Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ "ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН"

Учебное пособие
для студентов механико-математического факультета

2013

УДК[517.984.54:530.1](075.8)

М.Ю. Игнатьев, С.Н. Кабанов, Ю.В. Курышова,
С.И. Поликарпов, А.Ю. Трынин

Сборник задач по курсу "Теория нелинейных волн": Учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. – Саратов 2013

Пособие содержит задачи по теории нелинейных волн, которые в каждом разделе снабжены минимально необходимым теоретическим материалом.

Для студентов механико-математического факультета, обучающихся по специальностям «Прикладная математика» и «Математика».

Рекомендуют к печати:
Кафедра математической физики и вычислительной математики
механико-математического факультета Саратовского государственного университета
Кандидат физ.- мат. наук, доцент *В.С. Рыхлов*
Саратовский государственный университет

УДК[517.984.54:530.1](075.8)

§1. Нелинейные эффекты и дисперсия волн

Дисперсия волн.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами допускают частные решения, которые (в случае одной пространственной переменной) имеют вид:

$$u_0(x,t) = A\exp[i(kx-\omega t)], \tag{1}$$

где A, k, ω - некоторые постоянные. Если дифференциальное уравнение описывает некоторый волновой процесс, то в частном решении (1) при вещественных k ω имеет ненулевую вещественную часть, если рассматриваемая система консервативна, т.е. процесс протекает без потерь энергии, то вещественным k соответствуют вещественные ω.

Параметры k, ω называются, соответственно, *волновым числом* и *частотой,* A - *(комплексной) амплитудой.* Волновое число и частота должны удовлетворять некоторому соотношению

$$G(\omega,k) = 0, \tag{2}$$

при выполнении которого (и только в этом случае) функция вида (1) является решением исходного дифференциального уравнения. Соотношение (2) называется *дисперсионным соотношением*. Дисперсионное соотношение распадается на некоторое конечное число уравнений вида

$$\omega = W_j(k), \tag{3}$$

каждое из которых (т.е. каждая из функций $W_j(k)$) называется *модой*.

Пусть $W(k)$ - некоторая фиксированная мода. Величина $c(k) := W(k)/k$ называется *фазовой скоростью,* $C(k) := W'(k)$ - *групповой скоростью*. Ясно, что решение (1) представляет собой бегущую волну, скорость которой равна фазовой скорости. Если $C(k) \neq const$, то говорят, что имеет место *дисперсия волн*.

Общее решение дифференциального уравнения можно (формально) записать в виде суперпозиции простейших решений (1), т.е.:

$$u(x,t) = \sum_j \int F_j(\kappa)\exp[i(\kappa x - W_j(\kappa)t)]d\kappa, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем модам. Постановка задачи Коши включает в себя, помимо уравнения, начальные условия, задающие решение и его производные по времени в начальный момент; количество начальных условий совпадает с количеством мод, тогда начальные условия позволяют найти функции $F_j(\kappa)$ в (4). Для обоснования изложенной схемы требуется для каждого конкретного уравнения указать класс K , в котором:

1) решение задачи Коши существует и единственно;
2) полна (в некотором смысле) система простейших решений (1).

Представление решения в виде (4) позволяет, используя метод стационарной фазы, получить асимптотику решения при $t \to +\infty$. В простейшем случае, когда распространяется одна мода $\omega = W(k)$ и $C(k)$ строго монотонна, асимптотика имеет вид

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2\pi}{t\,|W''(k)|}} F(k) \exp\left[i\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} W''(k) \right)\right](1 + O(t^{-1})), \tag{5}$$

где $k = k(x,t)$ - *локальное волновое число*, которое определяется как корень уравнения $C(k) = x/t$, $\omega = \omega(x,t) = W(k(x,t))$ - *локальная частота*, функция $A(x,t) := \sqrt{\frac{2\pi}{t\,|W''(k(x,t))|}} F(k) \exp\left(-i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} W''(k(x,t)) \right)$ называется *локальной амплитудой* (ср. (5) и (1)). Асимптотика (5) иллюстрирует физический смысл групповой скорости: в окрестности прямой $x = C(k)t$ решение ведет себя, как простейшее решение (1) с волновым числом k, т.е. "в волновом пакете каждое волновое число распространяется со своей групповой скоростью".

1. Найти дисперсионное соотношение, указать моды, найти для каждой из них фазовую и групповую скорости для:
a) линеаризованного уравнения Кортевега –де Фриза $u_t + u_{xxx} = 0$;
b) одномерного уравнения Шредингера $iu_t + u_{xx} = 0$;
c) уравнения колебаний балки $u_{tt} + \gamma^2 u_{xxxx} = 0$.
2. Найти асимптотику решения при $t \to \infty$ для уравнения $iu_t + u_{xx} = 0$.
3. Показать, что интегро-дифференциальное уравнение $u_t(x,t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - x') u_x(x',t) dx' = 0$ допускает частные решения вида (1). Выписать дисперсионное соотношение. При каком условии на функцию $K(x)$ уравнение описывает распространение волн без поглощения?
4. Распространение плоской волны на поверхности воды малой постоянной глубины h_0 описывается соотношениями, которые в линейном пределе принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, -h_0 < y < 0 \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \ y = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \ y = -h_0 \end{cases},$$

где y - вертикальная координата (глубина), x - горизонтальная координата в направлении распространения волны, $\varphi(x,y,t)$ - потенциал поля скоростей, g - ускорение свободного падения. При этом форма поверхности воды описывается функцией $u(x,t) = \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0,t)$. Показать, что существуют простейшие бегущие волны вида (1), выписать дисперсионное соотношение.

5. Для уравнения Клейна-Гордона $u_{tt} - u_{xx} + V'(u) = 0$ рассматриваются решения вида $u_0(x,t) = \psi(kx - \omega t)$, где $\psi(\theta)$ - 2π - периодическая функция. Предполагая, что функция $V(x)$ такова, что $V''(x) > 0\ \forall x, V \to \infty$ при $x \to \pm\infty$

a) получить дифференциальное уравнение на $\psi(\theta)$;
b) показать, что решение $u_0(x,t)$ рассматриваемого вида зависит, помимо параметров k,ω еще от некоторого параметра A (*амплитудный параметр*); причем осциллирует между значениями ψ_1, ψ_2, которые суть корни уравнения $V(\psi) = A$;
c) получить соотношение, которому должны удовлетворять параметры k,ω, A, чтобы $u_0(x,t)$ рассматриваемого вида была решением уравнения Клейна-Гордона (*нелинейное дисперсионное соотношение*).

