Изд-во АН СССР, 1954.

2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. М. : Наука, 1976. 320 с.

3. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. Акад. наук СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1 . С. 3–22.

4. *Мисюк В. Р.* Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер. 2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. 2006. № 1. С. 58–62.

УДК 517.518.126

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗМЕРИМЫХ ПО РИМАНУ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

К. М. Нараленков (Москва, Россия)

naralenkov@gmail.com

Класс измеримых по Риману функций, введённый в [2], естественным образом возникает при изучении различных обобщений интеграла Римана для векторнозначных функций. В настоящей заметке изучается вопрос о предельном переходе в последовательности измеримых по Риману и интегрируемых по Хенстоку векторнозначных функций.

Для дальнейшего нам потребуется следующая терминология и обозначения. Пусть X — действительное банахово пространство и $[a, b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a, b]$ соответственно. Произвольная положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Напомним следующие определения интегралов от векторнозначных функций, базирующиеся на *интегральных суммах Римана.*

Разбиение Макшейна отрезка $[a, b]$ есть конечный набор пар отрезок-точка $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ такой, что $\{I_k\}_{k=1}^K$ взаимно не перекрываются, покрывают отрезок $[a, b]$, а $t_k \in [a, b]$ для каждого k. Разбиение Макшейна называется *разбиением Хенстока* если $t_k \in I_k$ для всех k. Разбиение Макшейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *согласованным* с масштабом δ на $[a, b]$ если $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Макшейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Макшейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого разбиения Макшейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a, b]$, согласованного с δ.

Функция f называется *$\mathcal{M}$-интегрируемой* (*$\mathcal{H}$-интегрируемой*) на $[a, b]$ если она интегрируема по Макшейну (Хенстоку) на $[a, b]$ каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Макшейна (Хенстока) от функции f по $[a, b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ.

Разбиением Биркгофа множества E называется не более чем счётный набор $\Pi = \{E_k\}$ попарно не пресекающихся множеств покрывающих E. Пусть Γ и Π суть два разбиения Биркгофа множества E. Разбиение Γ *измельчает* разбиение Π если каждое множество из Γ является подмножеством некоторого множества из Π.

Определение 2. Функция $f : E \to X$ называется *(абсолютно) интегрируемой по Колмогорову – Биркгофу* на E, с *(абсолютным) интегралом Колмогорова – Биркгофа* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение Биркгофа Π множества E такое, что для каждого разбиения Биркгофа $\Gamma = \{E_k\}$, измельчающего Π, для всех $t_k \in E_k$ ряд $\sum\limits_k f(t_k)\mu(E_k)$ безусловно (абсолютно) сходится и выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k} f(t_k)\mu(E_k) - w \right\| < \varepsilon.$$

В работе [4] показано, что интеграл Колмогорова – Биркгофа и $\mathcal{M}$-интеграл эквивалентны.

Определение 3. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество

$F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \backslash F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

выполняется для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \le k \le K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Данное понятие измеримости является естественным для интегралов римановского типа от векторнозначных функций так как в работе [2] показано, что всякая измеримая по Риману *ограниченная* функция $\mathcal{M}$-интегрируема, а также, что векторнозначная функция $\mathcal{M}$-интегрируема ($\mathcal{H}$-интегрируема) тогда и только тогда, когда она интегрируема по Макшейну (Хенстоку) и измерима по Риману.

Для интеграла Колмогорова – Биркгофа известно несколько предельных теорем (см., например, [3]), однако их доказательства довольно сложны, а условия трудно проверить в конкретных случаях. Коме того, в работе [3] построен пример ограниченной последовательности функций интегрируемых по Колмогорову – Биркгофу функций со значениями в пространстве $c_0(\mathfrak{c})$, сходящейся *поточечно* к не интегрируемой по Колмогорову – Биркгофу и, следовательно, не измеримой по Риману функции. С другой стороны, стандартные рассуждения показывают, что *почти равномерный* предел последовательности измеримых по Риману функций является измеримой по Риману функцией.

Приводимые ниже утверждения являются аналогами теоремы об ограниченной сходимости для интегрируемых по Лебегу функций.

Теорема 1. *Пусть функции $f_n : [a, b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}$-интегрируемы на $[a, b]$. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится почти равномерно к функции f на $[a, b]$. Если существует неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция φ такая, что $\|f_m - f_n\| \le \varphi$ на $[a, b]$ для всех m и n, то функция f $\mathcal{H}$-интегрируема на отрезке $[a, b]$ и выполняется предельное соотношение*

$$\sup_{t \in [a,b]} \left\| \int_a^t (f_n - f) \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следствие 1. *Пусть функции $f_n : [a, b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, измеримы по Риману на $[a, b]$. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится почти равномерно к функции f на $[a, b]$. Если существует неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция φ такая, что $\|f_n\| \le \varphi$*

на $[a,b]$ *для всех* n*, то функции* f_n *для каждого* n *и функция* f *абсолютно интегрируемы по Колмогорову – Биркгофу (и, следовательно,* $\mathcal{M}$*-интегрируемы) на отрезке* $[a,b]$ *и верно предельное соотношение теоремы* 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Caponetti D., Marraffa V., Naralenkov K.* On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions // Monatsh. Math. 2017. Vol. 182, № 3. P. 513–536.

2. *Naralenkov K. M.* A Lusin type measurability property for vector-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 417, № 1. P. 293–307.

3. *Rodríguez J.* Pointwise limits of Birkhoff integrable functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137, № 1. P. 235–245.

4. *Солодов А. П.* О границах обобщения интеграла Колмогорова // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 258–272

УДК 517.5

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ТОРОВ НАД СФЕРОЙ РИМАНА С ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ[1]

С. Р. Насыров (Казань, Россия)

semen.nasyrov@yandex.ru

Мы изучаем гладкие однопараметрические семейства эллиптических функций $f(z,t)$, $0 \le t \le 1$, с периодами $\omega_1 = \omega_1(t)$ и $\omega_2 = \omega_2(t)$, которые имеют критические точки $a_j(t)$ порядка m_j, $0 \le j \le N$, и единственный полюс порядка n в начале координат. Естественно, предполагается, что $a_j(t) \not\equiv 0 \pmod{\boldsymbol{\omega}}$, $0 \le j \le N$, $a_j(t) \not\equiv a_k(t) \pmod{\boldsymbol{\omega}}$, $j \ne k$, где $\boldsymbol{\omega}$ — решетка, порожденная векторами ω_1 и ω_2, и

$$a_0(t) + a_1(t) + \ldots + a_N(t) = 0. \tag{1}$$

Пусть $A_j(t) = f(a_j(t),t)$ — критические значения функции $f(z,t)$, соответствующие критическим точкам $a_j(t)$. Нашей целью является нахождение системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $a_j(t)$ и периоды $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ в случае, когда зависимости $A_j(t)$ нам известны.

Эта задача имеет важную геометрическую интерпретацию. Предположим, что задано однопараметрическое семейство $S = S(t)$, $0 \le t \le 1$, комплексных торов, т. е. компактных римановых поверхностей рода нуль, разветвленно накрывающих сферу Римана. Тогда известны проекции точек ветвления $A_j(t)$ поверхности $S(t)$ на комплексную плоскость и соответствующие кратности ветвления m_j. Искомая система

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-01-00282 и 17-41-160345).