в частности

$$|f(x) - S_n(l_{f_r}, x)| \le \frac{c(\varphi)\ln n}{n^{r+1}}, \quad m = n^{\frac{r+1}{2}}, \quad n \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. М. : ФИЗМАТЛИТ, 1968. Т. 3. 662 с.

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННЫМ С ПОГРЕШНОСТЬЮ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ[1]

Р. Р. Акопян (Екатеринбург, Озерск, Россия)
RRAkopyan@mephi.ru

Пусть G односвязная область комплексной плоскости с границей Γ – замкнутой спрямляемой жордановой кривой; γ_1 – произвольное измеримое подмножество Γ положительной меры, и γ_0 — дополнение γ_1 до Γ, т.е., $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$. Обозначим через $H(G) = H^\infty(G)$ пространство Харди аналитических и ограниченных функций в G. Рассмотрим класс Q функций f из $H(G)$ таких, что справедливо неравенство $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \le 1$.

Производная функции Грина области G по внешней нормали к кривой Γ называется плотностью гармонической меры относительно G и точки z, которую обозначим $P(z,\zeta)$. Соответственно, гармоническая мера $w(z,\gamma,G)$ измеримого подмножества γ границы Γ относительно области G и точки z выражается формулой $w(z,\gamma,G) = \int\limits_\gamma P(z,\zeta)\,|d\zeta|$.

Рассматривается следующая задача оптимального восстановления. Пусть для неизвестной функции f из класса Q на γ_1 задана функция $q \in L^\infty(\gamma_1)$ такая, что $\|f-q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим восстановить значение производной $f'(z_0)$, $z_0 \in G$, по q наилучшим (оптимальным) методом. В качестве множества $\mathcal{R}$ методов восстановления, из которых выбирается оптимальный, рассматриваются множество $\mathcal{O}$ всех функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, или $\mathcal{B}$ ограниченных функционалов, или $\mathcal{L}$ линейных функционалов. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$, величина

$$\mathcal{U}(T,\delta) := \sup\left\{|f'(z_0) - Tq| \colon f \in Q,\, q \in L^\infty(\gamma_1),\, \|f-q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

[1]Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

есть погрешность восстановления значения производной в точке z_0 на классе Q по граничным значениям функции на γ_1, заданным с погрешностью δ относительно нормы $L^\infty(\gamma_1)$. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) := \inf\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T \in \mathcal{R}\} \tag{1}$$

есть *величина оптимального восстановления* производной в точке z_0 с помощью методов $\mathcal{R}$ на классе Q по граничным значениям на γ_1, заданным с погрешностью δ.

Пусть w — функция, гармоническая в области G, значение которой в точке z определяется равенством $w(z) := w(z,\gamma_1,G)$. Введем обозначения $\alpha = \omega(z_0)$ и $\beta = 1-\omega(z_0)$; кроме того, $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$ для длины, направления и аргумента градиента w; т.е.

$$\kappa = \left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = \overline{\nabla} w(z_0)/\left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g является функцией, однолистно отображающей область G на единичный круг и удовлетворяющая условиям $g(z_0)=0$, $g'(z_0)>0$. Рассмотрим положительную величину, определяемую равенством $\eta(z_0) = 2g'(z_0)/\kappa(z_0)$, при $\kappa(z_0)\neq 0$, и равную $+\infty$ иначе.

Для $\delta \geq 0$ определим f_δ функцию Сегё (функцию максимального модуля) равенством

$$f_\delta(z) := \exp\left(u_\delta(z) + i v_\delta(z)\right),\ z \in G,$$

в котором функция $u_\delta(z) = \ln\delta\, w(z)$, а $v_\delta(z) = \ln\delta\, v(z)$, где v является гармонически сопряженной w. Для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющим условию $|\ln\delta| < \eta(z_0)$, определим в области G функцию

$$F_\delta(z) := \frac{g(z)-g_0}{1-g(z)\,\overline{g_0}}\, f_\delta(z), \quad g_0 := -e^{it}\frac{\kappa(z_0)\,\ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it}\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

При $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющим неравенству $|\ln\delta| \geq \eta(z_0)$, определим на пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ функционал

$$(T^1_\delta f)(z) := e^{-it}\int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\,\frac{f_\delta(z_0)}{f_\delta(\zeta)}\, f(\zeta)\,|d\zeta|,$$

где

$$J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{\nu}}(z_0,\zeta) + \ln\delta\,\kappa(z_0)\,P(z_0,\zeta).$$

Отдельно выделим случай $\delta = 1$, когда $\ln\delta = 0$ и справедливо равенство $F_1 = g$. В этом случае определим функционал T^1_1 равенством

$$T^1_1 f := \int_{\gamma_1} P(z_0,\zeta)\frac{g'(z_0)}{g(\zeta)}\, f(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема 1. *Для величин оптимального восстановления* (1) *справедливы следующие утверждения.*

(I) *В случае* $|\ln\delta| \geq \eta(z_0)$ *справедливы равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,|\ln\delta|.$$

Экстремальными являются функции вида cf_δ, $|c| = 1$, *и оптимальным методом восстановления в задаче* (1) *является функционал* T^1_δ.

(II) *В случае* $|\ln\delta| < \eta(z_0)$ *справедливы следующие равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right).$$

Экстремальными являются функции вида cF_δ, $|c| = 1$.

(III) *При* $\delta = 1$ *справедливы следующие равенства*:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(1) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(1) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(1) = g'(z_0).$$

Экстремальными являются функции вида cg, $|c| = 1$, *и оптимальным методом восстановления в задаче* (1) *является функционал* T^1_1.

Задачам оптимального восстановления на классах аналитических функций посвящена монография [1]. Близкие задачи оптимального восстановления оператора дифференцирования в пространствах Харди H^p, $1 \leq p \leq \infty$, функций, аналитических в полосе и кольце, рассматривались в работах [2], [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of analytic functions. Huntington, N.Y. : Nova Science, 2000.

2. *Акопян Р. Р.* Наилучшее приближение оператора дифференцирования на классе функций аналитических в полосе // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 60, № 1. С. 9–16.

3. *Akopyan R. R.* Approximation of the Differentiation Operator on the Class of Functions Analytic in a Ring // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, № 2. P. 6–13.

УДК 511.14

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (*АКЧ*). 2. ВЫРАЖЕНИЕ АКЧ ЧЕРЕЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В. Д. Александров, О. В. Александрова

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

avd-crystal@mail.ru