Нелинейные эффекты.

К простейшим квазилинейным уравнениям приводят модели, включающие закон сохранения для некоторой величины, распределенной с плотностью $\rho(x,t)$ и распространение которой характеризуется потоком $q(x,t)$:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)dx + q(x_2,t) - q(x_1,t) = 0,\ \forall x_1, x_2 \tag{6}$$

и априорное функциональное соотношение между плотностью и потоком вида

$$q = Q(\rho). \tag{7}$$

Для непрерывно дифференцируемых (*классических*) решений системы (6), (7) закон сохранения (6) может быть переписан в дифференциальной форме

$$\rho_t + q_x = 0, \tag{8}$$

и система (6), (7) сводится к квазилинейному уравнению

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0, \tag{9}$$

где $c(\rho) = Q'(\rho)$.

Построение классического решения задачи Коши для уравнения (9) с начальным условием

$$\rho(x,0) = f(x) \tag{10}$$

используется метод характеристик. *Характеристиками* называются интегральные кривые ОДУ

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho). \tag{11}$$

В рассматриваемом случае уравнения (9) характеристики представляют собой прямые в (x,t)- плоскости, а решение вдоль характеристик постоянно. Профиль решения в произвольный момент времени $t > 0$ задается (как кривая в (x,ρ)- плоскости) параметрическим представлением:

$$\begin{cases} x = \xi + tF(\xi) \\ \rho = f(\xi) \end{cases}, \tag{12}$$

где $F(\xi) = c(f(\xi))$, ξ - параметр кривой. Построение решения с помощью (12) допускает простую геометрическую интерпретацию: профиль в момент времени t параллельным переносом каждой точки (x_0, ρ_0) начального профиля на расстояние $tc(\rho_0)$ параллельно оси x.

Профиль, описываемый (12), начиная с некоторого момента времени, может стать неоднозначным как функция x (т.н. явление "опрокидывания" волны), это означает, что классическое решение не существует. *Обобщенным решением* называется кусочно-непрерывная по x функция $\rho(x,t)$, удовлетворяющая системе (6), (7), т.е. вместо закона сохранения в дифференциальной форме (8) используется исходная интегральная форма (6). Обобщенное решение строится путем замены многозначных участков профиля (12) вертикальным разрывом; для определения положения разрывов используется т.н. *принцип равных площадей*: для отбрасываемого участка $[\xi_1, \xi_2]$ профиля (12) должно выполняться $\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \rho dx = 0$, геометрически это означает, что площадь фигуры, ограниченной профилем и осью x в результате введения разрыва не должна изменяться.

Описанный подход допускает обобщения. Например, решение задачи Коши для неоднородного квазилинейного уравнения

$$\rho_t + c(\rho, x, t) = b(\rho, x, t) \tag{13}$$

с помощью метода характеристик сводится к решению задачи Коши для системы ОДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = c(\rho, x, t) \\ \dfrac{d\rho}{dt} = b(\rho, x, t) \end{cases} \tag{14}$$

с начальными условиями

$$x(0) = \xi, \rho(0) = f(\xi), \tag{15}$$

из которой определяется одновременно характеристика $x = x(t)$, проходящая через точку $(\xi, 0)$ и решение $\rho = \rho(x(t), t)$ вдоль этой характеристики. Для полного построения решения нужно решить задачу (14), (15) для всех значений параметра ξ.

6. Показать, что уравнение (9) не имеет (классических) решений вида бегущей волны $\rho(x,t) = r(x - ct), c = const$.

7. Показать, что обобщенные решения вида бегущей волны существуют (предъявить явно).

8. Найти обобщенное решение задачи Коши для (6), (7) с $Q(\rho) = \rho^2 / 2$ при начальном условии

$$\rho(x,0)=\begin{cases}1-|x|, |x|<1\\ 0, |x|\geq 1\end{cases}.$$

9. То же при

$$\rho(x,0)=\begin{cases}1-|x+1|, x\in[-2;0]\\ 2-|x-2|, x\in[0;4]\\ 0 \text{ в остальных точках}\end{cases}.$$

10. То же при

$$\rho(x,0)=\begin{cases}2-|x+2|, x\in[-4;0]\\ 1-|x-1|, x\in[0;2]\\ 0 \text{ в остальных точках}\end{cases}.$$

11. То же при $Q(\rho)=\rho^3/3$,

$$\rho(x,0)=\begin{cases}1, |x|\leq 1\\ 0, |x|>0\end{cases}.$$

12. Показать, что $tf^{'}(x-t\rho)=1$ при $t=t_*$, $\rho=\rho(x_*,t_*)$.

13. Найти t_*, если $f(x)=a^2-x^2$, $a=const>0$.

14. Построить классическое решение задачи Коши

$$\begin{cases}\rho_t+\rho\rho_x+a\rho=0\\ \rho(x,0)=f(x)\end{cases},$$

где $a=const>0$. Определить, при каких значениях параметра a классическое решение существует при всех $t>0$ и при каких a происходит опрокидывание волны; в последнем случае найти время опрокидывания t_*.

Замечание. Задача моделирует распространение волны при наличии поглощения. Результат показывает, что поглощение, если оно достаточно велико, может предотвратить опрокидывание волны.

15. Для *уравнения Бюргерса*

$$\rho_t+\rho\rho_x-\nu\rho_{xx}=0,$$

где $\nu=const>0$ построить (гладкие) решения вида бегущей волны $r(x-ct)$, стремящееся при $x\to\pm\infty$ к конечным пределам $\rho^{\pm}$. Показать, что при $\nu\to+0$ построенные решения стремятся (поточечно при фиксированных x,t) к разрывным обобщенным решениям уравнения $\rho_t+\rho\rho_x=0$.

Замечание. Слагаемое, содержащее вторую пространственную производную в уравнении Бюргерса, отвечает за учет вязкости. Часто такое слагаемое вводят искусственно при численном нахождении обобщенных решений, его наличие предотвращает опрокидывание волн.

§2. Метод обратной задачи рассеяния для уравнения Кортевега-де Фриза.

