3. *Грюнвальд Л. А., Орлов С. С.* Уравнение типа Абеля с вырождением в банаховых пространствах // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна 2016 : материалы междунар. конф. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2016. С. 239–241.

4. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М. : Мир, 1987. 416 с.

5. *Орлов С. С.* Краевая задача для интегро-дифференциального уравнения магнитозвуковых волн // Тр. Десятой Всерос. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Т. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара : СамГТУ, 2016. С. 65–69.

УДК 517.9

АЛГОРИТМ ТИПА АЛГОРИТМА ФРАНКА – ВУЛЬФА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОНОТОННОЙ РЕГРЕССИИ[1]

А. А. Гудков, А. Р. Файзлиев, С. В. Миронов, С. П. Сидоров
(Саратов, Россия)
alex-good96@mail.ru

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, и обозначим Δ^k оператор взятия конечной разности порядка k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, определенный через рекуррентные соотношения

$$\Delta^k z_i = \Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i, \quad \Delta^0 z_i = z_i, \quad 1 \le i \le n-k.$$

Вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ называется k-монотонным, если $\Delta^k z_i \ge 0$ для всех $1 \le i \le n-k$. Так, вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ будет 1-монотонным (или просто монотонным), если $z_{i+1} - z_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, и 2-монотонные вектора являются выпуклыми.

Обозначим Δ_k^n множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$, которые являются k-монотонными. Задача построения k-монотонной регрессии состоит в нахождении вектора $z \in \mathbb{R}^n$ с наименьшей ошибкой приближения к заданному вектору $y \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно являющимся k-монотонным), при условии k-монотонности вектора z:

$$(z-y)^T(z-y) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \to \min_{z \in \Delta_k^n}. \tag{1}$$

Обзор результатов по задаче построения монотонной регрессии можно найти в книге Т. Робертсона, Ф. Райта и Р. Декстры [1], а также в статье [2]. В статье предлагается метод для нахождения решения задачи построения k-монотонной регрессии. Следуя работам [3] и [4], мы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-37-00060).

рассмотрим алгоритм, который основан на методе Франка – Вульфа. Мы показываем, что алгоритм должен выполнить $O(n^{2k})$ итераций для того, чтобы найти решение с точностью $O(n^{-1/2})$.

Перейдем от точек z_i к скачкам $x_i = \Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i$, $i = 1, \ldots, n-k$. В работе [5] показано, что $z \in \Delta_n^k$ тогда и только тогда, когда существует $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ такой, что z_i, $1 \le i \le n-k$, может быть записан в виде

$$z_i = \sum_{j_1=1}^{i} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} x_{j_k}, \tag{2}$$

где $x_j \ge 0$ для всех $k+1 \le j \le n$. Тогда задача (1) может быть записана в виде

$$E(x) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j_1=1}^{i} \sum_{j_2=1}^{j_1} \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^{j_{k-2}} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} x_{j_k} - y_i \right)^2 \to \min_{x \in S}, \tag{3}$$

где S означает множество всех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n-k}$ и

$$\sum_{j=k+1}^{n} x_j \le \max \Delta^{k-1} y_i - \min \Delta^{k-1} y_i.$$

Обозначим $\nabla E(x) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial E}{\partial x_n} \right)^T$ градиент функции E в точке x. Как показано в статье [5], если $z \in \Delta_k^n$, то найдется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $x_j \ge 0$ для $j = k+1, \ldots, n$, такой, что $z_i = \sum\limits_{j=1}^{i} c_{ik}(j) x_j$, $1 \le i \le n$, где $c_{ik}(j)$ определены следующим образом

$$c_{ik}(j) := \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{если } \ 1 \le i \le k-1, \\ \binom{k-1}{j-1}, & \text{если } \ k \le i \le n \ \text{ и } \ 1 \le j \le k-1, \\ \binom{i+k-j-1}{k-1}, & \text{если } \ k \le i \le n \ \text{ и } \ k \le j \le i. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\partial E}{\partial x_s} = 2 \sum_{i=s}^{n} c_{ik}(s) \left(\sum_{j=1}^{i} c_{ik}(j) x_j - y_i \right). \tag{4}$$

Возможно, метод Франка – Вульфа [6], который также известен как метод условного градиента [7], является одним из наиболее известных алгоритмов для нахождения оптимальных решений задач условной выпуклой оптимизации. Мы предлагаем следующий алгоритм типа алгоритма

Франка – Вульфа (алгоритм 1) для нахождения приближенного решения задачи (3). Скорость сходимости алгоритма 1 находится в теореме 1.