Теория рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на оси.
На вещественной оси $-\infty < x < \infty$ рассмотрим *оператор Штурма-Лиувилля* $\ell y \equiv -y'' + q(x)y$ (1), где функция $q(x)$ (*потенциал*) предполагается вещественнозначной и удовлетворяющей условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|q(x)|\,dx < \infty$ (2).

Решения Йоста $e(x,\rho),\, g(x,\rho)$ определяются как решения уравнения

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y \equiv \rho^2 y, \tag{3}$$

нормированные асимптотиками:

$$e(x,\rho) = \exp(i\rho x)(1+o(1)),\, x \to +\infty; \quad g(x,\rho) = \exp(-i\rho x)(1+o(1)),\, x \to -\infty. \tag{4}$$

Решения Йоста определены и непрерывны по параметру ρ в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\rho \ge 0$ и аналитичны по параметру ρ в открытой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\rho > 0$. Для решений Йоста имеют место интегральные представления

$$e(x,p) = \exp(i\rho x) + \int\limits_x^{\infty} A^+(x,t)\exp(i\rho t)dt, \quad g(x,p) = \exp(-i\rho x) + \int\limits_{-\infty}^{x} A^-(x,t)\exp(-i\rho t)dt \tag{5}$$

Функции $A^{\pm}(x,t)$ называются *ядрами операторов преобразования*; существенно, что они не зависят от ρ.

При вещественных $\rho \ne 0$ каждая из пар функций $\{e(x,\rho), e(x,-\rho)\}, \{g(x,\rho), g(x,-\rho)\}$ образует фундаментальную систему решений уравнения (3), поэтому, в частности,

$$\begin{aligned} e(x,\rho) &= a(\rho)g(x,-\rho) + b(\rho)g(x,\rho), \\ g(x,\rho) &= c(\rho)e(x,\rho) + d(\rho)e(x,-\rho), \end{aligned} \tag{6}$$

причем известно, что $c(\rho) = -b(-\rho),\, d(\rho) = a(\rho)$. Коэффициенты $a(\rho), b(\rho)$ обладают целым рядом свойств, из которых выделим следующее представление (где $< y,z >:= yz' - y'z$ - вронскиан):

$$a(\rho) = \frac{1}{2i\rho} < g(x,\rho), e(x,\rho) >.$$

Из этого представления, в частности, следует, что коэффициент $a(\rho)$, изначально определенный соотношениями (6) для вещественных $\rho \ne 0$, допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\rho > 0$.

Коэффициентами отражения (правым и левым соответственно) называются функции $s^+(\rho) = \dfrac{-b(-\rho)}{a(\rho)},\, s^-(\rho) = \dfrac{b(\rho)}{a(\rho)}$.

Собственными значениями называются значения параметра λ, при которых уравнение (3) имеет решение из класса $L_2(-\infty,\infty)$. Известно, что множество собственных значений конечно (возможно, пусто) и совпадает с множеством всех чисел вида $\lambda = -\tau^2, \tau > 0$, где $\rho = i\tau$ - нуль коэффициента $a(\rho)$, при этом решения Йоста для таких ρ пропорциональны: $g(x,\rho) = Ce(x,\rho)$.

Пусть $\{\lambda_k = -\tau_k^2\}_{k=1}^N$ - множество всех собственных значений (это множество называется *дискретным спектром*). *Весовыми числами* называются величины

$$\alpha_k^+ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^2(x, i\tau_k) dx \right)^{-1}, \quad \alpha_k^- = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x, i\tau_k) dx \right)^{-1}.$$

Весовые числа можно также найти из соотношений:

$$\alpha_k^+ = \frac{C_k}{ia'(i\tau_k)}, \quad \alpha_k^- = \frac{1}{iC_k a'(i\tau_k)}, \tag{7}$$

где C_k - коэффициент пропорциональности в равенстве $g(x, i\tau_k) = C_k e(x, i\tau_k)$.

Данными рассеяния (соответственно правыми и левыми) называются наборы $J^+ = \{s^+(\rho), \rho \in (-\infty, \infty); \{\lambda_k, \alpha_k^+\}_{k=1}^N\}$ и $J^- = \{s^-(\rho), \rho \in (-\infty, \infty); \{\lambda_k, \alpha_k^-\}_{k=1}^N\}$.

Обратная задача рассеяния состоит в определении неизвестного потенциала $q(x)$ по заданным данным рассеяния J^+ или J^-.

Для решения обратной задачи рассеяния сначала при каждом фиксированном x решаются интегральные *уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко*:

$$F^+(x+y) + A^+(x,y) + \int_x^{\infty} A^+(x,\xi) F^+(\xi + y) d\xi = 0, y > x \tag{8+}$$

или

$$F^-(x+y) + A^-(x,y) + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,\xi) F^-(\xi + y) d\xi = 0, y < x \tag{8-}$$

относительно неизвестных ядер операторов преобразования $A^{\pm}(x,y)$, где функции $F^{\pm}(x)$ определяются по данным рассеяния:

$$F^{\pm}(x) = R^{\pm}(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^{\pm} \exp(\mp\tau_k x), \quad R^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^{\pm}(\rho) \exp(\pm i\rho x) d\rho, \tag{9}$$

после чего потенциал восстанавливается по явным формулам

$$q(x) = -2\frac{d}{dx} A^+(x,x) \text{ или } q(x) = 2\frac{d}{dx} A^-(x,x). \tag{10}$$

1. Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x) = -2\,\mathrm{ch}^{-2}\, x$.

a) Показать, что уравнение (3) имеет в данном случае частные решения вида $y(x,\rho) = \mathrm{e}^{i\rho x}(2\rho + ia(x))$ и найти эти решения;

b) Найти данные рассеяния.

2. Показать, что уравнение (3) с потенциалом $q(x) = -6\,\mathrm{ch}^{-2}\, x$ имеет частные решения вида $y(x,\rho) = \mathrm{e}^{i\rho x}(4\rho^2 + 2i\rho a(x) + b(x))$ и найти эти решения. Найти данные рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с указанным потенциалом.

3. Найти данные рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x)=\begin{cases}-2\operatorname{ch}^{-2}x,\ x\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$.

Потенциал называется *безотражательным*, если для него коэффициенты отражения $s^{\pm}(\rho)$ равны 0.

4. Решив обратную задачу рассеяния, построить безотражательный потенциал, дискретный спектр которого состоит из одного собственного значения $\lambda_1=-\tau^2$. Дать два явных выражения для потенциала – через параметры τ,α_1^+ и τ,α_1^-.

5. Построить безотражательный потенциал с двумя собственными значениями.

6. Восстановить потенциал по данным рассеяния: $s^+(\rho)=\dfrac{\rho+i}{\rho-i}\cdot\dfrac{1}{2\rho^2+1}$, $s^-(\rho)=-\dfrac{1}{2\rho^2+1}$, $N=1,\tau_1=i/\sqrt{2}$, $\alpha_1^+=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}},\alpha_1^-=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Решение уравнения КдФ с помощью МОЗР.

Основная идея метода обратной задачи рассеяния – связать с решением $u(x,t)$ уравнения КдФ $u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$ оператор Штурма-Лиувилля, потенциал которого (для каждого фиксированного момента времени t) есть $q(x)=u(x,t)$. Существенно, что при этом эволюция во времени данных рассеяния для такого оператора описывается простыми явными соотношениями:

$$s^{\pm}(\rho,t)=s^{\pm}(\rho,0)\exp(\pm 8i\rho^3 t),\ \tau_k(t)=\tau_k(0),\ \alpha_k^{\pm}(t)=\alpha_k^{\pm}(0)\exp(\pm 8\tau_k^3 t). \qquad (11)$$

Ключевыми звеньями при получении (11) служат *представление Лакса* для уравнения КдФ:

$\dot{L}=[A,L]$, где L - введенный выше оператор Штурма-Лиувилля, A - оператор $Ay=-4y'''+6uy'+3u_x y$, $[A,L]=AL-LA$, и вытекающая из представления Лакса

Лемма. Если y - решение уравнения $Ly=\lambda y$, то $z:=\dot{y}-Ay$ - решение того же уравнения (с той же λ).

С учетом (11) решение уравнения КдФ сводится к решению обратной задачи рассеяния, т.е., в конечном счете, к решению *линейных* уравнений (8±); потенциал, восстановленный по данным рассеяния (11) и будет решением уравнения КдФ при данном значении времени t.

Среди частных решений уравнения КдФ особый интерес представляют *солитонные* решения. Солитонными называются решения, которые при каждом фиксированном t являются безотражательными потенциалами, т.е. такие, для которых $s^{\pm}(\rho,t)\equiv 0$ (заметим, что, в силу (11), достаточно, чтобы $s^{\pm}(\rho,0)=0$).

7. Построить и исследовать солитонное решение с дискретным спектром, состоящим из одного собственного значения (*односолитонное* решение, или *солитон*). Показать, в частности, что солитон представляет собой бегущую волну $f(x-ct)$, причем при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to 0$. Дать два явных представления солитона – через параметры $\tau, \alpha^+ := \alpha_1^+(0)$ и $\tau, \alpha^- := \alpha_1^-(0)$.

8. Описать все решения уравнения КдФ вида бегущей волны $u(x,t) = f(x-ct)$. Показать, что все решения такого вида, для которых $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, являются солитонами, построенными в предыдущей задаче.

9. Описать все решения вида бегущей волны $u(x,t) = f(x-ct)$ для линеаризованного уравнения КдФ $u_t + u_0 u_x + u_{xxx} = 0, u_0 = const$. Показать, что решений такого вида, для которых $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ не существует.

10. Рассмотрим двухсолитонное решение, т.е. решение с двумя собственными значениями $\lambda_1 = -\tau_1^2, \lambda_2 = -\tau_2^2$. Пусть $\tau_2 > \tau_1$ и пусть $4\tau_1^2 < C < 4\tau_2^2$ - произвольная константа.

a) Показать, что при $t \to -\infty$ $F^-(x+y) = \alpha_2^- \exp(\tau_2(x+y)) + O(\mathrm{e}^{Bt}), y < x < Ct$, $F^+(x+y) = \alpha_1^+ \exp(-\tau_1(x+y)) + O(\mathrm{e}^{Bt}), y > x > Ct$ ($B > 0$ - некоторая постоянная). Т.е., говоря нестрого, уравнения ГЛМ (8-) и (8+) левее и правее прямой $x = Ct$ "близки" к уравнениям, отвечающим одиночным солитонам с с.з. $\lambda = -\tau_2^2$ и $\lambda = -\tau_1^2$ соответственно.

b) Показать, что при $t \to +\infty$ $F^-(x+y) = \alpha_1^- \exp(\tau_1(x+y)) + O(\mathrm{e}^{-Bt}), y < x < Ct$, $F^+(x+y) = \alpha_2^+ \exp(-\tau_2(x+y)) + O(\mathrm{e}^{-Bt}), y > x > Ct$.

c) Результаты пп.a), b) позволяют предположить (хотя и не доказывают!), что при $t \to \pm\infty$ двухсолитонное решение распадается в сумму $u_1^\pm(x,t) + u_2^\pm(x,t)$ двух одиночных солитонов вида $u_k^\pm(x,t) = -2\tau_k^2 \operatorname{ch}^{-2}[\tau(x - 4\tau_k^2 t - \eta_k^\pm)]$. Считая это предположение верным, найти фазовые сдвиги солитонов в результате взаимодействия, т.е величины $\eta_1^+ - \eta_1^-$ и $\eta_2^+ - \eta_2^-$.

d) Получить явное выражение для двухсолитонного решения. Используя это выражение, доказать справедливость утверждений п.c) (в частности, получить те же выражения для фазовых сдвигов).

11.Пусть решение $u(x,t)$ уравнения КдФ таково, что дискретный спектр соответствующего оператора Штурма-Лиувилля состоит из одного собственного значения $\lambda_1 = -\tau^2$, и пусть, кроме того, коэффициенты отражения $s^\pm(\rho,0)$ допускают аналитическое продолжение с вещественной оси в некоторую полосу $|\operatorname{Im}\rho < \delta|$ с сохранением асимптотики $s^\pm(\rho,0) = o(\rho^{-1}), \rho \to \infty$. Пусть $C > 0$ - произвольная постоянная.

a) Показать, что при $t \to -\infty$ $F^-(x+y) = \alpha_1^- \exp(\tau(x+y)) + O(\mathrm{e}^{Bt}), y < x < Ct$, $F^+(x+y) = R^+(x+y) + O(\mathrm{e}^{Bt}), y > x > Ct$.

b) При $t \to +\infty$ $F^{+}(x+y) = \alpha_1^{+} \exp(-\tau(x+y)) + O(\mathrm{e}^{-Bt}), y > x > Ct$, $F^{-}(x+y) = R^{-}(x+y) + O(\mathrm{e}^{-Bt}), y < x < Ct$.

c) Исходя из результатов пп. a), b) предположим, что при больших временах решение распадается на одиночный солитон, соответствующий с.з. $\lambda_1 = -\tau^2$, и "излучательную" часть (фон). Получить выражение $\eta^{+} - \eta^{-} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-|s^{\pm}(\mu,0)|^2)}{\mu^2+\tau^2} d\mu$ для сдвига фазы солитона в результате взаимодействия с фоном.