Обозначим $\mathrm{reg}_m(\xi)$ полиномиальную регрессию порядка m для $\xi = (\xi_{s_1}, \ldots, \xi_{s_2})$ в точках $s_1, \ldots, s_2$, и we будем писать

$$z = \mathrm{reg}_m(\xi), \tag{5}$$

где $z = (z_{s_1}, \ldots, z_{s_2})$ есть значения, предсказанные этой регрессией в тех же точках $s_1, \ldots, s_2$.

Algorithm 1: Алгоритм типа алгоритма Франка – Вульфа

· Пусть N есть число итераций и пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ есть входной вектор;

begin

· Найти $z^0 = \mathrm{reg}_{k-1}(y)$ и пусть $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)^T$ есть начальная точка, найденная с использованием (2) из z^0;

· Пусть $t = 0$;

· **while** $t < N$ **do**

· Вычислить градиент $\nabla E(x^t)$ в текущей точке x^t, используя (4);

· Пусть $\widetilde{x}^t$ есть решение задачи $\langle \nabla E(x^t)^T, x \rangle \to \min\limits_{x \in S}$;

· Найти $x^{t+1} = x^t + \alpha_t(\widetilde{x}^t - x^t)$, $\alpha_t = \frac{2}{t+2}$, $t := t + 1$;

· Восстановить k-монотонную последовательность $z = (z_1, \ldots, z_n)$ из x^N;

end

Теорема. *Пусть $\{x^t\}$ найдены в соответствии с алгоритмом 1. Найдется положительное число $c(k, y)$, не зависящее от n, такое, что для всех $t \geq 2$*

$$E(x^t) - E^* \leq \frac{c(k, y) n^{2k - \frac{1}{2}}}{t + 2}, \tag{6}$$

где E^* есть оптимальное решение (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robertson T., Wright F., Dykstra R.* Order Restricted Statistical Inference. N.Y. : John Wiley & Sons, 1988. 544 p.

2. *De Leeuw J., Hornik K., Mair P.* Isotone Optimization in R: Pool-Adjacent-Violators Algorithm (PAVA) and Active Set Methods // Journal of Statistical Software. 2009. Vol. 32, № 5. P. 1–24.

3. *Gudkov A. A., Mironov S. V., Faizliev A. R.* Greedy algorithm for sparse monotone regression // CEUR Workshop Proceedings. 2017. Vol. 2018. P. 23–31.

4. *Гудков А. А., Миронов С. В., Файзлиев А. Р.* О сходимости жадного алгоритма для решения задачи построения монотонной регрессии // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 17, вып. 4. 2017. С. 431–440.

5. *Toader G.* The representation of n-convex sequences // L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation. 1981. Vol. 10, № 1. P. 113–118.

6. *Frank M., Wolfe Ph.* An algorithm for quadratic programming // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. Vol. 3, № 1-–2. P. 95–110.

7. *Левитин Е. С., Поляк Б. Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6, вып. 5. С. 787-–823.

УДК 517.5

NIKOLSKII CONSTANTS FOR SPHERICAL POLYNOMIALS[1]

F. Dai (Edmonton, Canada), D. Gorbachev (Tula, Russia), S. Tikhonov (Barcelona, Spain)

fdai@ualberta.ca, dvgmail@mail.ru, stikhonov@crm.cat

We study the asymptotic behavior of sharp Nikolskii constant

$$C(n,d,p,q) := \sup_{f\in\Pi_n^d,\ \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}=1} \|f\|_{L^q(\mathbb{S}^d)}$$

for $0 < p < q \le \infty$ as $n \to \infty$, where Π_n^d denotes the space of all spherical polynomials f of degree at most n on the unit sphere $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

1. *We prove that for* $0 < p < \infty$ *and* $q = \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(n,d,p,\infty)}{n^{d/p}} = \mathcal{L}(d,p,\infty),$$

and for $0 < p < q < \infty$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{C(n,d,p,q)}{n^{d\,(1/p-1/q)}} \ge \mathcal{L}(d,p,q),$$

where the constant $\mathcal{L}(d,p,q)$ *is defined for* $0 < p < q \le \infty$ *by*

$$\mathcal{L}(d,p,q) := \sup_{f\in\mathcal{E}_p^d,\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}=1} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},$$

with $\mathcal{E}_p^d$ *denoting the set of all entire functions* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *of spherical exponential type at most* 1.

These results extend the recent results of Levin and Lubinsky for trigonometric polynomials on the unit circle.

[1]F. D. was supported by NSERC Canada under the grant RGPIN 04702 Dai. D. G. was supported by the RFBR (no. 16-01-00308). S. T. was partially supported by MTM 2014-59174-P and 2014 SGR 289.