§3. МОЗР для некоторых других уравнений

Теория рассеяния для системы Захарова-Шабата.

Система Захарова-Шабата – это система ОДУ следующего вида

$$\begin{cases} y_1' = i\rho y_1 + q(x) y_2 \\ y_2' = -i\rho y_2 + r(x) y_1 \end{cases}. \tag{1}$$

Пару функций $q(x), r(x)$ называют *потенциалом*, будем предполагать, что они достаточно быстро стремятся к 0 при $x \to \pm\infty$ (для справедливости большинства излагаемых ниже результатов достаточно суммируемости).

Решения Йоста $\psi(x,\rho), \tilde{\psi}(x,\rho); \varphi(x,\rho), \tilde{\varphi}(x,\rho)$ определяются как решения системы (1), нормированные асимптотиками

$$\psi(x,\rho) = \mathrm{e}^{i\rho x}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + o(1)\right), \tilde{\psi}(x,\rho) = \mathrm{e}^{-i\rho x}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + o(1)\right), \quad x \to +\infty, \tag{2+}$$

$$\varphi(x,\rho) = \mathrm{e}^{-i\rho x}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + o(1)\right), \tilde{\varphi}(x,\rho) = \mathrm{e}^{i\rho x}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + o(1)\right), \quad x \to -\infty. \tag{2-}$$

Известно, что решения Йоста $\psi(x,\rho), \varphi(x,\rho)$ (соотв. $\tilde{\psi}(x,\rho)$, $\tilde{\varphi}(x,\rho)$) определены и непрерывны по параметру ρ в замкнутой верхней (соотв. нижней) полуплоскости и аналитичны в открытой верхней (соотв. открытой нижней) полуплоскости параметра ρ. При $\rho \to \infty$ в соответствующих полуплоскостях для решений Йоста справедливы асимптотики того же вида, что и в (2+), (2-).

При вещественных ρ каждая из пар функций $\psi(x,\rho), \tilde{\psi}(x,\rho)$ и $\tilde{\varphi}(x,\rho), \varphi(x,\rho)$ образует ФСР. *Коэффициенты перехода* определяются при вещественных ρ равенствами:

$$\varphi(x,\rho) = a(\rho)\tilde{\psi}(x,\rho) + b(\rho)\psi(x,\rho), \tag{3}$$

$$\tilde{\varphi}(x,\rho) = \tilde{a}(\rho)\psi(x,\rho) + \tilde{b}(\rho)\tilde{\psi}(x,\rho). \tag{3'}$$

Коэффициенты $a, \tilde{a}$ допускают представления через вронскианы:

$$a(\rho) = \langle \psi(x,\rho), \varphi(x,\rho) \rangle, \quad \tilde{a}(\rho) = \langle \tilde{\varphi}(x,\rho), \tilde{\psi}(x,\rho) \rangle, \tag{4}$$

которые дают аналитическое продолжение коэффициентов $a(\rho)$ и $\tilde{a}(\rho)$ в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно.

(*Правые*) *коэффициенты отражения* определяются равенствами

$$s(\rho) = \frac{b(\rho)}{a(\rho)}, \tilde{s}(\rho) = \frac{\tilde{b}(\rho)}{\tilde{a}(\rho)}. \tag{5}$$

Дискретный спектр определяется как множество, состоящее из всех нулей $\{\rho_k\}_{k=1}^{N}$ коэффициента $a(\rho)$ и всех нулей $\{\tilde{\rho}_k\}_{k=1}^{\tilde{N}}$. Всюду далее предполагается, что все эти нули простые и невещественные. Элементы дискретного спектра также будем называть *собственными значениями*.

Нормировочные числа определяются как $\gamma_k := \dfrac{C_k}{a'(\rho_k)}$, где C_k - коэффициент пропорциональности в равенстве $\varphi(x,\rho_k) = C_k\psi(x,\rho_k)$, $\tilde{\gamma}_k := \dfrac{\tilde{C}_k}{\tilde{a}'(\tilde{\rho}_k)}$, $\tilde{\varphi}(x,\tilde{\rho}_k) = \tilde{C}_k\tilde{\psi}(x,\tilde{\rho}_k)$.

Совокупность $\{s(\rho), \tilde{s}(\rho), \rho \in (-\infty,\infty); \rho_k, \gamma_k, k = \overline{1,N}; \tilde{\rho}_k, \tilde{\gamma}_k, k = \overline{1,\tilde{N}}\}$ образует (*правые*) *данные рассеяния*.

Для решения обратной задачи рассеяния, состоящей в восстановлении неизвестного потенциала $\{q(x), r(x)\}$ по заданным данным рассеяния, может использоваться аналог метода Гельфанда-Левитана-Марченко либо метод, основанный на использовании идей метода контурного интеграла. Последний приводит к следующим соотношениям:

$$\exp(i\rho x)\tilde{\psi}(x,\rho) =$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k}{\rho-\rho_k}\exp(i\rho_k x)\psi(x,\rho_k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\mu)}{\mu-\rho+i0}\exp(i\mu x)\psi(x,\mu)d\mu, \tag{6}$$

$$\exp(i\tilde{\rho}_n x)\tilde{\psi}(x,\tilde{\rho}_n) =$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_k}{\tilde{\rho}_n-\rho_k}\exp(i\rho_k x)\psi(x,\rho_k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\mu)}{\mu-\tilde{\rho}_n}\exp(i\mu x)\psi(x,\mu)d\mu, \tag{7}$$

$\rho \in (-\infty,+\infty), n = \overline{1,\tilde{N}}$,

где $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\mu)}{\mu-\rho+i0}d\mu$ понимается как предельное значение интеграла типа Коши $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\mu)}{\mu-\rho+i\varepsilon}d\mu$ при $\varepsilon \to +0$ (этот предел выражается через сингулярный интеграл по формуле Сохоцкого). В общем случае, когда функции $q(x)$ и $r(x)$ независимы, соотношений (6), (7) недостаточно для решения обратной задачи. Однако, в приложениях рассматриваемой теории рассеяния к интегрированию нелинейных уравнений, между функциями $q(x)$ и $r(x)$ всегда имеются некоторые априорные связи (*редукции*), которые приводят к связям между величинами "с волной" (т.е. $\tilde{\psi}(x,\rho), \tilde{\rho}_k$ и т.д.) и аналогичными величинами "без волны" (т.е. $\psi(x,\rho), \rho_k$ и т.д.). В результате система (6)-(7) превращается в замкнутую систему (линейных!) уравнений относительно неизвестных $\psi(x,\rho), \rho \in (-\infty,\infty), \psi(x,\rho_k), k = \overline{1,N}$; после их определения потенциал восстанавливается по явным формулам:

$$q(x) = -2i\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\exp(i\rho_k x)\psi_1(x,\rho_k) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\mu)\exp(i\mu x)\psi_1(x,\mu)d\mu, \tag{8}$$

$$\int_x^\infty r(\xi)q(\xi)d\xi = 2i\sum_{k=1}^N \gamma_k \exp(i\rho_k x)\psi_2(x,\rho_k) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty s(\mu)\exp(i\mu x)\psi_2(x,\mu)d\mu\,. \qquad (9)$$

1. Получить уравнения (6), (7). Для этого:

a) Из асимптотик для решений Йоста получить асимптотику $a(\rho)=1+o(1)$, при $\rho\to\infty$, $\operatorname{Im}\rho\ge 0$;

b) Используя асимптотики для решений Йоста показать, что при $R\to+\infty$ $\int\limits_{C^-(R)}\left(\exp(i\mu x)\tilde{\psi}(x,\mu)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\frac{d\mu}{\mu-\rho}\to 0$, где $C^-(R)$ - полуокружность в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\mu<0$ с центром в 0 радиуса R, $\rho:\operatorname{Im}\rho<0$ - фиксировано;

c) При $R\to+\infty$ $\int\limits_{C^+(R)}\left(\frac{1}{a(\mu)}\exp(i\mu x)\varphi(x,\mu)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\frac{d\mu}{\mu-\rho}\to 0$, $C^+(R)$ - полуокружность в верхней полуплоскости;

d) С помощью теории вычетов подсчитать интегралы $\int\limits_{\Gamma^+(R)}\left(\frac{\exp(i\mu x)}{a(\mu)}\varphi(x,\mu)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\frac{d\mu}{\mu-\rho}$ и $\int\limits_{\Gamma^-(R)}\left(\exp(i\mu x)\tilde{\psi}(x,\mu)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\frac{d\mu}{\mu-\rho}$, где $\Gamma^\pm(R)$ - замкнутые контуры, состоящие из отрезка $[-R;R]$ и полуокружностей $C^\pm(R)$. Результаты выразить через данные рассеяния ρ_k,γ_k и значения функций $\psi,\tilde{\psi}$;

e) Переписав (3) в виде

$$\left(\frac{\exp(i\mu x)}{a(\mu)}\varphi(x,\mu)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\mu-\rho}=$$

$$\left(\exp(i\mu x)\tilde{\psi}(x,\mu)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\frac{1}{\mu-\rho}+\frac{s(\mu)\exp(i\mu x)}{\mu-\rho}\psi(x,\mu)$$

$\rho:\operatorname{Im}\rho<0$ - фиксировано, интегрируя это равенство по $d\mu$ по вещественной оси и используя результаты пп. b)-d), получить равенство

$$\exp(i\rho x)\tilde{\psi}(x,\rho)=$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\sum_{k=1}^N\frac{\gamma_k}{\rho-\rho_k}\exp(i\rho_k x)\psi(x,\rho_k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty\frac{s(\mu)}{\mu-\rho}\exp(i\mu x)\psi(x,\mu)d\mu,$$

из которого, полагая $\rho=\tilde{\rho}_n$ и $\operatorname{Im}\rho\to -0$, получаются (7) и (6) соответственно.

2. Пусть $r(x)=\eta\overline{q(x)}$, $\eta=\pm 1$.

a) Показать, что, если $y(x,\rho)=\begin{bmatrix} y_1(x,\rho) \\ y_2(x,\rho) \end{bmatrix}$ - решение системы (1), то

$\hat{y}(x,\rho)=\begin{bmatrix} \eta\overline{y_2(x,\overline{\rho})} \\ \overline{y_1(x,\overline{\rho})} \end{bmatrix}$ - также решение системы (1);

b) Выразить $\tilde{\psi}(x,\rho),\tilde{a}(\rho),\tilde{\rho}_k$ через аналогичные величины "без волны";

c) Переписать, с помощью результатов п.b), соотношения (6), (7) в виде замкнутой системы.

3. То же для редукции $r(x)=\eta q(x)$.

4. Пусть $r(x)=-q(x)$ и $q(x)$ - вещественнозначная функция. Показать:

a) Дискретный спектр состоит из чисто мнимых чисел и пар чисел $\rho_k^{\pm}=\pm\sigma_k+i\tau_k$, расположенных симметрично относительно мнимой оси;

b) Для чисто мнимых собственных значений соответствующие нормировочные константы вещественны;

c) Для пар собственных значений $\rho_k^{\pm}=\pm\sigma_k+i\tau_k$ имеем $\gamma_k^{-}=-\overline{\gamma_k^{+}}$.

5. Пусть $r(x)=-q(x)$ и $q(x)$ - вещественнозначная функция. Построить безотражательный потенциал (т.е. такой, что $s(\rho)\equiv 0$) с $N=1,\rho_1=i\tau,\gamma_1=\gamma$.

6. То же для дискретного спектра из двух собственных значений $\rho^{\pm}=\pm\sigma+i\tau$.

7. То же для дискретного спектра из двух чисто мнимых собственных значений.

МОЗР, использующий задачу рассеяния Захарова-Шабата.

Пусть рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных допускает представление следующего вида (*представление нулевой кривизны*):

$$U_t-V_x+[U,V]=0, \tag{10}$$

где U,V - матрицы вида $U=\begin{bmatrix} i\rho & q \\ r & -i\rho \end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}$, функции $q=q(x,t),r=r(x,t),A=A(x,t,\rho),B=B(x,t,\rho),C=C(x,t,\rho)$ выражаются определенным образом через искомую функцию нелинейного уравнения. Пусть, кроме того, из краевых условий на $x=\pm\infty$, при которых рассматривается нелинейное уравнение, следует, что при $x\to\pm\infty$ $q,r,B,C\to 0$, а $A(x,t,\rho)\to\hat{A}(\rho)$ достаточно быстро (например, в смысле Шварца).

Пусть $s(\rho,t),\{\rho_k(t),\gamma_k(t)\}$ - данные рассеяния для системы Захарова-Шабата $y_x=Uy$ (матрица U та же, что в представлении нулевой кривизны). Тогда их эволюция во времени t дается равенствами:

$$s(\rho,t)=s(\rho,0)\exp(2\hat{A}(\rho)t),\ \rho_k(t)\equiv\rho_k(0),\ \gamma_k(t)=\gamma_k(0)\exp(2\hat{A}(\rho_k)t). \tag{11}$$

Иерархию АКНС (=Абловиц, Кауп, Ньюэлл, Сигур) образуют уравнения, которые получаются из системы вида

$$\begin{bmatrix} r \\ -q \end{bmatrix}_t + iW(-2L)\begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} = 0, \qquad (12)$$

где $W(k)$ - некоторая (скалярная) функция, L - операторная матрица вида

$$L = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} -\dfrac{d}{dx} - 2rJ^+q & 2rJ^+r \\ -2qJ^+q & \dfrac{d}{dx} + 2qJ^+r \end{bmatrix},$$

J^+ - оператор интегрирования $J^+ f(x) := \int\limits_x^{+\infty} f(x')dx'$. Здесь символы r, q следует понимать как операторы умножения на соответствующие функции, произведения операторов – как композицию, т.е., напр. $2rJ^+r$ - скалярный оператор, отображающий функцию $f(x)$ в функцию $2r(x)\int\limits_x^{+\infty} r(x')f(x')dx'$. Если r выражается линейно через искомую функцию исходного нелинейного уравнения, то функция $W(k)$ - та же, что в дисперсионном соотношении $\omega = W(k)$ линеаризованного уравнения.

К уравнениям иерархии АКНС применима описанная выше схема МОЗР, т.е. они допускают представления нулевой кривизны с матрицами указанного вида, причем $\hat{A}(\rho) = \dfrac{i}{2}W(-2\rho)$.

8. Получить из (12) *нелинейное уравнение Шредингера с притяжением* $iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0$.

9. (Продолжение) Предъявить в явном виде представление нулевой кривизны.

10. Получить из (12) *модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза* (мКдФ) $u_t + 6\eta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad \eta = \pm 1$. Найти эволюцию во времени данных рассеяния соответствующей системы Захарова-Шабата.

11. Для *уравнения синус-Гордон* $u_{xt} = \sin u$ получить представление нулевой кривизны, предварительно получив уравнение из (12).

12. То же для *уравнения* sh-*Гордон* $u_{xt} = \operatorname{sh} u$.

Как и в случае уравнения КдФ, под солитонными решениями понимаются решения, для которых $s(\rho, t) \equiv 0$.

13. Построить односолитонное решение для уравнения мКдФ с $\eta = 1$.

14. То же для уравнения синус-Гордон. Показать, что в зависимости от знака $\operatorname{Im}\gamma_1(0)$ существуют два типа солитонов (*кинк* и *антикинк*), стремящиеся к 0 на $-\infty$ и, соответственно, на $+\infty$, и к 2π на другом конце прямой.

15. Для уравнения синус-Гордон построить двухсолитонное решение, соответствующее паре собственных значений $\rho^{\pm} = \pm\sigma + i\tau, \sigma^2 + \tau^2 = 1/4$ (*бризер*).

16. Для уравнения синус-Гордон построить двухсолитонное решение, соответствующее паре чисто мнимых собственных значений $\rho_1 = i\tau_1, \rho_2 = i\tau_2$ с противоположными знаками $\operatorname{Im}\gamma_k(0)$ (*кинк-антикинковое решение*).

17. В решении, построенном в предыдущей задаче, перейти к пределу при $\tau_1 \to \tau_2 = \tau$. Проверить, что полученное выражение является решением уравнения синус-Гордон, исследовать полученное решение.

18. Переписать и исследовать поведение решений, построенных в задачах 14-17, в *лабораторных координатах* $X = x + t, T = x - t$ (теперь они – решения уравнения $u_{TT} - u_{XX} + \sin u = 0$).

Указания, ответы

§1

2. Ответ: $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\dfrac{ix^2}{4t} - i\dfrac{\pi}{4}\right) F\left(\dfrac{x}{2t}\right)(1 + O(t^{-1}))$.

4. Функции $u(x,t)$ вида (1) соответствуют решениям системы вида $\varphi(x,y,t) = Y(y)\exp[i(kx - \omega t]$. Ответ: $\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kh_0)$.

7. $\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_1, x < x_0 + c_0 t \\ \rho_2, x > x_0 + c_0 t \end{cases}, \rho_k = const, c_0 = \dfrac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$.

8. Классическое решение существует до момента времени $t_* = 1$ и представляет собой треугольник с неподвижным основанием и вершиной, движущейся со скоростью 1. При $t = t_*$ возникает разрыв, который движется далее по закону $s(t) = \sqrt{2t}$.

10. При $t = 1$ возникают два разрыва, при $t = 2 + \sqrt{5}$ разрывы сливаются.

11. Профиль (12) ограничен параболами $x = \rho^2, x = \rho^2 + 1$ и прямыми $\rho = 0, \rho = 1$.

14. При $a > -\max\limits_{\xi: f'(\xi) < 0} |f'(\xi)|$ опрокидывания не происходит.

15. Ответ: $r(x) = \rho_2 + \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{1 + \exp\left(\dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2}\dfrac{x}{\nu}\right)}, \quad c_0 = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

§2

1. $s^{\pm}(\rho) = 0, N = 1, \lambda_1 = -1, \alpha_1^+ = 2, \alpha_1^- = 2$.

2. $s^{\pm}(\rho) = 0, N = 2, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4, \alpha_1^+ = 6, \alpha_1^- = 6, \alpha_2^+ = 12, \alpha_2^- = 12$.

3. $s^+(\rho) = \dfrac{\rho + i}{\rho - i}\cdot\dfrac{1}{2\rho^2+1}$, $s^-(\rho) = -\dfrac{1}{2\rho^2+1}$, $N=1, \tau_1 = i/\sqrt{2}$,

$\alpha_1^+ = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \alpha_1^- = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. $q(x) = -2\tau^2\,\mathrm{ch}[\tau(x-\eta^-)], \eta^- = -\dfrac{1}{2\tau}\ln\dfrac{\alpha_1^-}{2\tau} = -2\tau^2\,\mathrm{ch}[\tau(x-\eta^+)], \eta^+ = \dfrac{1}{2\tau}\ln\dfrac{\alpha_1^+}{2\tau}$.

5. Ядра интегральных уравнений (8+), (8-) – вырожденные, их решения следует искать в виде $A^\pm(x,y) = B_1^\pm(x)\exp(\mp\tau_1 x) + B_2^\pm(x)\exp(\mp\tau_2 x)$. На $B_{1,2}^\pm$ тогда получатся системы линейных алгебраических уравнений. О т в е т :

$$q(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Delta,\ \Delta = \begin{vmatrix} 1+\dfrac{\alpha_1^+}{2\tau_1}\mathrm{e}^{-\tau_1 x} & \dfrac{\alpha_1^+}{\tau_1+\tau_2}\mathrm{e}^{-(\tau_1+\tau_2)x} \\ \dfrac{\alpha_2^+}{\tau_1+\tau_2}\mathrm{e}^{-(\tau_1+\tau_2)x} & 1+\dfrac{\alpha_2^+}{2\tau_2}\mathrm{e}^{-\tau_2 x} \end{vmatrix}$$

6. О т в е т : потенциал из задачи 3.
7. Воспользоваться результатом задачи 4.
10. Воспользоваться результатом задачи 5.
11. Воспользоваться "*дисперсионным соотношением*":

$$a(\rho) = \prod_{k=1}^{N}\frac{\rho - i\tau_k}{\rho + i\tau_k}\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-|s^\pm(\mu)|^2)}{\mu-\rho}\,d\mu\right)$$

§3

5.-7. $q(x) = -2i\sum_{n=1}^{N} z_n$, $z_n = \gamma_n \exp(i\rho_n x)\psi_1(x,\rho_n)$ определяются из СЛАУ

$$z_n = \gamma_n\exp(2i\rho_n x) + \sum_{m=1}^{N} d_{nm} z_m, \qquad d_{nm} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\gamma_n\bar{\gamma}_k\exp[2i(\rho_n-\bar{\rho}_k)x]}{(\rho_n-\bar{\rho}_k)(\rho_m-\bar{\rho}_k)}.$$

8. Линеаризованное уравнение есть $iu_t + u_{xx} = 0$, откуда $W(k) = k^2$ и (12) принимает вид $\begin{bmatrix} r \\ -q\end{bmatrix}_t + i(2L)^2\begin{bmatrix} r \\ q\end{bmatrix} = 0$. Имеем (где выражение вида $J^+(f)$ обозначает действие оператора J^+ на функцию f):

$2iL\begin{bmatrix} r \\ q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x - 2rJ^+(qr) + 2rJ^+(rq) \\ -2qJ^+(qr) + q_x + 2qJ^+(qr)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x \\ q_x\end{bmatrix}$. Аналогично получается

$i(2L)^2\begin{bmatrix} r \\ q\end{bmatrix} = 2L\begin{bmatrix} -r_x \\ q_x\end{bmatrix} = \dfrac{1}{i}\begin{bmatrix} r_{xx} + 2rJ^+(q_x r + rq_x) \\ q_{xx} + 2qJ^+(q_x r + rq_x)\end{bmatrix} = \dfrac{1}{i}\begin{bmatrix} r_{xx} - 2r^2 q \\ q_{xx} - 2q^2 r\end{bmatrix}$ и (12) сводится к системе: $\begin{cases} r_t - i(r_{xx} - 2r^2 q) = 0 \\ r_t - i(q_{xx} - 2q^2 r) = 0 \end{cases}$. Если положить $r = u, q = -\bar{u}$ каждое из уравнений примет вид $iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0$.

9. Имеем $\hat{A}(\rho) = 2i\rho^2$, матрицу V с элементами, представленными в виде $A(x,t,\rho) = 2i\rho^2 + A_1(x,t)\rho + A_0(x,t)$, $B(x,t,\rho) = B_1(x,t)\rho + B_0(x,t)$, $B(x,t,\rho) = C_1(x,t)\rho + C_0(x,t)$, подставить в (10) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях ρ.

11. Линеаризованное уравнение $u_{xt} = u$ дает $W(k) = k^{-1}$, (12) принимает вид системы $\begin{cases} \begin{bmatrix} r \\ -q \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \\ 2iL\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} \end{cases}$ (*). После введения редукции $r = -q$ вторая пара уравнений сводится к $qy_2' = y_2 y_2' - 4qy_2 J^+(qy_2)$, или $\begin{cases} -z' = \left(\dfrac{y_2^2}{2} + 2z^2 \right)' \\ z' = -qy_2 \end{cases}$, что будет выполняться, если выбрать $y_2 = \frac{1}{2}\sin u, 2z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos u, q = \frac{1}{2}u_x$; тогда первые два уравнения в (*) принимают вид $-u_{xt} + \sin u = 0$. Далее, $\hat{A}(\rho) = \dfrac{1}{4i\rho}$, коэффициенты матрицы V естественно искать в виде $A(x,t,\rho) = \dfrac{a(x,t)}{4i\rho}$, $B(x,t,\rho) = \dfrac{b(x,t)}{4i\rho}$, $C(x,t,\rho) = \dfrac{c(x,t)}{4i\rho}$

13– 17. Воспользоваться результатами задач 5-7.

Литература

1. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М., "Мир", 1977.
2. G. Freiling, V. Yurko. Inverse spectral problems for second-order differential operators, part 3. SM-DU-465, Duisburg, 2000.
3. Дж. Лэм мл. Введение в теорию солитонов.
4. Захаров, Новиков, Манаков, Питаевский.
5. М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи.